Rapport sur les liens entre Mathématiques et Neurosciences

Présenté à l'Académie des sciences par Alain Berthoz

Avec la contribution de Daniel Andler, Daniel Bennequin, Jacques Droulez, Olivier Faugeras, Giuseppe Longo, Stéphane Mallat, Jean Petitot.

Introduction

Le but de ce rapport est de présenter brièvement la façon dont ces dernières décades les mathématiques se sont impliquées de plus en plus fortement dans les neurosciences intégratives et cognitives et, réciproquement, comment les progrès dans ces disciplines sont en train d'enrichir les conceptions classiques de l'origine, des fondements et de la nature des mathématiques.

Les mathématiques organisent les connaissances et les « objets » mêmes de nombreux savoirs ; toutefois, avant d'entrer dans des arguments techniques, faisons la remarque préliminaire que le statut de la modélisation mathématique n'est en général pas la même en physique et en biologie.

En physique, microphysique ou astrophysique en particulier, des grandes quantités de données sont rassemblées, des signaux émis par les instruments de mesure ou des événements observés une seule fois dans l'espace, mais ces données sont très peu organisées. Les mathématiques permettent de construire des théories explicatives de grande puissance, des sortes de modèles « globaux », qui unifient tous ces symptômes éparpillés dans un cadre unitaire, et en proposent des principes constitutifs. Dans ces disciplines, le modèle mathématique est habituellement *beaucoup plus riche et structuré* que les phénomènes observés. De plus, il « constitue » les objets de la connaissance: les électrons, les muons, les quarks ... ne sont pas « déjà là », mais sont le résultat d'un « découpage » mathématique du champ phénoménal. On isole des phénomènes, on leur donne un sens, grâce aux mathématiques, en proposant des entités individuelles (des invariants) et une organisation globale.

La situation est différente dans les sciences du vivant, et donc pour la composante des sciences cognitives qui en font partie. L'individu vivant, de la cellule au mammifère, s'impose par son unité, sa structure et son organisation, la richesse de ses fonctions. Tout modèle mathématique ne saisit que quelques aspects de cette unité : en général, il est *nettement plus pauvre et moins structuré* que l'objet d'étude ; tout découpage mathématique, jusqu'à présent, casse l'unité de l'individu et de l'écosystème.

Janvier 2003

Par ailleurs, contrairement à ce qui se passe en physique où grâce aux équations fondamentales, les modèles sont en eux-même des théories (par exemple le modèle de Newton est une théorie de la gravitation universelle), en biologie les nombreux modèles ne deviennent pas des théories et les rares grandes théories dans les sciences du vivant (l'évolution de Darwin, la physiologie de Claude Bernard, les théories sélectives du système immunitaire et des structures neuronales de Edelman et de Changeux) contiennent très peu de mathématiques. Même les plus récentes de ces théories, des apports très important aux neurosciences, ont des difficultés à trouver leur cadre mathématique : un défi à relever.

Ceci n'empêche pas évidemment que de nombreux résultats à l'interface des sciences du vivant et des mathématiques aient été obtenus : quant aux systèmes sélectifs, par exemple, les systèmes dynamiques co-évolutifs sont des premières tentatives de « mathématiser » certains aspects des théories correspondantes. On citera, dans la première partie bien d'autres retombées remarquables de ce langage cohérent et expressif. Elles iront de la conception de réseaux dynamiques pour simuler la plasticité cérébrale à l'analyse fine du mouvement et de ses régularités pour développer une robotique qui approche la ductilité animale, pour ne mentionner que deux aspects très bien établis. Des techniques mathématiques remarquables sont alors utilisées: la physique statistique et la géométrie des systèmes dynamiques pour simuler les réseaux de neurones, les équations différentielles non-linéaires et leurs méthodes numériques pour décrire et reproduire la complexité de l'action et du mouvement, etc..

Tout cela a été un apport massif de compétences qui n'a fait qu'enrichir l'interface mathématiques/sciences du vivant. Ces savoirs mathématiques, pour la plupart nés et développés en physique, sont une valeur ajoutée de grand intérêt : leur développement doit être au cœur de tout projet scientifique dans le domaine. On en parlera longuement, tout en mentionnant aussi d'autres applications de ce genre de savoirs.

D'autre part, les mathématiques ont souvent été les protagonistes de vrais tournants scientifiques et ont ressenti ou contribué à des changements de vision philosophique, tout en se constituant autour de leurs domaines d'application. Il en a été ainsi quand le calcul infinitésimal a permis de traiter la notion de « champ » (gravitationnel) : les mathématiques ont alors unifié deux phénomènes apparemment très différents à l'époque, deux *ontologies* différentes, le sub-lunaire et le supra-lunaire. De même, la géométrie intrinsèque des surfaces courbes (Gauss, Riemann) démarre un nouveau tournant, la géométrisation de la physique qui marquera le XX^{e} siècle. Encore une fois, de nouvelles mathématiques sont conçues autour de la physique en posant explicitement le problème d'un nouveau fondement de la connaissance mathématique. Riemann, en particulier, développe, en parallèle avec sa « philosophie naturelle », une analyse fondationnelle des mathématiques de très grand intérêt (on y reviendra).

Dans les rapports des mathématiques aux sciences du vivant et de la cognition, nous sommes face à la possibilité d'un tournant comparable. Les neurosciences y sont au centre. Les enjeux sont si importants et originaux, qu'il faut s'attendre à des changements de paradigme de grande envergure. On ne peut pas se contenter de transférer les outils bien établis de la physique mathématique et les appliquer tels quels: ce transfert n'est qu'un aspect de tout projet entre neurosciences et mathématiques (il faut « entrer en cuisine » avec les outils que l'on a, pour arriver, à terme, à en inventer des nouveaux). Mais il faut en même temps développer une réflexion qui permette de questionner les outils mathématiques qui sont utilisés ainsi que de mettre en discussion, de façon radicale, les acquis de l'analyse fondationnelle habituelle, dans le but d'enraciner les mathématiques dans ces autres formes de connaissance.

Pour cette raison, ce rapport est composé de deux parties. Dans la première, les succès et les projets basés sur des secteurs profonds et bien établis des mathématiques seront brièvement résumés. La liste est loin d'être complète, mais elle souligne la richesse des applications et des outils employés.

La deuxième partie a un caractère plus exploratoire et essaye de renverser ce paradigme : on va plutôt des sciences cognitives, et en particulier des neurosciences intégratives, vers les problèmes fondationnels des mathématiques. On pose le problème de savoir quelle nouvelle compréhension des mathématiques nous offrent les neurosciences et, à terme, quels nouveaux outils mathématiques cette compréhension nous offre pour les neurosciences.

Première partie

Dans cette partie du rapport, on regroupe quelques informations sur les mathématiques utilisées actuellement en neurosciences cognitives.

Il faut d'abord distinguer les outils mathématiques utilisés dans la réalisation des protocoles expérimentaux et l'exploitation (dépouillement) des données d'une part et les domaines mathématiques dans lesquels s'inscrivent les principales théories ou modèles explicatifs d'autre part.

Pour le premier aspect, on trouve les outils de base : géométrie euclidienne 2D et 3D, probabilités et outils statistiques, transformée de Fourier, etc.

Pour le second aspect, les « emprunts » aux domaines mathématiques sont beaucoup plus divers et dépendent en grande partie du niveau et de l'échelle auxquels les théories se placent : équations différentielles non linéaires (modèles de neurone), équations aux dérivées partielles (traitement d'images, vision, contrôle, apprentissage), théorie des attracteurs et des oscillateurs couplés (assemblées neuronales), mécanique statistique (verres de spin, réseaux de neurones), algèbre linéaire : matrices, tenseurs, quaternions (changement de coordonnées, référentiels), théorie des graphes (modèles anatomo-fonctionnels d'activation cérébrale), topologie et géométrie computationnelle (maillage, lissage, segmentation), théories de l'information et de la décision : information de Fischer, information mutuelle, estimateurs optimaux (Kalman), vraisemblance, inférence bayesienne, codage par population, etc.

Nous donnons dans ce qui suit quelques exemples (tout à fait non exhaustifs) de l'usage de mathématiques non trivial dans un certain nombre de modèles.

1. LES ÉQUATIONS DE L'INFLUX NERVEUX

Les équations différentielles non-linéaires interviennent dès les niveaux les plus primitifs des neurosciences avec les équations de l'influx nerveux. Elles ont été introduites par Hodgkin et Huxley sous la forme $C\dot{V} = -f(V) + I$ où V est le potentiel de membrane de l'axone, C la capacité de la membrane par unité de surface, $C\dot{V}$ le courant entrant et $f(V)$ la somme des courants ioniques : $f(V) = \sum I_i = \sum \tilde{g}_i(V_i - V)$ avec $\tilde{g}_i = g_i f_i(V)$, les g_i étant les conductances maximales par unité de surface des canaux ioniques et les $f_i(V)$ des fonctions de variables d'activation ou d'inactivation, lentes ou rapides, décrivant ces canaux ioniques.

Par exemple pour l'axone géant du calmar, les canaux Sodium et Potassium sont donnés par $\tilde{g}_{Na} = m^3 h g_{Na}$, $\tilde{g}_K = n^4 g_K$ avec pour la dynamique des équations du type $\dot{m} = \frac{m_\infty(V) - m}{\tau_m(V)}$ où $m_\infty(V)$ et $\tau_m(V)$ sont des quotients de termes linéaires et de termes exponentiels en V.

Une forme simplifiée, très utilisée, des équations de Hodgkin-Huxley correspond aux équations de Fitzhugh-Nagumo $\dot{V} = -f(V) - U + I$ et $\tau\dot{U} = aV - U$ où U est le courant d'inactivation correspondant à g_K.

À cause des différentes échelles de temps intervenant, ces systèmes sont des systèmes lents / rapides, la variété lente étant définie par l'équation $\dot{V} = 0$. Le cas le plus étudié est celui où la variété lente est une fronce cubique, ce qui donne des cycles d'hystérésis avec une fréquence « lente ». Une bifurcation de Hopf pour le point d'équilibre de la dynamique rapide (qui varie lentement, adiabatiquement, sur la fronce) engendre une fréquence « rapide » supplémentaire (« bursting neurons »).

De nombreux mathématiciens et physiciens se sont intéressés à ces systèmes dont Christopher Zeeman avait déjà donné une analyse qualitative au début des années 70 (voir par exemple les travaux de C. Meunier, D. Hansel ou Pakdaman).

2. Ondelettes et géométrie du signal optique

Un problème central qui apparaît en Neurosciences est celui de la représentation de l'information. C'est évidemment important pour la perception, que ce soit des signaux audio, images ou d'autres sens, mais c'est également important pour les problèmes d'apprentissage qui peuvent être vus comme des problèmes d'interpolation dans des espaces de très grande dimension.

De ce point de vue, l'analyse harmonique (ondelettes, Fourier et diverses bases) peuvent jouer un rôle important, mais un autre domaine des maths qui aura probablement de plus en plus d'impact pour ce type d'applications est la géométrie. Il y a là de très beaux problèmes à l'interface de la géométrie et de l'analyse pour comprendre comment utiliser aux mieux les structures des données dans ces espaces multidimensionnels afin de réduire la mémoire et la complexité des calculs. Un domaine des mathématiques qui pose explicitement le problème de la performance de représentations de fonctions est la théorie de l'approximation, dont l'un des débouchés est la théorie de l'information de Kolmogorov.

Un exemple typique d'analyse en ondelettes a été découvert à la fin des années 80 par le spécialiste de la vision David Marr. Les cellules ganglionnaires de la rétine (dont les axones constituent le nerf optique) ont un profil récepteur du type laplacien de gaussienne. Elles opèrent comme des filtres par convolution du signal optique avec de tels profils et cela à plusieurs échelles différentes. Il s'agit donc bien d'une implémentation biologique d'un algorithme de type ondelettes. Au moyen d'un critère dit de « zero-crossing », David Marr a montré que cette représentation permet d'extraire du signal les discontinuités qui y sont encodées et d'expliquer comment la perception peut être, dès ses plus bas niveaux, à la fois une analyse du signal et une construction de formes géométriques.

3. Géometrie et dynamique des champs récepteurs

Des résultats expérimentaux montrent que d'autres neurones visuels que les cellules ganglionnaires, par exemple les cellules simples de la première aire du cortex visuel (aire V1) ont des champs récepteurs dont les profils récepteurs (les fonctions de transfert) sont des dérivées partielles de gaussiennes. Ces neurones agissant comme des filtres par convolution de leur profil récepteur avec le signal permettent de faire opérer des opérateurs différentiels multi-échelle sur des inputs très bruités.

Ces résultats sont importants car les outils de la géométrie différentielle ne sont pas directement applicables au signal en tant que tel, leur application constituant un problème mal posé.

Si l'on tient compte de la dynamique des champs récepteurs induite par la plasticité synaptique rapide, on trouve des profils récepteurs allant jusqu'à des dérivées d'ordre 4. À cela s'ajoutent les événements synaptiques sous-liminaires dont la prise en compte conduit à raffiner la notion de champ récepteur (cf. les travaux d'Y. Frégnac et de J. Lorenceau qui ont montré que les champs récepteurs sont des champs dynamiques d'intégration plus compliqués que le champ de décharge minimal).

4. RÉSEAUX DE NEURONES

Sous sa forme la plus simple, un réseau de neurones formels consiste en la donnée de N unités u_i dont l'état d'activation y_i varie dans un certain espace d'états S. Les cas les plus utilisés sont $S = \{0, 1\}$, $\{-1, 1\}$, $[0, 1]$. Un état global instantané du réseau est donc décrit par le vecteur $\boldsymbol{y} = (y_i)$, avec i variant de 1 à N de l'espace de configurations $M = S^N$. Les unités u_i sont connectées entre elles par des connexions de poids synaptique w_{ij}. Les $w_{ij} > 0$ correspondent à des connexions excitatrices et les $w_{ij} < 0$ à des connexions inhibitrices. On a en général $w_{ij} = 0$.

Les u_i fonctionnent comme des automates à seuil. u_i reçoit des signaux afférents venant de ses neurones présynaptiques, « calcule » (i.e. change d'état interne en fonction d'une loi de transition) et envoie un signal efférent à ses neurones postsynaptiques. L'input de u_i est la somme pondérée des signaux afférents : $h_i = \sum_{j=1}^{j=N} w_{ij} y_j$ et la dynamique de l'état interne est donnée par une loi de transition du type : $y_i(t+1) = g(h_i(t) - T_i)$ où T_i est un seuil et g une fonction gain (par exemple : g = fonction de Heaviside si $S = \{0, 1\}$, g = fonction signe si $S = \{-1, 1\}$, g = sigmoïde = $1/(1+e^{-x})$ si $S = [0, 1]$). La dynamique globale du réseau s'obtient en agrégeant les lois de transition locales et en les itérant. Dans la limite d'un temps continu, on obtient des grands systèmes d'EDO du type $\dot{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{y} + g(\boldsymbol{wy} - \boldsymbol{T})$. Dans la limite d'un continuum spatial on obtient des EDP du type :

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -y(x,t) + g\left(\int (w(x,z)y(z,t) - T(x))dz\right).$$

Sous l'hypothèse d'un feed-back complet (bouclage des entrées sur les sorties) ce sont les états asymptotiques du système (ses attracteurs) qui sont significatifs.

Les dynamiques sont en général complexes. Dans le cas (irréaliste sur le plan neurobiologique) où les connexions sont symétriques, Hopfield a remarqué que, pour $S = \{-1,+1\}$ et g = fonction signe, les équations du réseau sont celles des verres de spins. L'énergie présente un nombre considérable de minima relatifs locaux et pour accéder aux minima absolus globaux il faut utiliser des algorithmes de physique statistique comme ceux du recuit simulé.

Lorsque les poids synaptiques deviennent asymétriques, il n'existe plus de fonction énergie. S. Renals et R. Rohwer ont considéré des systèmes $\dot{y}=-y+g(r(wy))$ où r est la pente de la sigmoïde. Ils ont étudié les bifurcations présentées par le comportement des états d'activité y_i lorsque r varie et ont retrouvé ainsi de nombreux scénarios classiques de route vers le chaos et en particulier, pour $r \in [12, 14]$, la route par doublement de période (cascade sous-harmonique de Coullet-Feigenbaum-Tresser). H. Sompolinsky, M. Samuelides et B. Tirozzi ont aussi étudié de tels systèmes lorsque N devient très grand et lorsque les poids synaptiques w_{ij} (asymétriques) sont des variables aléatoires (par exemple gaussiennes) de moyenne nulle et de variance w^2/N. Pour une certaine valeur critique, ils présentent une transition de phase et bifurquent vers un régime chaotique. Samuelides a en particulier étudié les routes vers le chaos dans le cas où les systèmes sont dilués (presque tous les $w_{ij} = 0$), où il existe des seuils T_i et où les variables aléatoires w_{ij} ne sont plus centrées.

5. GÉOMETRIE DE L'ARCHITECTURE FONCTIONNELLE DU CORTEX VISUEL (CAS DE V1)

La modélisation des groupes de neurones conduit naturellement à l'utilisation de grands systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO's) et d'EDP.

L'architecture fonctionnelle d'une aire comme l'aire V1 impose de fortes contraintes à ces équations différentielles. Les neurones simples de V1 détectent essentiellement des couples (a,p) d'une position rétinienne a et d'une orientation p en a. À travers l'organisation en colonnes et hypercolonnes d'orientation de V1, à chaque position rétinienne a se trouve associé de façon rétinotopique un exemplaire (discrétisé) de la droite projective P des orientations p du plan, d'où une implémentation neuronale de la fibration étinien R et pour fibre P. Mais une telle structure purement « verticale » ne suffit pas. Pour qu'il y ait cohérence globale, il faut pouvoir comparer des fibres rétinotopiquement voisines. Cela se trouve réalisé à travers les connexions « horizontales » cortico-corticales qui relient des cellules de même orientation dans des hypercolonnes éloignées et définissent un transport parallèle.

La structure de V1 est une structure en « pinwheels » étudiée entre autres par Blasdel, Grinvald et Bonh.ffer. Des expériences comme celles de W. Bosking montrent que la structure de contact naturelle de la fibration émentée. Cela explique le problème de l'intégration des contours, c'est-à-dire de la reconstruction et de la complétion de contours globaux à partir de leur représentation distribuée dans V1. En effet, l'équivalent discret de la structure de contact correspond exactement au mécanisme de liage proposé par les psychophysiciens Field, Hayes et Hess sous le nom de champ d'association. Les connexions horizontales implémentent ce schéma local d'association en créant un renforcement mutuel de l'activité des neurones détectant les éléments d'un même contour et en synchronisant leur décharge.

6. Réseaux de neurones, problèmes inverses et statistique

Les outils statistiques comme l'analyse en composantes principales ou indépendantes, les méthodes de Monte-Carlo, les champs Gaussiens, les méthodes variationnelles, etc. jouent un grand rôle dans l'utilisation des réseaux de neurones. Les systèmes dynamiques représentent aussi une manière de résoudre certaines EDP's et de se ramener à un système dynamique et, éventuellement à un réseau de neurones (cf. The Weighted Particle Method for Convection-Diffusion Equations de P. Degond et S. Mac-Gallic).

En neurosciences de nombreux problèmes peuvent être exprimés comme des problèmes inverses mal posés et instables, en présence de bruit complexe. Contrôler la performance des estimateurs devient alors essentiel. L'intérêt des Neurosciences est aussi de nous sortir des cadres plus classiques des problèmes inverses linéaires en présence de bruits Gaussiens. On a là des problèmes non-linéaires difficiles qui demandent de pousser les outils mathématiques existants.

6. Traitement d'images et EDP

Les EDPs ont donné lieu à de nombreuses applications en traitement d'images.

Une des méthodes les plus efficaces pour analyser une image représentée par une fonction intensité $I(x,y)$ est la méthode du « scale-space filtering » (D. Marr, A. Witkin, J. Koenderink). Elle consiste à plonger $I(x,y)$ dans une famille $I_S(x,y)$ $s \in [0,1]$ telle que :
(i) $I_0 = I$;
(ii) I_S se simplifie strictement lorsque l'échelle s augmente; et
(iii) I_1 soit une forme indifférenciée.

La façon la plus simple de construire de telles familles est de prendre pour I_S une solution d'une équation de diffusion de type chaleur $\partial I_s/\partial s = I$ (Gaussian blurring) (s est le paramètre d'échelle et non pas le temps).

L'inconvénient est toutefois qu'une telle équation fait aussi diffuser les contours qui sont essentiels à la segmentation des images. D'où l'idée d'utiliser des EDP de diffusion non linéaires qui ne font pas diffuser les contours. Tout un ensemble d'équations de diffusion ont ainsi été envisagées pour l'analyse morphologique d'images.

L'information géométrique est concentrée dans les *singularités* du signal ainsi géométriquement formaté (bords, coins, jonctions en T, etc.). Pour être morphologiquement correcte, une analyse d'images doit donc utiliser des algorithmes de géométrie différentielle multi-échelle qui préservent les singularités. C'est à cela que servent les équations de diffusion non linéaires. On peut rendre ce type d'analyse *adaptatif* en partant d'une analyse multi-échelle standard et en adaptant localement l'échelle à la structure des données.

La première idée (Malik et Perona, 1990) a été de modifier la diffusion au voisinage des bords. Cela a conduit à des équations du type $\frac{\partial I_s}{\partial s} = div\left(g(\nabla I_s)\nabla I_s\right)$ où g est une fonction > 0

décroissante t.q. $g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$. Si l'on veut éviter toute diffusion des bords, on peut considérer avec P-L. Lions, J-M. Morel et L. Alvarez, l'équation de diffusion $\frac{\partial I_s}{\partial s} = \frac{\partial^2 I_s}{\partial \xi^2}$ où ξ est une coordonnée normale au gradient, i.e. tangente à la ligne de niveau au point considéré. Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial I_s}{\partial s} = |\nabla I_s| div\left(\frac{\nabla I_s}{|\nabla I_s|}\right) = \Delta I_s - \frac{H(\nabla I_s, \nabla I_s)}{|\nabla I_s|^2}$$

où H est le Hessien de I_S. Elle est uniformément parabolique le long des courbes de niveau mais totalement dégénérée dans la direction du gradient. Elle fait évoluer les lignes de niveau — et donc en particulier les bords — comme des fronts avec une vitesse normale égale à leur courbure. On aboutit ainsi aux processus de « curve shortening », « flow by curvature » ou « heat flow on isometric immersions » bien connu des géomètres (M. Gage, R. Hamilton, M. Grayson, S. Osher, J. Sethian, L.C. Evans et J. Spruck).

7. TRAITEMENT D'IMAGE ET MODÈLES VARIATIONNELS

Les modèles de traitement d'image faisant intervenir des équations de diffusion anisotropes sont proches des modèles variationnels de segmentation, cette relation généralisant celle qui fait de l'équation de la chaleur la descente de gradient associée à la fonctionnelle $E(u) = \frac{1}{2}\int_W |\nabla u|^2 dx$.

Comme y insiste Jean-Michel Morel, la plupart des modèles de segmentation minimisent une même énergie de segmentation définie à la fin des années 80 par David Mumford. Soit $I(x, y)$ l'image définie sur une fenêtre W. On veut minimiser une fonctionnelle « énergie » $E(u, K)$ où K est une segmentation de W partitionnant W en domaines ouverts W_i (les composantes connexes de W–K) et u une approximation de I qui est régulière sur les W_i tout en pouvant présenter des discontinuités le long de K. Ces modèles variationnels peuvent être interprétés comme des modèles probabilistes à partir de l'équivalence $E(u, K) = -\mathrm{Log}(p(u, K))$, p étant une probabilité définie sur l'espace des segmentations. L'énergie comprend 3 termes : un terme qui mesure la variation de u sur les composantes connexes W_i de W–K et contrôle sa différentiabilité; un terme qui contrôle l'approximation de u par I ; un terme qui contrôle la longueur et la parcimonie des bords (pour éviter l'hyper segmentation) :

$$E(u,K) = \int_{W-K} |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_W (u-I)^2 dx + \mu \int_K dH^1$$

La minimisation du premier terme force u à être la plus constante possible sur les domaines W_i ; celle du deuxième terme force u à rester proche de I ; celle du troisième terme force les bords à être peu nombreux et les plus réguliers possible.

Mumford a résolu le problème sous l'hypothèse que les approximations u sont localement constantes : la fonctionnelle $E(, K)$ possède des minima dont les bords K sont C^1 par morceaux, de courbure bornée par $8\mathrm{osc}(I)^2$ et ne possède comme seules singularités que des points triples symétriques d'angles $2W$ de W. Pour des approximations C^∞ quelconques, le problème n'est pas encore résolu. La conjecture de Mumford dit que, dans ce cas, la situation est la même mais avec un type supplémentaire de points singuliers (dit « cracktips ») qui sont des points d'arrêts de *K*. Cette conjecture difficile qui relève de la classe des « free boundary problems » n'est pas encore résolue. De nombreux travaux lui ont été consacrés, par l'école d'Ennio De Giorgi (Luigi Ambrosio, Gianni Dal Maso, Sergio Solimini, Antonio Leaci, Massimo Gobbino, Franco Tomarelli, Alessandro Sarti, Giovanna Citti, etc.), et aussi par Jean-Michel Morel, Alexis Bonnet et Guy David.

7. RÉSEAUX D'OSCILLATEURS, BINDING ET LABELING HYPOTHESIS

Un des problèmes centraux posés par les modèles des processus de codage neuronal des représentations mentales est celui de la *constituance*, c'est-à-dire de la décomposition d'une représentation complexe en composants reliés par des relations. C'est le « binding problem ». L'une des hypothèses les plus discutées ces dernières années postule que le binding est réalisé par la synchronisation de réponses neurales oscillatoires aux stimuli : chaque constituant correspondrait à une population de neurones synchronisés et des différences de phases pourraient alors coder les différents constituants.

Cette hypothèse ouvre un vaste champ d'applications en sciences cognitives pour la théorie mathématique des réseaux d'oscillateurs faiblement couplés (techniques de dynamique qualitative, de physique statistique et de groupe de renormalisation). On montre d'abord que des colonnes corticales peuvent fonctionner comme des oscillateurs élémentaires (équations de Wilson-Cowan) par bifurcation de Hopf de leur dynamique lorsque l'intensité du stimulus dépasse un certain seuil.

Le modèle le plus simple est celui de réseaux constitués d'un grand nombre N d'oscillateurs F_i dont la fréquence propre ω_i dépend de l'intensité du stimulus à la position i. Soient θ_i leurs phases et $\varphi_i = \theta_{i+1} - \theta_i$ leurs différences de phases. Les équations du système sont du type $\dot{\theta}_i = \omega_i - \sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)$ où les K_{ij} sont des constantes de couplage. Ce sont des systèmes typiquement complexes que l'on peut étudier avec des méthodes de physique statistique (travaux de Kuramoto, Daido, etc.) et de dynamique qualitative (travaux d'Ermentrout et Kopell, etc.).

Dans le cas d'une seule constante de couplage et d'une totale connectivité, Y. Kuramoto (1987) a analysé en détail le système $\dot{\theta}_i = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{j=N} \sin(\theta_i - \theta_j)$ (une seule constante de couplage et graphe de connexion du réseau complet) en introduisant le paramètre d'ordre qu'est la phase moyenne $Z(t) = |Z(t)| e^{i\theta_0(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=N} e^{i\theta_j(t)}$ et en étudiant le système équivalent $\dot{\theta}_i = \omega_i - K|Z| \sin(\theta_i - \theta_0)$. Si les fréquences ω_i sont tirées au hasard suivant une loi $g(\omega)$ représentant les régularités statistiques de l'environnement (en prenant un repère tournant on peut supposer g centrée sur 0), la synchronisation globale est une *transition de phase* s'effectuant pour la valeur critique $K_C = 2/g(0)$ de la constante de couplage.

Si les connexions entre oscillateurs sont restreintes à des voisinages (connexions locales) alors il faut utiliser des méthodes relevant du groupe de renormalisation.

On peut par ailleurs améliorer considérablement la vitesse de synchronisation en utilisant des oscillateurs plus complexes comme les « pulse oscillators » ainsi que les attracteurs de « bursting neurons » (cf. les travaux de Heinz Schuster et Francisco Varela).

8. IMAGERIE

Les EDPs sont aussi présentes dès que l'on regarde les potentiels évoqués et qu'on mesure l'activité magnétique du cerveau par Magnéto-encéphalographie (MEG) et l'électroencéphalographie (EEG) en se situant donc à un niveau de modélisation plus global, celui des activités collectives de populations de neurones filtrées par les tissus du cerveau et du crâne.

9. AUTRES DÉVELOPPEMENTS ET APPLICATIONS

Pour favoriser des développements utiles à la fois pour les neurosciences et les sciences cognitives, il faut avant tout une meilleure formation et de meilleurs échanges entre mathématiciens et chercheurs en neurosciences ; les résultats obtenus dans chacune de ces deux disciplines sont en général très mal connus de l'autre. Le simple accès aux travaux publiés est extrêmement difficile, entre autres en raison de difficultés terminologiques et méthodologiques. Outre une meilleure connaissance des travaux déjà réalisés, on peut espérer une application assez rapide des recherches dans les domaines suivants :

(1) théorie de l'information et probabilités : ceci est justifié par l'omniprésence de ces théories et des outils qui en découlent aussi bien pour l'exploitation des données (par exemple : en imagerie fonctionnelle) que dans le cadre de la modélisation (du neurone au comportement individuel ou collectif);

(2) algorithmique théorique : pour mieux comprendre les capacités computationnelles et représentationnelles globales de systèmes complexes comme le cerveau, des avancées dans les domaines du calcul parallèle, de la stabilité des algorithmes et les liens avec la théorie de l'information (algorithmique statistique) seraient évidemment très utiles;

(3) théorie des systèmes dynamiques : l'existence de plusieurs échelles de temps entremêlées (de la milliseconde pour les évènements synaptiques à la journée ou plus pour les processus adaptatifs), sans que l'on puisse définir de frontières nettes entre elles, constitue une des difficultés majeures de la modélisation en psycho-physiologie;

(4) topologie algébrique et géométrie computationnelle : certains outils sont déjà utilisés dans le traitement des données d'imagerie fonctionnelle (par exemple : lissage d'une fonction sur un maillage 3D) ou en vision par ordinateur ; des développements dans ces domaines pourraient permettre également de mieux formaliser les problèmes liés à la perception des objets (par ex. : fusion d'indices versus segmentation de formes individualisées) ou aider la modélisation des contraintes d'action (surfaces de contact dans la préhension, encombrement et évitement d'obstacles en navigation).

10. ÉLÉMENTS DE PROSPECTIVE

Au niveau de la prospective ont peut aussi se demander quels sont les problèmes rencontrés en neurosciences et en sciences cognitives susceptibles de conduire à des développements mathématiques nouveaux.

(1) Systèmes dynamiques. On peut espérer beaucoup plus de théorèmes liant la forme et les caractéristiques des réseaux de neurones à la dynamique attendue (théorèmes étendant ceux de Hirsh pour les attracteurs). Trop de systèmes sont mis dans l'ordinateur sans effort pour être globalement compris. On risque de se retrouver avec des cartes immenses des projections neuronales et des dynamiques chimiques sans plans compréhensibles.

La multiplicité des échelles de longueur et de temps qu'on rencontre dans le cerveau réclame des théories dynamiques originales qui, en éclairant des points de biologie ou d'étude du comportement, devraient aussi enrichir les mathématiques, par exemple :

- Dynamique des expressions génétiques (des très lentes aux très rapides) ;
- Dynamique des processus biochimiques (neurotransmetteurs, rétroactions, calcium, LTD, LTP, Cam KII , PKC, phosphorilations) ;
- Dynamique des différents rythmes, oscillations, etc. depuis les cellules (neurones, glie, etc.) jusqu'aux ensembles et aux réseaux, y compris la plasticité ;
- Modulation par la dynamique des flux de neurotransmetteurs (systèmes cholinergiques, etc.).

(2) Neuronique statistique. Une des questions centrales (déjà mentionnée) en neurosciences est celle de l'articulation entre les différents niveaux d'analyse et les différentes échelles spatio-temporelles. Par analogie avec la mécanique statistique (déjà évoquée), on pourrait proposer l'appellation de « neuronique statistique » pour l'étude de la dynamique de populations d'agents (eux-mêmes constitués de systèmes dynamiques) échangeant des informations partielles et/ou bruitées. Il s'agirait par exemple de formaliser l'articulation entre théorie de l'information et théorie des systèmes dynamiques distribués.

(3) Réduction dimensionnelle. Dans le domaine de la planification des actions et du contrôle sensori-moteur, on rencontre également toute une série de problèmes tels que, par exemple, celui de la gestion des contraintes ou de la réduction du nombre de dimensions. L'espace des actions possibles est de très grande dimension, il est en même temps contraint à la fois par les lois physiques et la structure de l'environnement et par les capacités de contrôle. Comment peut-on définir dans ce cadre des méthodes de décomposition en sous-espaces de dimension réduite facilitant ou garantissant la stabilité du contrôle, améliorant ou simplifiant l'apprentissage et le développement de stratégies motrices ?

(4) Processus discrets / continus. Enfin, il existe de très nombreux exemples, en neurophysiologie ou en psychophysique, où se manifeste une forme ou une autre de compétition entre des processus discrets et des processus continus. Cela se manifeste par exemple au niveau des cellules neuronales dans la dynamique de libération de paquets de neurotransmetteurs ou de l'émission de potentiels d'action, au niveau de populations de cellules, par l'apparition de comportements collectifs multi-stables (oscillation,

synchronisation, attracteurs distribués), au niveau comportemental par des phénomènes de bascule rapide entre deux états perceptifs ou encore par l'état d'hésitation entre deux décisions possibles. Il est possible que ces différents phénomènes soient sans rapport entre eux. Peut-être peut-on cependant espérer qu'à partir de l'un ou l'autre de ces exemples il soit possible de développer de nouvelles recherches à la frontière entre algorithmique théorique et étude des systèmes dynamiques.

11. MODÈLES LOGICOSYMBOLIQUES ET ALGORITHMIQUES

Dans les exemples qui précèdent les modèles sont d'un type physico-mathématique analogue à celui que l'on rencontre dans les autres sciences naturelles. Mais dès que les neurosciences visent véritablement les sciences cognitives, alors les modèles logico-symboliques deviennent incontournables.

On peut citer dans cette perspective quelques autres directions qui peuvent s'avérer fructueuses :

(1) Logique et raisonnement : quelles que soient les limites reconnues de la logique classique, et prédites par certains aux logiques non classiques actuellement mises au point par les logiciens (philosophes, mathématiciens, informaticiens), il est impossible d'imaginer une approche du raisonnement, et plus généralement des processus cognitifs, qui fasse entièrement l'impasse sur la logique, entendue comme recherche de modèles formels de l'inférence. C'est un secteur très dynamique sur le plan international, et quelques chercheurs en France cherchent à créer un noyau solide en France (quelques jeunes normaliens absolument first-rate sont impliqués).

(2) Logique et informatique fondamentale : au-delà des théories classiques de la récursivité et de la complexité, l'isomorphisme de Curry-Howard, en permettant de considérer des programmes informatiques comme des preuves formelles, est à l'origine du développement de nouveaux langages informatique et plus généralement d'une compréhension nouvelle des bases de l'informatique; il se trouve que la France est en pointe sur ce créneau : Jean-Louis Krivine à Paris 7 et Jean-Yves Girard (créateur de la logique linéaire, maintenant à Marseille), avec leurs équipes et disciples, sont dans le peloton mondial.

(3) Théorie abstraite de l'information : Il s'agit de la tradition de la Situation Theory, créée par Jon Barwise et John Perry, poursuivie par David Israel, John Etchemendy [CSLI de Stanford : Center for the Study of Language and Information] et d'autres.

(4) Sémantique et pragmatique formelles : approches logiques, approches dynamiques.

(5) Intelligence, connaissance, planification distribuées : théorie et applications à l'intelligence artificielle distribuée et à la cognition naturelle (paradigme de la « cognition in the wild » de Ed Hutchins); applications au Web, au data mining, à la cryptographie (Jacques Stern, directeur du Département d'informatique à l'ENS, est un spécialiste reconnu de cryptographie après avoir été un logicien pur de très haut niveau).

(6) théories de la rationalité, théories des jeux : applications à l'économie, à la psychologie sociale, à la théorie de l'évolution.

(7) théories de l'apprentissage : approches formelles (paradigme de la convergence à la limite de Gold) et approches probabilistes (paradigme PAC, Valiant et al.). Théorie de la viabilité d'Aubin. Théorie mathématique générale de l'apprentissage.

12. VERS DES MODÈLES INTÉGRÉS

Mais le plus important, pour les mathématiques, comme pour la neurobiologie, devrait venir d'un développement plus radicalement nouveau et moins facile à anticiper. En effet, le cerveau fonctionne nous l'avons vu à plusieurs niveaux, du plus dynamique et concret au plus abstrait, mettant en jeu des structures (connues ou encore inconnues) de Géométrie et d'Algèbre, comme celles de variété, de topologie algébrique, de théorie des groupes, de codes, etc., toutes ces structures pouvant receler des interactions nouvelles avec les statistiques.

Des équipes à venir devraient rassembler des neurobiologistes avec des mathématiciens d'origines variées, pures ou appliquées, du roboticien à l'algébriste. Par exemple pour étudier des « invariants topologiques imparfaits » pourraient coopérer des neurobiologistes, des géomètres et des statisticiens.

La recherche sur le cerveau se préoccupe de plus en plus des questions de perception, de connaissance et de conscience. Il apparaît que ces systèmes mettent en jeu des mécanismes qui débordent du système des sensations, du mouvement et de la régulation. En face de formes multiples de codages (synchronisation rapide, nœuds dynamiques, réentrée, attracteurs, etc.) on découvre l'activation de réseaux pour l'anticipation, la prévision, l'hésitation. Les instruments de topologie et de géométrie algébrique permettront sans doute d'organiser, au-delà de la diversité des codes rencontrés, une grande partie des observations dans ce domaine et de poser de nouvelles questions. Il s'agit, en gros, de définir un analogue de la « cohomologie évanescente des singularités isolées » et de ses connexions plates, pour expliquer le rapport entre les images et notions réactivées et les données sensorimotrices actuelles.

Les idées d'ambiguïté galoisienne et de construction homologique ont une portée très vaste en mathématique, comme l'avaient deviné Galois et Riemann ou plus près de nous Grothendieck. On peut penser que ces idées donneront des structures précises adaptées à ces problèmes de neurosciences.

Deuxième partie

L’espace du vivant et les neurosciences

Comme dans ces deux grands moments du passé brièvement cité dans l’introduction (Newton — le calcul infinitésimal, Riemann — géométrisation de la physique), il faut utiliser la plasticité même des mathématiques pour les redessiner ou en dessiner des parties nouvelles, autour des nouveaux enjeux. Le projet ne devrait toutefois pas se limiter à la seule proposition de nouvelles structures mathématiques, pour ces nouveaux buts, mais aussi encourager une réflexion fondationnelle qui aide et accompagne des vrais changements/enrichissements des cadres conceptuels des mathématiques. En mathématiques, il y a des « concepts » qui précèdent la structuration rigoureuse: le concept d’infini (potentiel et actuel), de temps, d’espace physique, même de preuve (une pratique du « voir pour comprendre » avant qu'elle ne devienne une notion rigoureuse des métamathématiques modernes) sont restés longtemps dans le « flou » du débat philosophique. Le pari est qu’une nouvelle réflexion fondationnelle, tout en prenant comme point de départ le travail extraordinaire fait sur les fondements des mathématiques au cours du XX^e siècle, puisse revitaliser les rapports des mathématiques à la structuration du monde du vivant, à partir de l’organisation des concepts clés de mathématiques.

Par exemple, l’espace et le temps biologique ne sont pas ceux de la physique (et en physique il y au moins trois théories mathématiques du temps : temps des calculs séquentiels, systèmes dynamiques ou de type critique, temps relativiste). Comment façonner, dans le dialogue avec le biologiste, le physiologiste, des nouveaux concepts qui puissent, un jour, devenir une (nouvelle) structure mathématique ?

On peut pas se contenter de proposer seulement l’espace cartésien ou riemannien, avec leur continu à la Cantor-Dedekind, et encore moins l’espace et le temps saccadés et séquentiels des machines de Turing... L’espace et le temps phénoménal sont autre chose chez le vivant ; le continu des points en tant que nombres réels n’a pas de sens dans ce cas ou il peut seulement donner d’excellentes approximations, empruntées à la physique-mathématique.

Comment donc aborder cet objectif difficile : l’analyse des fondements cognitifs de nos théories de l’espace et du temps ? La démarche est audacieuse, car elle essaye de relier directement des structures mathématiques très complexes (les régularités sous-jacent les variétés riemanniennes par exemple) à des structures biologiques. Les grands fondateurs des mathématiques peuvent nous guider dans cette esquisse.

D’Euclide à Poincaré et Einstein

Il est important d’analyser dans les temps modernes, la façon dont Poincaré (Poincaré, 1932; Poincaré, 1970) traite des fondements de la géométrie. Dans Science et Méthode (p 97 et suivantes - Flammarion 1930) Poincaré fait une véritable réhabilitation du rôle du corps et de l’action dans l'origine de la géométrie. Comme on le sait, les théories qui, en mathématiques rapprochaient la géométrie de l’expérience sensible de l’espace ont été balayées au début de ce siècle par les disciples de Pasch et de Hilbert qui ont réussi à créer une mathématique formelle qui dissocie complètement les mathématiques de l’expérience sensible.

L’espace absolu

D’après Poincaré, ce mot est vide de sens: nous ne pouvons pas connaître la valeur absolue d’une distance. Poincaré attribue aux comportements associés à l’espace, les actes de préhension, de capture, de parade, ce qu’il appelle « les évidences des vérités géométriques ». Il définit d’abord « ce petit espace qui ne s’étend pas plus loin que ce que mon bras peut atteindre » et que nous appelons aujourd’hui « l’espace de préhension ». Il utilise les actions de parades pour définir le point géométrique. Il distingue aussi deux espaces: l’un restreint à des coordonnées liées au corps; l’autre, « étendu », est celui formé des divers points définis ainsi qu'il vient d'être résumé. Un point est donc « la suite des mouvements qu’il convient de faire pour l’atteindre à partir d’une position initiale du corps ».

La géométrie est ainsi fondée sur des gestes orientés vers des buts. Cette pensée est à rapprocher de celle exprimée récemment par le mathématicien G. Châtelet dans son ouvrage « Les enjeux du mobile » Éditions du Seuil, 1993) (p.31) « Ce concept de geste nous semble crucial pour approcher le mouvement d'abstraction amplifiante des mathématiques qui échappe aux paraphrases rationalisantes — toujours trop lentes — , aux métaphores et à leurs fascinations confuses et enfin, surtout, aux systèmes formels qui voudraient boucler une grammaire des gestes : G.del a bien montré que des énoncés rebelles — vrais, mais non prouvables — sont aussitôt sécrétés par une syntaxe tant soit peu ambitieuse ». L’idée d’une relation profonde entre perception de la forme et action a été aussi suggérée par René Thom qui écrit: « la forme biologique suggère une action » (Mathematical Models of Morphogenesis, 1983, p.166)

Espace géométrique et espace sensible

Poincaré s’est aussi intéressé à la différence entre l’espace géométrique et l’espace sensible qu’il appelle « représentatif ». Dans « La Science et l’Hypothèse », il discute d’abord les différences. L’espace géométrique et l’espace représentatif sont très différents. Il entre alors au cœur de notre question en disant: « mais, si l'idée de l’espace géométrique ne s'impose pas à notre esprit, si d'autre part aucune sensation ne peut nous la fournir, comment a-t-elle pu prendre naissance ? » « Aucune des sensations, isolée, n’aurait pu nous conduire à l’idée de l’espace, nous y sommes amenés seulement en étudiant les lois suivant lesquelles ces sensations se succèdent ».

Ces lois sont issues des observations que nous faisons du changement des objets pendant nos mouvements. En effet, Poincaré remarque que dans notre entourage les objets dont les déformations peuvent être corrigées par nos mouvements sont les corps solides. Il conclut alors: « S’il n’y avait pas de corps solide dans la nature, il n’y aurait pas de géométrie ».

Poincaré se prononce aussi sur la différence entre la géométrie d'Euclide et celle de Lobatchevski: « L'expérience ne peut décider entre les deux ». En effet, les expériences ne peuvent porter que sur les corps et non sur l'espace. Il poursuit « Par sélection naturelle, notre esprit s'est adapté aux conditions du monde extérieur, il a adopté la géométrie euclidienne car c'est la plus avantageuse à notre espèce. La géométrie n'est pas vraie, elle est avantageuse ». Ici, la géométrie est une expression d'un besoin naturel — un acte perceptif, dirait Janet — pour constituer le monde extérieur en y cherchant à distinguer des objets utiles à l'action. On ne peut éviter de rapprocher le texte de Poincaré de celui écrit par Husserl en 1907 sur le rôle des kinesthèses (au risque de me faire désigner comme « néo-husserlien ») dans la constitution de l'espace perçu. Husserl, (Husserl, 1989) après avoir rappelé, comme le fait Poincaré, l'importance des mouvements du sujet dans la constitution des propriétés perçues des objets, écrit: « Nous voulions considérer la chose visuelle et la constitution visuelle de la spatialité et de la localité, et voici que nous introduisons d'emblée les mouvements de notre corps et à travers eux, les sensations de mouvement, qui n'appartiennent pourtant pas au genre des contenus visuels. » (Choses et Espace - Leçons de 1907. PUF, 1989, p.194)

Le point de vue d'Einstein

On peut à ce sujet évoquer le témoignage d'une autre grand de notre siècle, Einstein. Sa conception n'est pas très différente. Dans son livre « Conceptions Scientifiques », Einstein (A.Einstein, 2001) discute la façon dont est constituée notre conception de l'espace. « Une importante propriété de notre expérience sensible et, plus généralement, de toute notre expérience, est de l'ordre du temps. Cette propriété d'ordre conduit à la conception mentale d'un temps subjectif, un schéma pour ordonner notre expérience... Mais avant la notion de temps subjectif se trouve le concept d'espace et avant ce dernier se trouve le concept d'objet matériel ; ce dernier est directement lié aux complexes des expériences sensibles. » Poincaré a justement insisté sur le fait que nous distinguons deux sortes de changements dans l'objet matériel: « des changements d'état » et des « changements de position ». Ces derniers, disait-il, peuvent être corrigés par des mouvements arbitraires de notre corps.

Il poursuit par une étude détaillée des conditions d'élaboration du concept d'espaces, et écrit plus loin : « L'erreur funeste qu'une nécessité mentale précédant toute expérience est à la base de la géométrie euclidienne et du concept d'espace qui lui est lié, est due au fait que la base empirique sur laquelle repose la construction axiomatique de la géométrie euclidienne était tombée dans l'oubli. Dans la mesure où l'on peut parler de l'existence de corps rigides dans la nature, la géométrie euclidienne doit être considérée comme une science physique, dont l'utilité doit être montrée par son application à l'expérience sensible ».

Les hypothèses de la perception phénoménale

Un argument essentiel pour discuter les conceptions formalistes de la géométrie est la nature biologique de l'espace représentatif, ou phénoménal comme le nomme Michotte (1962). Le fait que l'espace phénoménal est différent de l'espace physique est suggéré par de nombreuses illusions. Par exemple on peut rappeler les illusions des chambres de Ames qui montrent que le cerveau déforme la réalité en faisant des hypothèses de symétrie, de rigidité, et de régularité. Ces hypothèses sont aussi faites pour l'interprétation des propriétés tridimensionnelles de forme et de courbure des objets en mouvement.

2. La Vision.

L'utilisation de la géométrie pour l'étude de la vision est discutée dans les contributions de Jean Petitot , Y. Frégnac, J. Droulez

3. Ontogenèse de la géometrie chez l'enfant

Parmi les nombreux travaux sur ce sujet, nous avons choisi de résumer quelques-unes des thèses de Piaget (Piaget and Inhelder, 1981).

Les thèses de Piaget : la succession topologie, géométrie projective, géométrie euclidienne

Piaget s'est intéressé au développement de la perception de la géométrie. Dans le livre « La Représentation de l'Espace chez l'Enfant », écrit avec Inhelder en 1947, Piaget soutient une thèse principale: l'enfant construit d'abord une représentation des propriétés *topologiques* de l'espace avant d'en comprendre les relations métriques. Il critique à la fois Kant et Poincaré . « Kant, dit-il p.11, concevait déjà l'espace comme une structure *a priori* de la « sensibilité », le rôle de l'entendement consistant simplement à soumettre des données spatiales perceptives à une suite de raisonnements susceptibles de les débiter indéfiniment sans en épuiser le contenu. ... Poincaré, de même, lie la formation de l'espace à une intuition sensible et rattache ses vues sur la signification du groupe des déplacements au jeu des sensations proprement dites, comme si l'espace sensori-moteur fournissait l'essentiel de la représentation géométrique et comme si l'intellect travaillait sur du sensible déjà tout élaboré au préalable".

« Puis ensuite seulement vient l'espace représentatif dont les débuts commencent avec ceux de l'image et de la pensée intuitive, contemporains de l'apparition du langage ». Alors, poursuit Piaget, se produit un phénomène très curieux.... « tout en profitant des conquêtes de la perception et de la motricité, (lesquels fournissent, sur leur plan, l'expérience de ce que sont par exemple une droite, des angles, un cercle, et un carré, des systèmes perceptifs, ...) la représentation procède *ab initio* comme si elle ignorait tout des rapports métriques et projectifs, des proportions, etc. La représentation est obligée de reconstruire l'espace à partir des intuitions les plus élémentaires, tels que les rapports topologiques de voisinage, de séparation, d'enveloppement, d'ordre, etc. mais en les appliquant en partie déjà à des figures projectives et métriques supérieures au niveau de ces rapports primitifs et fournies par la perception ».

Il distingue plusieurs périodes dans le développement :

- La première (jusqu'à 4 mois) est caractérisée par une « non coordination » des divers espaces sensoriels entre eux. Seules les propriétés topologiques de voisinage, de séparation, d'ordre, d'entourage ou de d'enveloppement (par exemple, le nez entouré du visage.) sont identifiées. Piaget rappelle que Poincaré avait identifié un continu « empirique » basé sur le voisinage. À ce niveau, dit Piaget, le bébé ne perçoit que des rapports spatiaux élémentaires qui caractérisent cette partie de la géométrie appelée « topologie » étrangers aux notions de forme rigide, de distance de droite, d'angles, etc. ainsi qu'aux rapports projectifs et à toute mesure. Cette période ne comporte « que des rapports pré-perspectifs et pré-euclidiens » qui s'apparentent aux relations topologiques élémentaires. Mais il s'agit d'une topologie perceptive et motrice et surtout radicalement égocentrique ;
- La seconde période (4-5 à 12 mois) est caractérisée par la coordination entre vision et préhension qui permet la perception des formes. Mais, dit Piaget « contrairement à l'hypothèse centrale de la théorie de la Gestalt, nous croyons que des bonnes formes elles-mêmes (ou formes euclidiennes simples) se développent, avec l'image, en fonction de l'activité sensori-motrice, mouvements du regard, exploration tactile, analyse imitative, transpositions actives... La constance des grandeurs est liée, par exemple, à la coordination des mouvements contrôlés perceptiblement. La décentration perceptive de cette période associée à l'activité motrice aboutit à la constitution de rapports *métriques* et *projectifs ».*
- Pendant la troisième période (seconde année) les changements de points de vue, les déplacements contribuent à l'élaboration d'une perception des mouvements des objets les uns par rapport aux autres (allocentriques). La seconde moitié de cette période « en marquant le début des coordinations intériorisées et rapides qui caractérisent l'acte complet d'intelligence, voit apparaître l'image mentale en prolongement de l'imitation différée... De purement perceptif, l'espace devient donc en partie, représentatif. Ce n'est alors que vers 7- 8 ans qu'un espace intellectuel sera construit, qui sera capable de l'emporter définitivement sur l'espace perceptif. C'est la motricité qui est le facteur commun entre ces deux constructions, représentative et perceptive. L'image est, pour lui une imitation intériorisée qui procède par conséquent comme telle de la motricité » .

Ces analyses de Piaget portent toutes sur le primat de la topologie sur la métrique. Il remarque la démarche inverse qu'auraient faite le développement de la perception d'une part, et la science de la géométrie d'autre part, et écrit « on comprend que relevant des conditions élémentaires de l'action, ces rapports fondamentaux aient échappé si longtemps à la science géométrique qui a débuté avec la mesure et ne s'est engagée qu'extrêmement tard dans la recherche des notions primitives ».

Il discute l'apparition de la notion de droite projective ou de droites affines. Piaget remarque que la droite n'est pas, en effet, une notion topologique car pour transformer une simple *ligne* (seule envisagée par la topologie) en une *droite*, il est nécessaire d'introduire un système ou bien de points de vue, ou bien de visée (notion que l'on retrouve dans l'analyse de Husserl). Le dernier niveau envisagé par Piaget après la construction de l'espace *topologique,* et celui de l'espace *projectif*, est celui de l'espace *euclidien*. Celui-ci se construirait par la coordination des points de vue des objets de l'espace entre eux, ce qui conduit à la construction de systèmes de coordonnées.

Pour Piaget, l'image n'est donc jamais que l'imitation intérieure et symbolique d'actions d'abord antérieurement exécutées, puis simplement exécutables, ce qui évoque évidemment le concept « d'affordance » de Gibson (Gibson, 1966;Gibson, 1977).

Critiques de la chronologie de Piaget

Récemment, plusieurs critiques ont été faites de la chronologie de Piaget. Le développement de la rationalité ne peut se réduire à la substitution majorante des structures nouvelles, qu'elles soient symboliques ou sub-symboliques, mais se développer c'est aussi, et souvent, inhiber une structure concurrente. Les théories récentes attribuent à l'enfant des capacités perceptives très précoces (avant 4 mois) et contestent souvent le constructivisme de Piaget. Cette précocité a été montrée pour plusieurs opérations perceptives: a/ la constance de la forme et de la taille, la perception de l'inclinaison. Il est intéressant de constater que des données récentes de neurophysiologie chez le singe confortent ces observations. En effet, des neurones du cortex pariétal répondent, chez cet animal, à l'inclinaison des surfaces; b/ La reconstruction d'un objet caché (paradigme dit « d'occlusion »); c/ la perception des formes, des contours illusoires, des visages ; il a été proposé, à ce sujet, que le développement de la géométrie était dû à l'intérêt de la détection des formes géométriques en mouvement pour l'évaluation du risque que représentent les objets de l'environnement; d/ la perception du mouvement biologique.

4. La perception des objets

La littérature concernant ce domaine, surtout pour la perception visuelle, est considérable. Nous citerons trois aspects seulement. Le premier concerne la décomposition des objets en formes prototypiques ou composants. Les résultats récents concernant la reconnaissance visuelle des objets suggèrent qu'il n'existe pas, dans le cerveau, de système général de reconnaissance des objets à usage multiple. Au contraire, on trouve des représentations multiples des objets, formées dans diverses parties du cerveau, chacune spécifique aux transformations requises soit pour la perception soit pour l'action ; La reconnaissance des membres prototypiques d'une catégorie d'objets, le codage des transformations des objets ou des parties des objets, le codage de la taille, de l'orientation, de la forme, de l'identification des membres individuels d'une classe d'objets homogènes, et la planification des mouvements qui sont, en général, associés aux différents objets familiers, dépendent de représentations différentes formées dans des centres nerveux nombreux et grâce à des ensembles de liaisons neuronales différentes.

Il existe, de plus, des contraintes sévères sur la capacité qu'a le cerveau de reconnaître des formes. Par exemple, nous ne pouvons pas identifier un visage à l'envers. Cet effet n'existe pas chez le singe qui a l'habitude de voir des visages suivant de multiples orientations. De même, le jeune enfant semble reconnaître les visages, même à l'envers. La polarisation de la perception est donc acquise en même temps que se mettent en place, comme nous l'avons vu, les mécanismes qui permettent l'identification et la mémorisation de configurations complexes avec la mise en place de fonctions corticales supérieures. Il est lié à l'identification de « configurations » des éléments dans la reconnaissance des visages .

L'identification des objets est donc parfois indépendante du point de vue; elle semble « centrée sur l'objet lui-même » dont les propriétés ont été en quelque sorte « généralisées » comme disent les psychologues ; mais elle est parfois dépendante du point de vue. Toutefois, les travaux de Psychologie cognitive n'ont pas encore élucidé complètement cette question.

D. Marr (Marr, 1982)a été un des premiers à proposer l'idée selon laquelle le système visuel reconstruit progressivement les objets à partir de leur analyse décomposée par ses premiers relais. Nous avons choisi d'analyser la théorie récente proposée dans ce sens par Biederman. Il propose que la perception des objets est fondée sur la décomposition des images en composantes qu'il appelle des « géons ».

La première décomposition serait effectuée dans les premiers relais V1, V2, V3, etc. Elle assure l'extraction des contours de l'objet grâce aux informations de luminance, texture, couleur, etc. Elle donne une information de contour par des lignes. Il faut noter l'existence d'une théorie récente parallèle qui suggère la possibilité que soient extraits non seulement le contour mais le squelette d'objets qui serait particulièrement utilisé pour l'analyse des objets non rigides en mouvement comme, par exemple, les animaux. Puis se produirait une détection des propriétés dites « non accidentelles » telles que la colinéarité, la symétrie, la courbure continue, le parallélisme, etc., et un découpage en zones principalement dans la partie concave des formes. Cette double analyse permet de décomposer la forme de l'objet en composantes.

L'étape suivante serait la comparaison des composantes avec des représentations présentes dans la mémoire. On voit que la mémoire est essentielle dans ce processus d'analyse. Une des théories récentes sur cette question, celle de Biederman,(Biederman, 1987) propose que le cerveau décompose l'objet en éléments simples appelés « géons » (pour ions géométriques). Un géon est un volume défini par le déplacement d'une courbe fermée dans un plan le long d'un axe supposé être à angle droit par rapport à la surface plane comme des cylindres, des cônes, des cubes, des parallélépipèdes, etc. qui correspondent aux critères gestaltistes de « bonne forme ». Une bibliothèque d'environ 36 géons permettrait d'identifier un nombre considérable d'objets largement supérieur à tous les objets que nous rencontrons ou que nous souhaitons mémoriser et reconnaître.

Une des conséquences importantes de la théorie de géons est que le principe de la Gestalt s'applique à chaque géon et non pas à la figure dans son ensemble. La conséquence en est que ce sont les composants qui sont stables en cas de bruit perceptif.

Le problème est de savoir si la neurophysiologie moderne confirme cette décomposition en formes élémentaires. On distingue actuellement deux grandes voies neuronales: la voie dite « dorsale » et la voie dite « ventrale » dans l'élaboration des informations visuelles et les relations avec l'action. Un accord est maintenant fait sur l'importance de la voie ventrale dans l'identification des objets. Il est aussi suggéré que les deux hémisphères droit et gauche analysent des propriétés différentes des objets. Certains prétendent en effet que l'hémisphère droit s'intéresserait aux propriétés globales de forme des objets et travaillerait dans un repère spatial, alors que l'hémisphère gauche ne serait concerné que par les attributs locaux de chaque objet, entre analyse des propriétés spatiales de coordonnées et propriétés catégorielles, comme le propose Kosslyn.

Le codage neuronal : le rôle des oscillations

Il semble actuellement qu'au moins deux sortes de code soient présentes. D'une part, des neurones qui codent pour des composants de la forme ou des parties et qui peuvent contribuer à l'identification d'un objet par leurs combinaisons en fonction des relations spatiales des composants ainsi définis, ce qui fait penser aux géons de Biederman, mais aussi des neurones qui codent les aspects globaux des objets avec une sélectivité particulière à la configuration des éléments.

On peut à ce sujet évoquer les théories modernes qui proposent l'idée que l'unité de l'objet est réalisée par la *synchronisation temporelle* de l'activation des structures dans lesquelles sont mémorisées ou activées les composantes de l'objet au même moment. Dans ces théories, *l'unité de l'objet est donc assurée par le temps. Des oscillateurs centraux situés dans le thalamus et pulsant a 40 Hz synchroniseraient les aires du cerveau qui contiennent les neurones codant les divers propriétés des objets. L'unité d'un objet correspondrait a l'ensemble des propriétés activées au même moment.*

Les données de la neurodynamique moderne confirment l'existence de synchronisation accompagnant l'apparition de percepts conscients. Si ces faits et théories sont confirmées il faudra bâtir un pont entre mathématiques de la géométrie et dynamique temporelle.Un beau sujet de coopération entre mathématiciens et neuroscientistes ! ! !

7 LA GÉOMÉTRIE ET LE CONTRÔLE DU GESTE ET DE LA POSTURE.

Jusque dans les années 1980, les neurophysiologistes qui ont été intéressés par les bases neurales de ces réflexes ont surtout cherché à comprendre comment étaient résolus des problèmes de dynamique: par exemple, comment, à partir de la détection de l'accélération de la tête, le cerveau pouvait produire des signaux qui contrôlaient la position du regard, ce qui suppose des intégrateurs au sens mathématique, c'est-à-dire des opérateurs qui transforment l'accélération en vitesse et puis en position. Puis vint l'idée que le cerveau devait aussi résoudre des problèmes de géométrie. Par exemple, les informations de mouvement de la tête, codées par les capteurs vestibulaires selon les trois plans des canaux semi-circulaires, dans un référentiel euclidien trirectangle, doivent subir des transformations pour produire la contraction correcte des muscles oculaires et céphaliques. On proposa alors d'assimiler le cerveau à un *tenseur* qui utilise des coordonnées covariantes ou contravariantes et fait des transformations de coordonnées en utilisant *« transformation inverse »* comme la transformée de Penrose .*(Pellionisz and Llinas, 1980).*

On proposa aussi que le cervelet soit l'organe qui contient les opérateurs neuronaux pour réaliser ces transformations inverses. Une formulation plus récente de ces mêmes hypothèses a été donnée suggérant que le cervelet est un véritable *modèle interne* des propriétés mécaniques des membres et de la dynamique. Grâce à ce modèle interne neuronal, une véritable *simulation interne de la géométrie et de la cinématique de la trajectoire* du mouvement ainsi que les corrections appropriées peuvent être réalisées avant même que le mouvement soit exécuté. L'idée que le cerveau dispose de modèles internes des lois de Newton à été récemment suggérée aussi par des données concernant l'anticipation motrice dans la capture d'objets en mouvements (Mc Intyre *et al*. 2001*, Nature Neurosciences*).

L'idée que le cerveau effectue des transformations visuo-motrices géométriques complexes pour le contrôle du mouvement a été à l'origine de nombreuses études récentes. Mon objectif dans ce cours n'a pas été de décrire en détail ces mécanismes, mais, en suivant le cadre général des théories, d'inverser complètement l'approche traditionnelle. En effet, si l'on se contente de croire que le cerveau va mesurer toutes les informations des sens (vision, informations vestibulaires, mesures des longueurs et des vitesses d'étirement par les muscles, etc.), les informations à traiter seraient considérables, hétérogènes, codés dans des référentiels très différents avec des propriétés géométriques et dynamiques différentes. Compte tenu des centaines de degrés de liberté à contrôler, le problème serait probablement insoluble ou au moins demanderait beaucoup de temps et ne permettrait pas la nécessaire rapidité des gestes, la prédiction, et l'anticipation. De plus, les systèmes biomécaniques des membres sont surdéterminés, il y a plusieurs trajectoires possibles pour arriver à un point donné de l'espace. Comment donc le cerveau choisit-il la solution particulière ? Quelles sont les contraintes biomécaniques, neurales, qui limitent le nombre de solutions, etc. ? Est-ce la dynamique qui est contrôlée ou est-ce la géométrie ?

Quelles solutions la nature a-t-elle trouvées pour simplifier la complexité de la géométrie du corps ou encore, comme le disait Bernstein (Bernstein, 1967) *réduire le nombre de degrés de liberté* ? La correspondance entre les espaces des capteurs sensoriels, par exemple le fait que les plans des canaux semi-circulaires sont les mêmes que ceux des directions préférentielles des neurones du système optique accessoire ; la stabilisation de la tête qui devient, grâce à cette stabilisation, une plate-forme de guidage pour la coordination des mouvements (Pozzo, Berthoz *et al.,* 1990 ;Berthoz and Pozzo, 1988) ; la géométrie du squelette, par exemple les blocages articulaires (Graf, de Waele *et al.,* 1994) (Berthoz, Graf *et al.,* 1991) et le fait remarquable que le cerveau connaît les règles des mouvements naturels possibles; la géométrie des muscles, par exemple les muscles bi-articulaires ; les synergies musculaires qui constituent un répertoire de mouvements très simples et des contraintes cinématiques dans l'exécution de ces synergies et de leurs relations, par exemple la loi de l'antiphase entre bras et avant bras (Lacquaniti, Soechting *et al.,* 1986) ; les bases neurales des synergies, l'anatomie des collatérales d'axones code la géométrie; les lois simplificatrices, par exemple, la loi de Listing (Hepp, 1994 ; Haslwanter, 1995 ; Misslisch, Tweed *et al.,* 1994 ; Hepp, 1995) et la loi de la puissance 1/3 qui lie la vitesse tangentielle et la courbure de la trajectoire d'un geste (Viviani and Flash, 1995;Wann, Nimmo-Smith *et al.,* 1988) ; le choix, par le système nerveux, de variables globales et non pas de variables locales, par exemple les mouvements du bras qui sont contrôlés par la définition de l'azimut et de l'élévation, la dissociation entre le contrôle de la distance et de la direction, etc.

La théorie du point d'équilibre

Une théorie dite du « point d'équilibre » a été décrite dans un cours précédent. Rappelons que l'idée de Bernstein fut que la position d'un membre peut ne pas être spécifiée en tant que telle mais peut être codée implicitement en définissant la relation des tensions de deux muscles antagonistes autour d'une articulation. Le « point d'équilibre » qui sera atteint lorsqu'on impose aux muscles une certaine force ou tension détermine la position. Cette théorie est intéressante car elle implique que le cerveau peut se contenter de contrôler une seule variable qui est la relation ou le rapport des deux tensions. On retrouve ici le problème, important en mathématique set sur lequel R.Thom s'est exprimé, des relations entre le *global et le local*.

Si l'on approfondit encore la théorie, on découvre que le cerveau pourrait se contenter de contrôler un seuil de sensibilité des motoneurones car, en contrôlant ce seuil, on contrôle la contraction du muscle.(Feldman and Levin, 1995) Comme on le comprend peut être par ces explications trop brèves, la théorie du point d'équilibre suppose que la géométrie soit codée de façon implicite et non pas explicite. Il n'est pas nécessaire d'avoir dans le cerveau des tenseurs et des représentations cartographiques de la géométrie du squelette, le cerveau utilise des variables intermédiaires pour transformer des instructions globales (azimut, élévation, orientation, longueur, etc..) en activité musculaire. Ceci expliquerait aussi pourquoi un même point peut être atteint avec des configurations différentes. Nous travaillons nous-mêmes sur l'idée que le cerveau utilise des variables composites (Hanneton, Berthoz *et al.,* 1997) dont la théorie a été proposée par Slotine.

Le contrôle de la posture, de la marche et de l'équilibre.

Les mécanismes fondamentaux du contrôle de la posture et de la locomotion ne sont pas encore connus. Ils posent des problèmes complexes de biomécanique et de contrôle que les mathématiciens, Russes principalement (Gelfand fut l'un d'eux), qui se sont intéressés a la modélisation de ces problèmes. L'école réflexologique a supposé qu'une chaîne de réflexes assurait la régulation posturale et la résistances aux perturbations. À l'opposé de ce point de vue, des théories « globalistes » utilisant le concept de schéma corporel proposé par les neurologues du début du siècle, ont soutenu que la posture et l'équilibre sont contrôlés de « haut en bas » par un mécanisme cortical (Gurfinkel, 1994). Le débat est encore ouvert car même les variables contrôlées ne sont pas encore connues. Certains suggèrent que c'est la position du centre de gravité ou du centre de masse dans le polygone de sustentation qui est contrôlée ; d'autres suggèrent que c'est la géométrie du squelette; d'autres enfin ont proposé que le cerveau contrôle des relations entre des variables cinématiques qui correspondent à des synergies posturale simples, par exemple la stratégie dite « de la cheville » qui fait tourner le corps autour de la cheville comme un pendule inversé, et une autre dite « de la hanche » qui le fait se plier autour du bassin. Le contrôle postural résulterait d'une combinaison de ces stratégies élémentaires (Nashner, 1985).

Une dernière suggestion, enfin, est que le cerveau contrôle la géométrie (Lacquaniti, 1997), c'est à dire les rapports entre les angles que font les segments corporels entre eux. Par exemple, la longueur totale et l'orientation par rapport à la verticale de chaque membre seraient contrôlées avec précision. L'idée est que ces deux variables, orientation et longueur, sont contrôlées indépendamment par le cerveau et que les neurones des voies dorso-spino-cérébelleuses les codent séparément. La caractéristique remarquable de ce codage est que ces deux paramètres, orientation et longueur du membre, définissent la position de la patte dans des coordonnées polaires globales sans tenir compte du détail de la configuration du membre qui permet d'atteindre cette posture particulière. Elles définissent donc une posture sans se préoccuper de la façon dont elle est exécutée.

Plus généralement en mesurant les angles que font, les angles des pieds par rapport à la jambe, de la jambe par rapport à la cuisse, de la cuisse par rapport au tronc, on observe qu'ils sont liés deux par deux par des relations linéaires pendant la locomotion ; Cette covariation des angles suggère qu'il se produirait une transformation intermédiaire de type inverse qui transforme les cordonnées de l'extrémité (ce qui est contrôlé) en un ensemble de commandes qui règlent les angles des segments corporels entre eux selon des rapports très fixes. Lacquaniti, (Lacquaniti, 1997), suggère que ce comportement est *caractéristique des systèmes dynamiques gouvernés par des attracteurs chaotiques*.

La théorie du minimum de secousse. Son caractère morphogénétique.

Une autre théorie, conçue pour expliquer la génération de trajectoire pendant un geste, suppose que la variable contrôlée par le système nerveux ait simplement un minimum d'énergie (*minimum de secousse*, la secousse étant la dérivée de l'accélération). Il suffirait, d'après cette théorie due à Flash et reprise par Flash et Viviani,(Viviani and Flash, 1995) que le cerveau connaisse les points de départ et d'arrivée du geste, ainsi qu'un ou plusieurs points intermédiaires (appelés « *via* points » en anglais), pour que la trajectoire soit définie. Cette théorie est intéressante car elle suggère que le cerveau ne connaît pas la trajectoire géométrique du geste qui est planifié. Il n'y aurait pas dans le cerveau de planification de la courbe du geste. Celle-ci résulterait de la mise en oeuvre du principe de minimisation de la secousse avec ces quelques contraintes de position. C'est en cela que l'on peut dire que le minimum d'énergie est morphogénétique. Notons que la théorie du point d'équilibre a de semblables propriétés. Pour le moment cette théorie n'a été testée que sur des mouvements de la main et aucun travail expérimental n'a été réalisé sur la posture.

Le codage des informations spatiales pour la navigation.

Les données récentes de la neurophysiologie suggèrent une ségrégation des systèmes neuronaux qui traitent des informations sur les mouvements de la tête pendant la navigation.

Trois systèmes à la fois distincts et en interaction ont été découverts à ce jour. Ils concernent respectivement le codage des rotations, de la direction et des lieux ou de la position.

L’espace du vivant et les neurosciences : en guise de conclusion pour cette partie

Les notions géométriques sont donc au cœur de toute analyse de l’action et de sa gestion par le cerveau. Mais en même temps, leur fondement est à retrouver dans notre être vivant dans le monde et dans l’histoire; dans l’histoire, car on n'atteint pas la complexité des structures mathématiques, même la plus simple, sans considérer la construction qui est faite dans l’intersubjectivité, dans le langage et dans la mémoire commune.

On a donc présenté quelques exemples dans cette direction ultérieure de travail, pour ce qui sont les rapports, à développer dans les deux sens, entre mathématiques et cognition. Car le point central est que, aujourd'hui, le dialogue doit être dans les deux directions et il faut qu’il soit très profond. On ne peut pas se limiter à transférer, vers les sciences du vivant et de la cognition, nos « logiques », nos outils mathématiques d’analyses, tels qu’il sont. Il faut aussi apprécier ce *sens du vivant*, qui est propre au biologiste.

Sur quoi se base-t-il se sens du vivant ? Certainement il y a l’appréciation de la contextualité et de l'unité de tout phénomène biologique. Dans le cas du cerveau et ses grandes fonctions, ce qui compte est « l’intégration ». Pour le dire en terme mathématique, le cerveau requière une analyse essentiellement multi-échelle, mais ... comme on en connais pas en physique-mathématique. On s’explique.

Les activités cérébrales se déroulent à partir de la structure géométrique des récepteurs synaptiques (des protéines, où, comme dans toutes les protéines, la *fonction est dans la forme géométrique*, dans leur repliement tridimensionnel). Des cascades biochimiques, largement composées de protéines, contribuent ensuite à l’élaboration de l'information. À une échelle « plus grande », la forme des neurones, y compris celle de leurs profil récepteur (il faudrait considérer pour cela les neurones comme des entités six-dimensionnelles), est une partie intégrante de cette élaboration (voir les analyses de Petitot sur les recollement et les profils récepteurs des neurones du cortex visuels, V1). Il y a ensuite les réseaux dynamiques de neurones, voir les assemblés de ces neurones ... de plus, tous ces niveau interagissent « verticalement » entre eux. Plus en général, dans un organisme vivant, au delà des échanges « horizontaux » entre cellules, voire entre neurones, si largement étudiés par les différentes géométries des réseaux, ils existent des fonctions de régulations et intégrations (hormonales, par exemple) qui interfèrent « verticalement » et d’un façon essentielle, avec les interactions « horizontales ». Le grand défie et nouveauté mathématique consiste dans le fait que ces interférences n'induisent pas seulement des « changements de phase » dans les systèmes dynamiques en question (ce que la physique-mathématique sait traiter très bien), mais « des changements d'espace de phases » : ce sont les variables pertinentes qui peuvent changer radicalement. Bref, nous ne savons pas encore traiter une propriété cruciale du vivant : l’enchevêtrement et le bouclage des niveaux d’organisation.

Pour cette raison, tout découpage par un modèle mathématique d’un seul niveau, d’une seule échelle, peut nous donner des analyses « locales » informatives, mais il reste essentiellement incomplet. En fait, les mathématiques hérités du rapport extraordinaire entre mathématique et physique sont essentiellement « mono-échelle » (et, à vrai dire, il n'y a pas encore d'unité mathématiqes même entre les grands « niveaux » de la physique: microphysique et astrophysique).

Une dernière remarque quant à l'originalité mathématique des phénomènes auxquels nous devons faire face. Depuis quelques années, Edelman, dans nombreux travaux (voir, pour une introduction, Edelman et Tononi, « Comment la matière devient conscience », Seuil, 2001) a mise en évidence la structure « dégénère » du cerveau. Bref, différentes structures cérébrale peuvent gérer à la même fonction. Il s'agit d'un concept différent de celui de redondance : dans ce dernier cas, des copies grosso modo identiques d'une structure servent de « back-up » pour une fonction. « Degenerancy » au contraire est au cœur de la variabilité, en plus que de la « suppléance ». L'intégration et la différenciation des structures dégénérées paraissent en fait omniprésentes en biologie, du génome au système immunitaire, jusqu'à atteindre son maximum dans la complexité du cerveau, où des structures très différentes peuvent être impliquées, en parallèle, en concurrence, de façon synchrone ou asynchrone, dans des tâches proches, voir identiques. Sauf, permettre ensuite la variation, grâce justement à la non-identité structurelle. On dirait que le concept de « degenerancy » est tout à fait étranger aux mécanismes physiques.

Voilà donc quelques raisons pour lesquelles on est loin d'une "théorie" mathématique des fonctions cérébrales intégrés.

Tout en continuant à appliquer et développer les outils traditionnels, physico-mathématiques, dans les sciences du vivant, il faut donc saisir aussi la nouveauté des méthodes propres aux scientifiques qui travaillent avec la contingence et l'unité du vivant, avec sa réactivité, ses états « normaux vs. Pathologiques » et son « finalisme de l'action » — en fin de compte, un finalisme de la survie, un *finalisme contingent* ; celles-ci sont des composantes si forte de la connaissance du vivant et elles n'ont rien d'analogue en physique. Et cela pourrait bouleverser et enrichir énormément nos méthodes d'analyse mathématique.

Un élément essentiel de ce projet est donc le questionnement interne aux mathématiques, à leurs méthodes, tout en proposant de les faire sortir de leur isolement, de toute vision *d'a priori* logique, indépendant de notre rapport actif au monde, un rapport qui est au contraire co-constituant le monde et les mathématiques, en même temps. L'idée est que les régularités que nous voyons dans le monde et sur lesquelles nous bâtissons les mathématiques sont en correspondance tout d'abord avec nos structures, en tant que vivants: on isole, on voit des régularités, on y construit, grâce au langage, des concepts qui seront ensuite autonomes et fonderont les mathématiques, car notre corps « porte les traces », il s'est construit aussi autour des régularités qui "sont derrière" ces concepts. Toutefois le vivant ajoute sa propre unité, se façonne et ne copie pas à l'identique les régularités physiques: comme dans les gestalt visuelles, il projette une structuration sur le monde, qui n'est pas « déjà donnée ». Cette présence active est peut être à l'origine même de nos « inventions » mathématiques, elle en est leur fondement cognitif. L'interpolation/complètement d'une figure par une ligne « qui n'est pas là » est peut-être le premier geste de la construction mathématique, une *action* qui va de l'espace du regard jusqu'à la construction conceptuelle de « courbe paramétrée ».

L'analyse des fondements cognitifs des mathématiques devrait donc être un des outils grâce auxquels il sera possible d'agir sur la plasticité conceptuelle des mathématiques, leur extraordinaire dynamique interne, d'arriver à proposer de concepts et, ensuite, des structures, dérivées de (et pas seulement imposés à) ces nouveaux enjeux scientifiques, ceux des sciences de la vie et de la cognition. Pour cela, à partir et bien au-delà des tentatives courageuses de pionniers comme Poincaré ou Enriques (tentatives basées sur l'introspection du sujet mathématicien), il faudra aussi former des mathématiciens qui aient un "sens du vivant" (et de l'histoire), comme Galilée, Newton et Riemann avaient un « sens de la physique »; des mathématiciens qui visent en particulier une « intelligibilité mathématique » de l'espace du vivant (et de l'entendement), comme on a su rendre intelligible l'espace physique grâce aux mathématiques ; des mathématiciens qui comprennent la singularité physique du vivant, avant de calculer.

Pour cela il faut analyser à fond la notion même de « modèle mathématique » en biologie, pour arriver à proposer des théories biologiques avec un apport aussi important des mathématiques, que celui qui s'est développé en physique. En soulignant le rôle de la géométrie, que l'on considère central (« Geometry is more compelling » : elle est le lieu de la « signification », en mathématiques), nous avons pris en considération la constitution de l'espace de l'action et le traitement des images, en tant qu'origine de la géométrie. En bref, la question est posée et quelque piste est ouverte quant au rapport entre construction géométrique (conceptuelle) et structures sensori-motrice pour l'action et la perception dans l'espace physique.

En conclusion, quels outils géométriques peuvent nous aider à comprendre et organiser les structures cérébrales intégrées ? Et, de façon duale, quels principes de construction géométrique trouvent leur genèse dans la construction des références spatiales dues à l'intégration cérébrale multisensorielle ?

ANNEXE POUR LA PARTIE RECOMMANDATIONS DU RAPPORT

Du savoir savant au savoir enseigné

L'enseignement des mathématiques traverse une crise très grave : la baisse des vocations est très forte, en toute l'Europe. Les inscriptions aux facultés scientifiques, en général, sont en baisse, mais le phénomène est particulièrement aigu en mathématiques (aux USA les données le confirment aussi, mais l'afflux des étrangers, désormais surtout des asiatiques, compense l'absence presque totale des jeunes américains dans les études doctorales en mathématiques). Nous n'avons pas les compétences pour comprendre les aspects et les motivations sociaux du phénomène et encore moins pour en proposer des solutions, mais la problématique scientifique que nous proposons peut aider à comprendre et, peut-être, à agir.

Il y a en effet et tout d'abord de grandes attitudes de société, dont il ne peut pas être question ici, qui éloignent les jeunes des mathématiques et de leurs méthodes. Nous pensons toutefois, que les applications et le cadre conceptuel que nous visons peuvent contribuer à une attention différente vers les mathématiques. La richesse et la nouveauté des applications a toujours été un moteur important pour les mathématiques et les neurosciences peuvent avoir un rôle particulièrement stimulant en ce sens. Mais nous pensons aussi que la problématique fondationnelle et l'exigence que nous posons de nouvelles approches peut aider à trouver des autres chemins et motivations aussi pour l'enseignement.

Les mathématiques sont trop souvent enseignées comme un calcul dénué de signification, « application de la règle (formelle) », à apprendre par cœur en principe, punition de tout élève (une équation suit l'autre, selon la règle, tout est là). Le processus a démarré, en époque moderne, par le projet de fondements des mathématiques dans des “ lois de la pensée ” arithmétiques et logiques (Boole, Frege), transformées ensuite dans des calculs formels « potentiellement mécanisables » (Peano, Hilbert). Une fois les mathématiques encodées, et tout d'abord la géométrie [Hilbert « Les fondements de la géométrie », 1899], dans l'arithmétique, une preuve « mécanique » de cohérence (Hilbert, 1900) aurait garanti la certitude et l'objectivité des mathématiques, en tant que axiomatiques formelles. Une démarche nécessaire, après l'état de « délire » [Frege, 1884, p. 20, sic !] dans lequel se trouvait la géométrie de l'espace physique, suite aux idées de Gauss, Bolyai, Lobachevskij, Riemann. Les mathématiques deviennent donc un calcul de symboles logiques, voire de signes sans signification, qu'une machine (de Turing, mieux : un ordinateur moderne) peut très bien développer, voilà l'approche qui a dominé les analyses fondationnelles aussi bien que l'enseignement. En fait, quand on raconte que « la pensée est un calcul » et que, en particulier, les mathématiques sont un calcul formel qu'une Machine de Turing (ou un ordinateur bien programmé) peuvent développer, on induit un nouveau dualisme, pour la pensée et les mathématiques : les deux sont en dehors de nous, des hommes, elles n'ont pas nécessairement du sens[1]. De même, on prétend que la mémoire animale et humaine est à analyser par les méthodes du « data-mining », techniques très importantes pour la mise en place et l'exploration des immenses bases de données digitales de nos jours, ou grâce à la cryptographie, outil mathématique difficile et profond pour l'encryptage de l'information numérique (basé sur la décomposition en facteurs premiers). Or, la mémoire humaine (et animale) est tout sauf une base de données numérique : l'oubli intentionnel, conscient et inconscient, par exemple, en est au cœur, car il contribue à constituer les invariants de l'action mémorisée et, par ce biais, à la catégorisation conceptuelle du monde, voire à son organisation mathématique. Ces approches réifiants éloignent le cerveau, et notre animalité et humanité avec lui, de l'analyse et, par réflexe, de l'enseignement, car la certitude rationnelle est transférée dans la machine, la déduction, voire la cognition, sont à voir dans le potentiellement mécanisable (« la logique est formelle, ou elle n'est pas », certains nous expliquent).

Nous croyons qu'il y a chez les jeunes, au contraire, une nouvelle exigence d'humanisme, de réappropriation de la signification dans leur propre corps, une exigence d'unité de la culture, de sensibilité au bon goût humain, de comprendre avec les autres, aussi à travers le geste et les émotions : l'image que l'approche logico-computationnelle aux mathématiques (et à la cognition) leur renvoi est l'opposé de tout cela.

Il faut urgemment revenir au sens, à la construction motivée, pour retrouver et communiquer le plaisir du geste mathématicien. Notre projet, qui vise à enraciner les mathématiques dans la cognition humaine, peut aider à la reconstruction de ce sens. Les mathématiques sont le résultat d'un parcours constitutif qui a son origine dans notre action d'organisme vivant dans l'espace et arrive à organiser le monde ; elles s'enrichissent du langage, dans notre communauté communicante, et contiennent tous les aspects fondamentaux de notre intelligence humaine : en fait, elles sont *abstraites, rigoureuses, symboliques*. Or, ces trois piliers de nos formes de connaissance, différents entre eux et d'une complexité immense, ont été identifiés avec la notion bien plate de « formel », en tant que « suite de signes sans signification, maniés de façon potentiellement mécanisable ». Cette identification a été l'une des catastrophes de la philosophie de la connaissance du XXe siècle et son impact, dans les analyses de la cognition, voire, nous pensons, dans l'enseignement des mathématiques, a été considérable. Or, les neurosciences, en conjonction avec les analyses cognitives du langage (et des mathématiques), peuvent permettre un nouveau regard à ces notions cruciales des mathématiques : l'abstrait, le rigoureux, le symbolique. Car, les trois sont au cœur de nos catégorisations du monde — à commencer par les traces cérébrales des régularités de la boucle sensori-motrice, jusqu'à la constitution de notre culture symbolique.

[1] Une version récente de cette approche propose de faire référence à « l'isomorphisme de Curry-Howard » entre Types et Propositions, plutôt qu'aux Machines de Turing. Cet isomorphisme est une propriété centrale pour la programmation fonctionnelle, un des grands styles de programmation des ordinateurs, car elle permet d'identifier les programmes (typés) aux preuves formelles et d'utiliser les acquis de l'analyse de la preuve en informatique (pour la correction formelle, par exemple). Elle est inspirée aux travaux de l'un des plus radicaux des logiciens formalistes, voir H. B. Curry « A formalist philosophy of Mathematics », 1951.

À notre avis, l'enseignement, de ce qui est maximalement abstrait, rigoureux et symbolique, les mathématiques, en serait positivement enrichi si l'on appréciait ces trois propriétés cruciales comme faisant partie de la cognition, et si l'on tient compte que cette dernière est le résultat de l'évolution et de l'histoire humaine, dont le cerveau, dans notre corps agissant, a été le support matériel. Toute pédagogie devrait souligner les liens avec la richesse des analyses cognitives, qui font référence au cerveau plus qu'à l'ordinateur digital (ce dernier est *outil* formidable, même pour faire des mathématiques : on est en train d'y transférer toute les tâches de l'itération stupide et du calcul formel — malheureusement elles sont si difficiles à isoler des contextes de signification que l'on n'a pas encore pu aller très loin).

Si l'on arrive à communiquer comment la construction des concepts et des structures des mathématiques s'enracine dans notre histoire évolutive et dans notre vécu, on aura du « sens » à communiquer ; de plus, on établira des liens avec cette aventure passionnante que nous proposent les sciences du cerveau. Et l'on pourra même contribuer à réinsérer l'analyse fondationnelle des mathématiques dans les débats internes aux autres sciences, comme la physique et la biologie, débat duquel le logicisme et le formalisme l'ont écarté pendant près d'un siècle (voir H. Weyl « Philosophy of mathematics and of natural sciences », 1927, trad. 1949, une référence importante et fort isolée, l'exacte contraire du texte de Curry cité ci-dessus, en note).