Communications

Automate asocial et systèmes acentrés

Pierre Rosenstiehl, Jean Petitot

Pierre Rosenstiehl et Jean Petitot

Automate asocial et systèmes acentrés

INTRODUCTION

Les auteurs plaident pour le langage de l'acentrisme.

Il serait simpliste de penser que les concepts hiérarchiques imposés par ceux qui ont l'exercice du pouvoir correspondent véritablement à la nature des choses. Les organismes biologiques, les « sociétés » animales comme on dit, les « hordes » humaines de toutes sortes, révèlent en fait à y regarder de près, des centres un peu partout, à la limite une absence de centre. L'histoire des organismes artificiels est elle aussi révélatrice. Poussés par le mythe ambiant du hiérarchisme, les premiers architectes de machines électroniques ont conféré tout pouvoir à un organe central unique. Or, ironie des choses, cet organe central devenant très vite congestionné, on se prend à rêver d'une usine à calcul acentrée, un peu comme le cerveau, qui accomplirait en parallèle des opérations nombreuses réparties sur un vaste terrain et selon des initiatives locales dont il reste à concevoir la coordination. Aussi symptomatique est la confrontation actuelle de notre société technique à des systèmes automatiques d'information hypercentrés; lorsqu'on introduit ceux-ci à des niveaux de plus en plus profonds de la vie sociale, tels les fichiers policiers des personnes, le corps social les rejette comme intrus asociaux.

Pour aider à la conceptualisation des *systèmes acentrés* les auteurs se réfèrent à une notion de la théorie des algorithmes : *les réseaux d'automates finis*. L'article visant à bousculer l'imagerie des arborescences de commandement, les propos mathématiques où l'on s'aventure ici n'auront pas grande prétention technique mais plutôt rôle de métaphore hygiénique, métaphore dont on discutera d'ailleurs pour finir les limites.

1. DEUX THÉORÈMES DE DICTATURE

Commençons par l'antithèse, en exposant deux problèmes célèbres dont les solutions pourront paraître bien décevantes.

a. *Le théorème de l'amitié (Erdös, Rényi, Sós)* [1].

Une société est constituée d'un ensemble d'individus *a*, *b*, *c*, ... sur lequel est défini une relation d'amitié obéissant aux seuls axiomes suivants :

I. Si *a* est ami de *b*, *b* est ami de *a* (*a* et *b* sont donc ensemble amis ou non amis).

II. Deux individus quelconques (amis ou non amis) ont *exactement* un ami commun.

On se demande sous quelles conditions une telle société existe, et quelle est la forme de son réseau d'amitié.

On peut tâtonner. Considérons un individu *a*. Il a un certain nombre d'amis *b*, *c*, *d*, *e*, ... Soit *b* l'un de ceux-ci. *a* et *b* ont en vertu de (II) un ami commun *c* par exemple; *d* et *a* ont de même un ami commun, distinct de *b* et *c* en vertu de (II), *e* par exemple, ... Il s'en suit que les amis de *a* sont en nombre pair et organisés en couples d'amis (*b*, *c*), (*d*, *e*), ... Conférons par exemple à *a* quatre couples d'amis comme l'indique la figure 1, et nous avons déjà un exemple de société satisfaisant les axiomes.

Mais *b*, *c*, *d*, *e*, ... peuvent-ils à leur tour comme *a* avoir plus de deux amis? C'est ce que nous tentons d'esquisser en figure 2. *b* par exemple aurait comme amis *a*, *c*, *i*, *j*, ... ce qui conduit à ajouter encore (en plus de la figure) les amis communs de *d* et *i*, *d* et *j*, *e* et *i*, *e* et *j*, ...; soit *l* par exemple l'ami commun de *d* et *i*; *l* et *c* ont un ami commun, qui n'est ni *a* ni *b*; il est donc lui-même entouré comme *b* et *a* de plus de deux amis. Il apparaît en définitive que les individus à ajouter à la figure 2 seraient chacuns reliés à un ami de *a*, *b* et *c* respectivement, tous trois distincts de ceux-ci, et de plus convenablement reliés entre eux. Y parviendra-t-on? Ici l'intuition décroche; un peu de mathématique [2] et l'on prouve que l'on ne parviendra pas à construire une telle société; d'où le *théorème de l'amitié :*

Si dans une société deux individus quelconques ont exactement un ami commun alors il existe un individu ami de tous les autres.

En d'autres termes le graphe d'amitié est nécessairement du type de celui de la figure 1, et non pas d'un type uniforme comme on tentait de le concevoir au cours du raisonnement sur la figure 2.

Laissons aux sociologues le soin d'étiqueter l'ami universel de cette société de couples, maître, confesseur, médecin... autant d'idées qui sont étrangement éloignées des axiomes de départ.

b. *Le théorème de l'indécision collective (Arrow)* [3].

Une société se propose de faire des choix collectifs reflètant l'ensemble des préférences de ses individus. Plus exactement il s'agit d'ordonner un nombre fini de projets, disons A, B, C,... que les individus ont déjà ordonné chacun selon sa préférence individuelle, l'ensemble de ces opinions individuelles constituant

1. H. S. Wilf, *the Friendship Theorem in Combinatorial Mathematics and its Applications*, J.-A. Welsh Academic Press, p. 307-309.

2. Il s'agit de l'analyse spectrale de la matrice d'amitié.

3. G. Kreweras, « les Décisions collectives » in *Mathématiques et Sciences Humaines*, Gauthiers-Villars, n° 2, p. 25 à 35. K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Wiley.

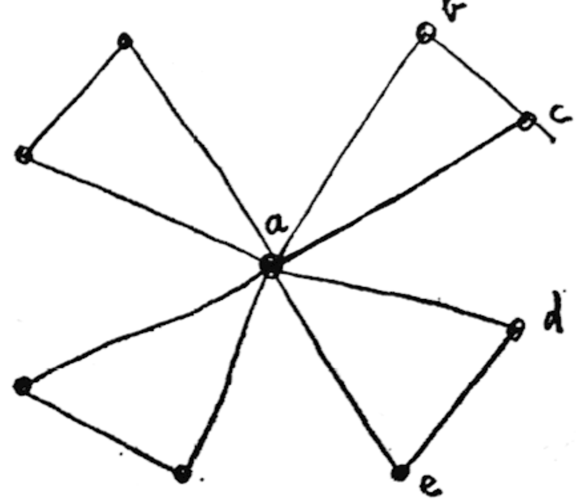


FIG. 1. *Un réseau d'amitié.*

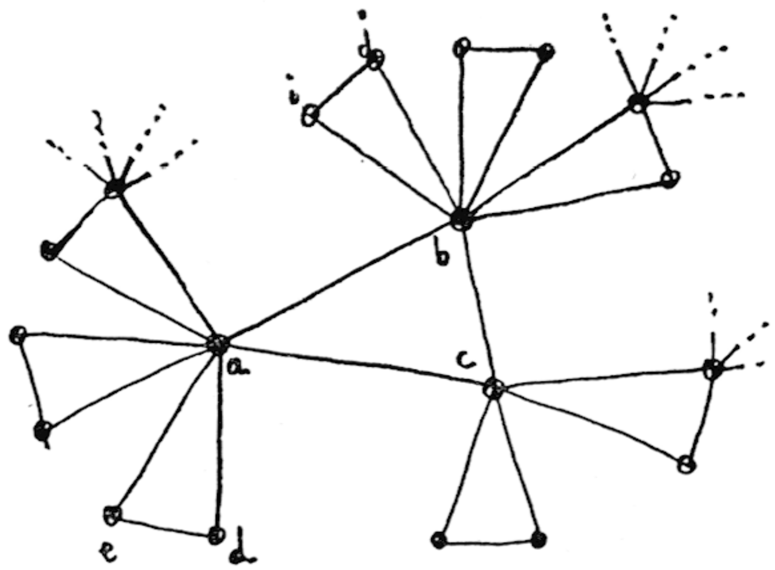


FIG. 2. *Partie impossible d'un réseau d'amitié.*

ce qu'on appelle un état de l'opinion. Le choix collectif doit être déduit de l'état de l'opinion selon une règle établie *une fois pour toutes.* On attend bien sûr de la règle qu'elle traduise[1] l'état de l'opinion; plus précisément on l'astreint aux deux axiomes :

I. axiome de souveraineté de la collectivité : la règle n'exclut *a priori* aucun choix collectif,

II. axiome de loyauté vis à vis des individus : si pour un certain état de l'opinion, la règle conclut que A est collectivement préféré à B (pour prendre un exemple), pour tout changement de l'état de l'opinion où ceux qui préféraient individuellement A à B continuent à faire de même, A doit rester collectivement préféré à B.

Considérons une règle obéissant aux deux axiomes. On appelle *groupement décisif pour la préférence de A à B* (nous disons pour le couple ordonné (A, B)) un ensemble non vide d'individus qui est l'ensemble des individus préférant individuellement A à B, dans un état de l'opinion pour lequel la règle conclut à la préférence collective de A à B.

On démontre alors que :

a) La collectivité est un groupement décisif pour tout couple de projets (unanimité),

b) tout groupement décisif pour un couple de projets l'est pour tout autre couple et constitue donc un noyau dictatorial,

c) pour toute partition d'un noyau dictatorial, et de la collectivité en particulier, en deux groupements l'un est noyau dictatorial.

Il s'ensuit qu'il existe un noyau dictatorial à un individu. D'où le *théorème de dictature* :

Une société qui impose les axiomes de souveraineté de la collectivité et de loyauté vis-à-vis des individus à sa règle de décision collective est une société de régime dictatorial, c'est-à-dire qui identifie tout choix collectif à la préférence individuelle d'un de ses membres choisi une fois pour toutes.

2. FLUIDITÉ ET ACENTRISME

Les deux théorèmes ci-dessus montrent que certains problèmes d'organisation dont l'énoncé est totalement non hiérarchique, n'admettent comme seule solution qu'une solution totalement hiérarchique.

Il ne faut pas en exagérer la portée sociale et encore moins évidemment en tirer argument pour valoriser une centralisation naturelle. D'une part en effet ils procèdent d'axiomes assez rigides (unicité de l'ami commun et unicité de la règle pour tout état de l'opinion[2]) qui reflètent mal les situations réelles. D'autre part il est facile d'exhiber aussi des théorèmes de « démocratie parfaite ». Nous allons y venir au prochain paragraphe.

Il est cependant indéniable que l'usage est de considérer la notion de centralisation comme une sorte de corrélation obligatoire de celle de système ou d'orga-

1. La règle de majorité bien tentante est insuffisante comme l'avait montré Condorcet lorsqu'elle conclut à des préférences circulaires (effet Condorcet).

2. B. MONJARDET « Correspondance de Galois et procédures de votes », C.R.A.S, 272, 7 juin 1971.

nisation, et cet usage provient sans doute de la difficulté où nous nous trouvons de concevoir ce qu'est la *régulation* assurant la cohérence, la stabilité d'une forme sociale. Admettre le primat des structures hiérarchiques revient à privilégier les structures arborescentes, à considérer que la circulation d'information doit se déployer comme un fleuve (à contre courant pour l'information directive). La forme arborescente admet une explicitation topologique. Ainsi que le note en effet R. Thom, le centralisme strict (celui des « sociétés militaires » où un seul chef domine des subordonnés tous équivalents) est la solution la plus simple au problème de la stabilité des sociétés considérées comme formes « métaboliques » (munies d'une régulation). Il peut se décrire de la façon suivante : « chaque individu y occupe une place déterminée, et règle son mouvement de manière que la forme globale de la société soit conservée ainsi que sa position dans l'ensemble. Il est clair que l'invariance globale du corps spatial exige une interaction permanente de chaque individu avec les individus qui l'entourent. Comme la circulation d'information considérée comme un fluide, doit être structurellement stable, le procédé le plus simple pour parvenir à cet effet est d'en faire une circulation de *gradient*; on définira sur le corps social une fonction positive u, l'autorité, nulle au bord, et on astreindra chaque individu à régler sa marche sur l'individu le plus proche situé sur la trajectoire du gradient de u, pour des valeurs supérieures de u [1]. La fonction u doit présenter au moins un maximum [2]; l'individu placé en ce point est le chef parce qu'il ne peut prendre de directives qu'en lui-même. Comme les retards dans la transmission des directives peuvent avoir un effet désastreux sur la stabilité globale, la fonction u ne peut admettre aucun autre point critique que le maximum personnifié par le chef. Il en résulte que le corps social est une boule [3], soumise à une direction monarchique [4] ». Si la circulation est de gradient, une trajectoire allant dans le sens des potentiels décroissants, il ne peut y avoir de trajectoires *fermées*.

Si l'on passe de la représentation continue ici évoquée à une représentation discrète, cette propriété devient caractéristique des structures arborescentes puisque, par définition, un arbre est un graphe (connexe) sans circuits.

On peut faire à propos du modèle arborescent les remarques suivantes :

I. Dans tout système un individu règle sa marche sur ses seuls « voisins » actifs, c'est-à-dire susceptibles de lui transmettre des directives; or dans un système hiérarchique il n'admet qu'un seul voisin actif, son supérieur hiérarchique; un individu ignore donc dans son comportement tout alter ego du même niveau.

II. Dans un système hiérarchique les canaux de transmission sont préétablis : l'arborescence préexiste à l'individu, qui s'y intègre à une place précise qui est une place fonctionnelle.

---

1. Cela signifie que les trajectoires de la circulation d'autorité suivent les lignes de pente de u et sont donc orthogonales aux lignes de niveau. On dit que u admet un point critique en x si grad u est nul en x. Ce point est un point d'équilibre, stable si x est un maximum de u.

2. Il s'agit d'un théorème.

3. Il s'agit aussi d'un théorème.

4. R. Thom, *Stabilité struturelle et morphogenèse*, p. 319. Remarquons qu'une telle description présuppose la possibilité de définir un continuum sous-jacent (et donc inobservable) sur lequel s'inscriraient les interactions sociales, ou encore la possibilité de « géométriser » la notion vague « d'espace social ».

III. Les seuls individus interchangeables sont ceux d'un même niveau et dualement les canaux de transmission relient des individus dont les fonctions sont *discernables.*

A l'extrême opposé des sociétés militaires existent les sociétés dites « fluides » dont l'exemple le plus simple est celui du nuage de moustiques : « chaque individu du groupe se déplace aléatoirement jusqu'à ce qu'il voie tous ses congénères dans un même demi-espace; alors il s'empresse de modifier son mouvement de manière à rentrer dans le groupe. Là, la stabilité est assurée en « catastrophe » par une barrière assurant une discontinuité du comportement [1] ». Remarquons que dans un tel nuage :

I. Chaque individu règle sa marche sur de nombreux « voisins » occasionnels qui sont tous ses alter ego.

II. La relation de voisinage est fluide et aucun réseau ne pré-existe aux individus.

III. Tous les individus sont interchangeables.

IV. La régulation assurant la stabilité du système exige une certaine densité statistique des individus.

Une *société humaine hiérarchisée* n'est évidemment ni fluide, ni militaire. Elle est intermédiaire et admet les deux types de régulation. Tous les individus dépendant hiérarchiquement d'un même centre de décision forment (avec ce centre) une « boule soumise à une direction monarchique », et forment ensembles (à l'exclusion du centre) un « nuage ». Pour garantir la stabilité globale du système, c'est-à-dire interdire toute possibilité de circuit, chaque nuage doit donc être séparé par une sorte d'onde de choc à la fois des autres nuages et des autres niveaux. Les discontinuités du comportement assurant « catastrophiquement » la stabilité des divers nuages sont produites par l'idéologie et maintenues par la répression. Ce qui fait que les sociétés hiérarchisées sont pour ainsi dire *localement fluides* [2].

Après avoir décrit brièvement la morphologie générale d'une société hiérarchisée, il nous faut maintenant étudier ses performances. Une performance est un ensemble réglé d'opérations effectuées en réponse à la circulation d'information. Dans une société localement fluide la situation peut (idéalement) se décrire de la façon suivante. Étant donné un nuage, chacun de ses individus y opère à partir d'une distribution des tâches issue de l'instance de décision associée qui en regroupe, en totalise les résultats partiels. Ces résultats sont produits indépendamment les uns des autres.

La théorie des systèmes acentrés (réseaux d'automates finis) a pour but de fournir des modèles d'organisations abstraites plus subtiles que les organisations localement fluides en explicitant dans quelle mesure des résultats globaux peuvent être accomplis *sans recours à aucun centre* par un nuage *à condition que celui-ci ait un minimum d'organisation (en réseau connexe).* Les individus y opèrent non plus indépendamment les uns des autres mais en réglant leur marche sur les informations qu'ils reçoivent de leurs « voisins ».

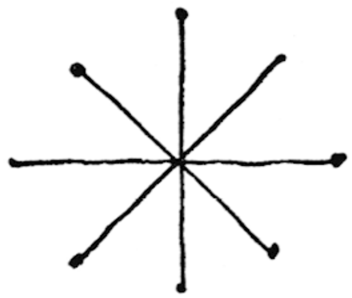
Dans un système acentré la circulation d'information est définie par un graphe et diffère d'une circulation hiérarchique à un double titre :

— le graphe n'a aucune raison d'être un arbre, il est même quelconque;

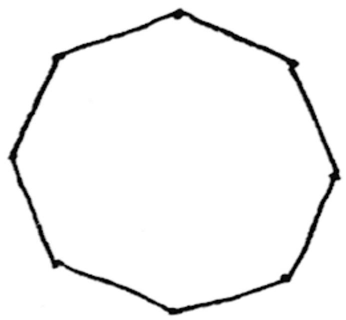
1. R. Thom, *Ibid.*, p. 319.
2. D'où la prégnance de l'analogie : société = organisme.

— chaque ligne d'information est bilatérale;
— les individus sont *tous* interchangeables.

On voit donc que la différence première entre système centré et système acentré provient du fait que l'on autorise des graphes autres que les arbres. Le système sera totalement acentré si les sommets du graphe associé sont indiscernables.



système totalement centré



système totalement acentré

3. LE THÉORÈME DU FIRING SQUAD

Nous exposons le fonctionnement des réseaux d'automates finis à partir du célèbre problème du *Firing Squad* dont l'histoire mathématique a eu de nombreux rebondissements, jusqu'à une victoire définitive de l'acentrisme sur la hiérarchie.

On considère n individus (soldats), disposés en ligne, qu'il s'agit d'amener *tous ensembles* (à la même unité de temps) dans la position « feu » (on dira état « feu »), position *nouvelle pour tous* (aucun ne doit l'avoir prise aux unités de temps antérieures). La solution évidente qu'évoque le titre du problème consiste à se doter d'un général, centre de décision extérieur à la ligne, donnant un ordre commun comme l'indique la figure 3. Cette situation a été suffisamment commentée plus haut.

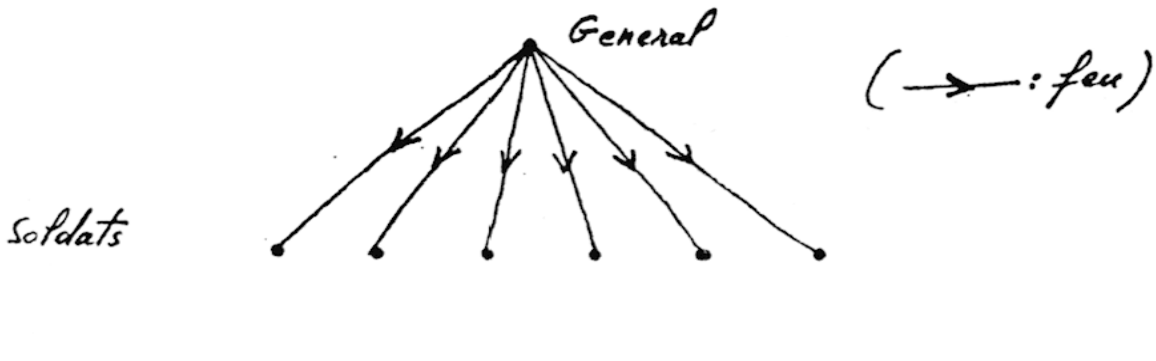


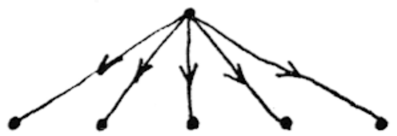
FIG. 3. *Firing Squad.*

E. F. Moore [1] proposa en 1964 que l'on place le général en bout de ligne, et que chaque soldat ne communique qu'avec ses voisins dans la ligne, et l'un d'entre eux seulement avec le général. Chaque soldat (identique à tout autre) choisirait à chaque unité de temps un état parmi un ensemble fini d'états, et ce choix serait effectué selon une règle systématique (règle de transition) ne mettant en jeu que l'état présent du soldat et de ses voisins (ou de son voisin pour celui du bout de la ligne). Mathématiquement le soldat est devenu automate fini. A l'instant 0 il sommeille. Seul le général s'éveille, et initie une activité de communication entre les soldats (par un autre état que l'état « feu » d'ailleurs puisque lui aussi ne devra le prendre qu'une seule fois). La conjecture était alors de savoir si le nombre n de soldats augmentant, le problème resterait soluble avec un nombre *constant* d'états, c'est-à-dire un individu d'intelligence fixe (indépendante de n) [2].

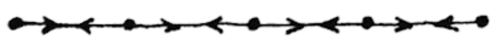
En 1966 il fut proposé une solution très complexe mais finie à ce problème; en 1967 R. M. Balzer [3] proposa une solution à 8 états seulement dont il ne fut jamais démontré à notre connaissance que ce fut le minimum; et en 1966 l'un des auteurs [4] prouva que le problème se passait de général en bout de ligne, et même de mise en ligne : dans une organisation en réseau connexe quelconque où tout automate est susceptible de servir d'initiateur, le problème de la synchronisation reste soluble par un automate fini très élémentaire.

Remarquons deux choses au sujet du problème acentré du Firing Squad :

I. Le graphe réglant la circulation d'information est en quelque sorte l'opposé du graphe hiérarchique (voir figure 4). A chaque temps t un automate lit l'état de ses voisins.



Graphe hiérarchique



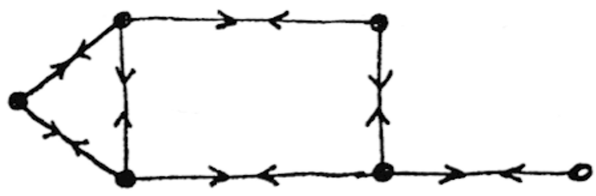
Firing Squad de E. F. Moore

1. Moore E. F. « The Firing Squad synchronization problem » in *Sequential Machines Selected Papers*, p. 213-214, Addison-Wesley, Reading, Mass 1964.

2. Cela revient à éliminer la solution triviale selon laquelle les soldats pouvant compter arbitrairement loin et se numérotant successivement à partir du général et du temps t = 0 par la transmission d'un signal se réfléchissant sur le bout de la ligne, le soldat de numéro p se mettrait dans l'état « feu » p unités de temps après l'instant où le signal réfléchi lui serait parvenu.

3. Balzer R. M., « An 8 — state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. » *Information and Control*, 10, n° 1, p. 22-42, 1967.

4. Rosentiehl P. « Existence d'automates finis capables de s'accorder bien qu'arbitrairement connectés et nombreux », *Intern. Comp. Centre* 5, p. 245-261, 1960.



Firing Squad général en réseau

FIG. 4 : Les trois énoncés du problème du *Firing Squad*

II. Le fait qu'un automate au temps initial prenne l'initiative d'activer la collectivité n'implique en rien la réintroduction d'une hiérarchie; d'une part en effet le problème est soluble pour n'importe quel graphe et n'importe quel initiateur; d'autre part un réseau acentré peut être conçu pour résoudre plusieurs problèmes à la fois, à partir d'initiateurs différents.

III. Le temps est discret : si un automate est initiateur à la date $t = 0$, un autre automate x est en sommeil jusqu'à la date $d(x)$ où $d(x)$ est la longueur de la plus courte chaîne de x à l'initiateur; le temps total du calcul est fonction du nombre d'automates du réseau, et égal évidemment à au moins n pour une ligne de n automates.

Élaborons une solution pour une ligne de n automates. Le principe est de « marquer » le ou les deux automates milieu de ligne, puis sur chacune des deux demi-lignes de procéder de même, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les automates se trouvent, ensemble, pour la première fois, marqués et entourés de voisins tous marqués. Ils se mettent alors dans l'état « feu ».

Pour construire des marques, imaginons le concept de signal se propageant à la vitesse m (m entier) le long d'une chaîne : un automate de la chaîne est dans l'état S_1 qui devient S_2 au temps suivant, puis S_3, ..., puis S_m enfin. C'est alors qu'il impose l'état S_1 à l'automate suivant de la chaîne, etc. Il est bien évident que les automates finis sont susceptibles de faire circuler des signaux de toutes vitesses m. Il est aisé de construire des fonctions de transition ayant cette propriété. Notons la propriété évidente : si un signal de vitesse 1 partant d'un bout de ligne et ricochant à l'autre bout est suivi au départ d'un signal de vitesse 3, les deux signaux se croisent en milieu de ligne.

On suppose que chaque automate de la ligne est capable, une fois excité convenablement, d'émettre des signaux de vitesses respectives $1, 3, 7, ..., 2^k - 1, ...$ vers sa droite et sa gauche éventuellement [1]. Disons alors qu'il est un « émetteur ». Au temps $t = 0$ une extrémité de la chaîne (le général) sera émetteur. Puis les automates observeront les deux règles suivantes :

a) Lorsqu'un signal atteint une extrémité de chaîne, celle-ci devient un émetteur.

b) Là où deux signaux se croisent il apparaît un ou deux émetteurs (selon que le croisement tombe sur un automate ou entre deux).

c) Lorsque tout automate est émetteur et a tous ses voisins émetteurs, le temps suivant est celui de l'état « feu ».

Alors on constate que l'état « feu » apparaît à la date $2n - 2$.

1. Cela est possible avec un nombre fini d'états *indépendant de k*.

Nous représentons en figure 5 le cas de la ligne à 5 automates.

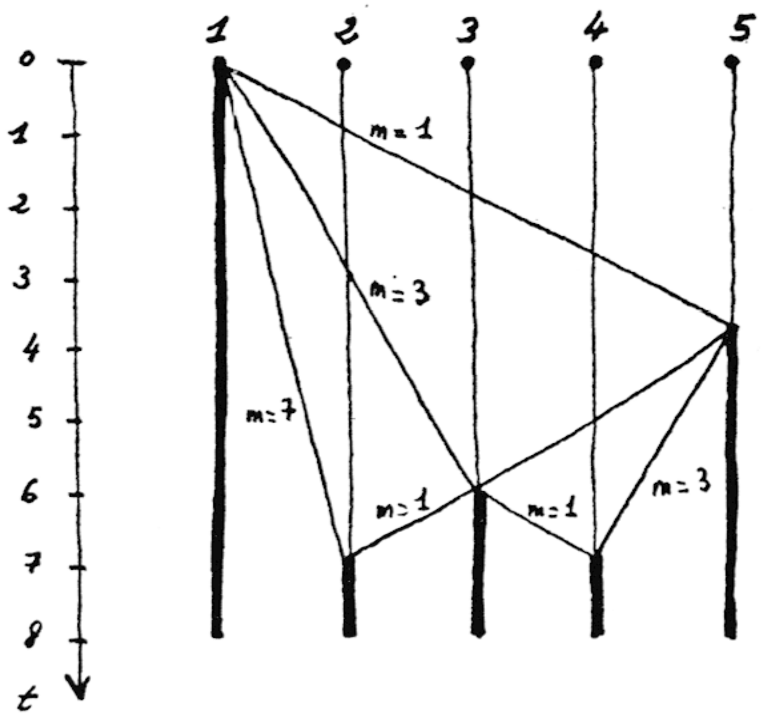


FIG. 5 : Résolution du *Firing Squad* à 5 automates en ligne en 8 unités de temps

Élaborons maintenant une solution du *problème du Firing Squad pour un cercle de n automates*, disons 8, ne recourant qu'aux deux signaux S_1 et S_3 de vitesses respectives $m = 1$ et $m = 3$.

Les automates (toujours capables de devenir émetteurs) observeront les règles suivantes :

a') Là où deux signaux identiques se croisent il apparaît un ou deux émetteurs qui renvoient dans les deux sens le même signal.

b') Là où deux signaux différents se croisent, il apparaît un ou deux émetteurs qui renvoient dans les deux sens les deux types de signaux.

c') Lorsque tout automate est émetteur et a ses deux voisins émetteurs, le temps suivant est celui de l'état « feu ».

Alors, comme on le voit sur la figure 6, aux temps,

$t = 0$: 1 est émetteur,

$t = 4$: 5 devient émetteur,

$t = 6$: 3 et 7 deviennent émetteurs par croisement de signaux distincts,

$t = 9$: 2, 4, 6 et 8 deviennent émetteurs,

$t = 10$: état « feu ».

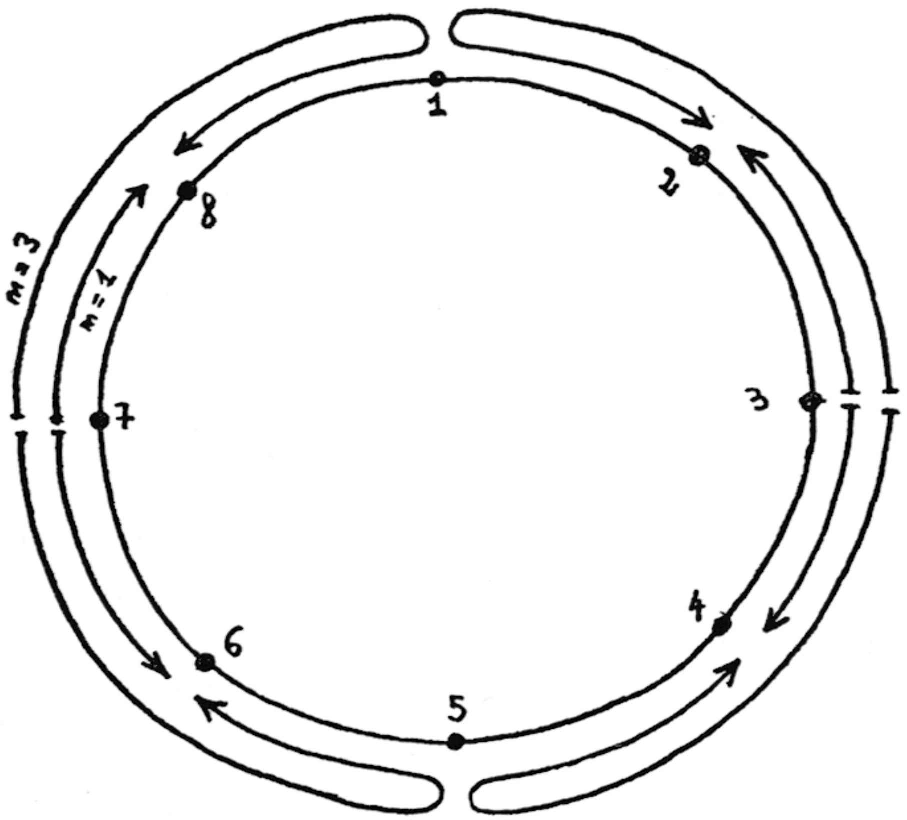


FIG. 6 : Signaux émis aux temps 6 à 10 pour la résolution
du *Firing Squad* circulaire ($n = 8$)

Formulons à partir des exemples ci-dessus quelques *caractéristiques des réseaux d'automates finis :*

I. Le réseau dans son entier est le siège d'un calcul autonome ni programmé ni dirigé par une instance centrale. Le calcul est effectué « en parallèle » par les automates. Bien entendu toute l'intelligence est préétablie dans l'automate standard, mais sa forme réduite peut suggérer certains processus psychologiques spontanés.

II. L'intelligence élémentaire est standard et ne dépend pas du réseau lui-même, mais du problème à résoudre. On peut imaginer des automates avec ν pattes (automates de valence ν) libérés dans l'univers et connectant leurs pattes au hasard à d'autres automates du même type, pour constituer un réseau. On dit qu'un automate « lit » par une patte l'état de la patte qui lui est éventuellement connectée.

III. Le nombre de sommets et de lignes du réseau n'est pas limité; seule la valence maximum ν de chaque sommet fait partie de la structure de l'automate. Toute destruction ou adjonction d'automates ou de connexions est possible. Les automates qui pour un problème donné supportent une modification du réseau en cours de calcul sont particulièrement intéressants.

Un automate $\mathcal{A}$ est défini par : ν pattes numérotées de 1 à ν, un ensemble d'états identique pour chaque patte, et une *fonction de transition* $\varnothing$ *qui définit pour tout état au temps* t *des pattes de* $\mathcal{A}$ *et des pattes* (appartenant à d'autres automates par exemple) *qui leur sont connectées, l'état des pattes de* $\mathcal{A}$ *au temps* $t + 1$.

Une famille de n automates de type $\mathcal{A}$ constitue un réseau R si les pattes des automates se connectent 2 à 2 ou restent mortes; le réseau est alors connexe ou non et de valence au plus ν. Soit G le graphe constitué.

Il est légitime de se demander si un problème de graphe [1] (recherche d'un arbre maximal, des centres, d'un diamètre, d'un circuit hamiltonien, etc...), peut-être résolu par un algorithme effectué par des intelligences élémentaires standard placées aux sommets de G, fonctionnant en parallèle, et affichant le résultat là même où il se trouve, la mémoire des calculs étant implantée dans la structure qui est l'objet même du calcul.

Un problème sera dit « soluble par réseau d'automates finis [2] *» si il existe un automate fini* $\mathcal{A}$ *tel que l'assemblage d'un nombre arbitraire de copies de* $\mathcal{A}$ *en un réseau quelconque, mis à l'état initial de sommeil à l'exception de l'une d'entre elles choisie arbitrairement comme initiateur, évolue vers un état stationnaire qui affiche la solution du problème.*

La reconnaissance des problèmes solubles par réseau d'automates finis est un problème ouvert qui est actuellement l'objet de diverses conjectures.

On peut facilement établir le résultat suivant : *la construction d'un arbre maximal d'un graphe connexe est soluble par réseau d'automates finis à* 5 *états par patte.* Dans un graphe connexe, il y a en général plusieurs arbres maximaux; le choix arbitraire de l'un d'entre eux est effectué grâce à la numérotation arbitraire des pattes de chaque automate.

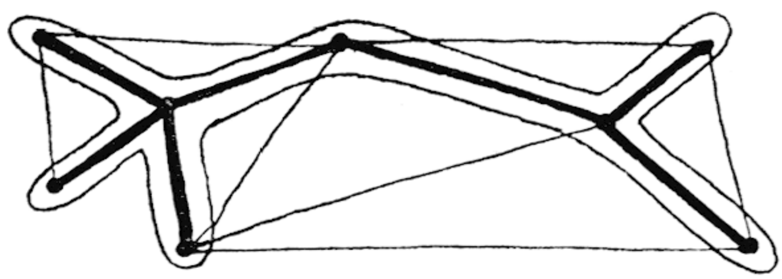


FIG. 7. Choix d'un arbre maximal et d'une chaîne circulaire associée.

1. BERGE (C.), *Graphes et hypergraphes*, Dunod 1974.
2. ROSENSTIEHL (P.), FIKSEL(J. R.), HOLLIGER (A.), « Intelligent graphs » in *Graph Theory and Computing*, Academic Press, 1972, p. 219-265.

Le problème de l'arbre maximal étant résolu, il faut ajouter peu de chose à l'automate solution pour qu'il établisse une chaîne circulaire de cet arbre comme indiqué en figure 7.

Nous parvenons enfin à l'un des résultats visés : à tout graphe on sait associer une chaîne circulaire passant au moins une fois par tous les sommets. Or le problème du Firing Squad a été résolu ci-dessus pour une chaîne circulaire à initiateur quelconque, donc il est résolu pour un graphe quelconque avec initiateur quelconque.

La description plus complète de la solution nous amènerait à « empiler » des automates, ayant les diverses fonctions requises, se transmettant leurs états avec des décalages temporels adéquats. Le parallélisme préside alors tout à fait au calcul puisque *les automates empilés élaborent de front la construction de l'arbre, de la chaîne circulaire, et des signaux S_1 et S_2 du Firing Squad le long de la chaîne circulaire.*

4. ORGANISATION ACENTRÉE D'UNE SOCIÉTÉ DE MOTS

Les réseaux d'automates traitent essentiellement de l'aspect logistique des organisations. Ils permettent de résoudre des problèmes d'autonomie de communication apparemment très complexes en « localisant » des algorithmes de la théorie des graphes. C'est pourquoi ils interviennent dans l'étude des intelligences artificielles et de la reconnaissance des formes.

Nous allons présenter une étude récente de sémantique de J. Fiksel[1]. La question est la suivante : trouver un modèle plausible de l'activité psychologique assurant la réponse par oui ou par non à une question (de structure prédicative). Pour cela on se donne une mémoire où l'information est consignée et un « contrôle terminal » qui pose la question *i. e.* qui donne un ordre de recherche et répond en fonction du travail effectué dans la mémoire. Nous allons voir qu'il s'agit en fait de l'organisation acentrée d'une certaine société de mots.

La mémoire est décrite comme un graphe orienté étiqueté $G = (X, E)$ où les sommets (X) sont étiquetés par des termes de la langue et les arcs (E) par des relations (appartenir à, a comme partie, etc...). On suppose que dans l'ensemble T de ces relations, chaque élément u admet un inverse formel u^{-1}. Pour reprendre l'exemple de Fiksel on peut considérer la mémoire « zoologique » de la figure 8 où E, C, H sont les relations, E $\equiv$ élément de, C $\equiv$ sous ensemble de, H $\equiv$ a comme partie.

Remarquons que toutes les relations possibles entre les termes ne sont pas consignées (la relation « rouge-gorge $\overset{H}{\rightarrow}$ ailes » manque par exemple).

On peut transformer G en réseau d'automates de la façon suivante. Si ν est la valence de G, on place en chaque sommet de G un exemplaire d'un automate à ν pattes (dont certaines peuvent être mortes). Si la patte (x, r) du sommet x et la patte (y, s) du sommet y sont connectées, et si l'arc orienté (x, y) associé est étiqueté par $u \in T$, on étiquète (x, r) par u et (y, s) par u^{-1}. On définit ainsi pour

1. « A network-of-automata model for question—answering in semantic memory », *Technical report* n° 218, Institute for mathematical studies in the social sciences, Stanford University, 1973.

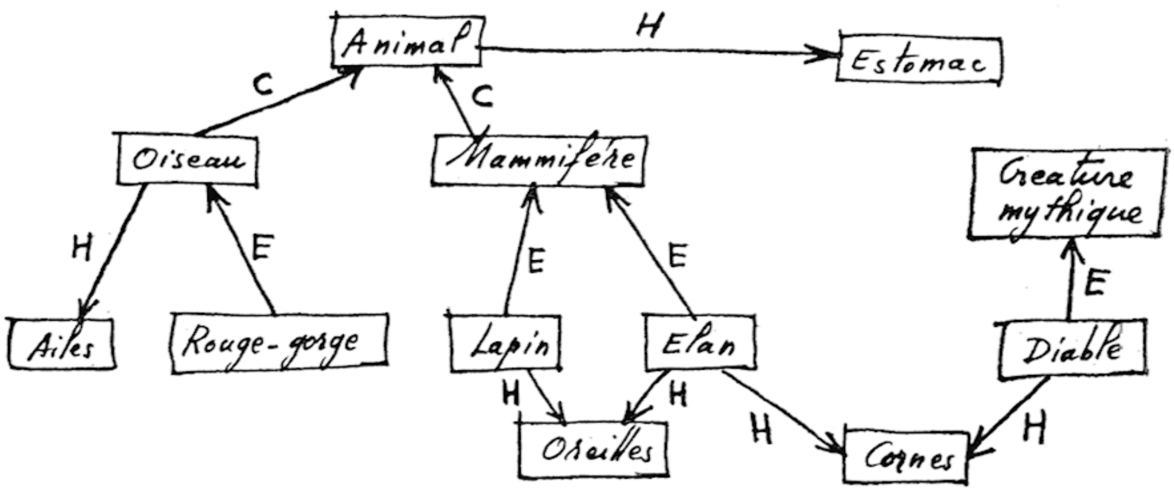


FIG. 8. Société de mots dont les connexions sont étiquetées en types de relations.

chaque automate x un vecteur relationnel $g_x = (g_x^1, \ldots, g_x^\nu)$. (On assigne aux pattes mortes la relation vide $\Omega \in T$).

La lecture de l'automate x est alors constituée par ce vecteur g_x et par les états des pattes des automates voisins connectées à celles de x.

Pour connecter la mémoire sémantique au terminal, on rajoute à chaque automate une $(\nu + 1)$ ème patte connectée au terminal et dont les états et les entrées sont (I, 0, 1, 2) : I est l'état de repos; le terminal envoie une excitation de type 1 (ou 2) à l'automate x lorsque la lecture de la $(\nu + 1)$ ème patte de x est 1 (ou 2) pendant une unité de temps suivie de l'état I; l'état 0 est utilisé par le terminal pour « geler » le réseau : quand x reçoit 0 du terminal, il arrête tout calcul jusqu'à ce qu'il reçoive I, auquel cas il se remet au repos.

Une « question » est alors un triplet (x, q, y) où $x, y, \in X$ et q est une séquence relationnelle $A_1 A_2 \ldots A_n$ d'éléments de T. On note Q (α, T) l'ensemble des séquences où $n \leqslant \alpha$. Une « réponse » est un chemin dans G de x à y composant la séquence q. Il s'agit alors de trouver un automate accomplissant localement la recherche d'un tel chemin. La recherche pourrait évidemment être exécutée globalement par énumération de tous les chemins entre x et y. Mais ce n'est certainement pas ainsi que fonctionne une mémoire réelle : « *this type of enumeration would ordinarily require a global intelligence with the capacity to store information in tree- like* *lists. The significance of theoreme 1*[1] *is that it shows how this algorithm can be executed using far more limited computational powers; namely, by a network of finite automata in which only local interactions are permitted* ».

L'algorithme local de recherche d'un chemin réponse dans la mémoire sémantique peut alors se décrire comme suit. Soit $q \varepsilon Q(\alpha, T)$. L'ensemble des états d'une patte est $E_o = \{w, I, 1_1, 1_2, 1_{12}, 2_1, 2_2, 2_{12}, \ldots (\alpha/2)_1, (\alpha/2)_2, (\alpha/2)_{12}\}$ (avec α pair) les interprétations étant les suivantes (en notant $e^t_{z,r}$ l'état de la patte r de l'automate z au temps t) :

— w : état mort,

— I : état de repos,

— $e^t_{z,r} = k_1$: le réseau a construit un chemin $A_1 \ldots A_k$ à partir de x, où $A_1 \ldots A_k$ sont les k premières relations de q et (z, r) correspond à A_k,

— $e^t_{z,r} = k_2$: le réseau a construit un chemin $A^{-1}_n \ldots A^{-1}_{n-k+1}$ à partir de y, où $A_{n-k+1}, \ldots, A_n$ sont les k dernières relations de q et (z, r) correspond à A^{-1}_{n-k+1},

— $e^t_{z,r} = k_{12}$: (z, r) est la k ème patte de deux chemins, l'un partant de x, l'autre de y (ce qui implique $A_k = A^{-1}_{n-k+1}$).

Ce dernier cas est spécial comme nous allons le voir.

La recherche d'un chemin réponse s'effectue alors par un procédé trivial de ramification à partir de x et de y à la fois, selon la fonction de transition suivante. (Si l'automate z ne satisfait aucune des conditions initiales des règles ci-dessous, il demeure dans son état initial).

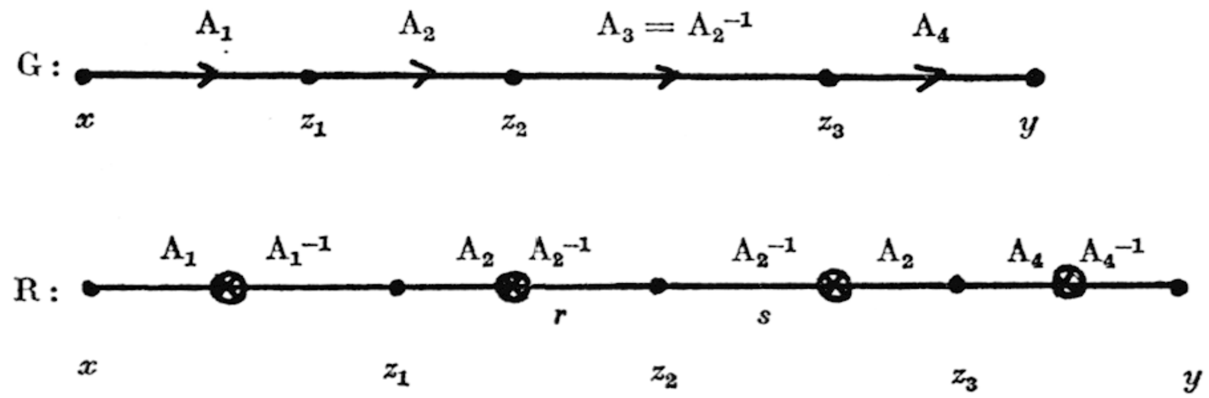
1. (*a*) Si l'automate x reçoit une excitation de type 1 (du terminal), il place toutes ses pattes étiquetées A_1 dans l'état 1_1.

(*b*) Si l'automate y reçoit une excitation de type 2 (du terminal), il place toute ses pattes étiquetées A^{-1}_n dans l'état 1_2.

2. (*a*) Si l'automate z reçoit un k_1 signal, il place toutes ses pattes étiquetées A_{k+1} dans l'état $(k+1)_1$.

(*b*) Si l'automate z reçoit un k_2 signal, il place toutes ses pattes étiquetées A^{-1}_{n-k} dans l'état $(k+1)_2$.

(*c*) Dans le cas spécial où l'automate z reçoit simultanément des signaux k_1 et k_2 et si $A_{k+1} = A^{-1}_{n-k}$, alors z place toutes ses pattes étiquetées A_{k+1} ou A^{-1}_{n-k} dans l'état $(k+1)_{12}$. Les états k_{12} ont donc pour but d'éviter que dans ce cas particulier il y ait rétrocession comme dans l'exemple suivant où $A_3 = A_2^{-1}$ et où désigne une connexion de pattes.



1. Cf. p. 60.

(En recevant A_2 de z_1, z_2 devrait mettre d'après (*a*) ses deux pattes dans l'état 3_1. Mais comme il reçoit en même temps $A_3^{-1} = A_2$ de z_3, il devrait mettre d'après (*b*) ses deux pattes dans l'état 3_2 : d'où la nécessité de l'état 3_{12}).

3. Si $e^t_{z,r} = k_i \; i \in \{1, 2, 12\}$, alors $e^{t+1}_{z,r} = \mathrm{I}$: après avoir transmis un signal, une patte se met au repos.

4. Conditions de réponse.

(*a*) Si z reçoit simultanément un k_1 et un $(n - k)_2$ signal, ou

(*b*) Si z reçoit simultanément un k_1 signal et transmet un $(n - k + 1)_2$ signal *le long de la même patte* alors z place sa $(\nu + 1)$ ème patte dans l'état 1.

Le terminal recevant cette réponse dit « OUI » à la question (xqy). On remarquera que si $q \in \mathrm{Q}(\alpha, \mathrm{T})$, l'ensemble d'états E_0 ne dépend que de α, mais qu'en revanche *la fonction de transition* Φ_q *dépend de* q.

A partir de cette description on peut alors démontrer le :

Théorème 1. Soit $\mathrm{G} = (\mathrm{X}, \mathrm{E}, \mathrm{T})$ un graphe orienté dont les arcs E sont étiquetés par T. Pour toute question (xqy) avec $(x, y) \in \mathrm{X}$ et $q \in \mathrm{Q}(\alpha, \mathrm{T})$ (les suites d'au plus α éléments de T), il existe une fonction de transition Φ_q telle que si x et y sont excités par le terminal, le réseau associé à Φ_q et G puisse assurer l'existence d'un chemin de forme q entre x et y en un temps $\theta = \frac{n}{2} + 1$. (Si donc au bout d'un temps θ le terminal n'a pas reçu de réponse du réseau, il répond « NON ». Le terminal étant un organe spécial, il sait compter arbitrairement loin).

Comme il peut évidemment exister plusieurs chemins de forme q entre x et y, le point délicat de la démonstration est de montrer que lorsque deux tels chemins ont une partie commune les signaux peuvent traverser ces chemins *sans interférence.* On montre même que *tous* les chemins entre x et y sont construits et qu'ils fournissent une réponse au terminal *au même instant.*

On conçoit l'importance d'un tel résultat pour les recherches documentaires par exemple. Étant donnée une mémoire organisée en graphe étiqueté (qui peut être extrêmement complexe), l'énumération des chemins nécessiterait une mémoire centrale considérable qui fonctionnerait en plus de façon « stupide ». Qui plus est le modèle acentré est sans conteste plus pertinent comme modèle de psychologie théorique.

Ce modèle peut d'ailleurs être précisé. D'une part en effet on peut montrer qu'en « empilant » sur les automates de recherche un automate simple de marquage, on peut non seulement obtenir la réponse à une question (xqy) mais en plus dégager explicitement tous les chemins de forme q entre x et y. On peut d'autre part prendre en compte la question de l'implication. Cela est nécessaire pour autant que les mémoires sémantiques sont *incomplètes.* Dans l'exemple que nous avons donné, la relation « rouge-gorge $\xrightarrow{\mathrm{H}}$ ailes » n'était pas consignée. Or si l'on pose la question (rouge-gorge, H, ailes) il serait évidemment souhaitable que la réponse du terminal soit « OUI ». Pour cela on introduit la notion de *production.*

Une production élémentaire est un opérateur :

$\theta : \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 \rightarrow \mathrm{B}_1$ ou $\theta : \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2 \rightarrow \mathrm{B}_2$ où $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathrm{T}$

et où la flêche représente une implication logique (ici $\mathrm{EH} \rightarrow \mathrm{H}$). Cela permet de définir par généralisation les productions permises $p \rightarrow q$ où p et q sont deux séquences d'éléments de T. (*i.e.* $\exists\, \theta_1, ..., \theta_m$ *t.q.* $\theta_1 ... \theta_m\, p = q$). Répondre à une question (xqy) c'est alors chercher si dans la mémoire sémantique, il existe un chemin de forme p entre x et y tel que $p \rightarrow q$. Soit $\mathrm{P}_\theta(q)$ l'ensemble de ces chemins. $P_\theta (q)$ peut être très grand car les θ_i tels que $\theta_1 \ldots \theta_m \, p = q$ n'ont aucune raison d'être distincts. On sera donc conduit à chercher *le plus court chemin* dans $P_\theta (q)$. Si $P_\theta (q) = \varnothing$ la recherche ne peut se terminer. Le terminal doit donc fixer une limite au-delà de laquelle il répond « NON » en l'absence de réponse du réseau.

On démontre alors que la recherche du plus court chemin de $P_\theta (q)$ (de longueur l) est calculable par automates finis dans un temps de calcul de $l/2$.

Notre incursion dans un domaine de la linguistique aura pu paraître bien éloignée du propos général sur les sociétés. Il n'en est rien. Nous venons en effet de voir comment une collectivité d'individus dont les connexions sont étiquetées, trouve au sein d'elle-même une chaîne d'étiquettes données si elle existe, chaîne qui peut être arbitrairement longue, comme peut être arbitrairement grand le nombre des individus.

CONCLUSION

Nous voudrions pour conclure discuter brièvement du jeu métaphorique que permet le langage des systèmes acentrés. Nous pourrions dire des constructions théoriques proposées ci-dessus, sans les minimiser, qu'elles ont trait au niveau *logistique* des organisations : « problèmes de communication de masse ». Nous avons résolu des problèmes de coordination entre cellules sans coordinateurs en nous octroyant l'hypothèse forte de la calculabilité, c'est-à-dire de la *digitalisation* de l'information. En d'autres termes, la nature des cellules, et les problèmes à résoudre ont toujours été réduits à des listes d'états susceptibles d'être représentés par des numéros *(digits)* et à des règles de changement d'état également digitalisables.

C'est dans ce cadre d'hypothèses fortes que nous avons prouvé, contrairement à la croyance selon laquelle le nombre engendre soit le désordre soit l'uniformité, qu'une coordination efficace peut s'installer au sein d'une collectivité acentrée d'individus de mémoire limitée, et pourtant arbitrairement nombreux. Mais le dessein de notre propos, sur le sujet soulevé par la revue *Communications*, ne s'arrête pas là.

Considérons des systèmes acentrés naturels tels la fourmilière et la termitière. La construction par les termites d'un édifice en forme d'éponge ou les opérations de lissage de surfaces accomplies par les fourmis telles que les décrit R. Chauvin [1] constituent sans aucun doute des manifestations de systèmes acentrés. Il est clair qu'il n'existe aucune fourmi possédant les « plans » de la fourmilière. La fourmilière est un chantier sans architecte. Mais si la fourmilière n'est pas récapitulable pour une fourmi, elle ne l'est pas d'avantage pour un automate fini, aussi complexe soit-il [2].

Et c'est même là que la notion de système acentré trouve dans la réalité l'une de ses spécificités principales, à savoir que les activités accomplies localement par les individus (mots, fourmis, hommes en foule) sont non récapitulables par

1. Cf. R. Chauvin, « Les sociétés les plus complexes chez les insectes », dans ce volume.

2. Derrière cette affirmation se profile la question générale et essentielle suivante : comment des morphologies naturelles globales peuvent-elles se constituer comme agrégat d'événements erratiques élémentaires.

une mémoire centrale, parce que qualitatives comme on le dit souvent. Et quelles que soient les tentatives de hiérarchisation opérées sur un système naturellement acentré, la « qualité » reste toujours dispersée, locale. C'est pourquoi le seul lieu où peut être constitué un « fichier des personnes » (tels que certains s'aventurent à en faire aujourd'hui dans diverses sociétés politiques) c'est chez les personnes elles-mêmes, seules capables de porter leur description et de la tenir à jour : la société est le seul fichier possible des personnes. *Une société acentrée naturelle rejette comme intrus asocial l'automate centralisateur.*

Dans les systèmes acentrés abstraits qui ont été ci-dessus l'objet de *théorèmes* les opérations locales qui étaient mises en jeu pouvaient aussi être rassemblées dans un automate centralisateur monstre (qui eut été d'une taille de l'ordre de celle du réseau lui-même); l'opposition centré/acentré ne relevait donc en fait que d'une opposition de modalités de calculs. Il nous semble nécessaire de préciser ce point pour prévenir les abus dans l'emploi métaphorique de la notion d'acentrisme.

PIERRE ROSENSTIEHL ET JEAN PETITOT.
Paris, École Pratique des Hautes Études.