Logique et sémiotique de l'argument ontologique : approche intensionnelle et intuitionniste

Hommage à Jules Vuillemin (1977/2005)

Jean Petitot
Centre de Mathématiques, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.

Cet hommage à Jules Vuillemin sur la possibilité d'utiliser l'opérateur ε de Hilbert pour approfondir son analyse de la "preuve" d'Anselme date de la fin des années 1970. Elle a fait l'objet de plusieurs discussions avec des membres du DAMS d'Umberto Eco à Bologne dans les années 1979-1982 et a été l'un de nos deux exposés au colloque *Au Nom du Sens* que nous avons co-organisé en son honneur au Centre culturel de Cerisy en 1996. Dans les années 1990 nous avons ajouté les dernières sections sur Giulio Preti et John Bell. Cette version comprend quelques références supplémentaires.

1 Introduction

En hommage à la pensée et à l'œuvre de Jules Vuillemin, il nous a semblé pertinent de proposer quelques remarques sur l'un de ses travaux majeurs concernant la logique médiévale. Nous allons essayer de préciser *formellement* son analyse, dans son grand ouvrage de 1971 *Le Dieu d'Anselme et les Apparences de la Raison*, du dispositif argumentatif et sémiotique de la preuve ontologique. Celle-ci mêle on le sait des paradoxes de l'infini à des stratégies énonciatives performatives (au sens des performatifs en linguistique) et à des procédures de détermination pragmatiques (au sens linguistique). Elle est logiquement inconsistante, mais son inconsistance n'est pas une contradiction naïve. Elle est assez subtile et met en jeu des écarts entre logique et sémiotique que l'on peut tenter de clarifier. Nous aimerions donc proposer quelques idées allant dans ce sens. Il s'agit de cerner l'écart logique / sémiotique qui est à l'origine de l'inconsistance.

N'étant pas spécialiste de la pensée scolastique, nous ne parlerons pas des rapports entre foi et logique et entre vérité et éthique. Nous nous focaliserons simplement sur la *forme logique* de l'argument du *Proslogion* (ou *Alloqium de Dei Existentia*) de 1077-78 et nous essaierons de *mimer logiquement* le réalisme platonicien des essences et les thèses d'existence des universaux que l'on y rencontre. Nous mettons donc entre parenthèses le contenu théologique de la preuve et nous n'en gardons que la structure formelle.

Sa reconstruction formelle n'a pas non plus de contenu historique. Elle n'évoque aucune des grandes reprises philosophiques de l'argument ontologique, en particulier chez Descartes, Malebranche, Leibniz ou Hegel, ni sa déconstruction par Kant. [1] Elle ne tient pas compte non plus de l'histoire de la logique. Elle traite exclusivement des structures et des difficultés logico-sémiotiques de la preuve.

2 Preuve et crise du référent

La preuve ontologique se déploie dans le contexte d'une réflexion logique sur le concept d'existence et démontre que, sauf à affronter une contradiction, on ne peut pas penser la non-existence d'une certaine entité limite infinie. L'argument, qui se veut unique et auto-suffisant, développe la thèse que la *compréhension* de la *signification* du *nom* de Dieu le pose nécessairement comme existant.

Toute signification conceptuellement saisissable existe dans l'entendement (*esse in intellectu*) en tant que réalité objective d'une idée. Elle n'a pas forcément de réalité hors de la pensée en tant que chose correspondante (*esse in re*). Mais dans le cas de la compréhension du *nom* divin “id quo nihil maius cogitari potest”, Anselme affirme que

> “certainement ce qui est tel que rien ne peut être pensé de plus grand ne peut être dans la seule intelligence.”

On doit penser son existence comme *réelle* car cela le rend “plus grand dans la pensée”. Sinon on en resterait simplement à un “id quo magis cogitari potest”sans atteindre le “id quo nihil majus cogitari potest”.

Notre hypothèse est qu'il existe des aspects sémiotiques intéressants de la pensée de l'existence qui n'ont pas de statut dans une logique extensionnelle et une sémantique dénotationnelle (véri-conditionnelle) standard et qui peuvent donc aider à clarifier le caractère antinomique de cet argument. La sémantique logique classique repose sur la relation primitive de dénotation en tant que renvoi d'un symbole *non structuré*

1. Pour une discussion historique et philosophique de l'argument, cf. par exemple. Girard [1995].

(sans structure interne) à une entité *individuée* du monde externe. Toutefois un symbole peut posséder une structure interne et *sélectionner* des choses ou des états de choses en fonction de sa structure. Pensons aux *indexicaux* et à leur statut *pragmatique* et non pas sémantique.

Il est évident que si l'on pense la preuve anselmienne dans le cadre d'une sémantique dénotationnelle elle est tautologiquement fausse, puisqu'il n'existe pas de chose ou d'états de choses dans le monde pouvant lui servir de truth-maker. Mais si l'on admet que des symboles peuvent construire des contenus autonomes possiblement sans référents (pensons aux infinitésimales leibniziennes), alors la situation change notablement. C'est ce que nous voudrions esquisser ici.

3 L'Analyse de Jules Vuillemin

Reprenons l'analyse logique de la preuve développée en grand détail par Jules Vuillemin dans *Le Dieu d'Anselme et les Apparences de la Raison.*

3.1 Le nom comme description indéfinie négative

Anselme cherchait une preuve unique, apodictique et autosuffisante de l'existence de Dieu, qui soit à la fois affine à son objet infini et adaptée à la raison finie, c'est-à-dire qui reflète dans sa structure même la disproportion infinie entre le fini humain et l'infini divin. Sa remarquable trouvaille aura été de satisfaire à une telle exigence en fondant la preuve sur une définition *négative* du nom de Dieu dans laquelle *la simple compréhension implique analytiquement l'existence*. En ce sens, la preuve anselmienne n'est pas à proprement parler démonstrative. Comme le Cogito cartésien, elle est plutôt "performative". L'idée de Dieu en nous étant obscurcie par la finitude, la foi doit la rectifier et permettre d'accéder au véritable nom – et non pas au concept – de Dieu : "id quo nihil maius cogitari potest". Pour Anselme, cette expression fonctionne comme une *description indéfinie négative* incluant à travers le mot "rien" une *quantification universelle*. En ce sens la preuve du *Proslogion* est négative et épistémologique. Comme y insiste J. Vuillemin, elle s'oppose aux preuves positives dont, dans ses réponses à Gaunilon, Anselme avait lui-même démontré l'inconsistance. [2] C'est une preuve "sémiotique" faisant dériver l'existence de la seule compréhension – de la signification – du nom en tant que description indéfinie négative. Le tour logique d'Anselme est de montrer que l'impensable (*aliquid non potest cogitari*) est en fait un *référent* pour l'idée (le nom, la description) de Dieu (*id quo*

2. Les critiques de Gaunilon se trouvent dans son *Liber pro Insipiente* et la réponse d'Anselme dans le *Liber Apologeticus*.

nihil majus cogitari potest), que par là même cette idée est consistante et que sa consistance équivaut à l'existence de son idéal, i.e. à l'existence d'une entité singulière où elle est présente in individuo.

3.2 Les deux matrices de preuve

En analysant en grands détails les paradoxes de type auto-référence, imprédicativité, Russell, Burali-Forti et les antinomies épistémologiques, mathématiques et sémantiques (liées au référent) de la preuve, Jules Vuillemin en est arrivé aux conclusions suivantes.

En ce qui concerne d'abord ses conditions de possibilités, la preuve :

(i) doit concilier la "ressemblance" (l'abstraction à partir de l'expérience) et la "transcendance" : une preuve fondée uniquement sur la ressemblance est impossible et une preuve fondée uniquement sur la transcendance est incontrôlable ;

(ii) elle doit, même si elle aboutit à une singularité, être dérivée d'une prémisse universelle appliquée à un argument convenablement choisi ;

(iii) elle doit être une vérité de la logique.

En ce qui concerne sa structure logique :

(i) la preuve doit aller d'une prémisse universelle à une conclusion existentielle ;

(ii) la prémisse universelle

> "devra, de la considération d'un certain ensemble de données d'expérience, caractérisées par une condition déterminée, conclure à l'existence d'une fonction de cet ensemble" (p.54) [3]

autrement dit, en termes logiques, on doit pouvoir associer à tout ensemble u dont les éléments satisfont à un certain prédicat φ un élément f_u de *même type* que celui des éléments de u. [4] C'est alors à partir des propriétés imposées à la "fonction" f_u et au prédicat φ que l'on peut concilier la chaîne des ressemblances et la transcendance.

> "Donner une preuve, ce serait donc interpréter convenablement le prédicat φ et le symbole de fonction f_u." (p. 55)

D'où deux matrices de preuve. Dans la première matrice proposée, matrice (A),

> "cette fonction, pour satisfaire à l'exigence de la ressemblance, obéira à la même condition que les éléments de son ensemble-argument, et, pour satisfaire à l'exigence de la transcendance, n'appartiendra pas à cet ensemble." (p. 54).

3. La pagination des références à Vuillemin [1971] sera faite dans le texte.
4. Nous utilisons des notations proches de celles de Jules Vuillemin.

Autrement dit, si les éléments $x \in u$ satisfont φ ($x \in u \Longrightarrow \varphi(x)$ i.e. $u \subseteq X_\varphi$ l'extension de φ) on aura à la fois $\varphi(f_u)$ i.e. $f_u \in X_\varphi$ (ressemblance) et $f_u \notin u$ (transcendance). Bref, $f_u \in X_\varphi - u$. La conclusion existentielle dérivera alors de l'application de cette condition à la totalité des données d'expériences satisfaisant φ. Mais si w est l'extension X_φ de φ on devrait donc avoir à la fois $\varphi(f_w)$ (i.e.$f_w \in X_\varphi$) et $f_w \notin w = X_\varphi$, ce qui est extensionnellement contradictoire.

Dans l'interprétation anselmienne $\varphi(x)$ signifie que

> "x est une perfection telle que je peux penser une perfection plus grande qu'elle".

Le monde anselmien est un monde d'entités ordonnées par un ordre – un degré, une *gradatio* – de perfectibilité (nous y reviendrons). La *gradatio* est un ordre qui est en quelque sorte un "bon" ordre et il existe donc un schème ordinal sous-jacent à la preuve. Mais du coup l'ensemble w devient celui de tous les êtres perfectibles. La preuve porte sur l'idée de Monde et non plus sur l'idée de Dieu. Elle porte sur l'"omnitudo eorum quibus aliquid majus cogitari potest" et non plus sur le "id quo nihil majus cogitari potest".

Elle débouche sur une antinomie car elle met en jeu, par totalisation du donné, l'idée de monde sous la forme d'un tout hiérarchisé par la relation d'ordre de la gradation des perfections possibles. La preuve devrait assurer l'existence d'un maximum, mais elle se heurte évidemment à un paradoxe de type Burali-Forti (si la classe des ordinaux était un ensemble, il serait un ordinal strictement supérieur à lui-même).

"Complément" de l'idée de monde, l'idée anselmienne de Dieu dériverait donc plutôt d'une autre matrice, la matrice (B), qui abandonnerait "la chaîne de ressemblance" et serait fondée non plus sur la condition $\varphi(f_u)$ et ($f_u \notin u$) mais sur la condition $\neg\varphi(f_u)$ (non ressemblance) et $f_u \notin u$ (transcendance).[5] Dans ce cas, f_w s'identifie alors à "l'être tel qu'on ne peut rien penser de plus grand que lui". La matrice (B) sacrifie la ressemblance à la transcendance, abandon qui est le reflet de l'inadéquation de la pensée à son objet dans le cas de le preuve (p. 56).

Vuillemin décrit alors de façon détaillée le dilemme que posent ces deux matrices générales de preuve et la façon dont, pour éviter l'antinomie "mathématique" (ensembliste) inhérente à la première, Anselme tombe dans l'antinomie "épistémologique" (sémantique) inhérente à la seconde. Gaunilon faisait à Anselme l'objection que, pour qu'une preuve soit probante (i.e. soit pensée "selon la chose"), elle devait porter sur une idée de Dieu fidèle et réellement représentative (i.e. satisfaisant l'exigence de ressemblance) (p. 60). À cela Anselme répondait que, par le recours

5. $\neg\varphi$ symbolise la négation de φ.

à la *gradatio*, son idée de Dieu n'excluait pas l'exigence de ressemblance, exigence nécessaire car

> "sans ce postulat, la preuve s'effondre parce que rien ne garantit qu'au mot "Dieu" correspond une quelconque signification" (p. 64).

Mais cela revient à subordonner la preuve par les effets exclus du *Proslogion* aux preuves a priori par les effets présentées dans le *Monologion*. D'autre part, comme la montée dans la *gradatio* se fait par retranchements successifs de limitations (abstraction) rien ne prouve que l'on ne brise pas à un certain moment la chaîne des ressemblances. Cela est même nécessaire si l'on veut rejoindre ainsi une idée transcendante excentrique et exorbitante relativement au pensable.

3.3 Per se / per aliud

Ainsi la matrice (B) conduit à une antinomie de type "l'impensable est pensable". Selon Vuillemin, Anselme aurait bien vu qu'une telle antinomie pouvait être résolue par une distinction de niveaux de langage entre métalangue et langue objet. Mais une telle distinction qui permet d'éviter l'antinomie épistémologique annule la possibilité même d'une preuve (p. 70). C'est pourquoi sa réponse est plutôt à chercher du côté de son usage de l'opposition fondamentale entre *per se* et *per aliud*. dans la mesure où la description est pensable même si son référent ne l'est pas. L'impensable est pensé négativement *per aliud*.

> "Dieu est *quoad per aliud* ce qui est le plus grand ou ce qui est tel que rien de plus grand ne peut être pensé, il est *quoad per se* étranger à ces relations." (p. 67).

La réponse d'Anselme est de

> "dissocier dans le *id quo nihil majus cogitari potest* l'élément substantiel, le *id*, qui en soi est impensable et *per se*, et l'élément relatif, le *quo nihil majus cogitari potest*, qui est pensable mais aussi *per aliud* (...). De même qu'il y a des noms de Dieu, qui ne le nomment que *per aliud*, il y a une possibilité de penser Dieu *per aliud*, alors que *per se* il n'est ni nommable ni pensable" (p. 70).

Autrement dit le "quo nihil majus cogitari potest" est une description qui représente le "id" infini et indicible pour un sujet fini. Il en est un représentant dicible formulé dans un langage, sa formulation étant, bien que la meilleure possible, absolument inadéquate.

Le dilemme est que, pour être sûr que c'est bien de l'idée visée que l'on parle, il faut identifier subrepticement le *per se* et le *per aliud* et l'on se trouve dès lors reconduit à l'antinomie "épistémologique".

Ainsi, en tant que matrices générales, les matrices (A) et (B) sont indissolublement liées, mais leur solidarité est une solidarité d'antinomies. La seule possibilité aurait été pour Anselme de désolidariser la matrice (B) de la matrice (A) tout en la "spécialisant" de façon à éviter l'arbitraire de l'hypothèse ontologique non plausible qui la piège dans l'antinomie "épistémologique".

En effet, le défaut de la matrice (B) est ainsi décrit par Vuillemin. La condition $\varphi(x)$ étant interprétée comme "on peut penser une perfection plus grande que celle de x" et la "fonction" f_u étant interprétée comme *le "successeur" de l'ensemble u dans X_φ (bien) ordonné par la gradatio*, pour que la matrice (B) soit acceptable, i.e. pour que les conditions $f_u \notin u$ et $\neg\varphi(f_u)$ soient acceptables,

> "il faut admettre la prémisse universelle que, quel que soit un ensemble de perfections telles qu'il est possible de penser qu'il en existe de plus grandes qu'elles, il n'est pas possible de penser une perfection qui soit plus grande que le successeur de cet ensemble (c'est-à-dire la plus petite parmi les perfections plus grandes que n'importe quelle perfection de l'ensemble) et ce successeur n'appartient pas à l'ensemble." (p. 82).

On remarquera que cette interprétation "ordinale" est aussi une interpétation "métrique" , le "degré" étant une sorte d'évaluation de la distance entre $y < x$ et x.[6]

Bref, si la condition $f_u \notin u$ est acceptable, la condition $\neg\varphi(f_u)$ conduit en revanche à identifier f_u, *quel que soit u*, au "id quo nihil majus cogitari potest". Cette excentration hyperbolique de *tous* les f_u ruine complètement l'exigence de ressemblance. C'est ce que Vuillemin appelle "l'hypothèse ontologique non plausible".

> "Ainsi, ou bien on admet la prémisse de la matrice (A), en vertu de laquelle la fonction [f_u] de tout ensemble de perfections susceptibles de degré est elle-même susceptible de degré et n'appartient pas à l'ensemble. On respecte alors la condition de ressemblance, mais on n'évite pas l'antinomie mathématique. Ou bien on admet la prémisse de la matrice (B), en vertu de laquelle la fonction de tout ensemble de perfections susceptibles de degré n'est pas elle-même susceptible de degré et n'appartient pas à l'ensemble, et l'on n'évite l'antinomie que pour recevoir en contrepartie une hypothèse sans

6. Nous n'entrons pas dans la question de savoir si le degré doit être pensé comme continu ou discret avec le problème qu'il n'y a pas de bon ordre naturel sur le continu. Cette question n'est pas pertinente ici étant donnée l'élémentarité des intuitions schématiques mises en jeu.

> plausibilité ontologique." (p. 83).

Certes l'on peut répondre que les "fonctions" f_u ne sont connues que *per aliud*. Mais nous avons vu que l'opposition *per se* / *per aliud*, bien que décisive, déguise l'antinomie "épistémologique".

Pour contrôler l'hyperbole conduisant à identifier tous les f_u à l'hypostase de l'idée dont il s'agit de démontrer l'existence et, par là même, à s'interdire

> "de comprendre pourquoi et comment la fonction de l'ensemble (est) construite comme ne lui appartenant pas."

il faut "spécialiser" la matrice (B) en restreignant ses conditions. C'est là qu'intervient, selon Vuillemin, le *postulat du parfait*.

3.4 Le postulat du parfait

Les conditions (i) $f_u \notin u$ et (ii) $\varphi(f_u)$ i.e. f_u possède la propriété satisfaite par u, sont contradictoires lorsque $u = w = X_\varphi$. Il s'agit alors de s'affranchir de (ii) sans pour autant tomber dans (B) et son hypothèse ontologique non plausible. Il faut pour ce faire affaiblir la négation $\neg\varphi(f_u)$ en définissant une propriété de f_u qui ne soit pas possédée par les éléments considérés et qui pourtant reste

> "caractéristique de la chaîne de ressemblance à laquelle on s'est engagé à emprunter le caractère démonstratif de la preuve." (p. 88).

C'est sur cette idée que repose, selon Vuillemin, l'argumentation. On ajoute au symbole f_u une propriété que ne possèdent pas les simples éléments individués de $x \in u$. Nous verrons plus loin que f_u peut-être interprété comme un élément non individué *générique* de u et que c'est une interprétation de la généricité comme *perfection* qu'utilise Anselme.

D'où le *postulat du parfait*. On supposera que f_u représente l'idée non pas du maximum absolu, mais du maximum *relatif* à u. f_u s'interprétera comme "cela tel que_rien de plus grand ne peut être pensé qui appartienne à u". Mais comme tous les éléments de u satisfont à la condition φ selon laquelle un "plus grand peut être pensé", cela implique que les éléments de u soient "indéfiniment perfectibles" (i.e. que la relation de "perfectibilité" soit sans maximum dans u). Cela permet de concilier le fait que, comme *idéal* associé à u, f_u n'appartienne pas à u et que pourtant f_u soit perfectible ($\varphi(f_u)$). La propriété $\neg\varphi(f_u)$ proviendrait alors d'un passage à la limite, d'une totalisation sur l'ensemble de tous les ensembles.

Le postulat du parfait (qui remonte à Platon) postule qu'il existe des "espèces" bien déterminées de "perfections" :

> "là où il y a du relatif, de l'imparfait dans un genre, il y a de l'absolu ou du parfait dans ce genre." (p. 89),

ou encore

> "quand une chose est dite être ceci ou cela, et donc être ceci ou cela à un degré déterminé, le ceci ou le cela doit être posé en tant qu'universel comme un fondement de participation de tout le divers qui est comparable à cette chose eu égard à cet universel." (p. 91).

Ce postulat, Anselme ne l'utilise pas (comme par exemple Augustin) de façon hypostatique. Il ne pose pas le parfait comme une essence une mais comme un *indéterminé* (*aliquid*) qui ne doit être pensé que *per aliud* et jamais *per se*, la possibilité de le penser pourtant per se manifestant *l'équivocité de l'être.*

> "Lorsque nous attribuons un universel à une chose, nous ne le pensons pas *per se*, mais *per aliud*, et, en tant qu'elle pense positivement, notre raison est limitée au *per aliud*, en sorte qu'elle ne peut poser l'idée comme origine de la réunion du Multiple dans l'un que d'une façon non seulement indirecte mais [aussi] équivoque." (p. 92-93).

Cette opposition *per se* / *per aliud* permet à Anselme d'éviter l'aporie d'une conception "causale" du parfait (le parfait comme cause efficiente de l'imparfait qui y participe).

Vuillemin introduit alors l'hypothèse que les raisonnements théologiques fondés sur le postulat du parfait emprunteraient leurs formes aux méthodes d'exhaustion, c'est-à-dire à un usage pré- et para-mathématique de la notion de *limite* (p. 115). Mais cet usage n'incluant aucun équivalent des démonstrations de convergence, il ne serait pas valide. Même "spécialisée" la matrice (B) ne déboucherait donc pas sur une preuve consistante.

La preuve anselmienne expose avant tout un accord interne de la signification : ce qui est radicalement excentrique à la représentation (à l'*esse in intellectu*) ainsi qu'à la réalité (à l'*esse in re*) se trouve paradoxalement en position de référent (*esse in re*) pour l'idée (*esse in intellectu*) signifiée par le nom de Dieu comme description indéfinie négative.

3.5 Des intuitions géométriques

En résumé, au niveau extensionnel pur où seules les relations $x \in E$ d'un élément *individué* à un ensemble E sont prises en compte ; on a des $u \subseteq X_\varphi$ et il s'agit de positionner un f_u. On a donc trois possibiltés

1. $f_u \in u$, situation triviale qui ne permet pas de formaliser l'argument ;
2. $f_u \in X_\varphi - u$, matrice (A) ;
3. $f_u \notin X_\varphi$, matrice (B).

Si $u = X_\varphi$ la matrice (A) ne fonctionne plus et il ne reste que la matrice (B).

La difficulté principale est de donner un sens à l'expression "f_u est de même type" que les éléments de u. La question est de savoir si l'on peut l'interpréter purement logiquement ou si l'on doit choisir d'introduire un peu de structure supplémentaire.

Le texte d'Anselme conduit à utiliser cette seconde solution à partir de la *relation d'ordre* qu'est la *gradatio*. Il y a alors comme une *topologie* associée qui permet facilement de résoudre le problème.[7] Dire que les éléments considérés sont perfectibles c'est dire que les u et X_φ sont *ouverts* dans un espace topologique global. On peut alors considérer des éléments "parfaits" appartenant à leurs *bords* ∂u er ∂X_φ, c'est-à-dire "adhérents".

2bis $f_u \in \partial u$, matrice (A) et postulat du parfait ;

3bis $f_u \in \partial X_\varphi$, matrice (B). Identifier entre eux tous les f_u (l'hypothèse "ontologiquement non plausible") revient en quelque sorte à "compactifier" X_φ en lui adjoignant un "point à l'infini" que l'on identifie aux f_u.

Lorsque la topologie est pensée comme *gradatio* elle est associée à un ordre et une métrique continus et les éléments du bord sont pensés comme des éléments maximaux. La propriété "maximum" est l'équivalent de la propriété "successeur" dans le schème ordinal de Vuillemin. Comme degré de perfectibilté, la *gradatio* opère comme une sorte de fonction $G_{\overline{u}}$ sur la fermeture $\overline{u}$ de l'ouvert u avec ses lignes de niveau et ses ligne de gradient (lignes de plus grand accroissement de la perfectibilité) qui aboutissent sur le bord ∂u. Lorsque la trajectoire de perfectibilité de $x \in u$ atteint le bord en x_M, x_M maximise x et représente le "parfait" issu de x. Le domaine $\overline{u}$ représente ce que Vuillemin appelle le "successeur" du domaine u et code par f_u.

Pour clarifier ce point il faut tenir compte du fait que les f_u ne sont pas des éléments individués qui sont à la fois dans u et en dehors de u (éléments bord appartenant à ∂u) mais des éléments *idéaux non*

7. Il va de soi qu'il ne s'agit d'aucune topologie concrète mais de simples intuitions schématiques associées à des schèmes mentaux simples comme les diagrammes de Vehn. Dans la suite on considère que les u sont intuitivement comme des "boules" régulières dans un espace ambiant.

individués ajoutés à u, des "aliquid" indéterminés pensables seulement *per aliud*. Nous allons maintenant explorer cette possibilité qui se trouve au cœur de l'analyse de Vuillemin.

3.6 Passage à l'opérateur de Hilbert

Si nous identifions – ce qui ne va évidemment pas du tout de soi – existence et quantification existentielle afin de *mimer logiquement* le ressort de la preuve, l'on voit que pour prétendre analyser dans sa forme logique une façon d'argumenter aussi singulière sans l'écraser pour autant sur une banale inconsistance, il faut une logique :

(i) où les expressions "celui qui", "cela qui", "quelque chose tel que", "idée de quelque chose tel que", etc. aient un sens et un statut ;

(ii) où les descriptions non définies (c'est-à-dire sans conditions d'existence et d'unicité, contrairement aux descriptions définies) soient possibles ;

(iii) où l'on peut disposer d'éléments idéaux non individués qui sont des "aliquid" indéterminés pensables seulement *per aliud* ;

(iv) où l'existence (au sens de quantification existentielle) s'identifie à une propriété de consistance sémiotique.

C'est ce que l'on peut faire en utilisant un formalisme logique dû à Hilbert et ses disciples.Wilhelm Ackermann et Paul Bernays.

4 Définitions générales sur l'opérateur de Hilbert

Soit $F(x)$ un prédicat (unaire) quelconque. De façon a priorique et purement syntaxique, Hilbert introduit un symbole d'*individu* — dit ε-terme — noté $\varepsilon_x F(x)$, ou ε_F par commodité, où x devient une variable liée. ε_F étant un individu, pour toute formule ouverte $G(y)$ à une variable libre y (en particulier pour tout autre prédicat unaire), $G(\varepsilon_F)$ est une formule fermée, c'est-à-dire un énoncé. Si $F(x, y)$ est un prédicat binaire, alors $\varepsilon_x F(x, y)$ est un prédicat unaire $\varepsilon_x(y)$, $\varepsilon_y \varepsilon_x F(x, y) = \varepsilon_y (\varepsilon_F(y))$ est un ε-terme , etc.

Ainsi définies, l'existence et l'identité des ε-termes sont purement *syntaxiques*. Il est essentiel d'insister sur le fait que ε_F est un symbole d'*individu* et non pas de variable. Sémantiquement, ε_F est, nous allons le voir, de nature *intensionnelle*. Il représente – en quelque sorte "hypostasie" – l'*idée* d'un individu satisfaisant F et cela que l'extension X_F de F soit non vide ou non. C'est un individu idéal représentant l'idée d'un individu qui satisfait F, autrement dit une *idée in individuo*. Comme $\varepsilon_x F(x)$ possède le même type logique que celui des arguments x de F, l'expression $F(\varepsilon_F)$, bien qu'auto-référentielle, est pourtant bien formée.

Hilbert définit alors la quantification existentielle par l'équivalence syntaxique :

($\exists$) $\exists x\, F(x) \;\equiv\; F(\varepsilon_F)$.

Informellement interprétée, cette équivalence signifie que le fait qu'il existe un individu satisfaisant F équivaut au fait que l'idée in individuo d'un individu satisfaisant F satisfait effectivement F. Par *l'adjonction d'individus idéaux* à l'univers considéré, il devient donc possible de ramener des formules avec quantificateurs à des formules de forme strictement plus simple, *sans* quantificateurs. Il y a là une opération qui, au-delà de son intérêt proprement logique, est, selon nous, d'une grande portée philosophique. Appelons "subsistance", pour ne pas la confondre avec l'existence formalisée par le quantificateur $\exists$, l'existence purement symbolique et syntaxique des ε-termes. Nous empruntons cette terminologie à la théorie des états de choses. Comme structure idéale de sens à la fois dénotée par l'énoncé qui le décrit et incarnée dans des données factuelles particulières, un état de choses n'existe pas. Il subsiste idéalement. L'équivalence ($\exists$) signifie que l'existence équivaut à un redoublement en consistance (en cohérence sémantique) d'une subsistance. L'existence est l'effet du fait que la subsistance symbolique ε_F puisse posséder une référence consistante conforme à son contenu idéal. Elle est donc un type particulier d'*auto-référence*.

Au sens que possède l'opposition entre syntaxe et sémantique en théorie logique des modèles (où la sémantique s'identifie à la dénotation), qu'en est-il de l'interprétation des ε-termes ? À supposer que l'on ait interprété $F(x)$ dans un modèle $\mathcal{M}$ du langage $\mathcal{L}$ dont $F(x)$ est une formule, comment doit-on interpréter ε_F ? Comme nous le verrons, de nombreuses discussions ont eu lieu à ce propos. Elles tournaient, sans l'expliciter, autour du fait qu'une entité comme ε_F est une entité *intensionnelle*.

Comme un *déictique* d'une langue naturelle, ε_F est en quelque sorte un *symbole-index* — i.e. une entité intensionnelle de nature *pragmatique* — dont l'identité syntaxique est parfaitement bien définie (aspect symbole) mais dont l'identité sémantique (la dénotation) est au contraire indéfinie (aspect index). C'est pourquoi, avant que les logiques intensionnelles et la pragmatique formelle n'aient conduit à explorer ce genre d'entités, les hilbertiens interprétaient sémantiquement les ε-termes comme des *opérateurs de choix*. Soit X_F l'extension de F et supposons $X_F \neq \emptyset$, i.e. supposons que $\exists x F(x)$ soit valide. Sémantiquement, ε_F fait plus que dénoter un certain élément $a \in X_F$ (ce qui serait le cas si ε_F était un symbole de constante). Il *sélectionne* un élément $a \in X_F$. La définition ($\exists$) devient alors la reformulation de la règle de généralisation du quantificateur existentiel du calcul des prédicats :

($I\exists$) $F(a) \Longrightarrow \exists x F(x)$.[8]

8. Rappelons les quatre règles d'introduction (I) et de généralisation (G) des

Le symbole ε_F est donc beaucoup plus qu'un simple symbole. Il a bien le *type* des éléments de l'extension X_F mais il est en quelque sorte "actif". C'est un élément idéal qui agit comme un opérateur, ce "supplément d'être" lui conférant tout son intérêt sémio-logique.

En tant qu'opérateur de choix relatif à l'extension X_F, ε_F peut aussi être considéré comme un *type générique* dont les spécialisations sont les éléments $a \in X_F$. Ce simple fait suffit à en indiquer la pertinence cognitive et sémio-linguistique.

***Remarque.* Notons d'emblée que, comme symboles-index associés à des descriptions indéfinies, comme éléments génériques dont la référence n'est définissable que par selection, comme entités intensionnelles susceptibles d'une interprétation *de dicto* ou *de re*, les ε-termes ont exactement le statut d'*aliquid* qui ne sont pensables que *per aliud.* C'est pourquoi il nous paraît justifié de les utiliser pour clarifier l'analyse de Jules Vuillemin.**

Qu'en est-il alors d'un jugement non plus existentiel mais universel, du type $\forall x\ F(x)$? On a les équivalences suivantes [9] :
$\forall x F(x) \Longleftrightarrow \neg\,(\exists x\,(\neg F(x)))$ (dualité $\forall \leftrightarrow \exists$ à travers la négation) ;
$\exists x\,(\neg F(x)) \Longleftrightarrow \neg F(\varepsilon_{\neg F})$ (d'après $(\exists)$ appliquée à $\neg F$;
$\neg\,(\exists x\,(\neg F(x))) \Longleftrightarrow \neg\neg F(\varepsilon_{\neg F})$;
$\neg\neg F = F$ (double négation) ;
et donc, en définitive :
$(\forall) \qquad \forall x F(x) \Longleftrightarrow F(\varepsilon_{\neg F})$.

C'est cette detnière équivalence qui rend l'opérateur de Hilbert pertinent ici pour notre propos. Par exemple, dans un univers logique avec principe d'identité, $\forall x\,(x = x)$ s'écrit $\varepsilon_{(x \neq x)} = \varepsilon_{(x \neq x)}$ autrement dit, "l'objet impossible" $\varepsilon_{(x \neq x)}$ est identique à lui-même ! Si "même" le symbole de l'idée d'un objet différent de lui-même est en fait égal à lui-même, alors c'est que, "vraiment", tout objet est égal à lui-même.

Supposons que $\forall x F(x)$ soit valide une fois interprété dans un certain modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$. L'ε-terme $\varepsilon_{\neg F}$ subsiste toujours. Il "existe" symboliquement. Mais il ne peut pas référer de façon consistante, conformément à son contenu, puisque par hypothèse il n'existe aucun individu satisfaisant $\neg F$. *Tout référent de $\varepsilon_{\neg F}$ nie le contenu de l'idée dont il est l'hypostase.* On dit dans ce cas que $\varepsilon_{\neg F}$ est un *terme-zéro* ("null-term"). Nous dirons également que $\varepsilon_{\neg F}$ est un *symbole-index clivé* dont l'aspect symbole (syntaxique) et l'aspect index (sémantique) sont contra-

quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$: $(I\forall)$ $\forall x\ F(x) \Longrightarrow F(a)$ (évident) ; $(I\exists)$ $\exists x F(x) \Longrightarrow F(a)$; $(G\forall)$ $F(a) \Longrightarrow \forall x\ F(x)$; $(G\exists)$ $F(a) \Longrightarrow \exists x F(x)$.(évident)

9. Ces équivalences appartiennent à la logique classique, et ne sont pas valables en logique intuitionniste. Nous y reviendrons à la fin de cette étude.

dictoires. C'est d'ailleurs pourquoi l'interprétation de l'opérateur ε fait quelque peu problème. Un certain flottement est repérable chez les logiciens spécialistes de l'opérateur ε.

La formule ($\forall$) est à l'origine des travaux de Hilbert sur les fonctions de choix transfinies. Initialement, Hilbert notait $\tau_x F(x)$ l'individu $\varepsilon_{\neg F}$ et le pensait comme un *contre-exemple générique* à F. Les énoncés universels ($\forall$) étaient alors analogues aux universalisations fréquentes en langue naturelle : "si même lui... alors tous..." : "si même τ_F qui représente idéalement un individu satisfaisant $\neg F$ satisfait quand même F alors vraiment tous les individus satisfont F".[10]

L'opérateur de Hilbert rend donc dans une certaine mesure la contradiction opératoire, non pas la contradiction logique brute mais cette forme plus subtile de contradiction qu'est l'incompatibilité entre le signifié du symbole syntaxique ε_F et les propriétés "réelles" de ses référents. D'après ($\forall$) tout énoncé universel est en quelque sorte "délimité" par un effet paradoxal. Pour rendre compte de ce phénomène sémiologique, il faut, nous l'avons vu, prendre soin de distinctions inhabituelles en théorie des modèles.

(i) Dans un individu-type ε_F il faut distinguer – comme pour les énoncés – la structure syntaxique (la construction de ε_F à partir de F), le sens (ou le signifié, le contenu idéal) et les référents (la dénotation).

(ii) Syntaxiquement (symboliquement), ε_F subsiste. Lorsqu'il admet des référents conformes à son sens, alors il existe. Sinon sa subsistance n'est que purement symbolique.

(iii) Il existe une *double nature* des ε-terme. ε_F symbolise un "ceci" indéterminé "qui satisfait F", un "celui qui...". Mais il réfère à un élément, au demeurant *quelconque*, de X_F (si $X_F \neq \emptyset$).

C'est dans ce jeu entre la négation, l'article indéfini et le démonstratif que se joue l'un des principaux intérêts sémio-logique de l'opérateur de Hilbert. Et cela d'autant plus que participe également au jeu l'article *défini* dans son usage *générique*. Il existe en effet une troisième interprétation de l'opérateur ε – l'interprétation *générique* – qui consiste à interpréter ε_F comme dénotant un élément générique de X_F (si $X_F \neq \emptyset$). La relation primitive d'appartenance $a \in X_F$ se trouve alors substituée par une relation (elle aussi primitive) de *spécialisation* $\varepsilon_F \rightsquigarrow a$: l'élément $a \in X_F$ est un individu qui spécifie et particularise – spécialise – l'élément générique ε_F. Dans cette interprétation, si un prédicat $G(y)$ est valide pour l'élément générique ε_F, il est ipso-facto valide pour toute ses spécialisations, autrement dit, on a les équivalences :

10. L'exemple de Hilbert qui circulait à l'époque était celui d'Aristide, le plus incorruptible des hommes. ($\forall$) correspondait à l'universelle : "si même Aristide est corruptible, alors tous les hommes sont corruptibles".

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_F) &\Longleftrightarrow \varepsilon_F \in X_G \Longleftrightarrow \forall x\ [(\varepsilon_F \rightsquigarrow x) \Longrightarrow x \in X_G)] \\ &\Longleftrightarrow X_F \subset X_G \Longleftrightarrow \forall x[F(x) \Longrightarrow G(x)]. \end{aligned}$$

On voit ainsi en définitive que, comme d'autres entités intensionnelles, les ε-termes possèdent une interprétation *de dicto* (interprétation générique) et une interprétation *de re* (interprétation spécifique comme fonction de choix). On retrouve la dialectique etre *esse in intellectu* et *esse in re*.

Ces divers aspects de l'opérateur ε deviennent particulièrement intéressants et significatifs si l'on songe qu'à partir d'ε il est possible d'élaborer un calcul logique – dit ε-calcul et noté CP_ε – qui se révèle être *syntaxiquement équivalent* au calcul standard des prédicats CP. CP_ε est constitué des composantes suivantes :

(a) le calcul standard des propositions ;

(b) des symboles de constantes individuelles et des symboles de variables en nombre suffisant ;

(c) des symboles de prédicats n-aires, pour tout n ;

(d) les ε-termes correspondants ;

(e) les règles standard de déduction dans CP ;

(f) la règle d'introduction de l'opérateur ε (ε-formula) :

(ε) $\quad F(a) \Longrightarrow F(\varepsilon_F)$.

On démontre alors (cf. plus bas) que si φ est un énoncé de CP et ψ une conséquence de φ dans CP_ε d'où le symbole ε est éliminable, alors ψ est en fait une conséquence de φ dans CP. Autrement dit, CP_ε est une extension "inessentielle" ("conservative") de CP.

Il n'y a donc aucune raison de considérer CP comme plus évident ou plus naturel que CP_ε.

5 Les origines méta-mathématiques et la portée épistémologique de l'opérateur e

L'opérateur ε a été introduit par Hilbert comme un outil dans son vaste programme formaliste qui consistait à démontrer par des moyens finitistes la consistance des principales théories mathématiques et, avant tout, de l'arithmétique formelle. On sait que ce programme de recherche a dominé la logique mathématique jusqu'à ce que le théorème d'incomplétude de Gödel en ait démontré les limites intrinsèques. Ce résultat négatif a fait déchoir les tentatives pré-gödeliennes au rang de curiosités, mais cela ne les empêche pas de garder tout leur intérêt sémiologique et cognitif.

On sait que la thèse de Hilbert était que, pour "fonder" les mathématiques, il fallait démontrer leur consistance en ne faisant usage que d'une métalogique finie, celle-ci étant la seule à pouvoir être considérée comme légitime et évidente *a priori*. Mais cela soulevait immédiatement le problème de l'existence de quantificateurs dans les axiomes de théories possédant des modèles infinis. Car alors la quantification n'est plus un processus finitiste : $\exists x\ F(x)$ (resp. $\forall x\ F(x)$) n'est plus une simple disjonction finie $F(a_1) \vee ... \vee F(a_n)$ (resp. une simple conjonction finie $F(a_1) \wedge ... \wedge F(a_n)$. Il fallait donc pouvoir *éliminer* les quantificateurs des axiomes sans pour autant affaiblir la force du calcul des prédicats utilisé. C'est pourquoi Hilbert a cherché à *définir* les quantificateurs dans le cadre d'un formalisme satisfaisant aux conditions très restrictives imposées par sa stratégie finitiste. Et il a cru trouver le cadre approprié avec l'ε-calcul CP_ε (et ses dérivés). En effet la stratégie finitiste impose que l'on se restreigne à des manipulations logiques élémentaires sur des énoncés *élémentaires* (sans quantificateurs) de type $F(a)$, $G(a, b)$, etc. C'est donc en élargissant l'univers des objets par l'introduction d'objets idéaux qu'il faut arriver à éliminer les quantificateurs. Ce qui est possible dans CP_ε avec l'introduction de la "transfinite logische Auswahlfunktion" qu'est l'opérateur ε.

Après quelques essais remontant à 1923, Hilbert a introduit sa fonction de choix transfinie dans son célèbre mémoire de 1925 *Sur l'Infini*[11] et, avec Bernays, il en a développé l'usage dans son ouvrage monumental *Grundlagen der Mathematik*. Il a accédé grâce à lui à un certain nombre de démonstrations constructives et finitistes de consistance (cf. plus bas). Leisenring décrit ainsi sa stratégie formaliste générale[12] :

> "Supposons que $\mathcal{T}$ soit une théorie fondée sur le calcul des prédicats. S'il existe un modèle $\mathcal{M}$ qui satisfait l'ensemble $\mathcal{A}$ des axiomes de $\mathcal{T}$, alors $\mathcal{T}$ est consistante. [...] L'objection à ce type de preuve de consistance est qu'elle requiert une très forte métathéorie. Par exemple, si la cardinalité du modèle est infinie, il faut, pour démontrer que φ [une formule fausse quelconque, par exemple $0 = 1$] n'est pas un théorème de $\mathcal{T}$ [et que $\mathcal{T}$ est donc consistante], utiliser des arguments non-constructifs montrant que les axiomes de CP sont vrais dans le modèle. Une des principales contributions des formalistes a été de montrer que pour certaines théories particulières ce type de preuve de consistance pouvait être menée à bien de

11. Hilbert [1925]. Cf. aussi Hilbert [1927] ainsi que Bernays [1927] et Ackermann [1928].
12. Pour une introduction à la théorie des modèles, cf. Petitot [1979].

façon complètement finitiste." [13]

Considérons par exemple les axiomes de la théorie $\mathcal{T}$ des ensembles infinis sur lesquels est définie une relation $<$ d'ordre total avec un plus petit élément.

A_1 $\forall x\ (\neg (x < x))$ (non réflexivité de l'ordre) ;
A_2 $\forall x \forall y \forall z\ ((x < y) \wedge (y < z) \Longrightarrow (x < z))$ (transitivité de l'ordre) ;
A_3 $\forall x \forall y\, ((x < y) \vee (y < x) \vee (x = y))$ (ordre total) ;
A_4 $\forall x \exists y\, (x < y)$ (ordre infini) ;
A_5 $\exists x \forall y\, ((x = y) \vee (x < y))$ (plus petit élément).

L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers muni de sa relation d'ordre naturel est un modèle de $\mathcal{T}$ et donc $\mathcal{T}$ est consistante. Mais cette preuve sémantique est non constructive. Pour accéder à une preuve syntaxique finitiste, il faut avant tout éliminer le quantificateur $\exists$ des axiomes A_4 et A_5. On peut le faire par la méthode de "résolution" symbolique suivante. Soit un axiome de la forme $\exists x \forall y\ B(x, y)$. On peut lui substituer $\forall y\ B(s, y)$ (où $s = \varepsilon_x \forall y\ B(x, y)$ est un ε-terme) qui est un axiome ne contenant plus qu'un quantificateur universel. De même, soit un axiome de la forme $\forall x \exists y\ B(x, y)$. Suivant Skolem, introduisons un symbole de fonction g (dite fonction de Skolem) et notons $g(x) = \varepsilon_y B(x, y)$. On a

$$\forall x \exists y\ B(x, y)\ \equiv\ \forall x\ B(x, \varepsilon_y B(x, y))\ \equiv\ \forall x\ B(x, g(x)).$$

Dans notre cas, on obtient donc le système d'axiomes : A_1, A_2, A_3, $\widetilde{A}_4$: $\forall x\ (x < g(x))$, $\widetilde{A}_5$: $\forall y\ ((s = y) \vee (s < y))$, axiomes d'où les quantificateurs $\exists$ ont été éliminés.

On utilise alors le résultat suivant. On sait que toute formule φ de CP peut être mise sous forme prénexe, i.e. est équivalente à une formule φ' de la forme $Q\varphi^0$ où Q est une suite de quantificateurs et φ^0 une formule sans quantificateurs dite "matrice" de φ. Le premier théorème fondamental d'élimination de ε (cf. plus bas) dit que si Σ est un ensemble de formules prénexes et si φ est une formule prénexe, alors si $\Sigma \vdash_{CP} \varphi$ (i.e. si φ est une conséquence de Σ dans CP) on a $\Sigma^* \vdash_{CE} \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ où les formules de Σ^* (resp. les formules φ_i) sont obtenues à partir des matrices des formules de Σ (resp. de la matrice de φ) en y substituant les variables par des termes (y compris par des ε-termes) et où CE est le calcul élémentaire des prédicats ne faisant pas usage des quantificateurs. Soit alors Σ le système d'axiomes $A1, ..., A'5$. Les matrices en sont :

A_1^0 $\neg (x < x)$;
A_2^0 $(x < y) \wedge (y < z) \Longrightarrow (x < z)$;
A_3^0 $(x < y) \vee (y < x) \vee (x = y)$;
$\widetilde{A}_4^0$ $x < g\,(x)$;

13. Leisenring [1969], pp.85-86.

$\widetilde{A}_5^0 \qquad (s = y) \vee (s < y).$

Pour démontrer *syntaxiquement* que $\mathcal{T}$ est consistante, il suffit donc d'assigner une interprétation aux symboles et une valeur de vérité aux formules élémentaires du langage formel considéré qui soient telles que toute substitution dans une de ces matrices donne un énoncé vrai. Or cela est facile à effectuer de façon finitiste. Comme l'explique Leisenring :

> "De façon générale, la méthode formaliste des preuves de consistance peut être décrite de la façon suivante. Supposons que $\mathcal{T}$ soit une théorie basée sur CP. En remplaçant chaque axiome de $\mathcal{T}$ par une forme prénexe équivalente, en prenant les résolutions de Skolem de ces formules prénexes et en adjoignant les nouvelles fonctions de Skolem au vocabulaire [du langage formel], on obtient une théorie $\mathcal{T}'$ qui est une extension inessentielle de $\mathcal{T}$. On essaye alors de trouver une assignation effective de valeurs de vérités aux formules atomiques de $\mathcal{T}'$ d'une façon telle que chaque axiome E_1 et chaque axiome E_2 [les axiomes de l'égalité dans CP] et que chaque substitution des matrices des axiomes de $\mathcal{T}'$ prennent la valeur 1 [i.e. soient vrais]. Si cela peut être fait alors à la fois $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}$ sont consistantes." [14]

C'est de cette façon (et en particulier en définissant explicitement les fonctions de Skolem à partir de l'opérateur ε) que Hilbert a justifié l'usage de l'infini.

> "Peut-être que la signification majeure du premier ε-théorème de Hilbert est la suivante. Bien que la logique classique, telle qu'elle est formalisée par le calcul des prédicats, contient des aspects non-finitistes, toute preuve d'un énoncé finitiste peut être convertie en une preuve finitiste." [15]

Toutefois, comme nous le verrons plus bas, il s'est heurté à une difficulté irréductible qui n'a été vraiment éclaircie que par Gödel.

Cette stratégie métamathématique a été particulièrement bien décrite sur le plan épistémologique par Albert Lautman qui, on le sait, était un ami intime des hilbertiens français Jacques Herbrand, Claude Chevalley (et les Bourbakistes) et Jean Cavaillès. [16] Dans plusieurs textes, il est revenu sur le fait que le formalisme hilbertien échappe aussi bien au logicisme russellien qu'aux contraintes trop drastiques de l'intuitionnisme.

---

14. *Ibid.*, p.87.
15. *Ibid.*, p.88.
16. Pour une introduction à la philosophie mathématique de Lautman, cf. Petitot [1987].

Le problème est, nous l'avons vu, que pour les modèles infinis des théories il y a contradiction entre l'exigence de manipulation finitiste des symboles (des variables) des formules et le nombre infini de vérifications élémentaires qu'exige la validation de formules contenant des quantificateurs. D'où l'idée d'introduire

> "des champs métamathématiques, intermédiaires entre les signes des formules et les champs mathématiques [les modèles] de leurs valeurs effectives." [17]

À la suite de Hilbert, Herbrand cherche à ramener tout énoncé à un énoncé sans quantificateurs dont la valeur de vérité soit vérifiable en un nombre fini d'étapes. Pour cela

> "il lui a fallu trouver une manière de définir, pour une variable susceptible de prendre une infinité de valeurs mathématiques, un nombre fini de valeurs métamathématiques, qui symbolisent ainsi l'existence de cette infinité si difficile à manier." [18]

C'est là que les procédures de type opérateur ε deviennent essentielles. Si elles permettent d'élaborer des preuves constructives (syntaxiques et effectives) qui échappent cependant aux contraintes trop strictes des constructivismes intuitionnistes, c'est parce qu'elles imposent les contraintes de finitude aux entités *métamathématiques* et non pas directement aux entités mathématiques des modèles considérés. Ces entités métamathématiques que sont les ε-termes, les fonctions de Skolem, etc., sont, selon Lautman, des "mixtes" intermédiaires entre les symboles et les référents dénotés par ces symboles, c'est-à-dire entre syntaxe et sémantique.

> "Les éléments de ces champs [métamathématiques] sont donc en étroite correspondance avec les signes des variables des formules ; ils constituent plutôt un système de nouveaux signes que l'on substitue aux premiers qu'un ensemble de véritables valeurs pour les variables désignées par ces signes. D'un autre côté, ils n'en possèdent pas moins une nature de champs indépendants de la formule qu'ils réalisent, et présentent bien ainsi un premier aspect de mixtes en tant qu'ils sont intermédiaires entre les signes formels et leurs valeurs mathématiques effectives. (...) Intermédiaires entre les signes et leurs valeurs, ces champs sont, d'une part homogènes à la discontinuité finie des signes puisqu'à un signe de variable $(\exists x)$ ne correspond qu'une valeur a [a est ici l'ε-terme ε_F associé à la formule $F(x)$ que $\exists x$ quantifie] et, d'autre part ils symbolisent

17. Lautman [1937], p. 108.
18. *Ibid.*

> une infinité de valeurs mathématiques puisque la lettre a représente n'importe quelle valeur mathématique éventuelle de la variable x lorsqu'elle intervient sous la forme particulière $(\exists x)$. Une médiation s'opère donc par ces champs du fini à l'infini, qui permet (...) de dominer l'infini." [19]

Dans son dernier essai *Considérations sur la logique mathématique*, Lautman est revenu sur ce point décisif.

> "Il est impossible d'opérer tous les calculs impliqués par une théorie [à modèle infini], car ils sont évidemment en nombre infini et les intuitionnistes ont raison de dire qu'on ne serait jamais certain en procédant ainsi de ne pas trouver de contradiction. Mais il est possible de remplacer, en ce qui concerne l'étude de la valeur logique, la considération d'une infinité de valeurs particulières par une lettre ou une fonction "de choix" tels que les résultats obtenus dans le champ fini de ces valeurs de choix aient des conséquences valables transfiniment pour tous les êtres mathématiques particuliers dont les valeurs sont symbolisées par cette valeur de choix. (...) Entre les exigences de construction des intuitionnistes et la pure introduction de notions par axiomes, les hilbertiens ont su interpréter un schématisme intermédiaire, celui d'individu et de champs considérés non tant pour eux-mêmes que pour les conséquences infinies que permettent les calculs finis opérés grâce à eux." [20]

Clairement, ce statut de "mixte" des ε-termes correspond bien au statut des "fonctions" f_u de Jules Vuillemin tel que nous l'avons explicité plus haut.

6 L'ε-calculus

Donnons maintenant quelques précisions un peu plus techniques sur les sources et les développements logico-mathématiques de l'idée hilbertienne. [21]

L'affaire remonte à Russell et à son opérateur ι formalisant la notion de *description définie*. Considérons une description définie, autrement dit une formule $F(x)$ qui caractérise un individu parce qu'elle satisfait aux deux conditions d'existence et d'unicité :

(E) $\quad \exists x\ F(x)$

(U) $\quad \forall x \forall y\ (F(x) \wedge F(y) \Rightarrow x = y)$.

19. *Ibid.*, p.109.
20. *Ibid.*, pp.313-314.
21. Pour des précisions supplémentaires postérieures à cet article, cf. Petitot [2002] .

Russell introduit alors la notation $\iota_x F(x)$ $(= \iota_F)$ pour symboliser l'individu caractérisé par F et élargit CP en lui adjoignant la règle :

(R_ι) : sous les conditions (E) et (U) on peut introduire dans une démonstration l'individu ι_F et inférer $F(\iota_F)$.

L'opérateur ι ne pose pas de problème d'interprétation. Il formalise l'article défini. Et comme cardinal $(X_F) = 1$, l'article défini, (le $a \in X_F$), l'article indéfini (un $a \in X_F$ quelconque) et le démonstratif (celui qui satisfait F) coïncident. De par sa structure, c'est bien un symbole-index, mais, puisque cardinal $(X_F) = 1$, sa dénotation ne comporte aucune ambiguïté.

Lorsque son emploi est licite, l'opérateur ι permet immédiatement d'effectuer les procédures de résolution symbolique par introduction de fonctions de Skolem (élimination des quantificateurs). Soit un axiome A de la forme $A \equiv \forall x \exists y\ B(x,y)$ et supposons que, dans le système considéré, l'on puisse dériver la propriété d'unicité :

$$\forall x \forall y \forall z\ (B(x,y) \wedge B(x,z) \Rightarrow y = z).$$

Par application de (R_ι) on peut introduire $\iota_y B(x,y)$ quel que soit x et, par introduction d'un symbole de fonction g, poser $g(x) = \iota_y B(x,y)$. On aura alors, comme plus haut, $A \equiv \forall x\ B(x, g(x))$, la fonction de Skolem g étant ici *explicitement définie*.

La première généralisation effectuée par Hilbert a consisté à s'affranchir de l'hypothèse d'unicité (U). Sous la seule condition d'existence (E), Hilbert introduit un symbole η et un η-terme $\eta_x F(x)$ dont l'introduction est régie par la règle :

(R_η) : sous la condition (E) on peut introduire dans une démonstration l'individu η_F et inférer $F(\eta_F)$.

Avec les η-termes s'introduisent dans CP, selon le dire même de Hilbert, des éléments idéaux (des idées *in individuo*) canoniquement associés à des formules. L'opérateur η formalise en particulier l'article *indéfini*. Sa dénotation consiste en un élément, au demeurant quelconque, de X_F (non vide par hypothèse). η_F est déjà un "vrai" symbole-index avec la triple interprétation : article indéfini, article défini (interprétation *de dicto* comme objet générique), démonstratif ("celui qui satisfait F" : interprétation *de re*). Hilbert a privilégié cette troisième interprétation en considérant qu'un η-terme η_F était un *opérateur de choix*. Mais "qui" effectue le choix ?

Hilbert a alors subtilement remarqué que, indépendamment de toute condition d'existence et d'unicité, l'énoncé : $\exists x\ (\exists y\ F(y) \Rightarrow F(x))$ est *toujours* dérivable. On peut donc toujours introduire l'η-terme $\varepsilon_x F(x)$ (correspondant à la règle IE) :

$(*)$ $\quad \varepsilon_x F(x) \equiv \eta_x(\exists y\ F(y) \Rightarrow F(x)).$

Si la condition d'existence (E) est satisfaite, alors $\varepsilon_F = \eta_F$. Si de plus, la condition d'unicité (U) est satisfaite, alors $\varepsilon_F = \eta_F = \iota_F$. L'opérateur ε est donc bien une généralisation des descriptions définies russelliennes. Mais les ε-termes sont des individus idéaux *qui involuent dans leur symbole la question de leur existence.* C'est ce "tour" éminemment métaphysique qui, selon nous, donne à l'opérateur de Hilbert sa portée philosophique.

Par définition, ε_F est un η-terme $\eta_x G(x)$ avec $G(x) \equiv \exists y\ F(y) \Rightarrow F(x)$. D'après la règle (R_η), on peut donc toujours dériver l'énoncé $G(\eta_G)$, c'est-à-dire $\exists y\ F(y) \Rightarrow F(\varepsilon_F)$. Comme il est clair que, si $F(\varepsilon_F)$ est vrai alors, par généralisation existentielle GE, on a $\exists y\ F(y)$, on a bien en définitive l'équivalence logique :

$(\exists) \qquad \exists y\ F(y) \Longleftrightarrow F(\varepsilon_F)$.

C'est ce constat qui a conduit Hilbert à inverser la démarche, à poser l'opérateur ε comme une primitive du calcul logique et, comme nous l'avons vu, à définir la quantification existentielle par $(\exists)$. Il a ainsi obtenu sa variante CP_ε du calcul des prédicats. CP_ε contient un axiome spécifique remplaçant la règle GE d'introduction du quantificateur $\exists$ dans CP : de $F(a)$ (où a n'apparaît pas dans F) on peut inférer $\exists x\ F(x)$. Cet axiome est dit *ε-formula* :

$(\varepsilon) \qquad F(a) \Rightarrow F(\varepsilon_F)$.

On lui adjoint éventuellement l'axiome d'égalité, dû à Ackermann :

$(\varepsilon_2) \qquad \forall x\ (F(x) \Longleftrightarrow G(x)) \Rightarrow \varepsilon_F = \varepsilon_G$.

Il est essentiel de noter que ce dernier axiome est un principe d'*extensionalité* très fort qui est loin d'être évident. Son évidence dépend de l'interprétation de ε. Il signifie que si F et G sont extensionnellement équivalentes, i.e. si $X_F = X_G$, alors $\varepsilon_F = \varepsilon_G$. Cela n'est déjà pas évident dans l'interprétation générique *de dicto* car comme les sens de F et de G sont en général différents on ne voit pas pourquoi les éléments génériques satisfaisant typiquement F et G devraient être identiques. On devrait même poser plutôt $\varepsilon_F \neq \varepsilon_G$ de façon à rendre compte de la différence de sens (*Sinn*) de F et de G même si leurs dénotations (*Bedeutung*) sont équivalentes. Cela est encore moins évident dans l'interprétation spécifique *de re*. On ne voit pas pourquoi en effet, les objets sélectionnés par ε_F et ε_G devraient nécessairement être identiques. L'intérêt principal des ε-termes est d'être des entités *intensionnelles* (cf. plus bas). L'axiome d'Ackermann en refait subrepticement des entités extensionnelles et en ruine tout l'intérêt philosophique. Nous reviendrons en conclusion sur ce point crucial.

Nous retrouvons ainsi les problèmes d'interprétation sémantique de l'opérateur ε. Jusqu'à une date relativement récente, on n'a pas tenu compte de sa nature intensionnelle et on l'a essentiellement interprété, nous l'avons vu, en termes de fonctions de choix. Soit $\mathcal{U}$ l'univers du discours (le modèle) considéré. On introduit une *fonction de choix universelle* Φ qui associe à chaque ensemble $X \neq \emptyset$ de $\mathcal{U}$ un élément $\Phi(X)$ qui appartient à X. Si $F(x)$ est un prédicat d'extension $X_F \neq \emptyset$, on pose a priori que ε_F dénote $\Phi(X_F)$. Mais alors comment définir $\Phi(\emptyset)$. Selon Asser[22] et Hermès, il faut poser$\Phi(\emptyset) = \Phi(\mathcal{U})$! Revenons en effet à la définition de ε à partir de η :

$(*)\qquad \varepsilon_x F(x) \equiv \eta_x(\exists y\ F(y) \Rightarrow F(x))$.

Si F est d'extension vide ($X_F = \emptyset$), alors pour tout x l'implication $\exists y\ F(y) \Rightarrow F(x)$ est vérifiée puisque $\exists y\ F(y)$ est faux. Donc $\varepsilon_x F(x) = \eta_x G(x)$ avec $X_G = \mathcal{U}$. Il est par conséquent "naturel" de poser $\Phi(\emptyset) = \Phi(\mathcal{U})$. En particulier, on est ainsi conduit à identifier entre eux *tous les termes-zéro*, par exemple à "l'objet impossible" $\varepsilon_x(x \neq x)$ et à les identifier tous à "l'objet en général" $\varepsilon_x(x = x)$. On voit à quel point *dans le calcul hilbertien la consistance logique devient compatible avec l'inconsistance ontologique*. Il suffit de songer au fait que, chez Frege, le concept d'un objet différent de lui-même ("l'objet impossible") est identifié à 0, et que le concept d'un objet identique à lui-même ("l'objet en général") est identifié à 1. Dans CP_ε on a une sorte de $0 = 1$ conceptuel qui ne comporte pourtant aucune contradiction logique.

On remarquera que la solution d'Asser et Hermès est typiquement une "hypothèse ontologique non plausible" au sens de Vuillemin !

Quoi qu'il en soit, muni des deux axiomes (ε) et (ε_2) et de cette interprétation, l'ε-calcul CP_ε est, comme CP, adéquat et complet, autrement dit $\Sigma \vdash_{CP_\varepsilon} \varphi$ (ne comprenant pas le symbole ε) si et seulement si $\Sigma \models \varphi$ (i.e. φ est valide dans tout modèle de Σ).

Venons-en maintenant aux théorèmes fondamentaux qui légitiment l'emploi de l'opérateur de Hilbert. Nous avons déjà énoncé plus haut le premier ε-théorème. Il dit essentiellement que s'il existe une démonstration dans CP ou CP_ε d'une formule φ *de* CE à partir d'axiomes Σ *de* CE, alors il en existe déjà une dérivation *dans* CE. Il est évidemment essentiel à la stratégie finitiste hilbertienne car il permet de ramener des démonstrations de consistance à des procédures finitistes de vérification. Supposons en effet, comme plus haut, que les substitutions des matrices des axiomes d'une théorie $\mathcal{T}$ soient vérifiées (valides) dans une certaine interprétation du langage $\mathcal{L}$ de $\mathcal{T}$ et une certaine assignation de valeurs de vérités aux formules élémentaires de $\mathcal{L}$. Alors tous les énoncés de CE qui en sont dérivables dans CP ou CP_ε sont valides puisqu'ils sont dérivables en fait dans CE et que, clairement, les inférences dans CE préservent la validité.

Quant au deuxième ε-théorème, il affirme essentiellement que, bien qu'apparemment plus puissant que CP, CP_ε est en fait une extension

22. Cf. Asser [1957].

inessentielle (conservative) de CP. Cela signifie que si Σ est un ensemble de formules de CP et φ une formule sans symbole ε, alors, si $\Sigma \vdash_{CP_\varepsilon} \varphi$ on a aussi $\Sigma \vdash_{CP} \varphi$.

Les deux ε-théorèmes permettent de simplifier considérablement (sans toutefois réaliser le "rêve" de Hilbert) les démonstrations syntaxiques de consistance. En effet, ils impliquent que, lorsque l'on passe d'un système d'axiomes Σ au système Σ' obtenu comme plus haut par résolution symbolique et élimination des quantificateurs, on obtient en fait une extension inessentielle. Soit en effet φ une formule sans symbole ε dérivable de Σ' dans CP_ε : $\Sigma' \vdash_{CP_\varepsilon} \varphi$. Comme $\Sigma \vdash_{CP} \Sigma'$, on a $\Sigma \vdash_{CP_\varepsilon} \varphi$. Mais comme Σ appartient à CP, on a d'après le deuxième ε-théorème $\Sigma \vdash_{CP} \varphi$. Or, d'après le premier ε-théorème, la démonstration de la consistance de Σ' peut partiellement se ramener à une démonstration dans CE.

Il existe une preuve sémantique (non constructive) triviale du deuxième ε-théorème. Soit en effet $\Sigma \vdash_{CP_\varepsilon} \varphi$. Il est facile de montrer que l'ε-calcul CP_ε est "sain" ou "adéquat", i.e. que la dérivation y conserve la validité. Donc $\Sigma \models \varphi$. Mais le calcul des prédicats CP étant complet, on a $\Sigma \vdash_{CP} \varphi$.

Si l'on veut obtenir une preuve syntaxique, on se heurte à la difficulté suivante. CP_ε s'obtient à partir de CP en lui adjoignant les schémas d'axiomes (ε) et (ε_2). Or, si l'on substitue dans ces axiomes les ε-termes par des symboles de constantes, les formules obtenues ne sont plus des axiomes en général. Considérons par exemple une occurrence du schéma (ε_2) et remplaçons-y ε_F par a. La formule $\forall x(F(x) \Longleftrightarrow G(x)) \Rightarrow \varepsilon_F = a$ est trivialement fausse en général. Il s'agit-là, en quelque sorte, d'une "revanche de la référence". Un phénomène analogue peut se produire pour une tautologie comprenant des ε-termes. Considérons par exemple la tautologie $\neg\exists x\ F(x) \Rightarrow \neg F(t)$ (où t est un terme quelconque) et son occurrence pour $F(x) \equiv (x = \varepsilon_y(y = x))$. On obtient : $\neg\exists x\ (x = \varepsilon_y(y = x))\ \Rightarrow \neg(t = a) \Leftrightarrow t \neq a$ qui est fausse en général. C'est ce phénomène, dit d'*impropreté*, qui rend le deuxième ε-théorème non trivial. Il provient du fait qu'une variable liée x de la tautologie considérée intervient dans un ε-terme.

7 Logique, Sémiotique et Opérateur de Hilbert

7.1 La nature intensionnelle des ε-termes

Nous avons déjà signalé la nature intensionnelle des ε-termes et leur double interprétation *de dicto* et *dere*. Elle provient de leur structure de symbole-index. Rappelons que les symboles-index (au sens de Peirce, ou encore les "expressions indexicales" au sens de Bar-Hillel) correspondent dans la classification de Jakobson aux unités linguistiques pour lesquelles et par lesquelles "le code renvoie au message". Se situant à la charnière du sens et de la dénotation (*Sinn* et *Bedeutung*), ils sont à l'origine des "contextes obliques" (aussi dits "opaques"). Les exemples linguistiques standard en sont les démonstratifs ("celui-ci'", etc.), les déictiques ("ici", "maintenant", etc.), et les shifters ("je", "tu", etc.). Ils font intervenir l'instance de l'énonciation et leur dénotation n'est définissable que relativement au contexte énonciatif (ils sont de nature pragmatique). Comme le notait Émile Benveniste, ce sont des formes linguistiques qui, contrairement aux termes nominaux, ne réfèrent qu'à des individus.

En général cette essence pragmatique n'est pas véritablement analysée comme telle, même chez des linguistes comme Morris, car elle reste réduite à la dimension empirique du rapport qu'un énoncé entretient avec la situation énonciative. Ce n'est que relativement récemment que certains linguistes comme Jean-Pierre Desclés en sont venus à la considérer comme linguistiquement primitive :

> "On conçoit mal un modèle général traitant des langues naturelles où, ce qui apparaît comme essentiellement langagier et général, serait traité dans la composante pragmatique ajustant les composantes syntaxiques et sémantiques aux données empiriques et aux concepts "intuitifs", la pragmatique étant ajoutée pour "rendre compte" des quelques phénomènes déclarés être auxiliaires, alors qu'ils semblent présents dans toutes les langues et sont, selon nous, beaucoup plus primitifs que la plupart des autres phénomènes et peut-être même au sens de l'activité de langage." [23]

L'ε-logique hilbertienne est une logique de la généricité qui conduit à associer à tout concept une entité intensionnelle idéale structurée comme un symbole-index. Ce lien entre indexicalité et typicalité lui donne une grande portée sémio-linguistique. Une interprétation adéquate des ε-termes doit la faire intervenir d'une façon ou d'une autre, par exemple en faisant que la dénotation a de ε_F soit relative à une instance de sélection S, la sélection de a par S signifiant que a représente ε_F pour S. Pour S, la dénotation de a non seulement satisfait F mais *exemplifie* F et cette "exemplarité" s'accompagne d'une *idéalisation* de a.

C'est pourquoi, pour conclure cette section, nous allons, en suivant un travail de Melvin Fitting [24], indiquer comment on peut développer une interprétation intensionnelle des ε-termes dans le cadre d'une logique kripkéenne des mondes possibles.

23. Desclés [1990]. Jean-Pierre Desclés a consacré de nombreuses études à la formalisation des structures de l'énonciation. Ses recherches sur la cognition l'ont d'ailleurs conduit à remettre en chantier le formalisme hilbertien.

24. Fitting [1970].

On sait que pour pouvoir définir de bonnes interprétations sémantiques des logiques modales, Saul Kripke a repris la notion leibnizienne de monde possible et l'idée (remontant à l'antiquité) que les modalités peuvent s'interpréter comme des quantifications sur les mondes possibles. Considérons par exemple le système de Lewis S_4 de logique modale des *propositions*[25] avec les modalités du nécessaire $\Box$ et du possible $\Diamond$. Pour la syntaxe, S_4 satisfait, en plus des axiomes du calcul propositionnel, les axiomes modaux (1) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$, (2) Si $\vdash p$ alors $\vdash \Box p$, (3) $p \to \Diamond p$, (4) $\Box p \to \Box\Box p$.

Pour la sémantique, Kripke introduit un ensemble abstrait $\mathfrak{M}$ de "mondes possibles" $\mathfrak{m}_i$. Ces "mondes" ne sont que des indices relativement aux propositions considérées. Parmi les mondes possibles $\mathfrak{m}_i$, l'un se trouve distingué comme "monde réel" $\mathfrak{m}_0$. Kripke se donne en plus sur $\mathfrak{M}$ une relation R d'"accessibilité" (réflexive), $\mathfrak{m}_1 R \mathfrak{m}_2$. Il se donne enfin une assignation $V_{\mathfrak{m}_i}(p)$ assignant à toute proposition p une valeur de vérité dans $\mathfrak{m}_i$. Si $V_{\mathfrak{m}_i}(p) = \text{vrai}$, on note $\models_{\mathfrak{m}_i} p$. On pose alors qu'une proposition p est nécessaire dans $\mathfrak{m}_1$ si elle est vraie dans tous les mondes accessibles à partir de $\mathfrak{m}_1$: $\models_{\mathfrak{m}_1} \Box p$ si et seulement si $\models_{\mathfrak{m}_2} p$ pour tout $\mathfrak{m}_2$ tel que $\mathfrak{m}_1 R \mathfrak{m}_2$. De même, p est possible dans $\mathfrak{m}_1$ si et seulement si il existe un monde accessible à partir de $\mathfrak{m}_1$ tel que p soit vraie : $\models_{\mathfrak{m}_1} \Diamond p$ si et seulement si il existe $\mathfrak{m}_2$ tel que $\mathfrak{m}_1 R \mathfrak{m}_2$ et tel que $\models_{\mathfrak{m}_2} p$.

L'avantage d'une telle approche est que les divers systèmes modaux classiques s'interprètent très facilement à partir des propriétés de la relation d'accessibilité R. Par exemple dire que R est *transitive*, c'est dire que ce qui est possiblement possible est possible (ou que ce qui est nécessaire est nécessairement nécessaire), ce qui correspond au système S_4. Dire que R est *symétrique*, c'est ajouter l'axiome de Brouwer $p \to \Box\Diamond p$. Enfin, dire que R est une relation d'*équivalence*, c'est dire que ce qui est possible est nécessairement possible, ce qui correspond au système S_5.

Lorsque l'on passe au calcul des prédicats CP, on peut alors naturellement étendre ce genre de sémantique. On se donne d'abord des assignations cohérentes de valeurs de vérité pour les propositions, la cohérence signifiant (pour R transitive par exemple) que :

(i) $\models_{\mathfrak{m}} p \wedge q$ si et seulement si $\models_{\mathfrak{m}} p$ et $\models_{\mathfrak{m}} q$,

(ii) $\models_{\mathfrak{m}} p \to q$ si et seulement si pour tout $\mathfrak{m}'$ tel que $\mathfrak{m} R \mathfrak{m}'$ on a non $\models_{\mathfrak{m}'} p$ ou $\models_{\mathfrak{m}'} q$,

(iii) $\models_{\mathfrak{m}} \neg p$ si et seulement si pour tout $\mathfrak{m}'$ tel que $\mathfrak{m} R \mathfrak{m}'$ on a non $\models_{\mathfrak{m}'} p$, etc.

On dit alors qu'une proposition complexe φ est *valide* si $\models_{\mathfrak{m}_0} \varphi$ pour toute assignation cohérente de valeurs de vérité aux composantes p, q,

25. Il s'agit ici de modaliser simplement le calcul des propositions et pas encore le calcul des prédicats.

etc. de φ.

Pour pouvoir passer à des formules contenant des constantes et des variables, on suppose que chaque "monde" possède un domaine de constantes $D(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$ tel que si $\mathfrak{m}R\mathfrak{m}'$ alors $D(\mathfrak{m}) \subseteq D(\mathfrak{m}')$. Si $F(x_1, ..., x_n)$ est un prédicat n-aire, on lui associe dans chaque monde $\mathfrak{m}$ un sous-ensemble $V_{\mathfrak{m}}(F)$ de $D(\mathfrak{m})^n$ avec la condition que si $\mathfrak{m}R\mathfrak{m}'$ alors $V_{\mathfrak{m}}(F) \subseteq V_{\mathfrak{m}'}(F)$. Soit $\mathcal{U} = \bigcup_{\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}} D(\mathfrak{m})$ l'univers des constantes et soit φ une formule contenant les variables $x_1, ..., x_n$. Considérons une assignation dans $\mathcal{U}$, $a_1, ..., a_n$, des valeurs de ces variables. On pose $\models_{\mathfrak{m}} \varphi$ si et seulement si les constantes de φ appartiennent à $D(\mathfrak{m})$ et $(a_1, ..., a_n) \in V_{\mathfrak{m}}(\varphi)$. D'où les définitions évidentes :

(i) $\models_{\mathfrak{m}} \exists y\ \varphi(x, y)$ pour une assignation $x \rightsquigarrow a$ si et seulement si il existe $b \in D(\mathfrak{m})$ tel que $\models_{\mathfrak{m}} \varphi(a, b)$,

(ii) $\models_{\mathfrak{m}} \forall y\ \varphi(x, y)$ pour une assignation $x \rightsquigarrow a$ si et seulement si pour tout $\mathfrak{m}'$ tel que $\mathfrak{m}R\mathfrak{m}'$ et pour toute assignation $y \rightsquigarrow b \in D(\mathfrak{m}')$, on a $\models_{\mathfrak{m}'} \varphi(a, b)$.

Dans un cadre de ce genre l'on peut alors, de façon naturelle, développer une interprétation *intensionnelle* de l'opérateur ε, par exemple pour le système modal S_4.[26]

Les difficultés liées aux interprétations non intensionnelles des ε-termes deviennent criantes dans une sémantique modale à la Kripke. En effet, si $F(x)$ est un prédicat (unaire), ε_F est un symbole d'individu. Mais dans un modèle kripkéen de S_4 l'existentielle $\exists x\ F(x)$ peut être valide dans deux mondes possibles sans qu'il n'existe pourtant aucune constante c satisfaisant $F(c)$ dans les deux mondes. Il faut donc traiter ε_F comme une *fonction sur les mondes possibles* telle que si $\models_{\mathfrak{m}} \exists x\ F(x)$ alors la valeur de ε_F dans $\mathfrak{m}$ est une constante c telle que $\models_{\mathfrak{m}} F(c)$. Les ε-termes ne sont donc ni des variables, ni des constantes mais des entités *relatives aux mondes* ("world-dependent") dont la dénotation varie avec les mondes. Leur caractère "mixte" qui avait été excellemment dégagé par Lautman (voir plus haut) est bien un caractère intensionnel.

Fitting construit alors une extension inessentielle de S_4 contenant à la fois l'opérateur ε et l'opérateur λ d'abstraction du λ-calcul. Si $\varphi(x)$ est une formule à une variable libre x et si t est un terme relatif à $\mathfrak{m}$, $(\lambda_x\varphi(x))(t)$ (noté aussi $\lambda\varphi(t)$) est un énoncé qui est valide dans $\mathfrak{m}$ si $\varphi(c)$ est vrai, c étant la valeur de t dans $\mathfrak{m}$. On note $\varphi(x|t)$ la substitution de x par t dans φ et on dit que t est *libre* pour x dans φ si dans $\varphi(x|t)$ aucune variable intervenant dans t ne devient liée. En plus des axiomes standard de S_4, des axiomes classiques du λ-calcul, et des axiomes réglant les possibilités de changer la dénomination des variables, Fitting introduit les schémas d'axiomes suivants :

26. Cf. Fitting [1970].

$A_1^1 \quad (\lambda_x\varphi(x))(t) \Rightarrow (\lambda_x\varphi(x))(\varepsilon_\varphi)$,
$A_1^2 \quad (\lambda_x\varphi(x))(t) \Rightarrow \Diamond(\lambda_x\varphi(x))(\varepsilon_\varphi)$,
$A_1^3 \quad \exists x\ \varphi(x) \Rightarrow (\lambda_x\varphi(x))(\varepsilon_\varphi)$.

Il obtient ainsi un système, qu'il note εS_4^0, dont il définit la sémantique de la façon suivante. La part S_4 de εS_4^0 est interprétée, comme ci-dessus, "à la Kripke". Pour passer à εS_4^0, on introduit une collection $\mathfrak{F}$ de fonctions définies sur les sous-ensembles de $\mathfrak{M}$ (c'est-à-dire sur les ensembles de mondes) et on fait l'hypothèse suivante. Soit ε_φ l'ε-terme associé à la formule $\varphi(x)$, il existe une fonction $f_{\varepsilon_\varphi} \in \mathfrak{F}$ telle que :

(i) le domaine $Dom(f_{\varepsilon_\varphi})$ de f_{ε_φ} est l'ensemble des mondes $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ sur lesquels φ est définie (i.e. tels que les constantes de φ appartient à $D(\mathfrak{m})$) ;

(ii) si $\mathfrak{m} \in Dom(f_{\varepsilon_\varphi})$ alors $f_{\varepsilon_\varphi}(\mathfrak{m}) \in \mathfrak{m}$;

(iii) si $\models_\mathfrak{m} \exists x\ \varphi(x)$ alors $\models_\mathfrak{m} \varphi(x|f_{\varepsilon_\varphi}(\mathfrak{m}))$.

Autrement dit, f_{ε_φ} est une fonction de choix qui, pour chaque monde $\mathfrak{m}$ sur lequel φ est définie et où $\exists x\ \varphi(x)$ est valide, sélectionne le référent de ε_φ.

Fitting démontre alors que εS_4^0 est une extension inessentielle de S_4.

7.2 Sémiotique des ε-termes et inférence existentielle

Ce qui est particulièrement intéressant dans cette construction est qu'elle mime logiquement de nombreux aspects sémiotiques classiquement opposés à la sémantique dénotative véri-conditionnelle standard, aspects que nous avons évoqués dans notre introduction.

(i) ε_F est un symbole d'individu mais possède une *structure interne* et une signification car il est canoniquement associé à F.

(ii) Il ne dénote pas à travers un renvoi symbolique. Il sélectionne en fonction de sa structure interne des éléments dans des mondes possibles. Cette sélection pragmatique dépend d'une instance de choix intensionnelle.

(iii) Le référent sélectionné est une sorte d'objet dynamique à la Peirce qui est indexicalement sélectionné en tant que représenté d'une certaine façon, i.e. en tant que représenté par F.

(iv) L'existence devient par conséquent indépendante d'un rapport dénotationnel au monde et s'identifie à une consistance de la signification.

(v) Il peut du coup y avoir une inférence concernant l'existence. En effet, l'existence se disjoint de l'ontologie et acquiert le statut d'un prédicat. Nous allons y revenir dans un instant.

7.3 Quelques applications et réalisations de l'e-calculus

Ce type de formalisme possède de nombreuses applications et réalisations. Citons-en très brièvement quelques unes.

7.3.1 Typicalité et atégories

D'abord en sciences cognitives, c'est un formalisme fondamental pour comprendre les problèmes de *typicalité*. Dans leur interprétation *de dicto*, les ε_F sont des éléments *génériques*, des *types*, et la relation de spécialisation $\varepsilon_F \rightsquigarrow a$ est une relation type$\rightsquigarrow$token.

Il faut alors remarquer que ce modèle logique est corrélatif d'une conception de la catégorisation comme décomposition d'un domaine continu par un système de frontières K. Nous avons beaucoup étudié ce phénomène en termes de modèles dynamiques. Les prototypes correspondent à des valeurs centrales et le degré de typicalité est la distance au prototype. [27]

Il est utile, comme dans les modèles connectionnistes catastrophistes d'engendrer *dynamiquement* ces catégorisations. On obtient alors les schématisations suivantes : prototype = attracteur, catégorie = bassin d'attraction, gradient de typicalité = gradient d'une fonction de Liapounov, et donc ε_F = attracteur = prototype = valeur centrale. La distance sur la catégorie devient alors un modèle de la *gradatio* anselmienne.

7.3.2 Géométrie algébrique

Il existe des réalisations mathématiques bien connues de ce genre de formalisme, en particulier en géométrie algébrique. Elles reposent sur une interprétation *topologique* de la généricité. On considère des espaces topologiques X *non séparés* où les points "normaux" sont fermés, c'est-à-dire individués, mais où il existe aussi des points *non fermés*.

Soit alors $X_f = \{x \in X \text{ fermés}\}$ et $F \subset X_f$ un ensemble fermé de X_f non réduit à un point. Soit $x \in X - X_f$ un point *non fermé* tel que $\overline{x} = F$. On dit que x est un "point générique" pour F. On peut alors considérer que x interprète dans une certaine mesure ε_F, et même, x n'étant pas individué, la version *de dicto* de ε_F. La relation de spécialisation $\varepsilon_F \rightsquigarrow a$ s'interprète par $a \in \overline{x}$ i.e. a est *adhérent* à x. On a $x \in X$, mais on a aussi $x \notin X_f$ car x n'est pas un point fermé par hypothèse.

Dans ce type de formalisme ce sont les *fermés* F qui peuvent avoir des points génériques et les singletons de ces points idéaux ne sont pas fermés.

On remarquera que cela permet de mimer très facilement la "crise" d'identité des points génériques. Identifions en effet vraiment le point générique x tel que $\overline{x} = F$ à ε_F dans son interprétation *de dicto*. Comme $F \neq \emptyset$, on a $\exists x(x \in F)$ et donc $\varepsilon_F = \varepsilon_x(x \in F) \in F$. Mais en même

27. Cf. Petitot [1984].

temps, $x \notin F$ car $x \notin X_f$. Cela montre que, si l'interprétation *de re* des ε-termes ne pose pas de problèmes, l'interprétation *de dicto* est en revanche problématique car elle entraîne un conflit entre $\varepsilon_F \in F$ et $\varepsilon_F \notin F$. Ce conflit est résolu si l'on tient compte du fait que comme $\overline{x} \neq x$, le point générique x *n'est pas individué*. Autrement dit, en tant que point générique non individué $\varepsilon_F \notin F$. Mais dans son interprétation *de re*, $\varepsilon_F \in F$. On peut aussi dire que $F \subset X_f$ doit être suplémenté par les éléments idéaux que sont les points génériques de ses sous-ensembles. Si F^* est l'ensemble ainsi obtenu, alors on a bien $\varepsilon_F \in F^*$.

D'où une dialectique subtile de l'inclusion et de l'exclusion. C'est sans doute cette interprétation qui, aussi étonnant que cela puisse paraître, est la plus affine avec les spéculations scholastiques. Nous allons y revenir.

7.3.3 Approche de l'infinitésimale leibnizienne

Une application particulièrement intéressante des ε-termes zéro concerne le concept *d'infinitésimale leibnizienne*.

Soit $\mathbb{R}$ le corps totalement ordonné des nombres réels. Sa structure d'ordre est *archimédienne* : elle satisfait l'axiome selon lequel tout nombre (aussi grand que l'on veut) est atteignable par tout nombre (aussi petit que l'on veut) à condition d'additionner ce dernier à lui-même un assez grand nombre de fois. Autrement dit, $\mathbb{R}$ satisfait l'énoncé :

$(A) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N}(nx > y)$

(où $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres strictement positifs et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels).

En passant des grands nombres à leurs inverses, cet axiome dit qu'il n'existe pas d'infinitésimale dans $\mathbb{R}$: tout nombre non nul (positif) aussi petit que l'on veut est plus grand qu'un autre nombre non nul. Il n'existe donc pas de nombre (positif) qui soit non nul et plus petit que tous les nombres strictement positifs. Autrement dit, $\mathbb{R}$ satisfait l'énoncé :

$(I) \qquad \forall y\,((y \neq 0) \Rightarrow \exists r((r > 0) \wedge (|y| > r)))$.

(où $|\bullet|$ est le symbole "valeur absolue").

Il est facile de voir que le concept leibnizien d'infinitésimale recouvre très exactement le *terme-zéro* associé à l'universelle (I). (I) est de la forme $\forall y\; G(y)$ et est donc équivalente à l'énoncé hilbertien $G(\varepsilon_{\neg G})$. Comme G est de la forme $A \Rightarrow B$, $\neg G$ est de la forme $A \wedge \neg B$ et donc $\neg G(y) \equiv (y \neq 0) \wedge \forall r((r > 0) \Rightarrow (|y| \leq r))$.

$\varepsilon_{\neg G}$ correspond donc à l'*idée* d'un nombre différent de 0 et dont la distance à 0 est inférieure à tout nombre réel strictement positif : c'est le dx leibnizien. L'axiome d'Archimède sous la forme (I) est alors équivalent à l'énoncé :

$(I') \qquad G(\varepsilon_{\neg G}) \equiv (\varepsilon_{\neg G} \neq 0) \Rightarrow \exists r((r > 0) \wedge (|\varepsilon_{\neg G}| > r))$.

Toute infinitésimale est soit nulle soit finie : *il n'existe pas de référent* *numérique pour l'idée d'infinitésimale.*

Pour pouvoir légitimer l'usage de la notation leibnizienne, il faut pouvoir satisfaire les contraintes suivantes.

(a) Il faut que les infinitésimales soient des entités que l'on puisse traiter comme des nombres, c'est-à-dire auxquelles on puisse appliquer les opérations fondamentales. Cela est nécessaire pour que des expressions comme $x + dx$, dy/dx, etc. aient un sens.

(b) Étant donnée une fonction f d'argument $x \in \mathbb{R}$, il faut que l'on puisse étendre automatiquement et canoniquement f aux infinitésimales. Cela est par exemple nécessaire pour définir l'accroissement infinitésimal df de f en x par $df = f(x + dx) - f(x)$.

(c) Le symbole dx n'étant pas référentiable dans $\mathbb{R}$ (ε-terme zéro) il faut qu'il le devienne dans une extension ${}^*\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ qui soit, dans un sens à préciser, *indiscernable* de $\mathbb{R}$.

En appliquant à l'analyse certains théorèmes fondamentaux de la théorie générale des modèles, *l'analyse non standard* a montré qu'il est possible de satisfaire à ces trois contraintes et que cette "légitimation" des "fictions" leibniziennes [28] simplifiait parfois de façon notable la formulation de l'analyse.

On montre (à partir du théorème de Löwenheim-Skolem) qu'il existe des extensions strictes $\mathbb{R} \prec^* \mathbb{R}$ (où le cardinal de ${}^*\mathbb{R}$ est strictement supérieur à la puissance du continu) qui sont *élémentaires* au sens suivant, dû à Tarski et Vaught : ${}^*\mathbb{R}$ a la même théorie que $\mathbb{R}$ dans la logique du premier ordre [29] exprimée dans le langage formel $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ où il existe des symboles de constantes pour *tous* les éléments de $\mathbb{R}$. Cela signifie que, quant à sa théorie, c'est-à-dire quant à sa maîtrise "discursive" au moyen d'un langage formel du premier ordre, ${}^*\mathbb{R}$ est indiscernable de $\mathbb{R}$, que tout énoncé du premier ordre valide dans $\mathbb{R}$ l'est automatiquement dans ${}^*\mathbb{R}$ et, surtout, qu'aucun élément de $\mathbb{R}$ ne peut se trouver "supplanté" dans une propriété du premier ordre par un élément de ${}^*\mathbb{R}$.

${}^*\mathbb{R}$ est appelé *modèle non-standard* de $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{R}$ en sont les éléments standard. Soient $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $n \in \mathbb{N}$. Comme l'énoncé affirmant qu'il n'existe aucun entier strictement compris entre n et $n + 1$ est un énoncé du premier ordre, il est valide dans ${}^*\mathbb{R}$. Si ${}^*\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers de ${}^*\mathbb{R}$ (dont l'existence est assurée par un résultat que nous signalerons plus bas), $\mathbb{N}$ est donc un segment initial de son extension élémentaire ${}^*\mathbb{N}$. Ainsi ${}^*\mathbb{N}$ est composé de $\mathbb{N}$ et de nombres entiers "infinis". ${}^*\mathbb{R}$ comprend par conséquent des nombres

28. Leibniz parlait de "fictions bien fondées" et de "fictions fondées en réalité".

29. On appelle logique du premier ordre, l'application du calcul des prédicats à une structure où l'on restreint la quantification aux *éléments* de l'ensemble sous-jacent à cette structure (on s'interdit de quantifier par exemple sur les sous-ensembles).

"infinis" (c'est-à-dire plus grands que tout nombre de $\mathbb{R}$). Et comme $^*\mathbb{R}$ est un corps, les inverses de ces nombres infinis existent. Ce sont des infinitésimales.

Comportant des infinitésimales, $^*\mathbb{R}$ n'est pas archimédien. Pourtant l'axiome d'Archimède étant du premier ordre, il est valide dans $^*\mathbb{R}$. Il n'y a là nulle contradiction. $^*\mathbb{R}$ n'est pas archimédien au sens strict, c'est-à-dire lorsque l'on restreint dans (A) la quantification $\exists n$ au sous-ensemble $\mathbb{N}$ de $^*\mathbb{R}$. Mais lorsque l'on affirme que (A) est valide dans $^*\mathbb{R}$, on suppose implicitement que cette quantification porte sur le sous-ensemble de $^*\mathbb{R}$ correspondant à $\mathbb{N}$ relativement à $\mathbb{R}$, c'est-à-dire sur $^*\mathbb{N}$ et non sur $\mathbb{N}$. Or $^*\mathbb{N}$ comprend des entiers infinis. $^*\mathbb{R}$ peut donc à la fois être non-archimédien au sens strict (relativement à $\mathbb{N}$) et archimédien au sens général (relativement à $^*\mathbb{N}$). Cela montre simplement que l'opposition fini/infini n'est pas absolue mais *relative*. Ce qu'avait compris Leibniz.

Il est clair que si l'on peut satisfaire dans $^*\mathbb{R}$ à l'ensemble des contraintes (a), (b) et (c), l'on résout du même coup le "paradoxe" des infinitésimales. En effet, l'ε-terme $dx = \varepsilon_{\neg G}$ qui est un terme-zéro relativement à $\mathbb{R}$, admettra néanmoins des référents *consistants* (i.e. des infinitésimales) dans $^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$. Cela n'empêchera pas l'énoncé du premier ordre (I) d'être valide dans $^*\mathbb{R}$: il n'y a pas dans $^*\mathbb{R}$ d'infinitésimales relatives à $^*\mathbb{R}$ puisque, relativement à $^*\mathbb{N}$, $^*\mathbb{R}$ est archimédien. Si, relativement à $^*\mathbb{R}$, on quantifie sur $\mathbb{R}$ (et non sur $^*\mathbb{R}$) pour définir dx, alors dx est référentiable dans $^*\mathbb{R}$. Mais si l'on quantifie sur $^*\mathbb{R}$, alors dx redevient, relativement à $^*\mathbb{R}$, un terme-zéro. Il n'aura de référent consistant que dans une nouvelle extension élémentaire stricte $^*\mathbb{R} \prec^{**} \mathbb{R}$. On voit donc qu'il existe dans ce cas un lien étroit entre les "paradoxes de la référence" inhérents aux ε-termes et les "paradoxes de l'indiscernabilité" inhérents aux modèles non standard.[30] On sait également qu'il existe des analogies étroites entre les paradoxes de l'infini dans la métaphysique scholastique et ceux des infinitésimales leibniziennes.

7.3.4 L'existence comme prédicat et les derniers travaux (inédits) de Giulio Preti.

On peut aussi utiliser le formalisme de l'ε-calculus pour *interpréter l'existence comme un prédicat.* En effet, on peut interpréter $\exists x F(x)$ comme l'affirmation que "celui qui satisfait F existe", i.e. comme $\mathbf{E}(\varepsilon_F)$ où $\mathbf{E}$ est un *prédicat* d'existence.

On a alors les équivalences :

$$\exists x F(x) \iff \mathbf{E}(\varepsilon_F) \iff F(\varepsilon_F) \iff \varepsilon_F \rightsquigarrow \varepsilon_F$$

(type fonctionnant comme sa propre occurrence, son propre token).

30. Cf. Petitot [1979] et [1989].

Cela me paraît être particulièrement intéressant. L'auto-référence de ε_F, i.e. le fait que le symbole-index ε_F puisse dénoter, et en particulier puisse s'auto-dénoter, équivaut au fait qu'il existe comme objet.

Pour les ε-termes – mais seulement pour eux – l'existence est une cohérence de la subsistance et devient donc un prédicat. Dans la mesure où ε_F est une "essence" (un type) dans son interprétation *de dicto*, on en arrive ainsi à une mimesis logique d'un réalisme des essences et d'un passage de l'essence à l'existence (l' existence étant une fonction logique).

En particulier dire qu'un objet a existe en tant que tel, c'est dire que l'ε-terme $\varepsilon_a = \varepsilon_x(x = a)$ existe. On a donc les équivalences :

$$\exists x(x = a) \Longleftrightarrow \mathbf{E}(\varepsilon_a) \Longleftrightarrow (\varepsilon_a = a).$$

Dans ce cas, l'interprétation *de dicto* et l'interprétation *de re* coïncident car l'égalité est une relation individuante.

Faisons ici une remarque sur l'existence comme prédicat. Depuis longtemps, nous travaillons avec Fabio Minazzi sur l'œuvre de Giulio Preti qui est, selon nous, l'un des plus importants philosophes des sciences de l'après-guerre. Fabio Minazzi est entré en possession des derniers inédits de Preti. Ils sont du plus haut intérêt et concernent en grande partie la logique médiévale.

Or l'inédit principal *Ricerche ontologiche* (Florence, 16 octobre 1955) concerne précisément ce problème de l'existence comme prédicat et fait usage de l'opérateur de Hilbert.[31] Cette découverte a été pour nous tout à fait extraordinaire. Preti (qui adopte comme Bourbaki la notation τ pour le ε hilbertien) introduit un prédicat d'existence qu'il note $E!x$ et l'équivalence :

$$\exists x F(x) \Longleftrightarrow F(\varepsilon_F) \Longleftrightarrow E!\varepsilon_F.$$

L'existence $E!a$ d'un objet a s'identifie alors bien à

$$E!a \Longleftrightarrow E!\varepsilon_x(x = a) \Longleftrightarrow \varepsilon_x(x = a) = a \Longleftrightarrow \exists x(x = a).$$

8 Analyse formelle de la preuve

Revenons maintenant pour conclure notre propos à la preuve d'Anselme. Ce qui précède permet de notablement clarifier les problèmes logico-sémiotiques de l'argument anselmien.

31. Cf. Petitot [2004].

8.1 Intérêt de l'opérateur de Hilbert

Les ε-termes de l'ε-calculus hilbertien satisfont aux propriétés subtiles des "fonctions" f_u introduites par Vuillemin : être de même type que des éléments d'un ensemble tout en pouvant ne pas appartenir à l'ensemble, symbole-index, entité intensionnelle, statut pragmatique de sa référence, interprétation *de dicto / de re*, élément idéal et générique, "mixte" au sens de Lautman. Il nous semble par conséquent naturellement apte à éclairer la structure de la preuve et à en mimer les infrastructures symboliques.

Il s'agit donc d'essayer d'appliquer la formulation hilbertienne à ce qui est caractéristique de la preuve, à savoir :

(i) à la totalisation des possibles que recouvre implicitement le terme "rien", totalisation qui débouche sur les paradoxes ensemblistes ;

(ii) à la maximisation d'une relation d'ordre non définie "penser plus grand que", maximisation qui débouche sur les paradoxes de l'infini ;

(iii) à la modalité du "pensable", car c'est elle qui se trouve en définitive au cœur de l'argumentation anselmienne.

Le premier aspect de la question revient à savoir si, comme le remarquait déjà Gaunilon, le terme "cogitatio" est *univoque* chez Anselme et s'il ne faut pas distinguer entre "cogitare" (représentation dont l'objet peut être inexistant : *esse in intellectu*) et "intelligere" (compréhension de ce qui est effectivement : *esse in re*). Mais, comme nous l'avons vu, Anselme répondait à Gaunilon que, dans le cas de Dieu, l'"intelligere" s'égalait au "cogitare" dans la mesure où, pour nous, êtres finis, son être s'égalait à la compréhension de son nom. Or pour qu'une telle univocation soit possible, il faut que le "pensable" intervenant dans la description négative de Dieu soit plus qu'une simple modalité épistémique. Si l'on admet que la preuve a, en dernière instance, pour fonction de réguler symboliquement le sujet de l'énonciation qu'est le sujet de la croyance, il faut que la modalité épistémique du pensable soit identiquement une modalité – symbolique – d'existence.

Le second aspect de la question posée par les points (i) et (ii) est le suivant. La preuve anselmienne rencontre les apories que rencontrent toutes les maximisations (absolutisations) de relations d'ordre sans éléments extrémaux.[32] Mais dans son cas, ces apories se compliquent du fait que la relation d'ordre en jeu est non définie et associée implicitement à la modalité du "pensable" (ou plus précisément du nommable). Il faut donc d'abord comprendre pourquoi et comment une logique où la modalité épistémique du pensable est identiquement une modalité symbolique

32. C'est bien un paradoxe du même ordre que celui des infinitésimales leibniziennes.

d'existence est aussi une logique où le pensable développe de lui-même l'illusion d'une relation d'ordre. Nous allons voir que la formulation hilbertienne permet d'éclairer ces deux aspects de la question.

L'idée est, répétons-le, que l'on peut utiliser ce type de formalisme pour mimer certains traits de la preuve anselmienne et cela sur trois points concernant sa richesse sémiotique :

(i) la façon dont la modalité épistémique du pensable peut être identifiée à une modalité d'existence ;

(ii) la façon dont le pensable se développe de lui-même en une relation d'ordre, une *gradatio* ;

(iii) les paradoxes de l'identité corrélatifs.

8.2 Interprétation de dicto et principe d'identité

Nous allons commencer, en restant encore un instant dans le cadre de la logique classique, par mimer la "crise d'identité" des ε-termes en utilisant les ressources des termes-zéro. Nous verrons ensuite qu'il est beaucoup plus efficace de se placer dans un cadre *intuitionniste.*

Soit F un prédicat (unaire) et ε_F l'ε-terme associé. Nous devons d'abord distinguer entre le fait de penser (ou "d'écrire") ε_F et l'existence éventuelle que ε_F peut exprimer, c'est-à-dire que nous devons distinguer entre l'existence "symbolique" – la subsistance – et l'existence "référentielle" de ε_F. La première est intensionnelle, la seconde extensionnelle. Dans la mimesis logique que nous tentons ici d'esquisser pour décrire l'infrastructure symbolique de la preuve anselmienne, l'opposition entre existence "symbolique" et existence "référentielle" mime assez exactement l'opposition entre "esse in intellectu" et "esse in re". Qui plus est, en tant qu'hypostase d'une idée (l'idée d'un individu satisfaisant F), le symbole ε_F inclut la modalité épistémique du pensable. Nous mimons ainsi le fait que celle-ci est identique à une modalité symbolique de l'existence, nommément à l'existence "symbolique" du symbole ε_F.

Nous introduisons maintenant une façon de mimer le fait que, dans son interprétation intensionnelle générique (*de dicto*) un ε-terme consistant ne possède pas le statut ontologique d'un objet individué mais d'un *type* et que, à ce titre, il ne satisfait pas au principe d'identité $a = a$. On aboutirait au même résultat si l'on interprétait ε_F comme un opérateur de choix dont la référence varie suivant les mondes possibles : on pourrait évidemment avoir dans deux mondes possibles différents $\varepsilon_F = a$ et $\varepsilon_F = b$ avec $a \neq b$. Cette "déhisence" de l'identité est sémiotiquement essentielle. On peut l'exprimer en disant que l'équivalence $\forall x\ (F(x) \Longleftrightarrow x \in X_F)$ implique extensionnellement (d'après l'axiome d'Ackermann ε_2) $\varepsilon_F = \varepsilon_x(x \in X_F)$. Mais nous avons vu que si l'on remplace ε_F par un individu a satisfaisant F alors l'équivalence devient fausse en général.

Il faut distinguer, nous l'avons vu, ε_F interprété *de dicto* et ε_F interprété *de re* dans le cas où ε_F existe "in re". Dire que ε_F existe "in re" signifie que la proposition $\exists x\ F(x)$ est valide, et donc, d'après la définition de la quantification existentielle, que l'on a $F(\varepsilon_F)$ c'est-à-dire $\varepsilon_F \in X_F$ ou $\varepsilon_F \rightsquigarrow \varepsilon_F$ (auto-référence). L'ε-terme ε_F existe "in re" non seulement si ε_F est consistant mais si de plus la proposition $\exists x(\varepsilon_F = x)$ est valide. Cette existentielle repose sur un ε-terme en quelque sorte de "second ordre" dont le rapport à ε_F est analogue à celui que Kant faisait entre un "idéal" comme idée individuo (ε_F) et "l'idée d'un être conforme à l'idéal".

8.3 *Gradatio* et infinitisation sémiotique des termes génériques

Dans leur interprétation générique *de dicto* les ε-termes (consistants) décrochent de la référence ce qui engendre, au-delà du logique, un phénomène *d'infinitisaton sémiotique.* L'élément générique ε_F de X_F devient un *prototype* et tout type est idéal. D'où une "subreption" conduisant à interpréter la relation de spécialisation $\varepsilon_F \rightsquigarrow a$ comme une sorte de relation "topologique" de plus ou moins grande proximité à ε_F. Il vient ainsi se surajouter un *degré intensif continu.* Comme *type* ε_F vaut pour tous les $a \in X_F$ indistinctement, mais comme *idéal* il introduit une *gradatio*, une comparabilité. La spécialisation se convertit alors d'elle-même en une "participation" à l'idéal, participation qui se pose à son tour d'elle-même comme susceptible d'un degré intensif continu et infini. L'appartenance $a \in X_F$ se trouve alors doublée d'un degré intensif de participation à l'idéal. D'où l'idée de "perfectibilité".

Autrement dit, dans l'optique anselmienne, tout se passe comme si le point de vue purement extensionnel $a \in X_F$ venait se doubler d'un point de vue "catégoriel" (au sens où un prototype organise une catégorie) reposant sur une "distance" des éléments a au prototype ε_F. Cette distance étant continue, les paradoxes de l'infini y apparaissent. ε_F est alors un maximum de la gradation de typicalité associée à F. Et l'on a $\mathbf{E}(\varepsilon_F)$, autrement dit ε_F existe.

On obtient ainsi une modélisation en quelque sorte "topologique" du *postulat du parfait.*

Essayons d'être plus précis. Dans l'intuition topologique les ensembles u et X_φ sont ouverts avec $u \subset \mathrm{Int}\,(X_\varphi)$ (Int est l'intérieur topologique). Comme dans les diagrammes de Vehn ce sont des convexes bien réguliers avec un bord bien régulier. [33] On peut considérer leurs fermetures $\overline{u}$ et

33. Il s'agit évidemment d'une simple intuition topologique correspondant à de simples schémas mentaux.

$\overline{X_\varphi}$ et leurs bords ∂u et ∂X_φ, et aussi le complémentaire des u dans X_φ. Soit $\varepsilon_u = \varepsilon_x(x \in u)$.On a $\varepsilon_u \in u$ puisque u est non vide. Il semble alors qu'une façon assez correcte de mimer logiquement la description donnée par Vuillemin est de dire que l'on considère plutôt

$$f_u = \varepsilon_{\overline{u}} = \varepsilon_x(x \in \overline{u})$$

et qu'on lui donne comme référence le point générique $\varepsilon_{\partial u}$ du bord ∂u réprésentant les éléments "parfaits" limites des éléments de u. Cela est possible puisque comme $\partial u \subset \overline{u}$ on a une spécialisation $\varepsilon_{\overline{u}} \rightsquigarrow \varepsilon_{\partial u}$. C'est le postulat du parfait. Mais comme $u \subset \overline{u}$ on a aussi la spécialisation $\varepsilon_{\overline{u}} \rightsquigarrow \varepsilon_u$ et $\varepsilon_{\overline{u}}$ peut être considéré comme une maximisation de la *gradatio* des éléments de u.

Bref, on reprend l'hypothèse que, comme degré de perfectibilté, la *gradatio* opère comme une sorte de fonction $G_{\overline{u}}$ sur la fermeture $\overline{u}$ de l'ouvert u avec ses lignes de niveau et ses ligne de gradient aboutissant sur ∂u aux points x_M maximisant les points x et représentant leur "parfait". Mais on se borne à considérer les éléments *génériques* de ces domaines, lignes, frontières et autres schèmes géométriques, ce qui permet de *coder logiquement ce schématisme géométrique intuitif* par des symboles-index de nature intensionnelle et pragmatique.

On peut dans ce contexte revenir à la matrice (B) et à son excentration identifiant toutes les "fonctions" f_u au maximum absolu qu'est le "id quo nihil majus cogitari potest". Dire que X_φ est le "monde" c'est dire que l'on a l'universelle $\forall x \ \varphi(x)$. Celle-ci est équivalente à $\varphi(\varepsilon_{\neg\varphi})$ où $\varepsilon_{\neg\varphi}$ est le *terme-zéro* associé au *parfait absolu et global* qu'est le "id quo nihil majus cogitari potest". On voit que les inconsistances de la preuve tournent autour du statut de ce terme-zéro en tant que *symbole-index clivé*. D'où une alternative en tous points analogue à celle des infinitésimales.

1. Soit $\varepsilon_{\neg\varphi}$ reste un symbole-index clivé et on peut lui donner comme référence n'importe quoi et même à la Asser-Hermès l'identifier à ε_φ. On identifie alors tous les f_u à $\varepsilon_{\neg\varphi}$.
2. Soit, comme pour les infinitésmales, on "compactifie" X_φ en X^*_φ au moyen d'une frontière ∂X_φ ou d'un point à l'infini et l'on pose $f_u = \varepsilon_{X^*_\varphi}$ en lui donnant pour référence, comme plus haut, le point générique $\varepsilon_{\partial u}$ du bord ∂u réprésentant les éléments "parfaits" limites des éléments de u.

Ainsi, à travers les "fonctions" f_u l'argumentation de la preuve semble appliquer les subtilités logico-sémiotiques des ε-termes à l'intuition géométrique des bords d'ouverts.

8.4 Argument ontologique et logique intuitionniste

Ceci dit, une autre façon de sortir des "paradoxes" formels de la preuve pourrait être de passer de la logique classique à la logique *intuitionniste* où l'implication $F \Rightarrow \neg\neg F$ est valide[34] sans que le soit pour autant l'implication réciproque :

$(\neg\neg) \qquad \neg\neg F \Rightarrow F.$

La différence entre F et $\neg\neg F$ se voit très bien dans la sémantique intuitionniste standard où les valeurs de vérité constituent une algèbre de Heyting et non plus une algèbre de Boole. On peut par exemple considérer que les extensions des prédicats, au lieu d'être des ensembles quelconques, sont des *ouverts* d'espaces topologiques.[35] Si $X = X_F$ est l'extension de F, alors celle de $\neg F$ n'est pas le complémentaire $\mathbf{C}X$ de X mais l'intérieur $\overset{\circ}{\mathbf{C}X}$ de ce complémentaire. Cela implique le viol du tiers exclu $F \vee \neg F$ car pour les éléments du bord ∂X de X on n'a ni $F(x)$ ni $\neg F(x)$. Comme le complémentaire de $\overset{\circ}{\mathbf{C}X}$ est la fermeture $\overline{X}$ de X, on voit que $\neg\neg F$ correspond à l'intérieur $\overset{\circ}{\overline{X}}$de la fermeture de X. On a évidemment (car X est ouvert) $X \subseteq \overset{\circ}{\overline{X}}$. Les prédicats pour lesquel $F = \neg\neg F$ sont dits *décidables*.

La logique intuitionniste permet de résoudre de façon particulièrement efficace un certain nombre de paradoxes, par exemple ceux des infinitésimales leibniziennes. En effet, on peut montrer que dx y est un symbole dénotant dans la théorie de $\mathbb{R}$ le sous-ensemble $\neg\neg\{0\}$ des réels non non nuls.[36] En logique classique $\neg\neg\{0\} = \{0\}$ et il n'existe donc pas d'infinitésimales. Mais en logique intuitionniste $\neg\neg\{0\} \neq \{0\}$ et il existe donc des infinitésimales.

On peut développer une version intuitionniste de l'ε-calculus hilbertien. On garde l'axiome d'équivalence définissant ε :

$(\exists) \qquad \exists x\ F(x) \Longleftrightarrow F(\varepsilon_F).$

Mais elle n'implique plus pour les universelles l'équivalence :

$(\forall) \qquad \forall x\ F(x) \Longleftrightarrow F(\varepsilon_{\neg F}).$

On a évidemment $\forall x\ F(x) \Rightarrow F(\varepsilon_{\neg F})$ et donc $\neg F(\varepsilon_{\neg F}) \Rightarrow \neg\forall x\ F(x)$, i.e., d'après $(\exists)$, $\exists x\ \neg F(x) \Rightarrow \neg\forall x\ F(x)$. Mais l'on n'a pas l'implication réciproque $\neg\forall x\ F(x) \Rightarrow \neg F(\varepsilon_{\neg F})$ ou $\neg\forall x\ F(x) \Rightarrow \exists x\ \neg F(x)$ (ce qui est un aspect de la non validité du tiers exclu).

34. En effet si a satisfait F, alors a est un contre exemple explicite à $\neg F(x)$ et on a donc $\neg\neg F(x)$.

35. Dans le cas de la géométrie algébrique évoqué plus haut les extensions sont des fermés et la logique associée est co-intuitionniste (les valeurs de vérités constituent une co-algèbre de Heyting).

36. Pour une introduction à ces questions, et en particulier aux résultats de Penon, cf. Petitot [1999].

Dans une fort belle étude sur l'ε-calculus intuitionniste, John Bell a montré que cet écart entre logique classique et logique intuitionniste était essentiellement lié au caractère intensionnel des ε-termes.

> "Since the ε_A have been introduced intensionally, that is by the form of the defining predicate A, we do not yet possess a useful sufficient identity condition." [37]

On peut rétablir l'extensionalité avec l'axiome d'Ackermann (ε_2) car alors

> "the identity of ε_A is completely determined by the extension of A."

J. Bell démontre alors le résultat fondamental que l'axiome d'Ackermann implique le tiers exclu $F \vee \neg F$. Ce résultat philosophiquement profond montre que la logique classique est une conséquence du fait que les prédicats peuvent être exemplifiés de façon purement *extensionnelle*.

> "In short, not existence, but extensional existence, yields classical logic." [38]

J. Bell montre ensuite que l'ε-calculus intuitionniste CPI_ε est "sain" (ou "adéquat"), i.e. $\Sigma \vdash_{CPI_\varepsilon} \varphi$ implique $\Sigma \models_{CPI_\varepsilon} \varphi$. Mais, contrairement au CP_ε classique, il n'est pas complet car, par exemple, la formule $\varepsilon_x(x = x) = \varepsilon_x(x \neq x)$ y est valide sans y être pour autant dérivable.

Enfin J. Bell montre qu'il est impossible de dériver dans CPI_ε l'inférence $\neg\forall x\ F(x) \Rightarrow \exists x\ \neg F(x)$ ainsi que le tiers exclu $F \vee \neg F$. Pour démontrer ces assertions, le principe d'extensionalité d'Ackermann se révèle absolument nécessaire.

Si l'on en revient à la preuve dans un cadre intuitionniste, on peut alors considérer non seulement ε_F mais aussi $\varepsilon'_F = \varepsilon_{\neg\neg F}$. Comme $F \Rightarrow \neg\neg F$, ε'_F est, dans l'interprétation *de dicto*, plus générique que ε_F (et donc encore moins individué), i.e. ε_F spécialise ε'_F : $\varepsilon'_F \rightsquigarrow \varepsilon_F$. On peut par conséquent poser sans contradiction $\varepsilon'_F \notin X_F$ et l'on a alors $(\varepsilon'_F \notin X) \wedge \neg\neg F(\varepsilon'_F)$. Si l'on pose $u = X_F$, $f_u = \varepsilon'_F$ et $\neg\neg F \Rightarrow \varphi$ (ce qui est une hypothèse justifiée), on retrouve alors la matrice (A) $(f_u \notin u) \wedge \varphi(f_u)$.

L'ε-calculus intuitionniste apparaît ainsi comme un calcul logique assez adapté à plusieurs aspects de la preuve anselmienne et confirme le fait que l'inconsistance de cette preuve est particulièrement subtile.

37. Bell [1993], p. 6.
38. *Ibid.*, p. 8.

Bibliographie

Ackermann, W., 1928. “On Hilbert’s construction of the real numbers”, in van Heijenoort (ed.) 1967, 493-507.

Asser, G., 1957. “Theorie der logischen Auswahlfunktionen”, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 3, 30-68.

Bell, J.L., 1993. “Hilbert’s ε-operator and classical logic”, *Journal of Philosophical Logic*, 22, 1-18.

Bernays, P., 1927. “Appendix to Hilbert’s lecture : The foundations of Mathematics”, in van Heijenoort (ed.) 1967, 485-489.

Desclés, J-P., 1990. *Langages applicatifs, langues naturelles et cognition*, Hermès, Paris.

Fitting, M., 1970. “An ε-calculus for first order S_4”, *Lecture Notes in Mathematics*, 255, Springer.

Girard, L. 1995. *L’Argument ontologique chez Saint Anselme et chez Hegel*, Rodopi, Amsterdam.

Hilbert, D., 1925. “On the Infinite”, in van Heijenoort (ed.) 1967, 367-392.

Hilbert, D., 1927. “The Foundations of Mathematics”, in van Heijenoort (ed.) 1967, 464-479.

Lautman, A., 1937. *Essai sur l’unité des mathématiques et divers écrits*, (réedition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946), Paris, Bourgois, 1977.

Leisenring, A.C., 1969. *Mathematical Logic and Hilbert’s ε -Symbol*, Gordon & Breach, New York.

Petitot, J., 1979. “Infinitesimale”, *Enciclopedia Einaudi*, VII, 443-521, Einaudi, Turin.

Petitot, J., 1984. “Paradigme Catastrophique et Perception Catégorielle”, *Recherches Sémiotiques/Semiotic Inquiry*, 3, 207-245.

Petitot, J., 1987. “Refaire le “Timée”. Introduction à la philosophie mathématique d’Albert Lautman”, *Revue d’Histoire des Sciences*, XL, 1, 79-115.

Petitot, J., 1989. “Rappels sur l’Analyse non standard”, *La Mathématique non standard*, 187-209, Editions du CNRS, Paris.

Petitot, J., 1999. “Les infinitésimales comme éléments nilpotents : actualité du débat Nieuwentijt / Leibniz”, *L’actualité de Leibniz : les deux labyrinthes* (D. Berlioz, F. Nef eds), *Studia Leibnitiana Supplementa*, 34, 567-575, Franz Steiner, Stuttgart.

Petitot, J., 2002. “Le problème intensionnel de la quantification chez Hilbert”, ArXiv : http ://arxiv.org/abs/1502.05563

Petitot, J., 2004. “Le problème logique de la quantification existentielle chez Preti et l’epsilon calculus de Hilbert”, *Il pensiero filosofico di*

Giulio Preti (P. Parrini, L. Scarantino eds), Guerini, Milano, 109-143.

Schmitt, F.S. (ed.) 1938-51. *Sancti Anselmi Opera Omnia*, Thomas Nelson, Londres.

van Heijenoort, J. (ed.), 1967. *From Frege to Göde*l, Harvard University Press, Cambridge.

Vuillemin, J. 1971. *Le Dieu d'Anselme et les Apparences de la Raison*, Paris, Aubier.