APPROCHE TRANSCENDANTALE DE LA PHILOSOPHIE DES MATHEMATIQUES DE WITTGENSTEIN

par Jean PETITOT
Séminaire d'Épistémologie des Mathématiques
École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris

Novembre 1998

Je ne suis pas un exégète de Wittgenstein. Cette compétence ne s'improvise pas. Mon propos est ici tout différent. Il est d'essayer de répondre à la question suivante : quelle philosophie des mathématiques obtient-on si l'on développe une théorie transcendantaliste de l'objectivité mathématique? Ma réponse est qu'on obtient une philosophie des mathématiques très proche de celle de Wittgenstein.

La philosophie mathématique de Wittgenstein appartient à un *type* de philosophie. C'est une philosophie prescriptive de l'objectivité conçue comme système de règles qui s'oppose à une ontologie d'objets indépendants. Par définition, ce type de philosophie est *transcendantal* et j'ai donc essayé d'évaluer de cette façon Wittgenstein, en particulier dans mon hommage à Jean-Toussaint Desanti[1].

L'intérêt de la philosophie mathématique de Wittgenstein est, selon moi, d'avoir retrouvé et à nouveau revendiqué, pour les mathématiques, tous les principes, toutes les exigences et toutes les conséquences d'une doctrine *de l'objectivité* — en tant qu'opposée à une ontologie. Elle représente selon moi :

(i) un cas moderne exemplaire d'approche *transcendantale et critique* ;

(ii) une radicalisation de la *légalité* du formel en tant que tel, du formel considéré comme instance *autonome*.

La thèse — qui surprendra sans doute par son aspect "hérétique — est que la philosophie wittgensteinienne des mathématiques est *une philosophie transcendantale de l'objectivité grammaticale du mathématique dans son autonomie et sa légalité propre*. Autrement dit le "turning point" wittgensteinien serait la "révolution copernicienne" *pour les mathématiques*. Il *répète* tous les moments constitutifs de la philosophie kantienne, qui était

---

[1] Petitot [1991].

une philosophie transcendantale de l'objectivité physique du sensible dans son autonomie et sa légalité propre. Mais il en diffère en même temps considérablement puisque, chez Kant, les mathématiques sont pensées en grande partie à partir de leur rôle dans les théories physiques et non pas véritablement en tant que telles.

1. LA COMPARAISON PHYSIQUE/MATHEMATIQUE

Il est curieux que personne n'ait jusqu'ici vraiment insisté sur le parallèle extrêmement frappant qui existe entre la philosophie *mathématique* de Wittgenstein et la philosophie *physique* (et non pas mathématique, insistons-y pour éviter tout malentendu) de Kant. Pourtant, Wittgenstein lui-même a souvent expliqué que le point de vue le plus proche du sien était celui du synthétique a priori kantien. Mais il faut dire que l'aversion anti-kantienne du Cercle de Vienne était telle que le transcendantalisme était devenu une question tabou.

Le parallèle Kant/Wittgenstein tient dans le tableau de la page suivante.

	Kant (physique)	**Wittgenstein (maths)**
Classe de phénomènes considérés.	Phénomènes de l'intuition sensible.	Énoncés linguistiques lexicalement mathématiques.
Catégories et Principes.	Nécessité d'une légalisation objectivante. Instance légalisante = Analytique transcendantale.	Nécessité d'une légalisation objectivante. Instance légalisante = Grammaire, règles et démonstrations.
Objets constitués par la légalisation.	Phénomènes objectivés = Objets.	Énoncés mathématiques objectivés = Propositions mathématiques démontrées.
Inaccessibilité épistémique de la réalité ontologique sous-jacente aux objets.	Inacessibilité et non sens de la réalité nouménale en soi.	Inacessibilité et non sens d'un sens des propositions référant à des idéalités.
Synthétique a priori.	L'objectivité physique du monde est prescriptive et non descriptive.	L'objectivité symbolique des mathématiques est prescriptive et non descriptive.
“Révolution”	Révolution copernicienne	Turning point

Ce qui est commun à Kant et à Wittgenstein .
Le rapport à la finitude.
La certitude et la nécessité sont relatives aux instances de légalisation.
Toute réintroduction d'une ontologie conduit à des antinomies dialectiques. Pouvoir faire apparaître des questions comme dénuées de sens (dialectique transcendantale) est la marque du passage de l'ontologie à l'objectivité.

Il existe d'excellentes introductions à et d'excellents commentaires de la philosophie de Wittgenstein (M. Dummett, G.H. von Wright, etc.). On consultera en particulier les récents ouvrages de Jacques Bouveresse. Nous nous réfèrerons ici au livre remarquable de Stuart Shanker : *Wittgenstein and the turning point in the philosophy of mathematics*.[2] Il présente en effet l'avantage d'être à la fois érudit et complet, juste et radical.

1. Dans l'objectivité mathématique, ce qui tient lieu de ce que sont en physique les phénomènes et états de choses sensibles à objectiver sont les *énoncés* mathématiques *non formalisés*, des énoncés verbaux (linguistiques) exprimés dans des langues quasi-naturelles augmentées de lexiques mathématiques (7+5 = 12, 7 est un nombre premier, le théorème de Pythagore, etc.). En physique, de tels énoncés isolés portant sur une ontologie substantialiste de choses et d'évènements indépendants sont des énoncés sans contenu objectif en tant que tels. La première thèse transcendantale est que leur contenu ontologique apparent n'est qu'une hypostase linguistique. Les phénomènes doivent être déterminés et objectivés, c'est-à-dire légalisés. Ils ne sont pas donnés avec leur sens d'objet déterminant. De même, selon Wittgenstein, des énoncés isolés se donnant comme mathématiques *ne possèdent pas* de contenu mathématique en tant que tels. L'apparence en faisant des énoncés descriptifs décrivant des états de choses d'un univers mathématique idéal est une hypostase linguistique. Ils doivent être objectivés, c'est-à-dire légalisés. Leur légalisation objectivante s'identifie à leur *démonstration*. La démonstration transforme un énoncé d'apparence mathématique en proposition effectivement mathématique, c'est-à-dire en énoncé "déterminé". Et de même qu'un phénomène physiquement conditionné et déterminé perd son contenu apparemment ontologique au profit de sa détermination objective, de même un énoncé formellement conditionné et déterminé perd son contenu apparemment ontologique au profit de sa

[2] Shanker [1987]. Les renvois à cet ouvrage seront effectués dans le texte.

détermination objective. La thèse anti-ontologique (anti-platonicienne) de Wittgenstein est donc une thèse transcendantale typique. L'objectivité mathématique, pas plus que l'objectivité physique, ne décrit une réalité "chosique" en soi (indépendante). Elle est de nature *prescriptive et normative*. Les théories mathématiques ne décrivent pas, ne dénotent pas. Pas plus que les théories physiques. Elles *déterminent*, ce qui est tout à fait autre chose. Vidées de leur ontologie fantomatique, les propositions mathématiques (donc démontrées) apparaissent comme construites à partir de *règles de syntaxe*. De même que l'objectivité physique est une construction catégoriale schématisée, l'objectivité mathématique est une *construction grammaticale* . Ne possédant aucun contenu descriptif, les propositions mathématiques sont des règles de syntaxe, des normes de représentation et d'expression (p. 274). Ce sont des *conditions de possibilité* de significations (qui, sans elles, n'existent pas).

> "Meaning is determined by intra-linguistic rules rather than a connection between language and reality" (p. 304).

C'est le système des axiomes et des règles qui définit (implicitement) le sens des concepts. C'est pourquoi la preuve des propositions est une procédure normative qui *force* à les accepter comme règles (p. 86). Il existe par conséquent une inséparabilité entre une proposition mathématique et sa preuve. Sa preuve détermine seule le *sens*. Une proposition n'existe en tant que telle que si elle appartient à une théorie (et donc à un calcul). Elle n'existe que si elle est vérifiable et sa vérification n'est rien d'autre que sa démonstration. C'est dire que les relations qu'une proposition entretient avec une théorie ne sont pas externes et contingentes. Elles sont *constitutives et déterminantes, internes et nécessaires* et constituent l'énoncé en tant que proposition mathématique (p. 111). Le sens de la proposition comme proposition mathématique démontrée *n'est pas* son sens comme énoncé ou expression linguistique (sens qui n'est qu'une hypostase). Et c'est pourquoi un énoncé-expression isolé n'est pas donné (et ne peut pas être donné) avec son sens *mathématique*. L'erreur fondamentale de l'ontologie est de faire comme si ce que montrent les preuves était un dire qui parle de quelque chose.Le rapport de dépendance objet-théorie est donc bien chez Wittgenstein en tous points analogue, on le voit, à celui qui régit l'objectivité physique chez Kant.

2. De cette conception anti-ontologique de l'objectivité des mathématiques découlent la plupart des thèses de Wittgenstein — qui sont donc essentiellement justes d'un point de vue transcendantal.

(a) La nécessité d'introduire entre l'analytique a priori et le synthétique a posteriori une instance de type *synthétique a priori* (p. 33).[3] Les propositions mathématiques ne sont pas

---

[3] Sur le synthétique a priori, cf. Petitot [1987b], [1988], [1989b], [1990a], [1990b]. Malgré toutes les réflexions post-positivistes (Quine, Dummett, etc.), la question reste largement ouverte. Il ne s'agit pas de savoir si le synthétique a priori est un caractère propre de certains

synthétiques a posteriori. Le premier Wittgenstein et l'empirisme logique les ont considérées comme analytiques. Le second Wittgenstein s'inspirera de Kant pour dire qu'elles ne sont ni tautologiques (analytiques) ni vraies en fonction d'un contenu dénotant des états de choses (synthétiques a posteriori) mais qu'elles sont pour autant signifiantes. En tant que normes grammaticales

> "they tell us something “which no experience will refute” and “whenewer we say that something *must* be the case we are using a norm of expression”" (p. 275).[4]

Évidemment, ce synthétique a priori est spécifique de l'objectivité mathématique et *n'est pas* celui (fondé dans l'Esthétique transcendantale spatio-temporelle) de l'objectivité physique. Il est grammatical et non pas spatial.

(b) *Le réalisme empirique et l'idéalité transcendantale de la grammaire*. Dans la mesure où la grammaire légalise les énoncés mathématiques et permet leur détermination logique en tant que propositions démontrées, son réalisme empirique (relativement aux "phénomènes" mathématiques que sont les énoncés) est évident. Il n'est pas réductible à un idéalisme subjectif (anti-psychologisme de Wittgenstein). Mais, d'un autre côté, ce réalisme ne peut pas être ontologique. Il se double de l'idéalité transcendantale de la grammaire (anti-platonisme de Wittgenstein). En mathématiques, la grammaire est une *Analytique*, mais une Analytique *transcendantale* et non pas formelle.

(c) Comme nous l'avons montré ailleurs[5], la forme moderne de l'idéalité transcendantale de l'espace dans l'objectivité physique concerne tout ce qui tourne autour du conventionnalisme géométrique à la Poincaré et, plus généralement, autour du rôle constitutif des groupes de symétrie dans les théories physiques. Autrement dit, l'idéalité transcendantale a trait au rapport entre conventionnalisme et synthétique a priori (la conventionnalité du synthétique a priori se trouvant déjà chez Kant puisque le synthétique a priori *n'est pas* logiquement nécessaire et relève *de la "contingence radicale" de l'expérience*). Elle est la clef de l'objectivité comme *légalité autonome*. Cela est très net chez Wittgenstein en ce qui concerne l'objectivité grammaticale des mathématiques. Ses règles ne sont "arbitraires" — conventionnelles — que pour autant qu'elles sont *constitutives* et *déterminantes* pour les phénomènes mathématiques. Comme le remarque Peter Hacker "The arbitrariness of grammar is the arbitrariness of autonomy".

énoncés, mais de savoir s'il existe une composante et une fonction synthétiques a priori dans les sciences.

[4] Les citations de Wittgenstein sont extraites de WLC [1932-1935].

[5] Petitot [1989b], [1990a].

(d) Le synthétique a priori est *indérivable* : empiriquement indérivable (il n'est pas synthétique a posteriori), logiquement indérivable (il n'est pas analytique).[6] Croire qu'il est imposé par une nécessité logique, c'est retomber dans un dogmatisme métaphysique (celui du logicisme). Croire qu'il est imposé par une réalité externe, c'est retomber dans une ontologie. Or,

> "grammar is not accountable to any reality".[7]

Sa *nécessité* est d'une tout autre nature. En effet, (cf. plus haut) dans une optique transcendantale, le concept de vérité et la catégorie modale suprême de nécessité sont *subordonnés* à des procédures de constitution, c'est-à-dire à leur conformité à une Analytique transcendantale et à un synthétique a priori. Deux thèses célèbres de Wittgenstein retrouvent cette conquête transcendantale majeure. D'abord on ne peut pas justifier une grammaire. Prescriptive, elle n'est ni vraie ni fausse.

> "Grammar is antecedent to truth : the rules of grammar determine what makes sense, but cannot themselves be true or false" (p. 318).

La vérité d'une proposition équivaut à sa *démonstration*. Elle n'existe pas en fonction de faits externes. C'est une vérité-cohérence et non pas une vérité-correspondance. Certes, les faits, le monde, jouent un rôle heuristique dans la formation des règles. Mais ils ne les nécessitent pas. Ils n'y fonctionnent que de façon *abductive*, c'est-à-dire *réfléchissante* au sens de Kant, *non* déterminante (p. 319).[8] D'où la seconde thèse : en mathématiques la nécessité et la certitude sont définies de façon *négative* :

> "it is that the possibility of incertainty has been grammaticaly removed" (p. 284).

La nécessité objective des vérités mathématiques vient du fait que le doute à leur sujet est *logiquement exclu*.

> "The propositions of mathematics are *objectively* certain — unassailable by doubt — because (...) the very notion of epistemological doubt has been *logically excluded* from the normative province of mathematics" (p. 71).[9]

---

[6] La possibilité de redéployer une doctrine du synthétique a priori permet de retrouver la critique de Quine des "dogmes" de l'empirisme logique sans subordonner pour autant l'épistémologie à une psychologie physicaliste.

[7] Wittgenstein [1969b], p. 184 (cf. p. 319).

[8]Ce qui manque ici cruellement chez Wittgenstein est l'équivalent de la *Déduction transcendantale*, c'est-à-dire de la justification de la prétention des règles à valoir comme règles de détermination, autrement dit de leur prétention à posséder une valeur objective (bien que celle-ci soit logiquement et empiriquement indérivable).

[9] Dans "La Force de la Règle", Jacques Bouveresse a remarquablement développé ce point.

Kant a montré que, dans l'objectivité physique, la nécessité de la vérité est sans bases ontologiques et repose sur l'accord de la détermination d'un réel avec un dispositif transcendantal (prescriptif, constitutif) de détermination. Wittgenstein a montré qu'il en allait de même dans l'objectivité mathématique.

(e) On comprend dès lors les raisons pour lesquelles Wittgenstein a tant critiqué l'idée que les *conjectures* mathématiques peuvent être prises pour des *propositions* mathématiques non encore démontrées. Certes, il existe des questions problématiques jouant un rôle heuristique majeur dans la construction de nouvelles démonstrations et de nouvelles théories. Mais ces conjectures ne sont pas à proprement parler des propositions car elles ne sont pas légalisées. La distinction wittgensteinienne entre propositions et conjectures mathématiques est en tous points analogue *aux distinctions kantiennes entre concepts déterminants et idées régulatrices, entre jugements déterminants et jugements réfléchissants*. Wittgenstein a souvent insisté sur ce point : les conjectures sont régulatrices et la relation entre une conjecture et sa démonstration n'est pas déductive mais heuristique (Kant aurait dit réfléchissante et Peirce aurait dit abductive) (pp. 113-114). En physique, en dehors d'un dispositif de détermination objective, un jugement ne possède pas de sens objectif. Il ne possède que son sens linguistique. Croire que ce sens est fondé en réalité et peut s'identifier à son sens objectif c'est introduire subrepticement la thèse métaphysique que l'objectivité peut rejoindre l'ontologie d'une réalité en soi, indépendante et pourtant linguistiquement descriptible. Il en va de même en mathématiques pour la distinction entre conjecture et proposition. Lorsqu'une conjecture est démontrée, et devient donc une proposition, son sens comme proposition *n'est plus* son sens comme conjecture (p. 110). Le sens mathématique d'une proposition *ne peut pas* lui préexister car il est le *résultat* de sa détermination objective (de sa démonstration). *En faire un sens préexistant c'est croire que la compréhension de la réalité mathématique peut transcender son objectivité* (ce qui est la négation même du point de vue transcendantal).

2. FINITUDE ET DIALECTIQUE TRANSCENDANTALE

Pour Wittgenstein, les mathématiques sont donc bien objectives. Elles le sont en un sens *transcendantal* et ne peuvent donc pas être descriptives. Nous venons de le constater à propos d'un certain nombre de points techniques. Mais le parallèle avec Kant ne s'arrête pas là. On peut le prolonger fort loin, jusqu'aux bases mêmes des orientations philosophiques de ces deux penseurs. J'en donne brièvement trois exemples.

1. **Le rejet d'une réalité en soi sous-jacente à l'objectivité**

La guerre de Wittgenstein contre l'idée d'un "corps de signification" qui serait accessible à la connaissance mathématique est en tous points analogue à la guerre de Kant contre l'idée d'une chose en soi qui serait accessible à la connaissance physique.

2. Le rôle constitutif de la finitude

Comme chez Kant, on trouve chez Wittgenstein la thèse que la scission indépassable entre objectivité et ontologie est liée à notre finitude épistémique. Le finitisme radical de Wittgenstein n'est pas celui, par exemple, de l'intuitionnisme. Il concerne *l'accessibilité* épistémique aux "objets" mathématiques, c'est-à-dire la façon dont des règles finies permettent d'accéder finitairement aux significations qu'elles constituent (p. 127).

3. La résolution des apories en termes de Dialectique transcendantale

Kant a été le premier à montrer que la bonne réponse aux apories métaphysiques (aux antinomies rationnelles) était, non pas d'essayer de les résoudre, mais de les *dissoudre* comme non sens. Une bonne Analytique transcendantale, une bonne doctrine de la constitution transcendantale de la réalité objective, se teste certes positivement par la compréhension qu'elle garantit de la vérité et de la nécessité. Mais elle se teste aussi *négativement* par le développement d'une Dialectique transcendantale. On trouve exactement la même attitude chez Wittgenstein. Les apories de la "crise des fondements" des mathématiques doivent être *dissoutes* (p. 29). En particulier, les énoncés *indécidables* (c'est-à-dire ceux dont on démontre qu'*ils ne peuvent pas* être objectivés et déterminés comme propositions dans un certain cadre) ne sont pas des énoncés dont le contenu "transcenderait" notre esprit (p. 57). Les penser ainsi ce serait les penser dialectiquement comme des énoncés référant à une réalité en soi inaccessible. Il faut au contraire les penser comme des énoncés *sans signification* proprement mathématique. En quelque sorte, les propositions indécidables possèdent le statut de conjectures absolues (c'est-à-dire sans démonstration possible). D'où le rejet radical d'un platonisme à la Gödel.

C'est le même esprit qui anime la position de Wittgenstein quant au problème des fondements. Pour lui, on n'a pas à chercher des fondations épistémologiques aux mathématiques. La question des fondements relève d'une Dialectique transcendantale. Certes, il est pertinent, voire fondamental, de transformer, comme l'a fait Hilbert avec son programme méta-mathématique, les démonstrations et les théories mathématiques elles-mêmes en "nouveaux" objets. Mais la portée proprement *épistémologique* d'une preuve de consistance est inexistante (p. 222).

Il en va encore de même dans la position de Wittgenstein quant aux contradictions "cachées". Face à l'anxiété de ceux qui craignent qu'une contradiction puisse un jour être découverte dans les théories mathématiques les plus assurées et faire s'écrouler tout l'édifice, Wittgenstein répond qu'il s'agit d'une superstition car une contradiction cachée est un non sens analogue à celui d'une conjecture considérée comme vraie bien que non encore démontrée. Parler de contradiction cachée présuppose que les mathématiques puissent transcender leur objectivité vers une réalité en soi qui pourrait se donner de façon extra-mathématique (p. 232). Ce qui est important aux yeux de Wittgenstein est le *principe* de contradiction qui interdit l'usage des contradictions (p. 235). Les contradictions en tant que telles ne sont pas dangereuses puisque les mathématiques ne véhiculent aucune information sur une réalité, celle-ci serait-elle idéale.

3. LES PARADOXES DE L'INFINI

Sur un plan plus technique, Shanker explique fort bien les conclusions auxquelles aboutit une telle conception de l'objectivité mathématique. Citons-en quelques unes concernant le statut des preuves lorsque l'infini est en jeu. Le point de vue de Wittgenstein étant transcendantal, il est *strictement finitiste et constructiviste* mais en un sens original, différent de l'intuitionnisme d'un Brouwer ou du finitisme méta-mathématique d'un Hilbert.

1. Wittgenstein oppose fortement le fini et l'infini pour la raison suivante. Pour les ensembles *finis* les approches "synchroniques" en termes ensemblistes de totalités en acte et les approches "diachroniques" en termes de processus et d'itération d'opérations sont équivalentes. Il n'en va pas de même pour les ensembles infinis (cf. p. 165). Pour Wittgenstein l'infini doit rester un infini *potentiel* (non actuel) et il est illégitime de quantifier sur des totalités infinies. En effet, en mathématiques, une totalité et la généralité associée doivent être internes et essentielles, et non pas accidentelles et contingentes. Elles doivent être produites par une procédure de construction. Par exemple, la forme générale d'un *entier* est donnée par la forme même de *l'induction.* Selon Wittgenstein, un énoncé universellement quantifié sur les entiers $\forall n\, f(n)$ essaie de *dire* ce que *montre* l'induction.

> "The general form of an integer — which is nothing less than the symbol for the infinite numbers series — is given by the representation of mathematical induction" (p. 163).

Il n'y a donc pas de concept de classe qui *précèderait* l'opposition fini/infini. La différence fini/infini n'est pas quantitative. C'est une différence grammaticale.

> "A correct symbolism has to produce an infinite class in a completely different way from a finite one. Finiteness and infinity of a class must be obvious from its syntax" (p. 165).[10]

D'où les critiques bien connues de Wittgenstein contre la théorie des ensembles, critiques qui dénoncent

> "the 'finite totality/infinite series' categorial confusion, as embodied in 'transfinite set theory'"(p.196).

[10] Waismann [1967], p. 228.

Certes, il admet le *calcul* cantorien des nombres transfinis, des ordinaux et des cardinaux. Mais il refuse d'interpréter les transfinis comme des infinis actuels et de poser à leur sujet des questions de réalité. L'infini n'est pas une quantité. Il n'appartient pas à la région du concept de grandeur. Il est *grammaticalement* inséparable du concept d'opération sans limite, sans borne.

> "To say that a technique is unlimited does *not* means that it goes on without ever stopping — that it increases immeasurably; but that it lacks an institution of the end, that it is not finished off" (p. 197).[11]

2. Il en va de même, évidemment, en ce qui concerne la question, associée et centrale s'il en est, du *continu*. Wittgenstein critique la construction de Cantor-Dedekind. Pour lui, le fait de traiter le corps des réels $\mathbb{R}$ comme un ensemble de points constitue *une infraction à la grammaire de l'infini* (cf. p. 186). Comme chez Peirce, Veronese ou Weyl, la grammaire de l'infini est, chez Wittgenstein, une grammaire "aristotélicienne" de l'infini *potentiel*. Le fait que des constructions *géométriques* sélectionnent (distinguent) des points (des intersections, des droites, des cercles, etc.) et les fassent donc passer de la puissance à l'acte ne signifie pas pour autant que ces points préexistent. En effet, comme les mathématiques ne sont pas descriptives, un nombre réel n'existe qu'en rapport avec la loi qui le produit. Il ne doit pas seulement être *approximé* (comme c'est le cas pour les nombres irrationnels conçus comme des coupures de Dedekind ou des limites de suites de Cauchy), mais également *engendré* par une règle.

> "For a real number, a construction and not merely a process of approximation must be conceivable" (p. 190).[12]

Or, *les images géométriques ne sont pas des constructions arithmétiques*. Selon Wittgenstein, et il s'agit là d'un point de vue particulièrement profond, bien que sujet à critique[13], traiter la droite géométrique comme un système de nombres et, par exemple, la droite épointée comme distinguant un nombre, c'est subrepticement réintroduire une ontologie platonicienne *et confondre le constitutif et le déterminant avec le régulateur et le réfléchissant*.

---

[11] Wittgenstein [1956], II, §45. Sur ce point, Wittgenstein partage les reproches *d'imprédicativité* adressés par des mathématiciens comme Poincaré et Weyl à la théorie des ensembles. On ne peut pas supposer, sauf à adopter une ontologie platonicienne naïve, que l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ etbson ensemble de parties $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ sont des ensembles bien définis. En effet, le schéma d'induction est un schéma d'axiomes et donc "l'être" de $\mathbb{N}$ dépend des prédicats inductifs $f(n)$. De même, la plupart des $A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas définissables.

[12] Wittgenstein [1964], §186..

[13] Nous reviendrons plus bas sur le problème du continu et l'insuffisance du point de vue de Wittgenstein.

> "Wittgenstein fundamental objection (...) was that Dedekind's theory crossed over the boundary between heuristic and constitutive principles"(p. 187).

Comme *règle*, un nombre réel se réduit essentiellement à des *procédures* d'approximation par des rationnels (par exemple des expansions décimales) et donc à des méthodes de comparaison. Mais cela ne justifie pas qu'on lui attribue un statut *objectal*. Objectivité ne veut pas dire objet.

3. Ce point de vue de Wittgenstein est particulièrement explicite dans son analyse, évoquée plus haut, des preuves récursives et de l'induction. Shanker explique clairement la façon dont celle-ci repose sur l'opposition essentielle *entre dire et montrer*. Les preuves récursives sont des constructions grammaticales qui montrent comment des règles peuvent s'appliquer de façon illimitée. Mais cela n'implique pas qu'elles *démontrent une proposition* générale (universellement quantifiée) dont le contenu objectal *dirait* ce qu'elles montrent.

> "What we gather from the proof, we cannot represent in a proposition at all" (p. 202).[14]

Dans une certaine mesure l'ontologie mathématique est une ontologie fantomatique permettant de transformer illégitimement une monstration de règles en une représentation d'états de choses, c'est-à-dire de faire *comme si* on pouvait *parler* des calculs.[15] Or il s'agit là d'une illusion, d'une transgression grammaticale.

> "The recursion shows nothing but itself" (p. 204).[16]

> "Mathematics consist entirely of calculations. In mathematics everything is algorithm and nothing is meaning, even when it doesn't look like that because we seem to be using *words* to talk about mathematical things. Even these words are used to construct an algorithm" (p. 208).[17]

4. Comme nous l'avons déjà noté, le finitisme et le constructivisme de Wittgenstein sont en grande partie confirmés par les théories actuelles du continu, théories où dominent les problèmes d'effectivité algorithmique dans leur rapport à l'informatique.[18] Mais, dans la mesure où nous nous proposons ici un parallèle avec la conception kantienne de l'objectivité physique, nous soulignerons plutôt le fait que la façon dont Wittgenstein traite les paradoxes de l'infini, et en particulier du continu, relève d'une théorie *de l'illusion transcendantale*. Elle

---

[14] Wittgenstein [1969b], p. 405.

[15] Rappelons ici le rôle décisif du "comme si" — du *als ob* — dans la "Critique de la Faculté de Juger" de Kant.

[16] Wittgenstein [1969b], p. 450.

[17] Ibid., p. 468.

[18] Cf. Harthong-Reeb [1989], Salanskis [1989].

est en tous points parallèle, on l'aura constaté, avec la façon dont, dans la Dialectique transcendantale, Kant traite de la façon dont l'entendement produit des totalités infinies et inconditionnées illégitimes puis les traite comme des objets d'expérience jusqu'à transformer subrepticement son usage "distributif" en un usage "collectif" et remplacer la *détermination* progressive et indéfinie de la réalité à partir de prescriptions transcendantales en l'illusion d'une *compréhension* d'une réalité transcendante.

4. OBJECTIVITE MATHEMATIQUE, REFLEXION ET OBJECTIVITE PHYSIQUE

L'avantage de la position de Wittgenstein est d'offrir une conception particulièrement pure et radicale de la réalité mathématique comme réalité *objective*. Comme nous l'avons vu, tous les moments principaux, tant analytiques que dialectiques, d'un processus de constitution y sont répétés avec un sens spécifique, à chaque fois relié aux plus profonds des problèmes de la philosophie des mathématiques.

Toutefois, cette doctrine demeure irrémédiablement insuffisante, et cela, selon nous, pour deux raisons principales.

1. La nécessité d'une "Critique du jugement mathématique"

D'abord Wittgenstein traite le sens mathématique en des termes de dialectique transcendantale. Or, cela est trop radical. En effet, toujours pour poursuivre le parallèle avec la physique, *on pourrait dire que le sens est aux mathématiques ce que l'organisation (la structure morphologique des êtres organisés) est à la physique*. Certes, on peut liquider, on l'a souvent fait et on continue à le faire, la problématique de l'organisation au nom du mécanicisme (l'objectivité "mécaniste-atomiste" étant en physique l'équivalent de l'objectivité algorithmique en mathématiques) en la ramenant à un effet purement dialectique d'illusion transcendantale. Mais, comme Kant l'a bien montré, cela est trop radical. En effet, l'organisation — ce qu'il appelait *la finalité interne objective* des êtres organisés — relève du principe de finalité en tant que principe transcendantal (à la fois a priori et particulier) de la faculté de juger réfléchissante. Disons que si Wittgenstein a bien conçu les éléments de l'équivalent d'une critique de la raison pure pour l'objectivité mathématique, il lui a totalement manqué l'équivalent *d'une critique du jugement mathématique*. Une telle critique aurait pour vocation de montrer :

(i) que tout se passe en fait "*comme si*" (als ob) le sens mathématique était *effectivement objectif*, et

(ii) que ce "comme si" est indépassable et inéliminable, *deux* "maximes" du jugement mathématique devant coopérer dans la *compréhension* des phénomènes mathématiques, même si une seule (la maxime du jugement propre à l'objectivité algorithmique) est en droit légitime en tant que constitutive, en tant que relevant du jugement déterminant.

Il existe une finalité objective, tant interne qu'externe, des objets, des stuctures, des théories et de l'univers mathématiques. Comme Albert Lautman l'a admirablement montré, c'est sur elle que doit porter l'essentiel de la réflexion philosophique. Elle est évidemment corrélée avec *une finalité subjective formelle*, donc avec une capacité de jugement *esthétique* (beau et sublime). Cette faculté de jugement esthétique est caractéristique des mathématiciens authentiques. C'est sur elle que reposent la créativité et *le génie* — et, comme l'affirmait Kant, on n'a pas à "rogner les ailes du génie". Ce que veut, pourtant, Wittgenstein.

2. La nécessité d'une conception transcendantale de l'applicabilité des mathématiques

D'autre part, la doctrine de Wittgenstein demeure également irrémédiablement insuffisante dans la mesure où elle ne pense pas de façon *transcendantale* le rapport des mathématiques à la réalité externe et en particulier physique. Sa conception des sciences naturelles demeure, hélas, trop empiriste. Il est navrant que sa philosophie *physique* soit aussi naïve et aussi réactive (comme celle de Husserl d'ailleurs) : le constructivisme techno-scientifique propre à la civilisation du progrès opacifie les formes de vie, il est le commencement de la fin de l'humanité, etc.[19].

La conception transcendantale de l'objectivité présuppose une dimension prescriptive. Autant la conception wittgensteinienne des mathématiques pures est riche et profonde, autant celle de leur *applicabilité* est pauvre et superficielle. Elle consiste en effet à réduire le prescriptif *à celui des mathématiques elles-mêmes*. L'applicabilité des mathématiques à l'expérience se ramène alors à l'applicabilité de règles de syntaxe sans contenu propre à la "matière" des données empiriques.

Dans "La force de la règle", Jacques Bouveresse a rappelé que pour Carnap "l'intérêt" de la thèse wittgensteinienne était

> "qu'il devenait possible pour la première fois de combiner la thèse fondamentale de l'empirisme avec une explication satisfaisante de la nature de la logique et des mathématiques".[20]

Mais cet "intérêt" constitue au contraire, selon nous, une limite qui vient en grande partie annuler tout le bénéfice du transcendantalisme mathématique wittgensteinien.

Selon nous, le rapport entre idéalités mathématiques et réalité objective doit être pensé à partir d'une approche *doublement* transcendantale :

(i) transcendantale du côté des idéalités mathématiques, comme chez Wittgenstein ;

(ii) mais transcendantale également du côté de la réalité objective (de l'ontologie régionale physique).

---

[19] Sur ce point, cf. les travaux d'Elisabeth Rigal.

[20] Bouveresse [1987] (citation de l'*Autobiographie* de Carnap).

Or, comme nous l'avons déjà montré ailleurs et comme nous allons trés brièvement y revenir, les moments transcendantaux d'une ontologie régionale sont ceux d'une esthétique transcendantale, d'un système de catégories régionales, puis de leur schématisation et enfin, et surtout, de leur "construction". Notre thèse est donc que c'est dans le rapport à une Esthétique transcendantale et à un système catégorial que les mathématiques *s'appliquent* — et même *s'impliquent* — dans l'expérience. Ce faisant elles acquièrent *un contenu* . C'est à partir de là que tous les problèmes platoniciens d'objets et de réalité se trouvent reposés, sans invalider pour autant le transcendantalisme grammatical de Wittgenstein (qui n'est que mathématique).

BIBLIOGRAPHIE

-BOUVERESSE, J., 1987. *La Force de la Règle*, Paris, Editions de Minuit.

-DESANTI, J.T., 1968. *Les Idéalités mathématiques*, Paris , Le Seuil.

-HARTHONG,J., REEB, G., 1989. *Intuitionnisme 1984*, MNS [1989], 213-252.

ANT, E., 1781-1787. *Critique de la Raison pure*, (trad. A.J.L. Delamarre et F. Marty), Paris, Pléïade, Gallimard, 1980.

-KANT, E., 1786. *Premiers Principes métaphysiques de la Science de la Nature*, (trad. J. Gibelin), Paris, Vrin, 1971.

-KANT, E., 1790. *Critique de la Faculté de Juger*, (trad. A. Philonenko), Paris, Vrin, 1979.

-LAUTMAN, A., 1937-1939. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, (réedition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946), Paris, Bourgois, 1977.

-PETITOT, J., 1987a. "Refaire le “Timée”. Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman", *Revue d'Histoire des Sciences*, XL, 1, 79-115.

-PETITOT, J., 1987b. "Mathématiques et Ontologie", *La Scienza tra Filosofia e Storia in Italia nel Novecento*, F. Minazzi, L. Zanzi, eds.), 191-211, Rome, Edizione della Presidenza del Consiglio dei Ministri.

-PETITOT, J., 1988. "Logique transcendantale et ontologies régionales", *Colloque de Cerisy : Rationalité et objectivités* (à paraître).

-PETITOT, J., 1989a. "Rappels sur l'analyse non standard", *MNS, 1989*, 187-209.

-PETITOT, J., 1989b."Le problème du physico-mathématique. Actualité de la doctrine transcendantale", *Colloque “1830-1930, Un siècle de géométrie, Epistémologie, Histoire et Mathématiques”*, Paris, Institut Henri Poincaré (à paraître chez Springer).

-PETITOT, J., 1990a. "Logique transcendantale, Synthétique a priori et Herméneutique mathématique des objectivités",*Fundamenta Scientiae*, 10, 1, 57-84.

-PETITOT, J., 1990b. "Logique transcendantale et Herméneutique mathématique : le problème de l'unité formelle et de la dynamique historique des objectivités scientifiques", *Il* *pensiero di Giulio Preti nella cultura filosofica del novecento*, (F. Minazzi ed.),155-172, Milano, Franco Angeli.

-PETITOT, J., 1990f. "Continu et Objectivité", *Le Continu mathématique*, (J.M.Salanskis, H. Sinaceur eds.), Colloque de Cerisy (à paraître).

-PETITOT, J., 1991. "Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale", *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, (G. Granel ed.), 213-282, Éditions TER, Mauvezin.

-P.M, 1988. "Philosophie des Mathématiques" (Ph. Kitcher ed.), *Revue Internationale de Philosophie,* 42, 167.

-RESNIK, M.D., 1988. "Mathematics from the Structural Point of View", *PM 1988*, 400-424.

-SALANSKIS, J.M., 1989. "Le potentiel et le virtuel", *MNS, 1989*, 275-303.

-SALANSKIS, J.M., 1990. "L'arithmétique prédicative, ou l'herméneutique des nombres entiers", *Séminaire de Philosophie et Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure*, (séance du 23 janvier 1990).

-SHANKER, S.G., 1987. *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press.

-VUILLEMIN, J., 1955. *Physique et Métaphysique kantiennes*, Paris, Presses Universitaires de France.

-WAISMANN, F., 1967. *Wittgenstein und der Wiener Kreis*, Oxford, Blackwell, 1979.

-WITTGENSTEIN, L., 1953. *Philosophische Untersuchungen*, *Philosophical Investigations*, (G.E.M. Anscombe, R. Rhees eds.), Oxford, Blackwell, 1958.

-WITTGENSTEIN, L., 1956. *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* , *Remarks on the Foundation of Mathematics*, (G.H. von Wright, R. Rhees, G.E.M. Anscombe eds.), Oxford, Blackwell, 1978.

-WITTGENSTEIN, L., 1964. *Philosophische Bemerkungen*, *Philosophical Remarks*, (R. Rhees, ed.), Oxford, Balckwell, 1975.

-WITTGENSTEIN, L., 1969a. *Ueber Gewissheit, On Certainty,* (G.E.M. Ascombe, G.H.von Wright eds.), Oxford, Blackwell, 1977.

-WITTGENSTEIN, L., 1969b. *Philosophische Grammatik*, *Philosophical Grammar*, (R. Rhees, ed.), Oxford, Blackwell, 1974.

-WITTGENSTEIN, L., 1977. *Vermischte Bemerkungen,* Frankfurt, Suhrkamp Verlag; Oxford, Blackwell, 1980.

-WLC, 1932-1935. *Wittgenstein's Lectures*, *Cambridge 1932-1935* , (A. Ambrose ed.), Oxford, Blackwell, 1979.