JEAN PETITOT, *Unità delle matematiche*

Estratto da:
Enciclopedia, XV: *Sistematica*, Einaudi, Torino 1982.

Unità delle matematiche

Già trattata sotto diversi suoi aspetti in un articolo specifico di questa *Enciclopedia*, l'opposizione locale/globale fa parte di quelle grandi opposizioni, come per esempio continuo/discreto o qualità/quantità, che intervengono in numerosissimi domini della matematica e posseggono un notevole valore categoriale. Per questo motivo tale opposizione fa parte di quei concetti ad alta portata integrativa che conferiscono alle matematiche la loro *unità*. In questo articolo ci si propone di conseguenza: 1) di utilizzare tale opposizione come filo conduttore per mettere in luce la coerenza globale degli articoli «Differenziale», «Funzioni», «Locale/globale», «Sistemi di riferimento», «Stabilità/instabilità» e «Variazione» di questa *Enciclopedia*; 2) di proporre qualche complemento tecnico per la sua comprensione; 3) di precisare il suo valore filosofico.

È evidentemente quest'ultimo punto quello che pone maggiori questioni. Infatti esso presuppone la possibilità di adottare in matematica una posizione filosofica di tutt'altra natura rispetto a quella imposta da mezzo secolo da parte del positivismo logico, una posizione filosofica razionalista che privilegi il concetto e non riduca la matematica alla sua logica dimostrativa. Perciò si comincerà questa riflessione con alcuni richiami all'unica filosofia di questo tipo che, per quanto è noto a chi scrive, sia stata esplicitamente sostenuta e sviluppata, vale a dire la filosofia di Albert Lautman.

1. *La filosofia matematica di Albert Lautman.*

Sorta intorno agli anni '30 in rapporto stretto con Jean Cavaillès e Jacques Herbrand, l'idea centrale di Albert Lautman è quella secondo cui nelle matematiche agisce un'intuizione intellettuale e, nello sviluppo storico delle loro teorie, queste realizzano una dialettica del concetto che costruisce la loro unità, costituisce il loro reale e determina il loro valore filosofico.

Dopo Dedekind, Cantor e Hilbert, quest'idea accorda una portata ontologica alla libertà creativa in matematica. Come nota Maurice Loi nella sua introduzione alla riedizione delle opere di Lautman [1935-46], una delle caratteristiche della matematica moderna è che «le entità matematiche sono introdotte da vere e proprie definizioni creatrici che non sono affatto la descrizione di un dato "empirico"» [1977, pp. 8-9]. «Liberando cosí la matematica dal compito di descrivere un dominio, intuitivo e dato, si attuò una vera e propria rivoluzione, le cui conseguenze scientifiche e filosofiche non sono sempre apprezzate nel loro giusto valore» [*ibid.*, p. 9]. E Maurice Loi aggiunge: «Una tale concezione della scienza matematica che la avvicina ad altre attività produttive umane pone in termini nuovi il problema dei suoi rapporti con il reale, dell'oggettività e della soggettività. Gli empiristi moderni oppongono volentieri la scienza al soggettivismo e al volontarismo. Ora l'oggettività non è mai un dato ma una conquista i cui punti estremi sono l'assiomatica e la matematica formale. È un compito umano che esige lavoro e sforzo, precisavano Herbrand e Lautman» [*ibid.*]. Dire che l'oggettività è non un dato empirico ma una conquista e un compito, equivale a dire che il suo progresso rimanda a una radice comune tra il teorico e l'etico e che il pensiero razionale è fonte e dell'oggettività e di ciò che Husserl chiamava «il piú alto dei valori». Vale a dire che, come ha affermato Jacques Derrida a proposito del «presente-vivente» fenomenologico, il processo di oggettivazione è quello di una coscienza concreta che malgrado la sua limitatezza si rende responsabile dell'Idea, «la coscienza teoretica [non essendo] null'altro, in se stessa e ben compresa, che una coscienza pratica, coscienza di compito infinito e posizione di valore assoluto per se stessa e per l'umanità come soggettività razionale» [1962, p. 149]. È, come nota ancora Maurice Loi, credere «non soltanto all'unità della matematica stessa attraverso tutte le sue diversità, ma anche all'unità dell'intelligenza e della cultura» [1977, p. 10].

Una tale concezione della libertà, dell'unità, del valore e del reale matematici si oppone alle tendenze dominanti dell'epistemologia contemporanea (che sono ancora quelle dell'epistemologia degli anni '30).

1) Sul piano ontologico, questa concezione si oppone al convenzionalismo e allo scetticismo secondo cui «l'oggettività scompare dal discorso scientifico che diventa una semplice architettura di parole senza valore» [*ibid.*, p. 8].

2) Dal punto di vista della dialettica si oppone poi all'interpretazione tradizionale del kantismo e, in molti casi, a Kant stesso. Da una parte essa ammette, con Hilbert e Husserl sulla scorta di Descartes, un'intuizione intellettuale ed eidetica e dall'altra respinge una concezione dell'a priori a-storica e sganciata dalle matematiche. «Kant dal canto suo separa ed oppone completamente la matematica non soltanto rispetto alla metafisica, ma anche a tutta la filosofia e soprattutto alla logica. Contro tale posizione si era già schierato vigorosamente Louis Couturat all'inizio del nostro secolo, vedendovi una mutilazione dello spirito, un disconoscimento della scienza e della cultura» [*ibid.*, p. 12].

3) In quanto idealista (platonica), essa si oppone anche all'empirismo. «Un facile empirismo tende talvolta attualmente ad installarsi nella filosofia della fisica: dovrebbe essere stabilita una dissociazione profonda fra la constatazione dei fatti sperimentali e la teoria matematica che li collega. Tutta la critica delle scienze contemporanee mostra la debolezza filosofica di un tale atteggiamento e l'impossibilità di considerare un risultato sperimentale al di fuori dell'armatura matematica in cui prende significato» [Lautman 1937, p. 145].

4) In quanto formalista, in senso hilbertiano, essa si oppone infine e forse soprattutto al logicismo del Circolo di Vienna. Si oppone al suo nominalismo «filosofia pigra che indietreggia di fronte all'analisi logica: è un procedimento comodo per sbarazzarsi delle questioni logiche e filosofiche vedendo "simboli", "convenzioni" e "processi" laddove vi sono "nozioni" primarie e "principî"» [Loi 1977, p. 11]. Mirando a «una dialettica piú profonda del linguaggio e del pensiero matematico», essa si oppone all'idea «superata» «di un'anteriorità assoluta ed univoca della logica rispetto alla matematica» e «vuole cosí rendere evidente l'idea secondo cui la vera e propria logica non è a priori rispetto alla ma-

tematica, ma che alla logica occorre una matematica per esistere» [*ibid.*, pp. 12, 13]. In tutti i suoi scritti Lautman è tornato in modo ricorrente su questo disconoscimento logicista e su questa obliterazione neopositivista della realtà matematica che «separano drasticamente le matematiche e la realtà» [Lautman 1937, p. 145]. Nell'introduzione della sua tesi egli afferma per esempio: «Per Wittgenstein e Carnap le matematiche non sono nient'altro che un linguaggio indifferente al contenuto che esprime. Soltanto le proposizioni empiriche si riferirebbero a una realtà oggettiva e le matematiche non sarebbero altro che un sistema di trasformazioni formali che permette di collegare gli uni agli altri i dati della fisica. Se si tenta di capire le ragioni di questa scomparsa progressiva della realtà matematica, si può essere portati a concludere che essa risulta dall'impiego del metodo deduttivo. Volendo costruire tutte le nozioni matematiche partendo da un piccolo numero di nozioni e proposizioni logiche primitive, si perde di vista il carattere qualitativo ed integrale delle teorie costituite... La ricerca delle nozioni primitive deve cedere il posto a uno studio sintetico d'insieme» [*ibid.*, pp. 23-24]. In apertura della sua relazione *Mathématique et réalité* al Congresso internazionale di filosofia scientifica del 1935, Lautman precisa la sua critica nel modo seguente: «I logicisti della Scuola di Vienna pretendono che lo studio formale del linguaggio scientifico debba essere l'unico oggetto della filosofia delle scienze. Si tratta di una tesi difficile da ammettere per quei filosofi che considerano loro compito essenziale lo stabilire una teoria coerente dei rapporti della logica e del reale. C'è un reale fisico e il miracolo da spiegare è che sono necessarie le teorie matematiche piú sviluppate per interpretarlo. C'è anche un reale matematico ed è ugualmente stupefacente vedere che vi sono dei domini che resistono all'esplorazione finché non li si affronta con metodi nuovi... Una filosofia delle scienze che non verta interamente sullo studio di questa solidarietà tra domini di realtà e metodi di ricerca sarebbe semplicemente priva d'interesse... Si verifica ugualmente il fatto curioso secondo cui ciò che per il logicista è un ostacolo da eliminare diventa per il filosofo il piú alto oggetto d'interesse. Si tratta di tutte le implicazioni "materiali" o "realiste" che la logicistica è obbligata ad ammettere... I logicisti della Scuola di Vienna affermano sempre il loro pieno accordo con la scuola di Hilbert, tuttavia nulla è piú discutibile. Nella scuola logicista, da Russell in poi, ci si sforza di trovare le costituenti atomiche di tutte le proposizioni matematiche... La nozione di numero vi svolge un ruolo capitale e tale ruolo è ulteriormente aumentato dall'aritmetizzazione della logica in base ai lavori di Gödel e di Carnap... L'assiomatica di Hilbert e dei suoi allievi, lungi dal voler riportare l'insieme della matematica a non essere altro che una valorizzazione dell'aritmetica, tende al contrario a far derivare da ogni dominio studiato un sistema di assiomi tale che dalla riunione delle condizioni implicate dagli assiomi sorgano sia un dominio, sia delle operazioni valide in tale dominio... La considerazione di una matematica puramente formale deve dunque lasciare il posto al dualismo di una struttura topologica e delle proprietà funzionali in relazione con tale struttura... L'oggetto studiato non è l'insieme delle proposizioni derivate dagli assiomi, ma l'insieme degli esseri organizzati, strutturati, completi, aventi una sorta di anatomia e di fisiologia proprie... Il punto di vista che qui interessa è quello della sintesi delle condizioni necessarie e non quello dell'analisi delle nozioni primarie» [Lautman 1935, pp. 281-83].

Come concezione quasi «organica» delle matematiche la concezione di Lautman si avvale dunque dell'assiomatica hilbertiana, assiomatica non costruttivista che «sostituisce al metodo delle definizioni genetiche quello delle definizioni assiomatiche e, lungi dal voler ricostruire l'insieme delle matematiche a partire dalla logica, introduce al contrario, passando dalla logica all'aritmetica e dall'aritmetica all'analisi, nuove variabili e nuovi assiomi che allargano ogni volta il dominio delle conseguenze» [1937, p. 26]. Nata «dalla consapevolezza che nello sviluppo delle matematiche si afferma una realtà che la filosofia matematica ha la funzione di riconoscere e di descrivere» [*ibid.*, p. 23], riprendendo da Brunschvicg «l'idea secondo cui l'oggettività delle matematiche [è] opera dell'intelligenza, nel suo sforzo per trionfare sulle resistenze che le sono opposte dalla materia su cui lavora» [*ibid.*, p. 25] e ponendo che «tra la psicologia del matematico e la deduzione logica deve esserci posto per una caratterizzazione intrinseca del reale» [*ibid.*, p. 26], tale concezione è anche definita piú precisamente da Lautman *come assiomatico-strutturale e dinamica insieme*. Questa sintesi del reale che «partecipa nello stesso tempo del movimento dell'intelligenza e del rigore logico senza confondersi né con l'una né con l'altro» [*ibid.*] è il fine individuato da Lautman. Non è evidentemente una cosa ovvia poiché «la concezione strutturale e la concezione dinamica delle matematiche sembrano di primo acchito opporsi: l'una tende infatti a considerare una teoria matematica come un tutto completo, indipendente dal tempo, l'altra al contrario non la separa dalle tappe temporali della sua elaborazione; per la prima le teorie sono come degli esseri qualitativamente distinti gli uni dagli altri, mentre la seconda vede in ognuna di esse una potenza infinita di espansione al di fuori dei suoi limiti e dei suoi legami con le altre, potenza attraverso la quale si afferma l'unità dell'intelligenza» [*ibid.*, p. 27].

Se Lautman ha potuto arrivare a pensare una tale sintesi tra struttura e genesi nel campo matematico è prima di tutto perché, essendo formali, le teorie matematiche sono come degli esseri viventi la cui organizzazione è *esplicita* e inoltre – e soprattutto – perché è riuscito ad articolare un'autentica dialettica del concetto all'assiomatica hilbertiana. Come si è già notato, si tratta della sua idea direttrice. Un'analisi critica e concettuale dettagliata e acuta delle ◆matematiche◆ del suo tempo ha permesso a Lautman di mettere in luce nel movimento di elaborazione delle teorie matematiche, nelle loro progressive integrazioni e nelle loro interferenze, il lavoro sottostante di idee dialettiche. Attraverso queste ultime le matematiche sembrano «raccontare, assieme alle costruzioni a cui s'interessa il matematico, un'altra storia piú nascosta e fatta per il filosofo» [*ibid.*, p. 28], una storia nascosta che conferisce alle matematiche «il loro eminente valore filosofico» [*ibid.*, p. 29]. È per questo che Lautman, affermando in modo del tutto platonico «la partecipazione delle Matematiche a una ◆Dialettica◆ che le domina» riteneva che «questo avvicinamento della ◆metafisica◆ e delle matematiche non è contingente ma necessario» [1939, p. 203].

Detto ciò, il punto cruciale della concezione di Lautman è senza dubbio quello secondo cui se una Dialettica del ◆concetto◆ domina le matematiche (perciò le de-limita rendendole intrinsecamente solidali con la storia della cultura), tuttavia *tale Dialettica esiste soltanto matematicamente realizzata e storicizzata*, in altre parole «la comprensione delle Idee di questa Dialettica si prolunga necessariamente in ◆genesi◆ delle teorie matematiche effettive» [*ibid.*]. Lautman insiste molto su questo punto, che, esso solo, può sottrarre la sua concezione a un idealismo soggettivo ingenuo: «Cercando di determinare la natura della realtà matematica, abbiamo mostrato... che si potevano interpretare le teorie matematiche come una materia di scelta destinata a dare corpo a una dialettica ideale. Questa dialettica sembra costituita principalmente da coppie di contrari e le Idee di questa dialettica si presentano in ogni caso come il problema dei legami da stabilire tra nozioni opposte. La determinazione di questi legami si attua soltanto all'interno dei domini in cui la dialettica si incarna, ed è cosí che abbiamo potuto seguire in un gran numero di teorie matematiche il disegno concreto di edifici la cui esistenza effettiva costituisce come una risposta ai problemi posti dalle Idee di questa dialettica» [1946, p. 253]. Si potrebbe dire che in qualche modo la dialettica del concetto e le matematiche che le dànno corpo intrattengono secondo Lautman un rapporto «di esclusione interna». In virtú dell'«unione intima» e dell'«indipendenza completa» che le correlano (e ciò senza paradosso) «le teorie matematiche si sviluppano per loro forza propria, in una stretta solidarietà reciproca e senza riferimento alle Idee che il loro movimento avvicina» [1937, p. 134].

In Lautman questo rapporto di esclusione interna e di dipendenza/indipendenza tra logica dialettica e matematica si precisa e si dispiega in una filosofia dei problemi. Le idee dialettiche sono puramente problematiche (non determinano nessun oggetto) e dunque, considerate come autonome, essenzialmente incomplete (mancanti di ciò che le porta all'esistenza). È per questo che «gli schemi logici [le idee che lavorano le teorie] non sono anteriori alla loro realizzazione all'interno di una teoria; manca infatti a ciò che noi chiamiamo... l'intuizione extra matematica dell'urgenza di un problema logico una materia da dominare per la quale l'idea di relazioni possibili dia luogo allo schema di relazioni vere e proprie» [*ibid.*, p. 142]. È anche per questo che in Lautman la filosofia delle matematiche «non consiste tanto nel ritrovare un problema logico della metafisica classica all'interno di una teoria matematica, quanto nell'apprendere globalmente la struttura di questa teoria per liberare il problema logico che si trova nello stesso tempo definito e risolto dall'esistenza stessa di questa teoria» [*ibid.*, pp. 142-43]. La conseguenza fondamentale è che la costituzione di nuovi schemi logici, ed il disvelamento di idee dialettiche «dipendono dal progresso delle matematiche stesse» [*ibid.*, p. 142].

In questa concezione problematica delle idee dialettiche che anima *idealmente* (e non comanda effettivamente) la genesi delle teorie matematiche, «l'ordine implicato dalla nozione di genesi non è... l'ordine della ricostruzione logica delle matematiche, nel senso in cui da assiomi iniziali di una teoria derivano tutte le proposizioni della teoria, perché la dialettica non fa parte delle matematiche e le sue nozioni sono senza rapporto con le nozioni primitive di una teoria... L'anteriorità della Dialettica [è] quella della "cura" o del "problema" in rapporto alla risposta. Si tratta di un'anteriorità "ontologica", per riprendere l'espressione di Heidegger, esattamente paragonabile a quella dell'"intenzione" rispetto al "progetto" » [1939, p. 210]. Questo contenuto intenzionale delle idee fa sí che queste ultime siano nello stesso tempo trascendenti e immanenti al campo matematico. «In quanto problemi posti, relativi ai legami che sono suscettibili d'intrattenere fra di loro alcune nozioni dialettiche, le Idee di questa Dialettica sono certamente *trascendenti* (nel senso usuale) in rapporto alle matematiche. Per contro, poiché ogni sforzo per dare una risposta al problema di questi legami è per la natura stessa delle cose una costituzione di teorie matematiche effettiva, si è giustificati ad interpretare la struttura d'insieme di queste teorie in termini di *immanenza* per lo schema logico della soluzione cercata» [*ibid*., p. 212].

La correlazione tra il «movimento proprio» delle teorie matematiche da una parte e «i legami d'idee che s'incarnano in questo movimento» dall'altra, costituisce secondo Lautman «la realtà inerente» alle matematiche [1937, p. 140]. Realtà genetica definita in modo *trascendentale* «come la venuta di nozioni relative al concreto in seno a una analisi dell'Idea» [1939, p. 205].

L'opposizione locale/globale è la prima delle idee dialettiche che Lautman tratta nella prima parte della sua tesi [1937] dedicata agli schemi di struttura. Fedele alla propria concezione generale egli si situa, nel capitolo dedicato a tale opposizione, a un doppio livello. Dapprima ne esplicita i diversi aspetti matematici studiando il modo in cui essa interviene nei seguenti domini:

1) la ✦dualità✦ dal punto di vista globale di Riemann e dal punto di vista locale di Weierstrass nella teoria delle ✦funzioni✦ analitiche;
2) la dualità dal punto di vista globale di Klein e dal punto di vista locale di Riemann in ✦geometria✦ e la sintesi operata da Cartan;
3) l'opposizione dei teoremi locali di esistenza di soluzioni e dei problemi di condizione ai limiti nella teoria delle equazioni differenziali;
4) la correlazione tra struttura ✦differenziale✦ locale di una varietà riemanniana completa e la sua struttura topologica globale;
5) la teoria dei gruppi compatti di Lie;
6) la teoria di Fourier e, piú in generale, la nozione di base in uno spazio vettoriale topologico (per esempio uno spazio di Hilbert).

Tuttavia a un secondo livello, filosofico, Lautman tenta di mettere in luce il problema concettuale generale sottostante alla dialettica del locale e del globale. Secondo lui questo problema è quello, tradizionale, *del tutto e delle parti*, vale a dire *quello – strutturale – dell'organizzazione*. «Lo studio locale si indirizza verso l'elemento, il piú sovente ✦infinitesimale✦, della realtà; esso cerca di determinarla nella sua specificità, poi, avanzando a poco a poco, stabilisce progressivamente dei legami abbastanza solidi tra le diverse parti cosí individuate per cui un'idea d'insieme viene alla luce dalla loro giustapposizione. Lo studio globale cerca al contrario di caratterizzare una totalità indipendentemente dagli elementi che la compongono; affronta subito la struttura dell'insieme assegnando cosí un posto agli elementi prima ancora di conoscerne la natura; tende tuttavia a definire gli enti matematici in base alle loro proprietà funzionali, ritenendo che il ruolo che svolgono conferisca loro un'unità ben piú sicura di quella che risulta dall'assemblaggio delle parti» [Lautman 1937, p. 31]. E aggiunge: «La constatazione di questa dualità suggerisce naturalmente ai matematici la ricerca di una sintesi. Dato che elementi combinati fra di loro da un qualsiasi processo evolutivo possono non dar vita ad alcun essere suscettibile di caratterizzazione globale, occorrerebbe per essere sicuri di arrivare ad un risultato che la struttura topologica dell'insieme si riflettesse nelle proprietà delle sue parti. Ciò può dar luogo a due tipi di problema: o si parte dall'insieme di cui si conosce la struttura e si cercano le condizioni che devono soddisfare gli elementi perché siano elementi di questo insieme, oppure si prendono degli elementi che godano di certe proprietà e si cerca di leggere in queste proprietà locali la struttura dell'insieme in cui questi elementi si lasciano organizzare. Sia nell'uno sia nell'altro caso si cerca di stabilire un legame fra la struttura del tutto e le proprietà delle parti attraverso cui si manifesta nelle parti stesse l'influenza organizzatrice del tutto al quale esse appartengono» [*ibid.*, p. 39]. Si sarà qui riconosciuta, interpretata matematicamente, l'antinomia classica che oppone da un lato le concezioni riduzioniste e meccaniciste in cui le strutture organizzate sono pensate come sistemi di componenti che interagiscono, e dall'altro le concezioni oliste e strutturali in cui esse sono al contrario pensate in modo puramente funzionale e relazionale. Nel primo caso l'unità degli elementi è definita con criteri sostanziali, mentre nel secondo è definita con criteri posizionali.

Ciò mostra che, per Lautman, l'opposizione ♦locale/globale♦, al di là dei suoi diversi sviluppi matematici, rinvia ad una problematica generale che non è di natura esclusivamente matematica. «Incontreremo cosí nelle matematiche considerazioni che possono a prima vista sembrare estranee alle matematiche ed apportarvi come il riflesso di alcune concezioni proprie della biologia e della sociologia. È evidente che l'essere matematico come noi lo concepiamo non è senza analogia con un essere vivente: crediamo tuttavia che l'idea dell'azione organizzatrice di una struttura sugli elementi di un insieme sia pienamente intelligibile nelle matematiche anche se, trasportata in altri domini, perde la sua limpidezza razionale. La prevenzione che il filosofo prova talvolta nei confronti di sistemazioni troppo armoniose non deriva tanto dal fatto che esse subordinano le parti all'idea di un tutto che le organizza, quanto dal fatto che il modo in cui si attua questa organizzazione dell'insieme è ora di un antropomorfismo ingenuo, ora di una misterioriosa oscurità. La biologia come la sociologia mancano infatti spesso degli strumenti logici necessari per costituire una teoria della solidarietà del tutto e delle parti: vedremo per contro che le matematiche possono rendere alla filosofia l'eminente servizio di offrirle l'esempio di armonie interne il cui meccanismo soddisfa le esigenze logiche piú rigorose» [*ibid.*, pp. 39-40].

Rimanendo fedeli al punto di vista di Lautman, si ricorderanno anzitutto, in un primo paragrafo, diversi aspetti matematici della dialettica del locale e del globale, e poi si mostrerà in un secondo paragrafo come, al di là delle analogie profondamente reperite da Lautman, recenti sviluppi del contenuto matematico di questa dialettica permettono di superare «l'antropomorfismo ingenuo» e «la misteriosa oscurità» dei concetti *strutturali* dell'organizzazione.

2. *Richiami e complementi sui diversi aspetti matematici dell'opposizione ✦locale/globale✦.*

2.1. La teoria delle funzioni analitiche.

È senz'altro nella teoria delle funzioni analitiche complesse che la dialettica del locale e del globale è apparsa per la prima volta in tutta la sua forza operatrice. Questo aspetto è stato presentato a piú riprese negli articoli di questa *Enciclopedia* (cfr. ✦Funzioni✦, ✦Locale/globale✦, ✦Curve e superfici✦, ✦Invariante✦, ✦Geometria e topologia✦, ecc.). Il punto di vista globale è quello, sviluppato da Riemann, in cui una funzione analitica è caratterizzata dalle equazioni di Cauchy-Riemann (che esprimono che la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono funzioni armoniche coniugate) e definisce la sua superficie di Riemann, vale a dire la varietà globale che è il suo dominio naturale di esistenza. Il punto di vista locale è quello di Weierstrass in cui una funzione analitica è l'insieme degli elementi analitici che si possono ottenere per prolungamento analitico a partire da un elemento analitico iniziale. L'✦equivalenza✦ di questi due punti di vista manifesta una solidarietà fondamentale tra il locale e il globale: per una funzione analitica, una determinazione locale qualunque implica la determinazione globale.

Questa solidarietà si manifesta ovunque. Per esempio:

1) Con le formule integrali di Cauchy.

2) Con il teorema di Runge che caratterizza *globalmente* (e non piú localmente) le funzioni olomorfe.

TEOREMA. *Una funzione f a valori complessi è olomorfa su un aperto connesso limitato U di $\mathbf{C}$ se e solo se essa è, su ogni compatto K di U, il limite (uniforme) di una successione di funzioni razionali senza poli in U.*

Questa caratterizzazione globale delle funzioni olomorfe è importante perché permette di definire la nozione di olomorfia per funzioni definite su campi valutati, algebricamente chiusi, di caratteristica zero che non sono della stessa natura del campo dei complessi. È questo il caso dei campi p-adici ultrametrici. Su tali campi, in cui il valore assoluto non soddisfa la disuguaglianza triangolare $|x+y|\leq|x|+|y|$ ma la disuguaglianza ultrametrica (molto piú stretta) $|x+y|\leq \mathrm{Max}(|x|,|y|)$, non si può definire l'analiticità in modo locale. Tuttavia Krasner ha mostrato che la si può definire a partire dalla caratterizzazione globale fornita dal teorema di Runge.

3) Con la nozione di ricoprimento (ramificato), cioè di superficie di Riemann che permette di rendere uniforme una funzione analitica e in particolare con l'equivalenza tra una superficie di Riemann (necessariamente compatta) che è un ricoprimento finito della retta proiettiva complessa (sfera di Riemann) e una curva algebrica (teorema di Picard).

4) Con il modo in cui, per una superficie di Riemann, il livello topologico globale e in particolare il suo genere *vincola* i livelli superiori: se Σ è la superficie di Riemann di una curva algebrica di grado n, il suo genere g è dato da $g=[(n-1)(n-2)]/2$ ed esistono g 1-forme olomorfe linearmente indipendenti su Σ (teorema di Riemann).
5) Con il teorema dei residui.
6) Con la possibilità di rappresentare le classi di coomologia di Σ (rilevanti al livello topologico) con due tipi di forme: forme differenziali (teorema di De Rham) e forme analitiche (teoria di Hodge).
7) Con il teorema di Riemann-Roch e le soluzioni ai problemi di Cousin.
8) Con la risoluzione del problema dell'uniformità globale su Σ, passando al suo ricoprimento universale $\tilde{\Sigma}$. Σ è il quoziente di $\tilde{\Sigma}$ rispetto al gruppo G di automorfismi del ricoprimento $\pi: \tilde{\Sigma}\rightarrow\Sigma$, gruppo isomorfo al gruppo fondamentale di Σ. Le funzioni uniformi su Σ sono allora le funzioni G-invarianti su $\tilde{\Sigma}$ (teoria delle funzioni automorfe).
9) Con la risoluzione del problema dell'inversione degli integrali abeliani (teoria degli jacobiani e delle varietà abeliane). Ecc.

2.2. Geometria e gruppi di Lie.

In geometria il punto di vista globale è quello sviluppato da Klein nel «programma di Erlangen». Si tratta di spazi omogenei caratterizzati dal loro gruppo d'invarianza. Il punto di vista locale è in compenso quello sviluppato da Riemann (teoria delle varietà riemanniane). In questa seconda concezione gli spazi non sono globalmente omogenei e sono semplicemente caratterizzati da una metrica locale che può variare in ogni punto, vale a dire da un tensore metrico. La sintesi tra questi due punti di vista, di un'importanza cruciale per la relatività generale, è stata essenzialmente l'opera di Cartan (cfr. gli articoli ◆Sistemi di riferimento◆, ◆Relatività◆, ◆Spazio-tempo◆). Tale sintesi si fonda essenzialmente sul concetto di connessione, che permette di collegare le strutture infinitesimali di una varietà riemanniana in due punti differenti.

D'altra parte i gruppi d'invarianza associati alle diverse geometrie sono dei gruppi di Lie (cioè delle varietà differenziabili munite di una struttura compatibile di gruppo). Lo spazio vettoriale tangente all'elemento neutro è allora canonicamente munito di una struttura d'algebra di Lie che esprime le proprietà infinitesimali del gruppo. Ora questa struttura locale è in larghissima misura determinante per la struttura globale del gruppo (cfr. in particolare l'articolo di sistematica ◆*Strutture matematiche*◆).

2.3. Il linguaggio categoriale dell'incollamento.

Una delle piú evidenti concretizzazioni matematiche dell'opposizione locale/globale è fornita dalla nozione di varietà differenziabile, vale a dire dalla nozione di spazio globale ottenuta per «incollamento» differenziabile di pezzi di uno spazio standard (cfr. gli articoli di sistematica ◆*Locale/globale*◆ e ◆*Geo-*

metria e topologia✦). È interessante notare che questa nozione di «incollamento», che corrisponde a un'intuizione essenzialmente spaziale, può essere trattata in modo puramente astratto in termini categoriali (per la teoria delle categorie e dei funtori, cfr. l'articolo ✦Trasformazioni naturali / categorie✦). Per mostrarlo si seguirà un articolo di Appelgate e di Tierney. Come notano subito gli autori, «un processo familiare in matematica è la creazione di oggetti "globali" da oggetti "locali" dati. Gli oggetti "locali" possono essere chiamati "modelli" per il processo, e generalmente si dice che gli oggetti "globali" sono formati "incollando insieme" (*pasting together*) i modelli. L'esempio piú immediato è forse dato dalle varietà. Qui gli oggetti "locali" sono sottoinsiemi aperti di uno spazio euclideo, e quando s'incollano insieme con omeomorfismi, diffeomorfismi, ecc., si ottengono rispettivamente le varietà topologiche, differenziabili, ecc. La finalità di questo articolo è quella di presentare una trattazione categoriale coerente di questo processo di incollamento» [1966-67, p. 156].

Tornando alla nozione di varietà differenziabile, analitica, ecc. di dimensione n, sia una varietà topologica M munita di un ricoprimento aperto $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ (carte locali), d'omeomorfismi $\varphi_i : U_i \to U'_i$ degli U_i su aperti U'_i di $\mathbf{R}^n$, e di isomorfismi differenziabili, analitici, ecc. di incollamento φ_{ij}. Si è dunque portati a considerare: 1) la categoria Top degli spazi topologici, 2) la categoria «piccola» $\mathfrak{M}$ i cui oggetti sono gli aperti U di $\mathbf{R}^n$ e i morfismi $\varphi : U \to V$ sono degli isomorfismi (differenziabili, analitici, ecc.) di U su un sottoaperto di V. Questi morfismi φ costituiscono uno pseudogruppo Γ di omeomorfismi che è locale nella misura in cui se $\psi : U \to V$ è un omeomorfismo tale che ogni $x\in U$ ha un intorno $U(x)$ con $\psi|_{U(x)} \in \Gamma$, allora $\psi \subset \Gamma$. Esiste un funtore banale di inclusione $I : \mathfrak{M} \to \mathrm{Top}$. E si tratta di definire in modo puramente categoriale l'incollamento in Top a partire dalla categoria dei modelli $\mathfrak{M}$.

In generale si può prendere la categoria $\mathcal{C}$ e una categoria (piccola) di modelli $\mathfrak{M}$ munita di un funtore di inclusione $I : \mathfrak{M} \to \mathcal{C}$. Sia $x \in \mathcal{C}$ un oggetto di $\mathcal{C}$. Gli si associa in modo naturale un funtore $s_x : \mathfrak{M}^* \to \mathcal{E}$, dove $\mathfrak{M}^*$ è la categoria opposta a $\mathfrak{M}$ e $\mathcal{E}$ la categoria degli insiemi. Se U è un oggetto di $\mathfrak{M}$, $s_x(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I(U), x)$ e se $\varphi : U \to V$ è un morfismo di $\mathfrak{M}$, $s_x(\varphi)$ è l'applicazione $s_x(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I(V), x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I(U), x) = s_x(U)$ che a $I(V) \xrightarrow{j} x$ associa la composizione $I(U) \xrightarrow{I(\varphi)} I(V) \xrightarrow{j} x$. s_x rappresenta dunque essenzialmente i diversi modi di «inviare» i modelli locali in x. Quando x si trasforma, il funtore s_x varia esso stesso funtorialmente. Se $f : x \to y$ è un morfismo di $\mathcal{C}$, f definisce per composizione un morfismo di funtori $s_f : s_x \to s_y$ che a un elemento $I(U) \xrightarrow{j} x$ di $s_x(U)$ associa la composizione $I(U) \xrightarrow{j} x \xrightarrow{f} y$ di $s_y(U)$ e ciò in modo tale che siano commutativi tutti i diagrammi

$$\begin{tikzcd} s_x(V) \arrow[r, "s_x(\varphi)"] \arrow[d, "s_f(V)"'] & s_x(U) \arrow[d, "s_f(V)"] \\ s_y(V) \arrow[r] & s_y(U) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} j \arrow[r] \arrow[d] & j\circ\varphi \arrow[d] \\ f\circ j \arrow[r] & f\circ j\circ\varphi \end{tikzcd}$$

È stato dunque di fatto definito un funtore $s : \mathcal{C} \to (\mathfrak{M}^*, \mathfrak{S})$ in cui $(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{S})$ è la categoria dei funtori da $\mathfrak{M}^*$ in $\mathfrak{S}$, detta categoria dei prefasci su $\mathfrak{M}$.

Osservazione: Se $\mathfrak{M}$ è una categoria qualunque, si può associare ugualmente a ogni oggetto x di $\mathfrak{M}$ il funtore $h_x : \mathfrak{M}^* \to \mathfrak{S}$, $h_x(y)$ essendo l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}}(y, x)$. h_x rappresenta in qualche modo x in maniera strutturale ed esterna per mezzo dell'insieme delle trasformazioni presenti in $\mathfrak{M}$ da un oggetto qualunque y a x. Per un teorema dovuto a Yoneda, questa descrizione strutturale ed esterna equivale alla descrizione interna di x, nel senso che è equivalente prendere un morfismo di x in y o un morfismo di funtori di h_x in h_y. Con questo teorema il funtore h può essere considerato come un'«immersione» della categoria $\mathfrak{M}$ nella categoria $(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{S})$ dei prefasci su $\mathfrak{M}$. Questa immersione è preziosa perché anche se $\mathfrak{M}$ è molto «irregolare», $(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{S})$ «eredita» dal canto suo le buone proprietà di regolarità dalla categoria degl'insiemi.

A partire dal funtore s, è allora facile definire la nozione di atlante (cioè di sistema di carte locali) per un oggetto x di $\mathcal{C}$.

DEFINIZIONE. *Un atlante su x è un sottofuntore $\mathcal{A}$ di s_x.*

Si supponga allora che sia possibile, per ogni prefascio F su $\mathfrak{M}$, costruire un rappresentante r_F di F, cioè un oggetto x di $\mathcal{C}$ tale che F sia equivalente a s_x e piú precisamente un funtore $r : (\mathfrak{M}^*, \mathfrak{S}) \to \mathcal{C}$ che sia aggiunto a sinistra a s, vale a dire tale che prendere un morfismo di funtori da F in s_x equivalga a prendere un morfismo dalla realizzazione r_F di F a x: $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{S})}(F, s_x) \cong$ $\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r_F, x)$. In particolare, se $F = s_x$, questo isomorfismo associa a 1_{s_x} un morfismo da r_{s_x} a x che verrà indicato con ε_x.

Sia allora $i : \mathcal{A} \to s_x$ un atlante di x. Sia $r_{\mathcal{A}}$ il rappresentante di $\mathcal{A}$ e sia e il morfismo composto $r_{\mathcal{A}} \xrightarrow{r_i} r_{s_x} \xrightarrow{\varepsilon_x} x$.

DEFINIZIONE. *x sarà detto un $\mathfrak{M}$-oggetto di $\mathcal{C}$ se $e : r_{\mathcal{A}} \to x$ è un isomorfismo.*

Ciò riunisce tre condizioni: 1) e è un epimorfismo: le carte dell'atlante ricoprono x; 2) e è un monomorfismo: le carte di $\mathcal{A}$ sono compatibili; 3) e è un isomorfismo: la $\mathcal{C}$-struttura di x è determinata da quella delle carte di $\mathcal{A}$. L'interesse di questa costruzione astratta è il seguente. Ogni volta che si ha una coppia di funtori aggiunti $\mathcal{C} \underset{r}{\overset{s}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ tra due categorie (una coppia di funtori tali che $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(y, s(x))$ sia funtorialmente equivalente a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r(y), x)$ per ogni oggetto x di $\mathcal{C}$ e ogni oggetto y di $\mathcal{D}$), l'identità 1_{s_x} definisce un morfismo ε_x da $r(s(x))$ a x e l'identità $1_{r(y)}$ un morfismo $\eta_{(y)}$ da y a $s(r(y))$. Ciò significa che ε è un morfismo di funtori fra $r \circ s$ e $1_{\mathcal{C}}$ e che η è un morfismo di funtori tra $1_{\mathcal{D}}$ e $s \circ r$.

Si indichi con $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ l'endofuntore $r \circ s$ di $\mathcal{C}$. G associa ad ogni oggetto x di $\mathcal{C}$ il rappresentante $G(x)$ di s_x, cioè l'oggetto di $\mathcal{C}$ ottenuto per incollamento di tutti i modelli locali immersi in x. A priori $G(x)$ non è identico a x ma $\varepsilon : G \to 1_{\mathcal{C}}$ definisce un morfismo ε_x da $G(x)$ a x.

Tuttavia anche se $G(x)$ è in generale diverso da x, l'iterazione delle operazioni s ed r si «richiude» abbastanza presto. Si consideri infatti il morfismo di funtori $\delta : G \to G^2$, $\delta = r\eta s$. ε è un morfismo $\varepsilon : rs \to 1_{\mathcal{C}}$, η un morfismo $\eta : 1_{\mathcal{D}} \to sr$. È facile verificare che la composizione $s \xrightarrow{\eta s} (sr)s = s(rs) \xrightarrow{s\varepsilon} s$ è uguale a 1_s, così come la composizione $r \xrightarrow{r\eta} r(sr) = (rs)r \xrightarrow{\varepsilon r} r$ è uguale a 1_r. Moltiplicando il primo a sinistra per r e il secondo a destra per s, ciò implica che siano commutativi i diagrammi seguenti:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "1_G"'] & G^2 \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "1_G"'] & G^2 \arrow[d, "\varepsilon G"] \\ & G \end{tikzcd}$$

È possibile dunque ritornare a $\mathcal{C}$ e cercare di studiare la struttura **G** che vi definisce il «dato» di un endofuntore $G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, di un morfismo di funtori $\varepsilon : G \to 1_{\mathcal{C}}$ e di un morfismo di funtori $\delta : G \to G^2$ che soddisfino la doppia condizione $G\varepsilon\delta = 1_G$ e $\varepsilon G \delta = 1_G$. Una tale struttura **G** si chiama comonade su $\mathcal{C}$.

Si consideri allora un $\mathcal{M}$-oggetto di $\mathcal{C}$, vale a dire un oggetto x che ammette un atlante $i : \mathcal{A} \hookrightarrow s_x$ tale che il morfismo $e : r_{\mathcal{A}} \to x$ sia un isomorfismo. Sia ϑ il morfismo composto $x \xrightarrow{e^{-1}} r_{\mathcal{A}} \xrightarrow{r(j)} r(s_x) = G(x)$.

TEOREMA. *ϑ rende commutativi i seguenti diagrammi:*

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "1_x"'] & G(x) \arrow[d, "\varepsilon_x"] \\ & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "\vartheta"'] & G(x) \arrow[d, "G(\vartheta)"] \\ G(x) \arrow[r, "\delta(x)"] & G^2(x) \end{tikzcd}$$

Data una comonade **G** su una categoria $\mathcal{C}$, si dice coalgebra su **G** un morfismo $\vartheta : x \to G(x)$ che soddisfi questa proprietà. E si mostra che gli $\mathcal{M}$-oggetti sono le coalgebre. Ciò riformula dunque in termini della nozione puramente categoriale di comonade la nozione di incollamento.

Sia $\mathcal{C}_{\mathbf{G}}$ la categoria (definita in modo evidente) delle coalgebre di $\mathcal{C}$ su **G**. Si possono «ricostruire» in $\mathcal{C}_{\mathbf{G}}$ i dati iniziali I, s, r, e **G**. E si può mostrare – sotto condizioni molto generali 1) che il funtore dimenticante $\varnothing : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ rispetta le costruzioni categoriali fondamentali e 2) che esistono dei prodotti fibrati per i modelli – il risultato di chiusura per cui la ripetizione della costruzione su $\mathcal{C}_{\mathbf{G}}$ ridà $\mathcal{C}_{\mathbf{G}}$.

2.4. Fasci e coomologia dei fasci.

Il caso fondamentale (accanto alle strutture localmente triviali che sono le varietà e i fibrati) della costruzione precedente è fornito dalla nozione di fascio esposta al § 7 dell'articolo « Locale/globale ».

I passaggi dal locale al globale ottenuti per incollamento di spazi supporto conducono in particolare alle nozioni di fibrato e di sezione, e il problema cruciale diventa quello del prolungamento delle sezioni. Questo problema interviene fin dall'origine della dialettica locale/globale, poiché il prolungamento analitico è un caso tipico di prolungamento. Si ritorni dunque a questa nozione.

La nozione di olomorfia è una nozione locale; si definiscono infatti le funzioni olomorfe sugli aperti U di $\mathbf{C}$. Tuttavia l'unicità del prolungamento analitico implica che la conoscenza locale di una funzione olomorfa su un aperto *determina* il suo spazio supporto globale, cioè la sua superficie di Riemann X che è una varietà analitica di dimensione 1 (su $\mathbf{C}$). Dato che X si ottiene per incollamento di modelli locali che sono degli aperti di $\mathbf{C}$, le funzioni olomorfe su X sono dunque definite come incollamenti di funzioni olomorfe su aperti di U. Si chiami $\Gamma(U)$ l'insieme delle funzioni olomorfe sull'aperto U di X. È chiaro che posto un elemento $f: U \to \mathbf{C}$ di $\Gamma(U)$, se $V \subset U$ è un aperto di X incluso in U, la restrizione $f|_V$ di f a V è un elemento di $\Gamma(V)$.

Il fatto che le funzioni olomorfe si globalizzino per incollamento è allora espresso con le due seguenti condizioni:

(F_1) Sia $(U_i)_{i \in I}$ una famiglia di aperti di X aventi unione U, e siano f e $f' \in \Gamma(U)$. Se le restrizioni di f e di f' agli U_i sono uguali, allora $f = f'$ (la coincidenza locale implica la coincidenza globale).

(F_2) Per ogni i sia $f_i \in \Gamma(U_i)$; se le f_i sono compatibili, vale a dire se coincidono sulle intersezioni $U_i \cap U_j$ (non vuote), allora esiste un elemento $f \in \Gamma(U)$ tale che $f|_{U_i} = f_i$ per ogni i.

Osservazione: Le funzioni olomorfe soddisfano una proprietà piú forte della proprietà evidente (F_1) poiché è sufficiente che f e f' coincidano su *un solo* U_i per coincidere ovunque. Tuttavia se si considera il caso differenziabile, in cui non esiste solidarietà locale/globale, e le funzioni differenziabili $f: U \subset M \to \mathbf{R}$ allora è la proprietà (F_1) ad essere quella valida.

Tuttavia una funzione olomorfa $f: U \to \mathbf{C}$ può essere considerata come una sezione olomorfa del fibrato triviale $\pi: U \times \mathbf{C} \to U$. Se dunque s'incollano i modelli locali $U_i \times \mathbf{C}$ seguendo l'incollamento che permette di ottenere X a partire da un atlante $(U_i)_{i \in I}$, è possibile considerare le funzioni olomorfe su X come le sezioni locali-globali olomorfe di X in questo «fibrato» di fibra costante $\mathbf{C}$. Ma la topologia su $\mathbf{C}$ è la topologia discreta e non è dunque la topologia naturale di $\mathbf{C}$.

Ora, se si considera la generalizzazione di questa situazione al caso algebrico, si constata che i «fibrati» che cosí s'incontrano *non sono in generale di fibra costante*. Ciò ha posto un delicato problema concettuale che si è potuto risolvere per mezzo di un chiasmo tra spazio «fibrato» e sezioni. Invece di partire dallo spazio «fibrato» e dedurne le sezioni, si parte direttamente dall'avere come date le sezioni e si tenta di costruire uno spazio «fibrato» le cui sezioni siano le sezioni date. Questa strategia si è rivelata di una straordinaria fecondità e il linguaggio astratto che si è dovuto elaborare per darle corpo ha invaso l'insieme della geometria.

La teoria dei fasci è l'approccio alla dialettica locale/globale fondata sul concetto primitivo di sezione. La prima cosa che devono soddisfare le sezioni è che l'operazione di restrizione vi sia ben definita. Ora, nella misura in cui le sezioni sono astratte e non sono dunque definite subito come applicazioni di aperti di uno spazio di base X in altri spazi, questa nozione di restrizione non è piú intuitiva. Occorre dunque assumerla. La struttura iniziale che si considererà sarà dunque una struttura di restrizioni, coerenti fra di loro.

Ora, esiste una descrizione categoriale semplice di questa coerenza. Sia X uno spazio topologico. Gli aperti di X costituiscono in modo naturale una categoria «piccola» $\mathcal{X}$ i cui oggetti sono gli aperti U di X e i morfismi le inclusioni $i : V \hookrightarrow U$ di aperti. Si consideri la struttura costituita dall'aver dato per ogni oggetto U di $\mathcal{X}$ un insieme $\Gamma(U)$ di sezioni. Dire che questa struttura è una struttura coerente di restrizioni significa:

1) Per ogni morfismo $i : V \hookrightarrow U$ di $\mathcal{X}$ è definita l'applicazione di restrizione $\Gamma(i) : \Gamma(U) \to \Gamma(V)$ che a una sezione su U associa la sua restrizione a V.
2) Se $i = 1_U$, $\Gamma(i) = 1_{\Gamma(U)}$.
3) Se $i : V \hookrightarrow U$ e $j : W \hookrightarrow V$, allora la composizione $\Gamma(j) \circ \Gamma(i) : \Gamma(U) \to \Gamma(W)$ è l'applicazione di restrizione $\Gamma(i \circ j)$ (transitività della restrizione).

Ma ciò significa molto semplicemente che Γ è un funtore dalla categoria $\mathcal{X}^*$ opposta a $\mathcal{X}$ nella categoria $\mathcal{E}$ degli ♦insiemi♦. Di qui la definizione data nell'articolo «Locale/globale», p. 480.

DEFINIZIONE. *Si chiama prefascio su X un funtore* $\Gamma : \mathcal{X}^* \to \mathcal{E}$.

Per definizione i prefasci su X costituiscono una categoria di funtori, precisamente la categoria $(\mathcal{X}^*, \mathcal{E})$.

Ora la nozione di fascio può essere derivata esigendo che le sezioni possano essere incollate.

DEFINIZIONE. *Un prefascio Γ su X è un fascio se soddisfa le proprietà (F_1) e (F_2).*

Il primo problema che si pone è allora quello di sapere se un fascio astratto è rappresentabile come fascio di sezioni «vere» di una «proiezione» $\pi : E \to X$ da uno spazio totale E sullo spazio di base X. A questo scopo si consideri la categoria $\mathcal{T}_X$ degli spazi topologici «al di sopra» di X. I suoi oggetti sono le applicazioni continue $\pi : E \to X$ e i suoi morfismi i diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \arrow[dl, "\varphi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Le inclusioni $U \subset X$ definiscono in modo banale un'immersione $I : \mathcal{X} \to \mathcal{T}_X$. Si è dunque nella situazione del paragrafo precedente, in cui è data una categoria $\mathcal{T}_X$ unita a una categoria «piccola» di modelli $\mathcal{X}$.

Sia allora $\pi : E \to X$ un oggetto di $\mathcal{T}_X$. Le sue sezioni definiscono in modo banale un prefascio $\Gamma_\pi = S(\pi)$ su X. Si dispone dunque del funtore $s : \mathcal{T}_X \to (\mathcal{X}^*, \mathcal{E})$ che è la prima componente di una struttura di comonade.

La prima difficoltà consiste nel sapere se s ammette un aggiunto a sinistra $r : (\mathcal{X}^*, \mathcal{E}) \to \mathcal{T}_X$, vale a dire se, dato un prefascio Γ, si può trovare uno spazio $\pi_\Gamma : E_\Gamma \to X$ al di sopra di X il cui prefascio delle sezioni «approssima» al meglio Γ. Dato che r è un funtore, la costruzione di E_Γ deve essere uniforme e categoriale. Ora si vede che ogni «vero» prefascio di sezioni è intuitivamente un fascio. Ci si può dunque aspettare che $s(E_\Gamma)$ sia diverso da Γ, cioè che $s \circ r$ non sia l'identità di $(\mathcal{X}^*, \mathcal{E})$. E la ricerca di E_Γ è anche la ricerca di un fascio associato a Γ in modo canonico che approssima Γ al meglio. E_Γ è lo spazio *étalé* associato a Γ la cui costruzione è spiegata nell'articolo «Locale/globale», p. 481.

Vi è equivalenza tra i fasci e gli spazi *étalés*. Il funtore $\Gamma \rightarrow E_\Gamma$ è il funtore rappresentazione $r:(\mathcal{X}^*,\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{T}_X$ aggiunto a sinistra ad s. Si è nella situazione di una comonade, e le coalgebre sono in questo caso quegli spazi topologici particolari che sono spazi *étalés* su X.

Nella maggior parte dei casi i fasci considerati sono muniti di una struttura algebrica. Questo significa che i $\Gamma(U)$ sono muniti di struttura algebrica (di gruppo, anello, modulo) e che le applicazioni di restrizione sono dei morfismi per queste strutture. Un caso fondamentale è quello dei fasci di funzioni sulle varietà. Si consideri per esempio una varietà differenziabile X e il fascio Γ delle applicazioni differenziabili $f: U \rightarrow \mathbf{R}$. La struttura di campo di $\mathbf{R}$ induce una struttura d'anello sui $\Gamma(U)$ che si preserva per restrizione. Si dice che Γ è un fascio di anelli. Γ si dice fascio strutturale di X e si indica $\mathcal{O}_X$. La stessa cosa dicasi quando X è una varietà analitica, $\Gamma(U)$ essendo l'anello delle funzioni olomorfe su U. Si consideri per esempio la superficie di Riemann X di una curva algebrica complessa. Sia $\mathcal{O}_X$ il fascio strutturale e si considerino le 1-forme olomorfe su X (localmente una tale 1-forma ω si scrive $\omega = f(z)dz$ con f olomorfa). Si possono sommare e moltiplicare con funzioni olomorfe. Ciò significa che il fascio Ω_X^1 delle 1-forme è munito di una struttura di $\mathcal{O}_X$-modulo. Ma anche se localmente questo modulo è di rango 1, cioè isomorfo a $\mathcal{O}_X$ (per ogni $z \in X$ la fibra Ω_z^1 è isomorfa a $\mathcal{O}_z \simeq \mathbf{C}$) ciò non implica che Ω_X^1 sia globalmente isomorfo a $\mathcal{O}_X$. Per esempio se X è compatta di genere g si sa che esistono g 1-forme linearmente indipendenti, cioè $2g$ sezioni globali di Ω_X^1 linearmente indipendenti, mentre le uniche sezioni globali di $\mathcal{O}_X$ sono le sezioni costanti.

Se i fasci hanno acquisito una tale importanza è perché essi costituiscono un'interpretazione funzionale del passaggio dal locale al globale a cui si possono trasferire le nozioni fondamentali della teoria dei gruppi abeliani e dell'algebra lineare (teoria dei moduli sugli anelli). E, ragionando fibra per fibra, si può mostrare che l'essenza delle proprietà algebriche si conserva. Si consideri per esempio un fascio di anelli $\mathcal{A}$ su X e un A-modulo $\mathcal{M}$. Un sottomodulo $\mathcal{N}$ di $\mathcal{M}$ è un sottofascio di $\mathcal{M}$ tale che per ogni $x \in X$ la fibra $\mathcal{N}_x$ è un sotto-$\mathcal{A}_x$-modulo di $\mathcal{M}_x$. Si definisce allora il fascio quoziente $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ di fibra $(\mathcal{M}/\mathcal{N})_x = \mathcal{M}_x/\mathcal{N}_x$. È il fascio associato al prefascio P le cui sezioni su U sono il quoziente $\mathcal{M}(U)/\mathcal{N}(U)$. Questo prefascio soddisfa (F_1). Ma non soddisfa (F_2) in generale. Sia infatti $(U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di U e si considerino, per ogni $i \in I$, delle sezioni $\bar{f}_i \in P(U_i)$ rappresentate da sezioni f_i di $\mathcal{M}(U_i)$. Dire che le $\bar{f}_i$ sono compatibili significa che, su $U_i \cap U_j$, $\bar{f}_i = \bar{f}_j$, cioè che f_i e f_j differiscono per un elemento g_{ij} di $\mathcal{N}(U_i \cap U_j)$. Ora, ciò non è sufficiente per implicare che esistano dei rappresentanti delle $\bar{f}_i$ che possano incollarsi. Si mostra tuttavia che la sequenza di fasci $0 \to \mathfrak{N} \xrightarrow{j} \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}/\mathfrak{N} \to 0$, dove 0 è il fascio nullo su X, $\mathfrak{N} \xrightarrow{j} \mathfrak{M}$ l'iniezione canonica, e $\pi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ la proiezione canonica, è esatto. Si mostra allo stesso modo che se $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ è un morfismo di $\mathcal{A}$-moduli (cioè per ogni $x, \varphi : \mathfrak{M}_x \to \mathfrak{N}_x$ è un morfismo di $\mathcal{A}_x$-moduli) si possono costruire fibra a fibra il suo nucleo e il suo conucleo. In breve la categoria degli $\mathcal{A}$-moduli è abeliana.

PROPOSIZIONE. Perché una sequenza $0 \to \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'' \to 0$ di $\mathcal{A}$-moduli sia esatta, è necessario e sufficiente che per ogni $x \in X$ la sequenza $0 \to \mathfrak{M}'_x \to \mathfrak{M}_x \to \mathfrak{M}''_x \to 0$ di $\mathcal{A}_x$-moduli sia esatta.

Dati due $\mathcal{A}$-moduli $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$, si può allo stesso modo definire il loro prodotto e il loro prodotto tensoriale. È il fascio associato al prefascio Γ tale che $\Gamma(U) = \mathfrak{M}(U) \underset{\mathcal{A}(U)}{\otimes} \mathfrak{N}(U)$. Le sue fibre sono i prodotti tensoriali $\mathfrak{M}_x \underset{\mathcal{A}_x}{\otimes} \mathfrak{N}_x$. Queste costruzioni permettono di generalizzare ai fasci la coomologia introdotta inizialmente a proposito delle fibrazioni localmente triviali. La coomologia è il mezzo fondamentale per passare dal locale al globale.

Esistono essenzialmente due modi di pensare la coomologia a valori in un fascio. Da una parte la coomologia di Čech associata ai ricoprimenti aperti $U = (U_i)_{i \in I}$ di X che è per definizione adattata ai problemi d'incollamento e di prolungamento. Dall'altra la coomologia pensata nella prospettiva dell'algebra omologica.

Sia $\mathcal{A}$ un fascio di gruppi su X e $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Sia K il nervo del ricoprimento U. Una 0-cocatena σ a valori in $\mathcal{A}$ consiste nell'associare ad ogni 0-simplesso U_i una sezione $\sigma_i \in \mathcal{A}(U_i)$. Una 1-cocatena associa ad ogni 1-simplesso $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ una sezione $\sigma_{ij} \in \mathcal{A}(U_i \cap U_j)$, ecc.

Sia $C^p = C^p(U, \mathcal{A})$ il gruppo delle p-cocatene. Si definisce allora in modo naturale l'operatore cobordo $\delta : C^p \to C^{p+1}$. Se $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$ è una 0-cocatena, $\delta\sigma$ è la 1-cocatena che ad $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ associa $\delta\sigma_{ij} = (\sigma_j - \sigma_i)|_{U_i \cap U_j}$. Se $\sigma = (\sigma_{ij})_{ij \in I^2}$ è una 1-cocatena, $\delta\sigma$ è la 2-cocatena che a ogni 2-simplesso $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ associa $\delta\sigma_{ijk} = \sigma_{jk} - \sigma_{ik} + \sigma_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$, ecc. È banale verificare che $\delta^2 = 0$, il che permette di definire i gruppi di coomologia $H^p(U, \mathcal{A})$ come quozienti dei cocicli rispetto ai cobordi. Passando al limite induttivo sui ricoprimenti (cioè considerando ricoprimenti sempre piú fini), si definiscono i gruppi di coomologia di Čech $H^p(X, \mathcal{A})$ di X a valori in $\mathcal{A}$.

È possibile accostarsi alla coomologia in un altro modo, ritornando alle sequenze esatte di fasci. Si è visto sopra che una sequenza $0 \to \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'' \to 0$ di fasci di gruppi abeliani è esatta se e solo se lo è al livello delle fibre, cioè localmente. *Ma ciò non implica che essa sia globalmente esatta.* Piú precisamente, si consideri il funtore Γ della categoria $\mathcal{F}_{ab}$ dei fasci di gruppi abeliani su X nella categoria dei gruppi, che associa a un elemento $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{ab}$ il gruppo $\Gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(X)$ delle sue sezioni globali.

TEOREMA. *Il funtore «sezioni globali» Γ è esatto a sinistra.*

Ciò significa che se la sequenza $0 \to \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'' \to 0$ è esatta, anche la sequenza $0 \to \Gamma(\mathfrak{M}') \to \Gamma(\mathfrak{M}) \to \Gamma(\mathfrak{M}'')$ è esatta.

Tuttavia il funtore Γ non è esatto a destra. Infatti se $\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'' \to 0$ è una suriezione di fasci, stando all'osservazione precedente sui quozienti, ciò non implica che una sezione globale di $\mathfrak{M}''$ possa essere allo stesso «livello» di una sezione globale di $\mathfrak{M}$ di cui essa sarebbe l'immagine.

S'introduce allora la seguente coomologia da X a valori in $\mathcal{A}$ (teoria dei funtori «derivati» dai funtori che non sono esatti a destra). Sia data una classe particolare $\mathfrak{D}$ di fasci di gruppi che abbiano la proprietà per cui ogni fascio di gruppi su X possa immergersi in un elemento di $\mathfrak{D}$. Sia allora $\mathcal{A}$ un fascio di gruppi su X. Sia $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{j} D_0$ una immersione di $\mathcal{A}$ in $D_0 \in \mathfrak{D}$. Si consideri il fascio quoziente $D_0/\mathcal{A}$. Sia $0 \to D_0/\mathcal{A} \xrightarrow{j_1} D_1$ un'immersione di $D_0/\mathcal{A}$ in un elemento D_1 di $\mathfrak{D}$. Sia $d_0 : D_0 \to D_1$ la composizione $D_0 \xrightarrow{p_0} D_0/\mathcal{A} \xrightarrow{j_1} D_1$ in cui p_0 è la proiezione canonica di D_0 su $D_0/\mathcal{A}$. È chiaro che la sequenza $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{j} D_0 \xrightarrow{d_0} D_1$ è esatta. Ripetendo questa operazione, si definiscono cosí delle sequenze esatte infinite $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{j} D_0 \xrightarrow{d_0} D_1 \xrightarrow{d_1} D_2 \xrightarrow{d_2} \dots$ chiamate risoluzioni coomologiche di $\mathcal{A}$. Applicando allora il funtore Γ a una tale risoluzione si ottiene una sequenza $0 \to \Gamma(\mathcal{A}) \xrightarrow{\Gamma(j)} \Gamma(D_0) \xrightarrow{\delta_0} \Gamma(D_1) \xrightarrow{\delta_1} \Gamma(D_2) \xrightarrow{\delta_2} \dots$ Questa sequenza non è esatta in generale poiché Γ non è esatto a destra. Ma $\delta^2 = 0$ poiché Γ è un funtore e $d^2 = 0$ per costruzione. Si può dunque definire come al solito il gruppo di coomologia $H^p(X, \mathcal{A})$ quoziente del nucleo di δ_p rispetto all'immagine di δ_{p-1}. Questi gruppi misurano in qualche modo il difetto di esattezza di Γ.

Osservazione: Questa definizione della coomologia evidentemente è interessante solo se la classe $\mathfrak{D}$ è tale che i gruppi $H^p(X, \mathcal{A})$ sono indipendenti dalla risoluzione scelta per $\mathcal{A}$. Si mostra che ciò è possibile.

Osservazione: Il fatto che Γ sia esatto a sinistra implica che $H^0(X, \mathcal{A}) = \mathcal{A}(X) = \Gamma(\mathcal{A})$.

Osservazione: Disponendo di due approcci alla coomologia è naturale cercare di confrontarli e cercare le condizioni necessarie e sufficienti, riguardanti sia lo spazio di base sia il fascio considerato, che assicurino che essi coincidono. Si tratta di un argomento alquanto tecnico fondato sulla nozione di sequenza spettrale che si troverà esposta dettagliatamente nella classica opera di Godement [1964].

2.5. Teoria di Morse, cobordismo e pseudoisotopie.

Nell'articolo «Locale/globale», pp. 454-71, sono contenuti alcuni accenni sul modo in cui la dialettica ◆locale/globale◆ può diventare operativa per le ◆applicazioni◆ differenziabili. Ciò non è evidente perché a livello differenziabile, contrariamente che a livello analitico, non esiste piú nessuna solidarietà tra il locale e il globale. Il criterio informatore è di far intervenire la nozione cruciale di stabilità strutturale e di mostrare che essa restaura una solidarietà (di un tipo radicalmente nuovo) tra il locale e il globale. Questa è l'origine del pa-

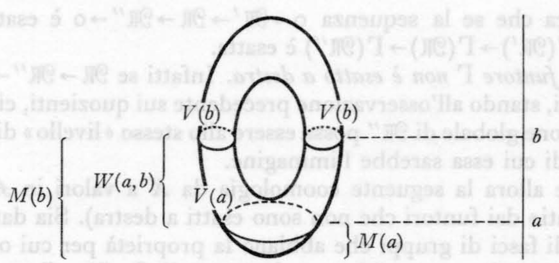


Figura 1.
Scomposizione di M in livelli per mezzo di f (qui f è la funzione altezza).

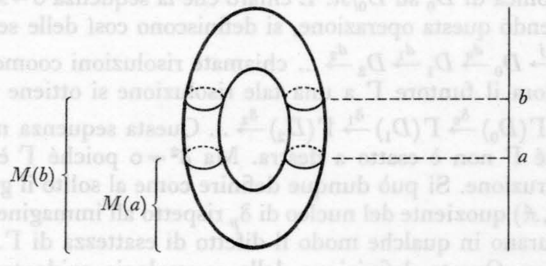


Figura 2.

Scomposizione di M in livelli: f non possiede punti critici fra a e b.

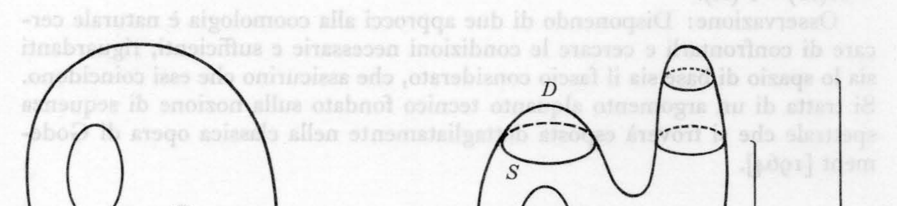


Figura 3.

Scomposizione di M in livelli: in 1) f possiede un minimo fra a e b; in 2) f possiede un massimo fra a e b.

radigma catastrofista trattato nel § 4, nel quale sono esposti gli stretti rapporti fra stabilità e trasversalità (§ 4.2), le proprietà di genericità della stabilità (§ 4.3), la geometria dei discriminanti e le ♦catastrofi♦ elementari (§ 4.4), la nozione cruciale di dispiegamento universale (§ 4.5) e la dialettica del locale e del globale nei dispiegamenti (§ 4.6). In conclusione è stato allora notato che il paradigma catastrofista applicato alle funzioni di Morse (cioè alle funzioni a valori reali strutturalmente stabili su una varietà compatta) conduceva ad alcuni fra i piú fondamentali teoremi della topologia differenziale moderna e in particolare ai teoremi dell'h-cobordismo e della pseudoisotopia. Si vorrebbe qui precisare questa osservazione.

Si ricorderà anzitutto che, seguendo il teorema di Morse (cfr. «Locale/globale», p. 472), esistono dei modelli locali canonici per i punti critici (necessariamente non degeneri) di una funzione di Morse su una varietà M di dimensione n: si tratta sia di massimi (indice n), sia di minimi (indice 0), sia di colli generalizzati (indice $\neq n, 0$). La varietà M è dunque un incollamento di tali modelli locali ed esiste di conseguenza un legame fondamentale tra la struttura globale di M e la distribuzione dei punti critici di f. Questo legame si esprime tra l'altro con il teorema dell'indice, il quale dice che se $n(k)$ è il numero di punti critici di f di indice k, la somma alternata $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k n(k)$ è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(M)$ di M (cfr. l'articolo «Locale/globale», p. 472). Ma tale legame va molto piú lontano e pone il problema di sapere in quale misura l'informazione critica di f permette di ricostruire M.

Nel caso delle superfici (cfr. l'articolo ♦Curve e superfici♦) ciò è possibile a livello topologico: la teoria di Morse permette di classificare i tipi topologici delle superfici. In altre parole in questo caso, e si tratta di un risultato fondamentale di notevole valore filosofico, il «contorno apparente» di un oggetto permette di ricostruire qualitativamente quest'ultimo.

TEOREMA. *Sia M una superficie compatta. M è topologicamente determinata da una qualunque delle sue funzioni di Morse.*

Si indicheranno qui le tappe della dimostrazione [per la quale cfr. Gramain 1971].

1) Siano M una superficie compatta, $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di Morse, e a un valore regolare (cioè non critico) di f. Si chiama $V(a)$ la curva di livello $f^{-1}(a)$: è una curva regolare di M, compatta perché chiusa nel compatto M, e dunque diffeomorfa ad un numero finito di cerchi disgiunti. Si chiama $M(a)=f^{-1}(]-\infty, a])$ l'insieme dei punti x di M di livello $f(x) \leq a$. $M(a)$ è una sottovarietà di M di bordo $V(a)$. Se $b>a$ è un altro valore regolare di f, si chiama $W(a, b)$ la «fetta» di M compresa tra i livelli a e b: $W(a, b)=f^{-1}([a, b])$ (cfr. fig. 1). L'idea è quella di partire dal minimo assoluto di f (che esiste perché M è compatta, e che è un punto critico di indice 0) e di percorrere i suoi valori fino al suo massimo assoluto (che esiste perché M è compatta, e che è un punto critico di indice 2) attraversando successivamente i suoi valori cri-

tici (che sono distinti e in numero finito dal momento che f è di Morse e M è compatta).

PROPOSIZIONE. Se f non possiede nessun valore critico fra a e b, allora $V(a)$ è diffeomorfa a $V(b)$, $M(a)$ è diffeomorfa a $M(b)$ e $W(a,b)$ è diffeomorfa a $V(a) \times [a,b]$.

Il primo problema è dunque quello di sapere ciò che accade quando si attraversa un valore critico $c=f(x)$. Siano $a<c<b$ (a e b essendo tanto vicini quanto si vuole a c in base alla proposizione che precede).

PROPOSIZIONE. 1) Se x è di indice 0 (minimo), $M(b)$ è omeomorfa all'unione disgiunta di $M(a)$ e di un disco D. $V(b)$ è l'unione di $V(a)$ e del cerchio $S=\partial D$.

2) Se x è di indice 2 (massimo), $M(b)$ è omeomorfa allo spazio ottenuto incollando a $M(a)$ un disco D lungo una componente S di $V(a)$, e $V(b)$ è diffeomorfo a $V(a)-S$ (cfr. fig. 3).

Quando si attraversa un punto critico di indice 1 il problema è un po' piú complesso. Si consideri per esempio l'attraversamento del primo colle della funzione altezza del toro (fig. 4). Topologicamente, $M(b)$ si ottiene a partire da $M(a)$ incollando un'«ansa» lungo il suo bordo $V(a)$ (fig. 5).

Si consideri ora l'attraversamento del secondo colle (fig. 6). Topologicamente anche $M(b)$ si ottiene a partire da $M(a)$ per incollamento di un'ansa. Ma quest'ansa non unisce piú due segmenti di uno stesso cerchio di $V(a)$ bensí due segmenti di due cerchi differenti (fig. 7). Questi due casi corrispondono ai colli del tipo I. Ma esiste un terzo caso in cui s'incolla un'ansa al bordo di una componente di $V(a)$ torcendola di mezzo giro. Ciò si verifica nel caso delle superfici non orientabili (cioè contenenti dei cappi di disorientamento, vale a dire dei cappi in cui un intorno è un anello di Moebius). Il numero di componenti di $V(a)$ non varia (mentre prima aumentava o decresceva di 1). Questo caso corrisponde ai colli di tipo II. Si può mostrare che questi tre casi sono i soli possibili. Si ha dunque la

PROPOSIZIONE. Se x è di indice 1, $M(b)$ si ottiene a partire da $M(a)$ per incollamento di un'ansa lungo il suo bordo $V(a)$.

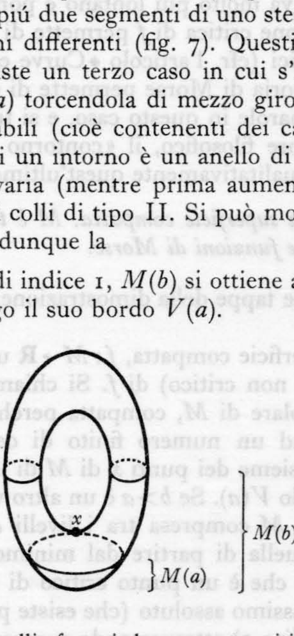


Figura 4.

Scomposizione di M in livelli: f possiede un punto critico di indice 1 (colle).

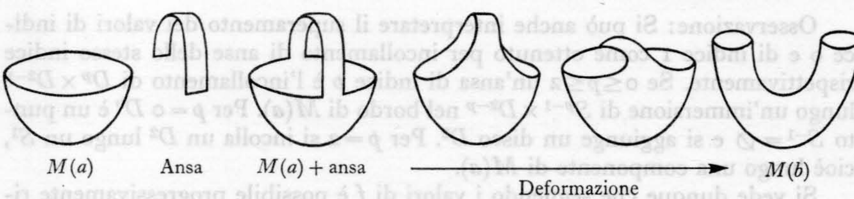


Figura 5.
$M(b)$ ottenuto a partire da $M(a)$ per incollamento di un'ansa.

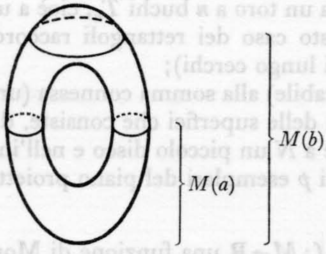


Figura 6.
Scomposizione di M in livelli: attraversamento di un altro punto critico di indice 1.

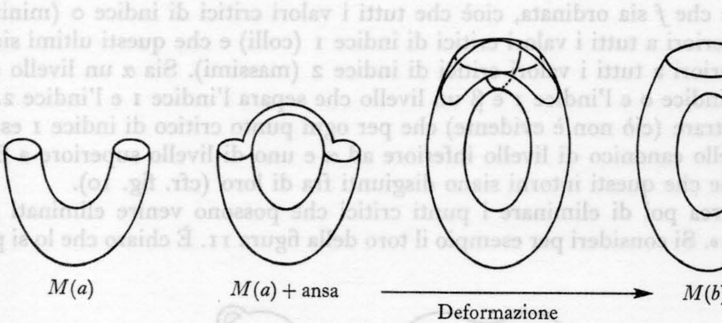


Figura 7.
$M(b)$ ottenuto a partire da $M(a)$ per incollamento di un'ansa.

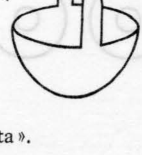


Figura 8.
Attaccamento di un'ansa «ritorta».

Osservazione: Si può anche interpretare il superamento dei valori di indice o e di indice 1 come ottenuto per incollamento di anse dello stesso indice rispettivamente. Se $0 \leq p \leq 2$ un'ansa di indice p è l'incollamento di $D^p \times D^{2-p}$ lungo un'immersione di $S^{p-1} \times D^{2-p}$ nel bordo di $M(a)$. Per $p = 0$ D^0 è un punto $S^{-1} = \emptyset$ e si aggiunge un disco D^2. Per $p = 2$ si incolla un D^2 lungo un S^1, cioè lungo una componente di $M(a)$.

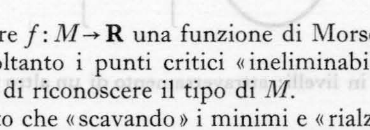
Si vede dunque che seguendo i valori di f è possibile progressivamente ricostruire M. Ora resta da sapere se la conoscenza di f è sufficiente per riconoscere M (a meno di omeomorfismi). Si sa infatti che ogni superficie compatta e connessa è omeomorfa

1) (se è orientabile) a un toro a n buchi T_n, cioè a una sfera a n anse (le anse non sono in questo caso dei rettangoli raccordati lungo segmenti, ma cilindri raccordati lungo cerchi);
2) o (se non è orientabile) alla somma connessa (un'operazione di addizione sui tipi topologici delle superfici che consiste, date due superfici M e N, nel togliere a M e a N un piccolo disco e nell'incollare un cilindro lungo i due bordi) U_p di p esemplari del piano proiettivo. Si veda al proposito la figura 9.

Sia dunque sempre $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di Morse. Si ridurrà f in modo tale da conservare soltanto i punti critici «ineliminabili» e si mostrerà che f cosí ridotta permette di riconoscere il tipo di M.

Si mostra anzitutto che «scavando» i minimi e «rialzando» i massimi si può supporre che f sia ordinata, cioè che tutti i valori critici di indice o (minimi) siano inferiori a tutti i valori critici di indice 1 (colli) e che questi ultimi siano tutti inferiori a tutti i valori critici di indice 2 (massimi). Sia α un livello che separa l'indice o e l'indice 1 e β un livello che separa l'indice 1 e l'indice 2. Si può mostrare (ciò non è evidente) che per ogni punto critico di indice 1 esiste un modello canonico di livello inferiore ad α e uno di livello superiore a β in modo tale che questi intorni siano disgiunti fra di loro (cfr. fig. 10).

Si cerca poi di eliminare i punti critici che possono venire eliminati per «collasso». Si consideri per esempio il toro della figura 11. È chiaro che lo si può



Toro a due buchi T_n equivalente a una sfera a due anse

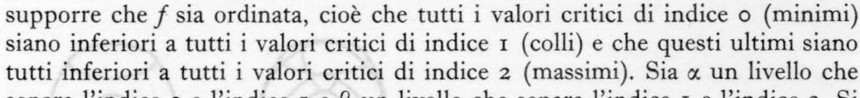


Figura 9.
Somma connessa.

deformare in un toro usuale collassando il minimo x_0 e il colle x_1. Quando un collasso di questo tipo è possibile, si dice che x_0 e x_1 sono in buona posizione. $M(b)$ è allora omeomorfa a $M(a)$ come se non vi fossero punti critici fra i livelli a e b. Si mostra che è possibile in tal modo arrivare al caso in cui f possiede un solo punto di indice 0 (minimo assoluto) e un solo punto di indice 2 (massimo assoluto) e p colli, e si mostra il risultato seguente:

TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE. *Se p è dispari, M è omeomorfa a U_p. Se p è pari, $p=2n$, M è omeomorfa a T_n oppure a U_p.*

Nel caso $p=2n$, per decidere se M è omeomorfa a T_n o a U_p, occorre analizzare il modo in cui sono accoppiati fra di loro i colli di tipo I (infatti se f possiede un colle di tipo II, è non-orientabile ed è dunque omeomorfa a U_p).

Osservazione: Per $n \geq 2$ non esiste un teorema di classificazione. Si può anche mostrare che il problema è irresolubile.

Si vede dunque che le funzioni di Morse permettono di ricostruire topologicamente M nel caso delle superfici, cosa che costituisce evidentemente una notevolissima proprietà globale. Questa ricostruzione può estendersi in dimensione superiore, dato che i colli generalizzati di indice differente (da 1 a $n-1$) corrispondono a tipi di anse di dimensione differente. Cosí le funzioni di Morse su una varietà compatta definiscono quelle che si chiamano le presentazioni per anse. L'esistenza di presentazioni per anse è stata il mezzo fondamentale per la dimostrazione di teoremi cruciali di topologia differenziale come quelli, prima citati, dell'h-cobordismo e di pseudoisotopia, teoremi che costituiscono i piú profondi risultati ottenuti nel quadro della dimostrazione della congettura di Poincaré: una varietà differenziabile M^n omotopicamente equivalente alla sfera S^n è omeomorfa a S^n.

La nozione di h-cobordismo è stata introdotta da René Thom. È una relazione di equivalenza tra varietà che è un indebolimento della relazione di diffeomorfismo.

DEFINIZIONE. *Siano V e V' due varietà connesse, compatte, di dimensione n, senza bordo e orientate. Si dice che esse sono h-cobordanti se esiste una varietà con bordo W, compatta ed orientata, tale che*

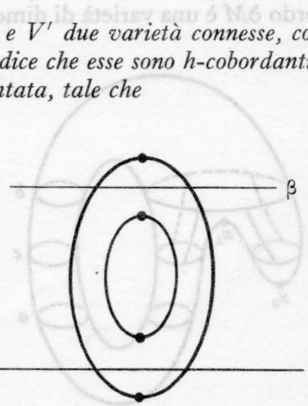


Figura 10.

Separazione dei valori critici di indice 0 e di indice 2 dai valori critici di indice 1.

1) *il bordo (orientato)* $\partial W = V - V'$;
2) *le inclusioni* $V \hookrightarrow W$ *e* $V' \hookrightarrow W$ *sono omotopicamente equivalenti.*

Il teorema dell'h-cobordismo dimostrato nel 1962 da Stephen Smale dimostra che, sotto certe condizioni, l'h-cobordismo è di fatto equivalente alla relazione di diffeomorfismo.

TEOREMA DELL'h-COBORDISMO (Smale). *Se* $n \geq 5$ *e se* V *e* V' *sono semplicemente connessi e h-cobordanti, allora sono diffeomorfi. Piú precisamente, se* W *realizza un h-cobordismo tra* V *e* V'*, allora* W *è diffeomorfo al prodotto diretto* $V \times I$ *(dove* I *è l'intervallo* $[0, 1]$*).*

Una conseguenza fondamentale di questo teorema è il seguente:

COROLLARIO. Congettura di Poincaré in dimensione $n \geq 6$.

Dimostrazione: Sia M una varietà di dimensione $n \geq 6$ avente il tipo di omotopia di S^n. Siano D e D' due bolle chiuse disgiunte di dimensione n di M. Siano V e $V' \simeq S^{n-1}$ i loro rispettivi bordi. Sia W la varietà ottenuta togliendo a M gli interni $\mathring{D}$ e $\mathring{D}'$ di D e D'. È facile vedere che W realizza un h-cobordismo tra V e V'. Dunque, per il teorema di Smale, W è diffeomorfo a $V' \times I$ e dunque $M - \mathring{D}$ è diffeomorfo a D, cioè M si ottiene per incollamento di due esemplari di D lungo i loro bordi (emisferi). M è dunque omeomorfa a S^n.

Osservazione: Ciò non implica che M sia diffeomorfa a S^n. Infatti possono esistere *altre* strutture differenziabili sulla sfera topologica di dimensione n oltre alla struttura standard (sfere esotiche di Kervaire-Milnor).

La dimostrazione del teorema di Smale utilizza una funzione di Morse su W che fornisca una presentazione per anse e mostra come le ipotesi permettano di sopprimere le anse a una a una senza cambiare W, a meno di un diffeomorfismo. Il punto cruciale è il cosiddetto *handlebody lemma*. Se M è una varietà di dimensione n il cui bordo ∂M è una varietà di dimensione $n-1$, e se $0 \leq p \leq n$,

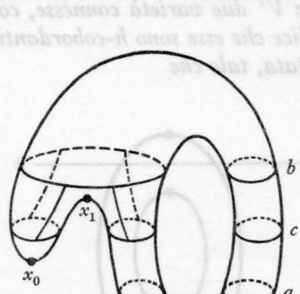


Figura 11.
I punti critici x_0 e x_1 sono eliminabili.

si chiama (generalizzando ciò che s'è visto nel caso delle superfici) ansa di indice p la varietà V ottenuta incollando $D^p \times D^{n-p}$ lungo un'immersione di $S^{p-1} \times D^{n-p}$ in ∂M. Lo *handlebody lemma* dice che se M è compatta, se $2 \leq p \leq \leq n-4$, se Q è una componente connessa e semplicemente connessa di ∂M, se V è la varietà ottenuta attaccando un'ansa di indice p a Q, se W è la varietà ottenuta attaccando r anse di indice $p+1$ a V, e se la composizione delle applicazioni canoniche $H_p(D^p, S^{p-1}) \rightarrow H_p(V, M) \rightarrow H_p(W, M)$ è nulla (qui $H_p(X, A)$ è l'n-esimo gruppo di omologia relativa di uno spazio X rispetto al sottospazio A), allora $r \geq 1$ e W può essere ottenuta attaccando $(r-1)$ anse di indice $p+1$ a M.

Questo lemma dice dunque sotto quali condizioni si è sicuri di poter far «collassare» un'ansa di indice p e un'ansa di indice $p+1$. Tecnicamente questo lemma generalizza il seguente caso semplice in cui non c'è restrizione di dimensione né condizione di semplice connessione. V si ottiene a partire da M attaccando un'ansa di indice p, $h_1 = D^p \times D^{n-p}$ lungo un $S^{p-1} \times D^{n-p}$ di ∂M; e W si ottiene a partire da V attaccando un'ansa di indice $p+1$, $h_2 = D^{p+1} \times \times D^{n-p-1}$ lungo un $S^p \times D^{n-p-1}$ di ∂V. Sia $S_2^p = S^p \times (0)$ la sfera di attacco di h_2 e $S_1^{n-p-1} = \partial((0) \times D^{n-p})$ la sfera trasversa di h_1. S_1 e S_2 sono sfere di dimensioni complementari p e $n-p-1$ in una varietà di dimensione $n-1$.

LEMMA. *Se S_1 e S_2 si tagliano trasversalmente e in un solo punto, allora W è diffeomorfa a M.*

Si mostra allora, data una presentazione per anse di W che realizza un h-cobordismo tra V e V', che:

1) si possono eliminare le anse di indice 0;
2) si possono eliminare le anse di indice 1 aggiungendo anse di indice 3;
3) si possono eliminare le anse di indice p, $2 \leq p \leq n-4$, senza far comparire nuove anse (sopprimendo quelle di indice $p+1$).
4) Per sopprimere le anse di indice $n-3$, $n-2$, $n-1$, n si passa alla presentazione duale che possiede solo anse di indice 0, 1, 2, 3. Si sopprimono le anse di indice 0, poi quelle di indice 1 facendo comparire nuove anse di indice 3. E le anse di indice 3 si eliminano con quelle di indice 2.

Il teorema dell'h-cobordismo di Smale può anche essere interpretato sotto una forma funzionale. Sia $\mathfrak{F}$ l'insieme delle applicazioni $\mathcal{C}^\infty$, $f: W \rightarrow I$ senza punti critici sul bordo, e sia $\mathfrak{S}$ il sottoinsieme delle f senza punti critici. Si può dire che W è diffeomorfa al cilindro $V \times I$ dicendo che $\mathfrak{S} \neq \varnothing$. Partendo da una funzione di Morse $f \in \mathfrak{F}$, l'eliminazione delle anse esprime con grande precisione come la si possa deformare fino a farla «entrare» in $\mathfrak{S}$.

Si può allora tentare di generalizzare questo risultato domandandosi se $\mathfrak{S}$ è connesso. In altre parole, domandandosi in quale misura la trivializzazione di un h-cobordismo in prodotto è essenzialmente unica o no. A tal fine si parte da un cammino in $\mathfrak{F}$ che abbia gli estremi in $\mathfrak{S}$ e ci si chiede se si possa deformare questo cammino in $\mathfrak{F}$, mantenendo i suoi estremi costanti, fino a che esso sia *interamente* contenuto in $\mathcal{E}$. Cioè si cerca di dimostrare che $\pi_1(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = 0$. Piú precisamente, sia $\mathcal{F}$ lo spazio delle applicazioni $\mathcal{C}^\infty$ di $V \times I \to I$ che portano $V \times (0)$ su 0 e $V \times (1)$ su 1. Si chiama isotopia di V un cammino differenziabile avente per origine l'identità nel gruppo Diff V dei diffeomorfismi di V. Una isotopia è dunque un diffeomorfismo g di $V \times I$ tale che 1) $g|_{V\times(0)} = \mathrm{Id}$; 2) $p \circ g = p$, in cui p è la proiezione canonica $V \times I \to I$. Le isotopie formano un gruppo H. H opera nel gruppo Diff V per mezzo di $g \circ f(x) = g(f(x), 1)$. Due diffeomorfismi di V che appartengono alla stessa orbita di H si dicono isotopi. Le orbite sono le componenti connesse di Diff V. Una pseudoisotopia è un diffeomorfismo di $V \times I$ che soddisfa 1), ma non necessariamente 2). Esse formano un gruppo G che è un'estensione di H.

L'orbita della proiezione p per mezzo di G è uguale a $\mathcal{E}$. E si mostra facilmente che G è omeomorfo a $H \times \mathcal{E}$. Si hanno allora, dato che H è contrattile e $\mathcal{F}$ è un sottospazio convesso dello spazio vettoriale di tutte le funzioni $f: V \times I \to \mathbf{R}$, le equivalenze: $\pi_1(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}$ connesso $\Leftrightarrow G$ connesso. Tuttavia il fatto che G sia connesso implica il

TEOREMA DI PSEUDOISOTOPIA. *Due diffeomorfismi di V pseudoisotopi sono isotopi.*

Infatti le orbite di Diff V sotto H sono le sue componenti connesse. Se G è connesso, le sue orbite non possono di conseguenza essere piú grandi. Questo teorema è stato dimostrato da Cerf [1970] sotto le condizioni del teorema di Smale.

TEOREMA (Cerf). *Se $n \geq 5$ e se V è semplicemente connesso, allora $\mathcal{E}$ è connesso.*

La dimostrazione si effettua stratificando $\mathcal{F}$ rispetto alla codimensione, cioè analizzando il modo in cui i cammini di $\pi_1(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ e le loro deformazioni si comportano relativamente all'insieme catastrofico globale K di $\mathcal{F}$. Si ha lo strato $\mathcal{F}^0$ (che contiene $\mathcal{E}$) delle funzioni di Morse. È un aperto denso di $\mathcal{F}$. Si considera poi lo strato $\mathcal{F}^1$ delle funzioni instabili di codimensione 1. Dato che il complementare di $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$ in $\mathcal{F}$ è di codimensione 2, sarà generalmente evitato dai cammini (che sono di dimensione 1) in $\mathcal{F}$. Siano f e g due funzioni di $\mathcal{E}$, e γ un cammino di $\mathcal{F}$ da f a g. In generale γ evita gli strati di codimensione ≥ 1 e taglia trasversalmente $\mathcal{F}^1$ in un numero finito di punti. Partendo da un cammino di questo tipo, Cerf mostra come lo si possa «spingere» progressivamente fino ad $\mathcal{E}$. In generale si attraverseranno al massimo strati di codimensione 2. Uno dei principali aspetti interessanti della dimostrazione è il fatto che essa a un certo momento mette in gioco, per lo meno in parte, la struttura globale della stratificazione di $\mathcal{F}$ [per maggiori particolari, cfr. Cerf 1970].

Osservazione: Si possono generalizzare i teoremi di Smale e di Cerf al caso non semplicemente connesso. Si tratta allora di «misurare» l'ostruzione che esiste alla trivializzazione di un h-cobordismo. Questa ostruzione può essere descritta algebricamente per mezzo della K-teoria [per un'introduzione a questi difficili problemi, si potrà consultare Hatcher e Wagoner 1973].

Il teorema di pseudoisotopia che generalizza il teorema dell'h-cobordismo si fonda su un lemma tecnico che fornisce un buon esempio della potenza della nozione di fibrazione localmente triviale esposta al § 6.2 dell'articolo «Locale/globale».

Si è appena visto che la sua forma funzionale consiste nel mostrare – dati una varietà V, $\mathcal{F}$, lo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ $f: V \times I \to I$ che portano $V \times (0)$ su 0 e $V \times (1)$ su 1 e senza punti critici sul bordo, ed $\mathcal{E}$ il sottospazio di $\mathcal{F}$ formato dalle funzioni senza punti critici – che ogni cammino in $\mathcal{F}$ avente gli estremi in $\mathcal{E}$ può essere deformato in un cammino in $\mathcal{E}$. Considerando la stratificazione di $\mathcal{F}$ indotta dalla codimensione delle funzioni, il cui strato $\mathcal{F}^0$ è quello (aperto e denso) delle funzioni di Morse, un tale cammino γ taglia in generale, in modo trasverso, per lo piú lo strato $\mathcal{F}^1$ di codimensione 1 in un numero finito di punti, e nel corso di una deformazione γ_t, per lo piú lo strato $\mathcal{F}^2$ di codimensione 2 in un numero finito di cammini eccezionali $\gamma_{t_1} \dots \gamma_{t_n}$. Ora, come fa rilevare Cerf, «le "cocellule" di codimensione 0 e 1 di $\mathcal{F}$ (vale a dire le componenti connesse di $\mathcal{F}^0$ e di $\mathcal{F}^1$) non sono acicliche in generale. Nel corso della deformazione di un cappio di $\mathcal{F}$ si incontra dunque un certo numero di ostruzioni a valori nel π_1 delle 0-cocellule modulo il loro bordo; di qui la necessità di dimostrare un certo numero di lemmi che esplicitino queste ostruzioni e forniscano il caso che siano nulle... La dimostrazione di questi lemmi utilizza il metodo dei "cammini elementari"... Il "lemma dei cammini elementari" afferma che... ci si può limitare, nel calcolo dei gruppi di omotopia degli spazi dei cammini di attraversamento, a considerare "famiglie elementari di cammini", vale a dire essenzialmente famiglie invarianti rispetto alle operazioni di $G = \mathrm{Diff}(V \times I) \times \mathrm{Diff}\, I$» [1970, pp. 11-13].

Questo gruppo G è quello che determina il tipo differenziabile degli elementi di $\mathcal{F}$. La stratificazione Σ di $\mathcal{F}$ rispetto alla codimensione è evidentemente G-invariante. Ma per gli strati di codimensione piccola (in particolare 0 e 1) essa gode della proprietà (*) secondo cui *localmente* gli strati s'identificano con la G-orbita di uno qualunque dei loro punti e l'applicazione $g \to g(x)$ di G sull'orbita di x è una fibrazione localmente triviale (ciò significa che il sottogruppo G_x di G che lascia x fisso si sposta «bene» in G quando x varia nella sua or-

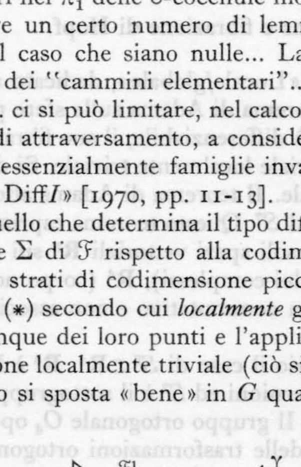


Figura 12.
Rappresentazione del lemma dei cammini elementari.

bita). Si consideri allora lo spazio C dei cammini di attraversamento $\mathcal{F}^1$, vale a dire i cammini di $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$ che attraversano $\mathcal{F}^1$ una sola volta (in generale in modo trasverso). G opera su C in modo evidente. Sia C_e un sottoinsieme di C stabile rispetto a G. Gli elementi di C_e si chiamano cammini elementari. Il lemma dei cammini elementari dice che se per ogni $\gamma \in C$ esiste un cammino elementare γ' avente lo stesso punto e lo stesso senso di attraversamento di γ, allora ogni $\gamma \in C$ è omotopo in C a un cammino elementare γ'' con la *stessa origine* (dato che nell'omotopia l'origine resta fissa) (fig. 12).

La dimostrazione di questo lemma fondamentale poggia in modo decisivo sul fatto che, data la proprietà (*) della stratificazione $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$,

1) l'applicazione $\varphi : C \rightarrow \mathcal{F}^1$ che associa a un cammino il suo punto di attraversamento, come pure la sua restrizione a C_e, sono fibrazioni localmente triviali;
2) l'applicazione $\psi : C \rightarrow \mathcal{F}^0$ che associa a un cammino la sua origine, come pure la sua restrizione C_e, sono fibrazioni localmente triviali.

2.6. Teorema di Adams e fibrazione di Hopf.

Nel § 6.2 dell'articolo «Locale/globale», dedicato alle fibrazioni localmente triviali, è stato citato il teorema di Adams sulle sfere parallelizzabili. Si ricorda qui che se M è una varietà differenziabile, il suo fibrato tangente TM è per costruzione un fibrato vettoriale localmente triviale. Si dice che M è parallelizzabile se è *globalmente* triviale. Il teorema di Adams afferma che le sole sfere parallelizzabili sono S^1, S^3 ed S^7. Questo teorema esprime in termini di topologia differenziale il fatto che i soli spazi vettoriali $\mathbf{R}^n$ sui quali esiste una struttura di corpo sono $\mathbf{R}^2$ (corpo dei complessi), $\mathbf{R}^4$ (corpo non commutativo dei quaternioni) ed $\mathbf{R}^8$ (corpo non commutativo e non associativo dei numeri di Cayley).

Si consideri per esempio il caso di $S^3 \subset \mathbf{R}^4$. $\mathbf{R}^4$ è lo spazio vettoriale sottostante il corpo H dei quaternioni ed S^3 è il sottogruppo moltiplicativo dei quaternioni $q \in H$ di norma 1. Il gruppo ortogonale O_4 opera transitivamente su S^3 e se $q \in S^3$ il sottogruppo delle trasformazioni ortogonali che lasciano fisso q è isomorfo a O_3. Se a $\sigma \in O_4$ si associa il quaternione $\sigma(1) \in S^3$, si definisce una fibrazione localmente triviale $\pi : O_4 \rightarrow S^3$ di fibra tipo O_3, che è un fibrato principale di gruppo O_3. Si utilizzi allora la moltiplicazione di H (cioè la struttura di corpo). Se $q \in S^3$, la moltiplicazione (a destra) per q è una trasformazione ortogonale $\sigma_q \in O_4$. Poiché è chiaro che $\sigma_q(1) = q \cdot 1 = q$, l'applicazione $q \rightarrow \sigma_q$ è una sezione di π.

Ora è noto (cfr. l'articolo «Locale/globale», p. 477) che un fibrato principale è triviale se e solo se ammette una sezione. π è dunque globalmente triviale e O_4 è isomorfo a $S^3 \times O_3$. Infatti è facile vedere che ci si può restringere, nel caso precedente, ai gruppi di rotazioni R_4 ed R_3. Si ottiene cosí il risultato che $R_4 \simeq S^3 \times R_3$. Questo risultato permette facilmente di mostrare che S^3 è parallelizzabile. Infatti il fibrato tangente di S^n può essere descritto nel seguente modo. Il gruppo ortogonale O_{n+1} di $\mathbf{R}^{n+1}$ opera sull'insieme $V_{n+1,k}$ dei k-riferimenti ortogonali (cioè dei sistemi di k vettori ortogonali e unitari di $\mathbf{R}^{n+1}$). Il sottogruppo di O_{n+1} che lascia fisso un tale k-riferimento $\mathcal{R}$ è il gruppo ortogonale O_{n+1-k} considerato come operante sull'ortogonale dello spazio vettoriale generato da $\mathcal{R}$. Se si trasporta $\mathcal{R}$ lungo il suo primo vettore fino alla sua estremità, che è un punto di S^n, si ottiene un $(k-1)$-riferimento tangente a S^n. Si può dunque interpretare $V_{n+1,k}$ come la varietà dei $(k-1)$-riferimenti ortogonali tangenti a S^n. In particolare se $k=2$, $V_{n+1,2}$ è la varietà dei vettori unitari su S^n. Ora si può mostrare che il fibrato principale associato è precisamente il fibrato $\pi: R_{n+1} \to S^n$ definito prima. Se π è triviale, S^n è dunque parallelizzabile.

Le varietà $V_{n,k}$ si chiamano varietà di Stiefel. Esiste tutta una rete di fibrazioni fra i gruppi ortogonali, i gruppi di rotazioni, le varietà di Stiefel e le sfere che permette, a partire dallo strumento fondamentale che è la sequenza di omotopia di una fibrazione localmente triviale, di introdurre delle relazioni tra l'omotopia di questi spazi e con ciò di calcolarla (per lo meno parzialmente) progressivamente, a partire dai casi semplici. La posta in gioco essenziale è il calcolo dell'omotopia superiore delle sfere, cioè dei gruppi $\pi_m(S^n)$ per $m \geq n$.

Il fatto che S^1, S^3 ed S^7 siano parallelizzabili, legato come si è visto all'esistenza di strutture di corpo su $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^4$ e $\mathbf{R}^8$, è legato anche e per la stessa ragione a un tipo molto particolare di fibrazioni che sono le fibrazioni dette di Hopf, di sfere in sfere. Sia K il corpo $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ o H, e G_n il gruppo (ortogonale, unitario o simplettico) delle isometrie di K^n. G_n opera transitivamente sulla sfera unità $S=S^{n-1}$, S^{2n-1} o S^{4n-1} di K^n. Sia G_{n-1} il sottogruppo delle isometrie che ammettono $1 \in S$ come punto fisso. G_n è un fibrato principale di base S e di gruppo G_{n-1}. Si consideri allora lo spazio proiettivo $\mathbf{P}_K^{n-1}$ associato a K^n, cioè lo spazio delle rette di K^n. A $x \in S$ si associ la retta Ox di $\mathbf{P}_K^{n-1}$. Si definisce cosí una proiezione $\pi: S \to \mathbf{P}_K^{n-1}$ che è una fibrazione localmente triviale. Per conoscere la fibra di π si osserva che G_n opera su $\mathbf{P}_K^{n-1}$ e che $\mathbf{P}_K^{n-1}$ è il quoziente di G_n rispetto al sottogruppo F che lascia fisso un punto di $\mathbf{P}^n$. È facile vedere che F è isomorfo al prodotto diretto di G_{n-1} per il gruppo moltiplicativo K' degli elementi di K di norma 1. Dalle fibrazioni principali $G_n \to S$ di gruppo G_{n-1} e $G_n \to \mathbf{P}_K^{n-1}$ di gruppo $G_{n-1} \times K'$ si deduce che la fibrazione $\pi: S \to \mathbf{P}_K^{n-1}$ ha fibra e gruppo K'. Se $K=\mathbf{R}$, se ne deduce, poiché $K'=\{-1, 1\}$, che S^{n-1} è il ricoprimento a due fogli di $\mathbf{P}_{\mathbf{R}}^{n-1}$ (di dimensione $n-1$). Se $K=\mathbf{C}$, se ne deduce, poiché $K'=S^1$, che S^{2n-1} è un fibrato in cerchi su $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^{n-1}$ (di dimensione $2n-2$). Se $K=H$ se ne deduce, poiché $K'=S^3$, che S^{4n-1} è un fibrato di fibra S^3 su $\mathbf{P}_H^{n-1}$ (di dimensione $4n-4$). Ora, nel caso in cui $n=2$, cioè nel caso in cui si considera lo spazio proiettivo $\mathbf{P}_K^1$, è facile vedere che $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$ s'identifica con S^2 e che $\mathbf{P}_H^1$ s'identifica con S^4. Si ottiene dunque una fibrazione $\pi: S^3 \to S^2$ di fibra S^1 (fibrazione definita e studiata da Hopf) cosí come una fibrazione $\pi: S^7 \to S^4$ di fibra S^3.

Osservazione: Considerando i numeri di Cayley che costituiscono una struttura di corpo né commutativa né associativa su $\mathbf{R}^8$, si può anche definire una fibrazione $\pi : S^{15} \to S^8$ di fibra S^7 ma occorre ricorrere ad argomenti piú complessi perché l'assenza di associatività fa sí che non si possa definire la nozione di spazio proiettivo.

2.7. La teoria delle equazioni differenziali.

In una certa misura tutta la teoria delle equazioni differenziali, e dunque un'immensa parte della fisica matematica, si inscrive nella dialettica ♦locale/globale♦ poiché, partendo da dati locali, si tratta (per integrazione) di ricostruire un'evoluzione globale.

L'insieme dei temi connessi a ciò è stato ampiamente sviluppato nell'*Enciclopedia*, in particolare negli articoli ♦Differenziale♦, ♦Stabilità/instabilità♦, ♦Funzioni♦, ♦Variazione♦ e ♦Infinitesimale♦. Ci si limiterà dunque semplicemente a ricordare alcune grandi linee di riflessione.

Un sistema di equazioni differenziali su una varietà differenziabile M è una sezione differenziabile σ del fibrato tangente $\pi : TM \to M$, cioè un campo di vettori su M. In altre parole, è l'assegnazione ad ogni punto $x \in M$ di un vettore $\sigma(x) \in T_x M$ tangente a M in x e variabile in modo differenziabile con x. Integrare questo campo σ significa trovare delle sottovarietà γ di dimensione 1 (curve) oppure 0 (punti) e delle leggi temporali su queste sottovarietà γ in modo tale che in ogni punto $x \in \gamma$ il vettore velocità di un mobile sottoposto alla legge temporale sia uguale a $\sigma(x)$. Munite delle loro leggi temporali, le sottovarietà sono le traiettorie del campo di vettori σ. Si può mostrare che se $x_0 \in M$ è una condizione iniziale, esiste una e una sola traiettoria che passa per x_0.

Per molto tempo si è cercato di calcolare esplicitamente le equazioni delle traiettorie. Ma questa procedura si scontra con difficoltà intrinseche ed è per questo che, con Poincaré, si è adottato un punto di vista qualitativo. Si supponga che le traiettorie siano complete, vale a dire che, se $x_0 \in M$ è un dato iniziale, si possa costruire la sua traiettoria da $t = -\infty$ a $t = +\infty$. Per ogni istante $t \in \mathbf{R}$ si può dunque considerare l'applicazione $\Gamma_t : M \to M$ che a $x_0 \in M$ associa la sua posizione x_t al termine di un tempo t sulla sua traiettoria. È facile vedere che, dato che il campo σ è differenziabile, Γ_t è un diffeomorfismo di M e che si ha (trivialmente) $\Gamma_s \circ \Gamma_t = \Gamma_{s+t}$. Ciò significa che l'applicazione $\Gamma : \mathbf{R} \to \mathrm{Diff}\, M$ che a $t \in \mathbf{R}$ associa il diffeomorfismo Γ_t di M è un morfismo (differenziabile) tra il gruppo additivo $\mathbf{R}$ e il gruppo $\mathrm{Diff}\, M$. Per questo si dice che σ definisce un gruppo a un parametro di diffeomorfismi di M o ancora un sistema dinamico su M. L'approccio qualitativo si propone di risolvere problemi dei tipi che seguono.

1) Una traiettoria sarà in generale un'immersione iniettiva di $\mathbf{R}$ in M. Se non lo è, è una traiettoria periodica o ridotta a un punto. Si dirà in questo caso che la traiettoria è critica. Il primo problema consiste dunque nel sapere come, data M, possono distribuirsi le traiettorie critiche, quali sono i tipi possibili di traiettorie critiche e quali sono le strutture possibili di un campo in prossimità delle sue traiettorie critiche.

2) Una traiettoria non critica si «svolge» in M ed è dunque necessario conoscere il suo «stato asintotico». Sono possibili essenzialmente due casi. O le traiettorie «errano» in M e manifestano proprietà di ergodicità, o tendono verso attrattori di Γ, vale a dire verso insiemi chiusi, Γ-invarianti, irriducibili (cioè che non comprendono nessun sottoinsieme chiuso, Γ-invariante, strettamente piú piccolo), che attirano, «catturano» asintoticamente tutte le traiettorie dei punti che sono loro sufficientemente vicini.

3) Se i sistemi dinamici sono per definizione matematicamente deterministici, ciò non significa per questo che lo siano «fisicamente». Infatti, dato che una condizione iniziale non può essere «fisicamente» deterministica se non in modo approssimato, il determinismo «fisico» corrisponde alla stabilità delle traiettorie. Ciò significa intuitivamente che due traiettorie generate da punti vicini restano indefinitamente vicine. Ora, esistono sistemi dinamici (matematicamente deterministici) le cui traiettorie sono tutte instabili e che sono dunque «fisicamente» non-deterministici. Questa possibilità è evidentemente fondamentale per la comprensione approfondita del determinismo fisico-matematico (teoria dell'ergodicità). Cfr. l'articolo «Differenziale».

4) Alle applicazioni differenziabili particolari che sono i campi di vettori si può applicare il paradigma catastrofista. In particolare si cercherà di caratterizzare i sistemi dinamici strutturalmente stabili e di studiare l'insieme di biforcazione (globale) dello spazio funzionale $\mathcal{X}(M)$ dei campi di vettori su M. Si tratta in questo caso di un programma immenso, che è ancora molto lungi dall'essere condotto a termine.

5) I sistemi della fisica classica sono sistemi hamiltoniani che possiedono proprietà di conservazione, in particolare dell'energia e del volume (teorema di Liouville). Ciò implica che non possono avere attrattori e che sono strutturalmente instabili. Introducendo delle dissipazioni possono stabilizzarsi. Si tratta dunque di comprendere la struttura dei campi vicini ai sistemi hamiltoniani (cfr. l'articolo ✦Stabilità/instabilità✦).

6) Tra i campi hamiltoniani, ve ne sono alcuni particolarmente semplici, detti integrabili, che possiedono un numero massimale di integrali primi (vale a dire di osservabili invarianti rispetto al campo) indipendenti. Si pone dunque il problema di studiare la struttura dei sistemi hamiltoniani vicini ai sistemi integrabili. È la teoria delle perturbazioni (cfr. ancora l'articolo «Stabilità/instabilità»).

Tutti questi punti sono terribilmente impegnativi e hanno dato luogo ad intere teorie molto ricche e molto complicate.

Un aspetto fondamentale della dialettica del locale e del globale è fornito in meccanica hamiltoniana dall'equivalenza fra un sistema dinamico e un principio variazionale. Il sistema dinamico corrisponde al punto di vista locale e il principio variazionale al punto di vista globale (cfr. gli articoli ✦Variazione✦, ✦Differenziale✦, ✦Stabilità/instabilità✦).

Un altro aspetto di questa dialettica s'incontra nella teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Infatti esiste un'opposizione fra i dati che sono condizioni iniziali e quelli che sono condizioni ai limiti nei problemi di Dirichlet e di Neumann. Contrariamente alle condizioni iniziali, le condizioni ai limiti esercitano un ◆vincolo◆ globale sulle soluzioni (cfr. in particolare l'articolo ◆Differenziale◆).

2.8. La teoria degli spazi funzionali.

La dialettica ◆locale/globale◆ interviene anche, e a doppio titolo, nella teoria degli spazi funzionali.

Prima di tutto si può dire con Lautman che, dato uno spazio funzionale $\mathfrak{F}$ munito di una struttura di spazio vettoriale topologico e avente delle proprietà globali, come quella di essere completo rispetto a una metrica o a una norma, è un aspetto di questa dialettica la possibilità di scomporre un elemento qualunque di $\mathfrak{F}$ secondo una base topologica. In questo quadro si collocano diversi risultati trattati in questa *Enciclopedia* (cfr. gli articoli ◆Differenziale◆, ◆Funzioni◆, ◆Applicazioni◆, ecc.). Per esempio teoremi come quello di Weierstrass, il quale afferma che i polinomi sono densi nello spazio delle funzioni continue. O ancora la teoria di Fourier e, in modo piú generale, la teoria di Sturm-Liouville esposta al § 1.4 dell'articolo «Differenziale».

Ma, dato uno spazio funzionale, non è sufficiente considerare la sua struttura algebrica (spazi di Frechet, di Banach, di Hilbert, ecc.). Occorre anche applicargli la metodologia del ◆paradigma◆ catastrofista. Sia infatti $\mathfrak{F}$ uno spazio di applicazioni tra due spazi M e N che corrispondono a un certo livello di struttura S (differenziabile, analitica, algebrica, ecc.). Gli elementi di $\mathfrak{F}$ sono dunque morfismi $f: M \rightarrow N$ della categoria C che corrisponde a questo livello di ◆struttura◆. Si pone allora il problema di sapere quale identità occorre attribuire a questi ◆elementi◆. Certo, idealmente, gli elementi f hanno una identità, ma ciò non significa, di per sé, che questa identità ideale sia maneggevole. Infatti M e N sono spazi che possiedono una certa omogeneità, ed è naturale applicare il principio di ◆relatività◆ (cfr. «Sistemi di riferimento»). L'omogeneità di M (rispettivamente di N) è misurata dal gruppo $\operatorname{Aut} M$ degli automorfismi di M (rispettivamente di N). È dunque naturale considerare equivalenti due applicazioni f e g di M in N che differiscono solo per un tale automorfismo. In altre parole, oltre la struttura eventuale di spazio vettoriale topologico di $\mathfrak{F}$ occorre anche considerare l'azione su $\mathfrak{F}$ del gruppo $G = \operatorname{Aut} M \times \operatorname{Aut} N$ definita, se $\varphi \in \operatorname{Aut} M$ e $\psi \in \operatorname{Aut} N$, da $(\varphi, \psi) f = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Due applicazioni che

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

appartengono alla stessa G-orbita sono equivalenti. Esse sono dello stesso tipo relativamente al livello di struttura considerato.

D'altra parte, cosí come si può in generale definire una (e spesso anche molte) topologia(e) naturale(i) su $\mathcal{F}$, si potranno anche definire le applicazioni strutturalmente stabili, e ritrovare in questo modo il paradigma catastrofista esposto nell'articolo «Locale/globale», a proposito del livello di struttura differenziabile. $\mathcal{F}$ sarà munito di un insieme catastrofico globale $K_{\mathcal{F}}$ che geometrizza la classificazione dei tipi dei suoi elementi e si tratterà, dato che $f \in K_{\mathcal{F}}$ è un'applicazione strutturalmente instabile, di studiare la struttura locale di $K_{\mathcal{F}}$ nell'intorno di f. In questo caso la dialettica del locale e del globale interferisce con la dialettica esterno/interno. L'idea direttrice è infatti quella secondo cui questa struttura locale di $K_{\mathcal{F}}$ nell'intorno di f esteriorizza sotto forma di geometria – e piú precisamente nei casi buoni, sotto forma di stratificazione (si veda l'articolo «Locale/globale», § 4.4) – le cause interne dell'instabilità strutturale di f.

2.9. Legge di reciprocità, corpo di classi, ideli e adeli.

Per concludere questo paragrafo dedicato ad alcuni complementi tecnici sulla funzione della dialettica ⬥locale/globale⬥ in matematica, si preciserà [seguendo Ellison e Ellison 1978; Serre 1970] la generalizzazione a un corpo numerico qualunque del teorema di Minkowski esposto al § 8.1 dell'articolo «Locale/globale» (cfr. anche ⬥Dualità⬥ e ⬥Divisibilità⬥).

Come si ricorderà, utilizzando i numeri p-adici si può considerare ogni numero intero $n \in \mathbf{Z}$ come una «funzione» sull'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri primi, funzione il cui valore in $p \in \mathcal{P}$ è l'immagine di n nel corpo finito $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ e il cui «sviluppo di Taylor» in p (cioè la struttura locale di n in p) è lo sviluppo p-adico di n.

In questo quadro il teorema di Minkowski è un tipico teorema di passaggio dal locale al globale. Se ne ricorda l'enunciato:

TEOREMA (Minkowski). *Sia f una forma quadratica su $\mathbf{Q}$. Se l'equazione $f = 0$ ammette una soluzione non triviale su $\mathbf{R}$, e se, per ogni $p \in \mathcal{P}$, essa ammette una soluzione non triviale sul corpo p-adico $\mathbf{Q}_p$, allora ammette una soluzione non triviale su $\mathbf{Q}$.*

Per estendere il teorema di Minkowski al caso di un corpo di numeri algebrici qualunque K, Hilbert ha ripreso un risultato fondamentale e classico dovuto a Legendre e a Gauss (legge della reciprocità quadratica), l'ha espresso in termini di passaggio dal locale al globale e, per dimostrarlo in questo nuovo contesto, ha ritrovato ed approfondito un altro problema posto da Weber (problema del corpo di classi). È questo un esempio particolarmente sorprendente di ciò che, seguendo Lautman, Dieudonné chiama l'⬥unità⬥ delle ⬥matematiche⬥ moderne.

Il teorema di Legendre-Gauss è legato al problema della rappresentazione dei numeri interi per mezzo di forme quadratiche. Anche in questo caso si pone il problema modulo p (localizzazione) e si tenta poi di «risalire» a $\mathbf{Z}$ (globalizzazione). Il caso piú semplice è evidentemente quello in cui si cerca di risolvere la congruenza $x^2 \equiv k \pmod{p}$ (con k non divisibile per p e $p \neq 2$). Si studiano dunque i quadrati nel corpo finito $\mathbf{F}_p$, cioè i residui quadrati modulo p. Ora Legendre dimostrò il seguente risultato che diede impulso a tutta la teoria successiva.

Legendre parte dal risultato, dovuto a Fermat, secondo cui $k^{p-1} - 1$ è sempre divisibile per p. Questo risultato, per cui $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, dice semplicemente che in $\mathbf{F}_p$ il sottogruppo moltiplicativo $\mathbf{F}_p^*$ degli elementi non nulli è ciclico di ordine $p-1$. Ora $k^{p-1} - 1 = (k^{(p-1)/2} - 1)(k^{(p-1)/2} + 1)$. Dato che 1 e -1 sono le sole unità di $\mathbf{F}_p$, si avrà dunque sempre $k^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Legendre mostra allora il risultato fondamentale.

TEOREMA. *$x^2 \equiv k \pmod{p}$ ammette una soluzione (cioè k è un quadrato di $\mathbf{F}_p$) se e solo se $k^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Questo teorema sostituisce un problema non-banale di esistenza con un ◆calcolo◆ elementare.

Legendre introduce allora il simbolo $\left(\frac{k}{p}\right)$ che è il resto della divisione di $k^{(p-1)/2}$ per p. Si ha dunque $\left(\frac{k}{p}\right) = \pm 1$ e k è un quadrato di $\mathbf{F}_p$ se e solo se $\left(\frac{k}{p}\right) = 1$.

La legge di reciprocità dice allora essenzialmente che sotto certe condizioni, se p ed l sono due numeri primi, l è un quadrato modulo p se e solo se p è un quadrato modulo l. Piú precisamente:

TEOREMA DI RECIPROCITÀ QUADRATICA. *Se p ed $l \neq 2$ non sono entrambi della forma $4n+3$, allora $\left(\frac{l}{p}\right) = \left(\frac{p}{l}\right)$. Se p ed l sono entrambi della forma $4n+3$, allora $\left(\frac{l}{p}\right) = -\left(\frac{p}{l}\right)$.*

Si tenterà ora di generalizzare al caso della rappresentazione dei numeri interi con forme quadratiche in due variabili. Si cerca dunque di trovare delle soluzioni intere di $ax^2 + bxy + cy^2 = k$. Con trasformazioni lineari di determinante ± 1 si può ridurre una tale forma a una forma principale dipendente dal discriminante $D = b^2 - 4ac$ (che è invariante rispetto a queste trasformazioni). Per esprimere in modo semplice i risultati molto tecnici di Gauss su questo problema, Hilbert introdusse un simbolo (detto in seguito simbolo di Hilbert) nel seguente modo.

Nel caso (l'unico interessante) in cui D non è un quadrato, studiare le forme di discriminante D esige che si consideri l'estensione quadratica $K = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ di $\mathbf{Q}$ di grado 2 su $\mathbf{Q}$, dato che le forme quadratiche di discriminante D sono legate alle norme $N(\alpha)$ degli α elementi di K. Dire che n è rappresentabile con una forma di discriminante D significa infatti essenzialmente che esiste un elemento $\alpha \in K$ tale che $n = N(\alpha)$. Dal momento che $\alpha \in K$ è del tipo $x + \sqrt{D}\, y$, la sua norma è la forma quadratica $x^2 - Dy^2$. Per localizzare il problema si introducono i simboli $\left(\frac{n, D}{p}\right)$ nel modo seguente:

$$\left(\frac{n,D}{p}\right)=\begin{cases}+1 & \text{se } n=N(\alpha)\text{, cioè } x^2-Dy^2=n \text{ è risolubile in } \mathbf{Q}_p.\\ -1 & \text{se non lo è.}\end{cases}$$

$$\left(\frac{n,D}{\infty}\right)=\begin{cases}+1 & \text{se } x^2-Dy^2=n \text{ è risolubile in } \mathbf{R}.\\ -1 & \text{se non lo è.}\end{cases}$$

Questi simboli permettono di riformulare la legge di reciprocità quadratica come un risultato di tipo locale/globale.

TEOREMA (formula del prodotto). $\prod_{p,\infty}\left(\frac{n,D}{p}\right)=1$.

Osservazione: Questo prodotto è ben definito perché è di fatto un prodotto finito. Se p non divide D, si può infatti mostrare che $\left(\frac{n,D}{p}\right)=1$. Questo risultato è essenzialmente equivalente alla legge di reciprocità quadratica perché se k ed l sono due numeri primi (dispari), si può mostrare che $\left(\frac{k,l}{p}\right)=1$ tranne che per $p=2$, k ed l. Ma $\left(\frac{k,l}{k}\right)=\left(\frac{l}{k}\right)$ e $\left(\frac{k,l}{l}\right)=\left(\frac{k}{l}\right)$. D'altra parte $\left(\frac{k,l}{2}\right)$ dà esattamente il segno corrispondente alla legge di reciprocità.

Infine Hilbert riformula sotto la forma di un teorema di passaggio dal locale al globale il teorema dovuto a Lagrange della rappresentazione di n come norma di un elemento α di $K=\mathbf{Q}(\sqrt{D})$.

TEOREMA DELLA NORMA. *n è una norma di K (cioè una norma globale) se e solo se* $\left(\frac{n,D}{p}\right)=1$ *per ogni p e per ∞, cioè se e solo se n è una norma locale in ogni posto di* $\mathbf{Q}$.

L'interesse principale della riformulazione della legge di reciprocità quadratica come formula del prodotto è che quest'ultima si generalizza a tutti i corpi di numeri algebrici. Sia K un tale corpo, di posti all'infinito $\infty_1, \ldots, \infty_r$ (che corrispondono, si ricordi, alle immersioni reali di K). Siano μ e ν due interi di K, dove ν non è un quadrato in K. Si pone

$$\left(\frac{\mu,\nu}{p}\right)=\begin{cases}+1 & \text{se } \mu \text{ è una norma (locale) in } K_p(\sqrt{\nu}).\\ -1 & \text{se non lo è.}\end{cases}$$

$$\left(\frac{\mu,\nu}{\infty_i}\right)=\begin{cases}+1 & \text{se } \mu_i=x^2-\nu_i y^2 \text{ possiede una soluzione in } \mathbf{R}\text{, dove } \mu_i \text{ e } \nu_i \\ & \text{sono le immagini di } \mu \text{ e } \nu \text{ attraverso l'immersione reale} \\ & \text{associata a } \infty_i.\\ -1 & \text{se non la possiede.}\end{cases}$$

E si dimostra (teorema di Hilbert-Hasse) la formula del prodotto: $\prod_{p,\infty_i}\left(\frac{\mu,\nu}{p}\right)=1$

cosí come il teorema della norma: se $\left(\frac{\mu, \nu}{p}\right) = 1$ per ogni posto finito o infinito, μ è una norma di $K(\sqrt{\nu})$. Ciò permette di generalizzare a K il teorema di Minkowski.

TEOREMA (Minkowski-Hasse). *Sia f una forma quadratica su K. Se $f=0$ ha una soluzione non triviale su $K_{\mathfrak{p}}$ per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di O_K (in cui O_K è l'anello degli interi di K) e una soluzione non triviale per ogni immersione reale di K, allora $f=0$ ha una soluzione non triviale su K.*

Questo principio aritmetico del passaggio dal locale al globale si chiama principio di Hasse.

Per dimostrare la formula del prodotto e il teorema della norma, Hilbert dovette fare ricorso a un'idea fondamentale già introdotta da Weber, un'idea del tutto naturale ma la cui realizzazione tecnica si scontra con terribili difficoltà. La difficoltà essenziale incontrata nell'analisi dell'aritmetica degli anelli di interi algebrici O_K consiste nel fatto che O_K non è in generale principale. È dunque naturale cercare di «misurare» questa mancanza di principalità. A tal fine si considerano gli ideali *modulo* gli ideali principali. Si ottiene cosí un gruppo abeliano finito $H(K)$ di ordine $h(K)$ detto gruppo delle classi di ideali di K. L'idea consiste allora nel cercare se esiste un'estensione di Galois L di K tale che: 1) gli ideali di K diventino principali in L; 2) il gruppo delle classi $H(K)$ sia ottenibile come il gruppo di Galois $G_{L/K}$ di L su K. Dato che $H(K)$ è abeliano, L deve essere abeliano, cioè un'estensione di Galois abeliana.

La dimostrazione dell'esistenza dei corpi di classi è stata elaborata negli anni '20 da Artin, Hasse e Takagi. In particolare Artin ha chiarito il senso dell'isomorfismo tra $H(K)$ e $G_{L/K}$. Sia $\mathfrak{q}$ un ideale di O_K che non si ramifica in L e $\mathfrak{p}$ un ideale di O_L «al di sopra» di $\mathfrak{q}$, cioè che interviene nella decomposizione di $\mathfrak{q}O_L$. Sia $Z_{(\mathfrak{p})}$ il gruppo degli automorfismi $\sigma \in G_{L/K}$ che lasciano $\mathfrak{p}$ invariante (detto gruppo di decomposizione di $\mathfrak{p}$). Si mostra che siccome $\mathfrak{p}$ non è ramificato, $Z_{(\mathfrak{p})}$ è un gruppo ciclico che ha per ordine il grado di $\mathfrak{p}$ su $\mathfrak{q}$. Tra i suoi generatori ne esiste uno σ che possiede la proprietà secondo cui, per tutti gli $\alpha \in O_L$, $\sigma(\alpha) \equiv \alpha^{N(\alpha)} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{p})$. Esso si chiama automorfismo di Frobenius e viene indicato con $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)$. Dato che l'estensione L è abeliana, si mostra che $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)$ dipende di fatto soltanto da $\mathfrak{q}$ e non dai $\mathfrak{p}$ al di sopra di $\mathfrak{q}$. Si indica dunque con $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{q}}\right)$. Si definisce quindi un'applicazione detta omomorfismo di Artin $\mathfrak{q} \to \left(\frac{L/K}{\mathfrak{q}}\right)$ degli ideali primari di K nel gruppo $G_{L/K}$. Se dunque $\mathcal{A} = \pi \mathfrak{q}_i^{l_i}$ è un ideale di O_K, si definisce $\left(\frac{L/K}{\mathcal{A}}\right) = \pi \left(\frac{L/K}{\mathfrak{q}_i}\right)^{l_i}$. Il teorema fondamentale di Artin afferma che l'omomorfismo di Artin è suriettivo e che il suo nucleo è costituito appunto dagli ideali principali. Esso stabilisce dunque l'isomorfismo cercato tra $H(K)$ e $G_{L/K}$.

Ora, quando si localizza il problema del corpo di classi, esso diventa molto piú semplice, perché se $K \hookrightarrow L$ è un'estensione di corpi locali la mancanza di principalità diventa – dato che gli anelli O_K e O_L sono locali e principali, con ideali massimali rispettivi $\mathfrak{q}$ e $\mathfrak{p}$ – il problema di sapere quali elementi del gruppo moltiplicativo K^* di K sono norme di elementi di L^*. L'automorfismo di Frobenius è l'elemento $F \in G_{L/K}$ tale che per ogni $z \in O_L$ $F_z \equiv z^q (\mathrm{mod}\, \mathfrak{p})$ dove q è il cardinale del corpo residuo $O_K/\mathfrak{q}$. Il teorema di Artin si riduce in questo caso all'isomorfismo $K^*/N_{L/K}L^* \simeq G_{L/K}$ tra il quoziente di K^* rispetto al gruppo delle norme di L e il gruppo di Galois di L su K, che a $x \in K^*$ associa $F^{v(x)}$ in cui v è la valutazione di K (unica perché O_K è locale). Di qui l'idea – sviluppata da Chevalley negli anni '30 – di dimostrare direttamente la teoria del corpo di classi locale e di ritornare poi al corpo di classi globale. Questo cambiamento radicale di punto di vista è all'origine dell'introduzione delle nozioni di ideli e di adeli. Sia dunque K un corpo di numeri algebrici. Si consideri il prodotto (enorme) $\mathcal{P}_K = \prod_{\mathfrak{p}} K_{\mathfrak{p}}$ dei localizzati di K rispetto a tutti i suoi posti finiti e infiniti. Un elemento di $\mathcal{P}_K$ è dunque una famiglia $(\xi_{\mathfrak{p}})$ con $\xi_{\mathfrak{p}} \in K_{\mathfrak{p}}$ per ogni $\mathfrak{p}$.

Gli adeli di K sono per definizione gli $(\xi_{\mathfrak{p}})$ tali che $\xi_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ tranne che per un numero *finito* di posti. Gli adeli di K formano un anello K_A il cui gruppo K_A^* delle unità si chiama il gruppo degli ideli di K. Il gruppo quoziente è il gruppo quoziente $C_K = K_A^*/K^*$ è il gruppo delle classi di ideli.

Sia allora L un'estensione abeliana finita di K. Si definisce una norma $N_{L/K} : L_A^* \to K_A^*$ sugli ideli di L che passa al quoziente e definisce un morfismo $N_{L/K} : C_L \to C_K$.

Ora l'omomorfismo di Artin si interpreta in questo caso come il morfismo $\psi : K_A^* \to G_{L/K}$ che associa l'identità a ogni elemento di K^* e che a ogni idele $(\xi_{\mathfrak{q}})$ di K_A^* tale che $\xi_{\mathfrak{q}} = 1$ tranne che per $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0$, associa $F^{v(\xi_{\mathfrak{q}_0})}$ dove F è l'omomorfismo di Frobenius dell'estensione $L_{\mathfrak{p}}$ di $K_{\mathfrak{q}_0}$, dove $\mathfrak{p}$ è al disopra di $\mathfrak{q}_0$ (il fatto che l'estensione L/K sia abeliana implica che questa definizione è ben data). Ora si mostra che questo morfismo passa al quoziente e definisce un isomorfismo $C_K/N_{L/K}C_L \simeq G_{L/K}$. E dato che il gruppo $C_K/N_{L/K}C_L$ quoziente delle classi di ideli di K rispetto alle norme delle classi di ideli di L si identifica con il gruppo delle classi di ideali di K, si ritrova la teoria precedente.

3. *L'a priori strutturale e la teoria delle catastrofi.*

Si ritorni ora al senso filosofico che Lautman attribuiva alla dialettica del locale e del globale. Come si è visto nel § 1, questo problema è quello tradizionale della comprensione *strutturale* di un tutto organizzato. Già mirabilmente formulato da Kant nella seconda parte della *Critica del giudizio* [1790] e servito come costante incitamento al pensiero strutturalista, dall'idealismo di Goethe al morfologismo di Waddington attraverso il vitalismo di Driesch e la teoria della *Gestalt*, questo problema non si è mai potuto veramente risolvere perché, come notava Lautman, faceva sempre ricorso alla «misteriosa oscurità» di concetti speculativi vitalisti.

In quest'ultimo paragrafo si cercherà d'indicare brevemente quale sia lo stato della questione.

Se si lascia da parte lo strutturalismo in matematica per interessarsi alla metodologia strutturale nelle scienze empiriche, si constata subito 1) che lo strutturalismo è *intrinsecamente* interdisciplinare, dato che va dalla biologia all'antropologia alla psicanalisi passando attraverso la *Gestalt*, la psicologia cognitiva, la linguistica e la semiologia; 2) che in tutti questi domini lo strutturalismo comprende, come diceva Piaget [1968, trad. it. p. 38], «un ideale comune di intelligibilità» e mette sempre in opera *la stessa* categorialità.

Com'è noto, e per riprendere una formulazione dovuta ancora a Piaget, una struttura è di natura organizzazionale e morfologica. È un sistema di trasformazioni che comporta delle ◆leggi◆ in quanto ◆sistema◆ e che si conserva e si arricchisce con il gioco stesso delle trasformazioni. In quanto tale la ◆struttura◆ è autosufficiente e non richiede, per essere colta, il ricorso ad elementi estranei alla sua natura [*ibid.*; cfr. anche l'articolo «Struttura»].

I caratteri determinanti delle strutture in tutte le regioni in cui questo concetto è *empiricamente condizionato*, vale a dire imposto dall'esperienza per la comprensione (se non per la spiegazione) dei fenomeni, tali caratteri determinanti sono quelli di ◆totalità◆ (organica), di trasformazione, di autoregolazione (cioè di stabilità strutturale o di omeostasi) e di chiusura (legge della ◆forma◆, cioè necessità). Cosí caratterizzato, lo strutturalismo si oppone a due punti di vista. Il punto di vista oggettivista-riduzionista: lo strutturalismo non è una fisica di sistemi di componenti in ◆interazione◆. Il punto di vista antiempirista, diciamo vitalista-idealista: lo strutturalismo non è neppure una dottrina olista delle totalità emergenti, vale a dire di totalità che s'impongono come forme o essenze a una materia che sarebbe loro estranea.

È una dottrina relazionale ed epigenetica dell'organizzazione. Questa dottrina come è noto diverge seguendo due direzioni. Da una parte quella di uno strutturalismo *statico*, formalista e logico-combinatorio, che si vagheggia di «assiomatizzare»: è per esempio lo strutturalismo di Hjelmslev, di Lévi-Strauss, di Greimas, di Chomsky; dall'altra quella dello strutturalismo *dinamico* fondato sui concetti di autoregolazione e di genesi, di stabilità strutturale e di morfogenesi: è per esempio lo strutturalismo della biologia, da Buffon a Waddington, quello della teoria della *Gestalt*, quello di Piaget, quello di Tesnière.

L'opposizione tra queste due grandi direzioni dello strutturalismo acquisisce un significato particolare quando si prendono in considerazione le loro rispettive concezioni della matematizzazione delle strutture. Lo strutturalismo formalista statico che, come è noto, è essenzialmente semiolinguistico, si vuole solidale con lo strutturalismo matematico e concepisce in generale questa solidarietà nel seguente modo.

Lo strutturalismo matematico è quella corrente che, partita dalla logica simbolica della teoria degli insiemi e dall'assiomatica hilbertiana, ha costruito la dimensione «linguistica», sintattica e semantica della matematica (cfr. l'articolo

«Infinitesimale»). Attualmente questa corrente culmina nella teoria delle categorie e piú esattamente nella teoria dei topoi e delle loro logiche naturali (cfr. l'articolo «Trasformazioni naturali/categorie»). Di qui l'idea che si è imposta come evidente nello strutturalismo semiolinguistico secondo cui, poiché la matematica è un ♦linguaggio♦, il rapporto tra strutture semiolinguistiche e matematica deve prendere la forma di una ♦traduzione♦ fra linguaggi. È in questo modo che la matematica delle strutture viene molto comunemente intesa in linguistica e in semiotica: nel senso di una traduzione formale, vale a dire di ciò che si chiama *la ♦formalizzazione♦ di un metalinguaggio descrittivo*. La conseguenza immediata è che non ci si può piú rendere conto dell'autocostruzione e della stabilità dinamica delle strutture come *Gestalten* e dunque della loro chiusura. Di qui l'innatismo che si trova per esempio in Lévi-Strauss e in Chomsky.

Nello strutturalismo dinamico la situazione è del tutto differente. Questo strutturalismo nasce dalla biologia. Come diceva Piaget [*ibid.*, p. 76], la comprensione degli organismi è «la chiave dello strutturalismo». Intese in questo modo, le strutture non sono organizzazioni formali del tipo dei legami sintattici, ma sono fenomeni naturali e dialettici di autorganizzazione. Il problema non è dunque quello di formalizzare metalinguaggi descrittivi, ma di trovare o di costruire oggetti matematici specifici che permettano di modellizzare in modo adeguato i fenomeni naturali specifici costituiti dalle strutture e con ciò anche di *oggettivarle*. In un caso si tratta di descrivere e di formalizzare, nell'altro di oggettivare e di modellizzare. È bene insistere su questo punto, dati gli effetti negativi prodotti nelle scienze umane, nell'epistemologia e nella filosofia contemporanee dalla deviazione logico-positivista dell'assiomatica e dello strutturalismo matematico. La matematica non è semplicemente un linguaggio. Essa è, come ricordava Bachelard, una scienza di oggetti (certo di oggetti ideali, ma comunque di oggetti) che è sicura del proprio linguaggio. Il che non è affatto la stessa cosa dell'essere un linguaggio. A parere di chi scrive il modo corretto di concepire la matematizzazione delle strutture come fenomeni naturali, *ivi comprese le strutture semiolinguistiche*, deve essere analogo a quello che si trova in fisica. In ambito strutturale, la matematizzazione si oppone alla formalizzazione. Essa consiste essenzialmente nell'oltrepassare il punto di vista logico-formalista attualmente dominante che è la versione moderna del dogmatismo, vale a dire di quell'evidenza fallace secondo cui l'analisi logica dei concetti e la loro formalizzazione può essere una spiegazione sufficiente dei fenomeni empirici. Ciò che è veramente in gioco a livello teorico nello strutturalismo dinamico è la costituzione di ciò che si potrebbe chiamare una «fisica» strutturale, «fisica» alternativa alla fisica comunemente conosciuta, ma ugualmente una fisica nella misura in cui ciò che viene in primo piano è il problema dell'oggetto e piú precisamente della modellizzazione matematica adeguata di fenomeni appresi in un certo modo. Il problema di una «fisica» strutturale rilancia il motivo critico. Infatti questa fisica empirica teoretico-sperimentale alternativa deve essere fondata su una «fisica» strutturale pura e ciò pone ancora una volta, ma in un contesto nuovo, il problema critico centrale del passaggio dalla ♦logica♦ formale a una logica trascendentale, vale a dire del principio abduzionale che permette di legittimare a priori la scelta di un certo tipo di oggetti matematici specifici suscettibili del diritto di assicurare una modellizzazione adeguata. Per mostrare ciò occorre anzitutto approfondire un poco la categorialità strutturale fornendo qualche esempio.

In biologia, che è secondo Piaget la «chiave dello strutturalismo», ci si può riferire a un importante articolo pubblicato recentemente da due biologi inglesi, Goodwin e Webster [1982], che si collocano nella linea di Waddington. In questo articolo gli autori fanno un'analisi storica ed epistemologica dell'opposizione classica ricorrente tra lo strutturalismo e il darwinismo o il neodarwinismo, il neodarwinismo essendo la sintesi tra la teoria molecolare dell'◆eredità◆ e la teoria darwiniana dell'evoluzione.

Gli autori difendono il punto di vista strutturalista, vale a dire razionalista, secondo cui vi sono dei concetti a priori, delle◆categorie◆che regolano l'empirico. Il problema centrale di cui si occupano è quello della forma degli esseri organizzati, quello della morfogenesi e della sua stabilità strutturale. Inoltre essi s'interrogano sul tipo di categorialità e di teoria di cui occorre disporre perché il concetto di◆forma◆divenga intelligibile. Ciò che essi criticano nel paradigma neodarwinista non ha nulla a che vedere con qualche rifiuto sperimentale delle sue tesi. Il fatto è che il suo sistema concettuale ha prodotto e poi imposto un tipo di evidenza, un tipo di credenza teorica che ha dogmaticamente determinato ciò che occorrerebbe considerare come significativo e ha con ciò stesso reso arbitrario e incomprensibile il problema morfologico-strutturale. Tutto questo è essenzialmente dovuto al modo in cui questo paradigma ha identificato surrettiziamente il concetto di controllo e la categoria di causa. È chiaro che il genoma controlla la forma e lo sviluppo. A questo titolo, se si arriva a dominare questo controllo, si dominano nello stesso tempo la forma e lo sviluppo, cosa che è attuata da tutta la biologia molecolare moderna. Ma se, surrettiziamente, si fa equivalere questo controllo a una causa determinante, allora non c'è piú nulla da spiegare dalla parte di ciò che è controllato, cioè la forma e lo sviluppo.

Per il razionalismo morfologico-strutturale, al contrario, l'organismo è, almeno da Buffon, Cuvier e Geoffroy Saint-Hilaire una◆struttura◆, vale a dire una totalità organizzata da un sistema di relazioni interne. Ciò che Kant chiamava la finalità interna. E l'ipotesi fondamentale è che esistono delle «leggi» formali e degli universali di struttura; l'universo delle strutture degli esseri organizzati è un universo sottoposto a vincoli e retto da una certa necessità. In quanto struttura, l'◆organismo◆ non è né irriducibilmente molteplice né il risultato arbitrario di un'evoluzione storica. Occorre precisare questa opposizione strutturalismo-darwinismo.

Il punto di vista neodarwiniano è un punto di vista da una parte storicista e dall'altra dualista. Esso postula l'esistenza di una istanza organizzatrice della materia. È nello stesso tempo un riduzionismo e un olismo materialista che si oppone al monismo strutturale dell'autorganizzazione.

La caratteristica forse piú fondamentale di questo antiteoricismo che è il darwinismo è che in esso la forma dipende dal semplice fatto contingente e non ha bisogno di essere spiegata. Darwin postula il primato della◆funzione◆, riduce la ◆struttura◆ alla semplice contiguità spaziale e subordina la finalità interna alla finalità esterna, all'adattamento e alla selezione. In altre parole egli nasconde completamente il fatto centrale secondo cui la contiguità spaziale è in realtà una connessione strutturale, un'organizzazione posizionale sottoposta a vincoli propri. In breve con Darwin la struttura si riduce all'ereditarietà. Essa è storicamente data e la sua unica necessità è quella della sua storia contingente. Non si tratta qui di negare l'♦evoluzione♦, ma di sottolineare il ragionamento erroneo che ha condotto Darwin a fare della ♦storia♦ non solo la causa dell'evoluzione ma anche quella della stabilità e dell'invarianza delle ♦specie♦. Nel paradigma neodarwiniano, proprio per il fatto che l'universo delle forme non è considerato come strutturalmente sottoposto a vincoli, l'invarianza è spiegata solo geneticamente e storicamente. In quanto fenotipo, l'organizzazione è solo l'artefatto del suo controllo, l'espressione epigenetica del suo programma genetico e dal momento che questo controllo, considerato come causale, è esso stesso storicamente contingente, l'unica necessità concepibile è il risultato del caso. L'unico determinismo è il determinismo genetico. Come affermava Monod, la forma è causalmente riducibile alla struttura primaria delle proteine, dato che tutto il resto deriva da processi termodinamici.

In breve, le caratteristiche globali del paradigma neodarwiniano sono: 1) lo storicismo, il funzionalismo e il primato della finalità esterna; 2) la ♦riduzione♦ fisicista e la riduzione dello strutturale alla contiguità spaziale; 3) il determinismo genetico che rende l'organismo la semplice espressione del suo controllo; 4) l'identificazione surrettizia di questo controllo con una causa determinante.

All'opposto, il razionalismo morfologico postula che l'espressione del genotipo per mezzo del fenotipo è incomprensibile se non s'introduce un'informazione posizionale che controlli la differenziazione cellulare. Negli esseri organizzati vi è una efficacia della posizione: la posizione che seleziona alcuni regimi metabolici scartando alcuni geni. La comprensione della natura di questa informazione posizionale, di questa efficacia della posizione, costituisce il problema strutturale centrale non soltanto in biologia ma anche in tutte le regioni dello strutturalismo dinamico. Tale comprensione è all'origine della teoria vitalista delle entelechie in Driesch e della teoria dei campi morfogenetici e della teoria dei creodi in Waddington. Per Driesch ad esempio i caratteri della finalità interna che rendono gli organismi strutture erano l'equipotenzialità, l'equifinalità e l'autoregolazione. Questi concetti sono in realtà vere e proprie categorie regionali per l'ordine di realtà morfologico-strutturale. Essi sussumono le proprietà fondamentali dell'autorganizzazione e rimandano tutti in ultima istanza a tale efficacia della posizione, secondo la quale un sistema di connessioni strutturali non è nient'altro che un'organizzazione relazionale dinamica di valori posizionali. È soltanto a questa condizione che si può legittimamente parlare di ♦struttura♦.

In breve, le caratteristiche delle strutture per il razionalismo morfologico sono, secondo Goodwin e Webster: 1) la genesi dinamica, l'autoregolazione e la stabilità strutturale; 2) il fatto che le strutture non costituiscono degli elementi ma determinano per determinazione reciproca dei valori posizionali. Per le strutture la categoria di comunanza non significa interazione reciproca di componenti, ma determinazione reciproca di posti; 3) la chiusura delle strutture elementari e l'esistenza di vincoli, di «leggi» della forma; 4) in modo complementare, la generatività, l'apertura della chiusura verso la complessità.

Questa categorialità che, come del resto sottolineano gli autori, è molto piú linguistica che fisica, determina il tipo di teoria di cui si deve disporre per rendere intelligibili i fenomeni morfologico-strutturali. L'oggettività dell'oggetto biologico deve essere costituita e questa costituzione equivale a mostrare come questa categorialità può acquisire un valore oggettivo. Tuttavia, come tutti gli strutturalisti, gli autori non affrontano questa unica questione che potrebbe sottrarre lo strutturalismo al verbalismo o, piú esattamente, allo statuto semplicemente riflettente dei suoi concetti (si utilizza qui l'opposizione determinante-riflettente nel senso kantiano).

Se si passa ora dalla biologia alla teoria della *Gestalt*, si trovano gli stessi temi, gli stessi problemi, le stesse critiche contro il riduzionismo e la stessa categorialità regionale. Per esempio, nella sua classica introduzione, Paul Guillaume [1937] insiste sul fatto che la *Gestalt* è un monismo che introduce la nozione di struttura nello stesso tempo nell'interpretazione della regione fisica, della regione biologica e della regione psicologica, che non è una concezione né riduzionista, né materialista, né positivista ma strutturale e razionalista. Di ispirazione fisica, la teoria della *Gestalt* si fonda, come è noto, su una critica dell'atomismo delle sensazioni e dell'associazionismo in psicologia e intrattiene rapporti assai stretti con la fenomenologia husserliana. Il concetto di sensazione pura è un artefatto sperimentale, un concetto esplicativo ipotetico, poiché non potrebbero esserci sensazioni senza *organizzazione* percettiva. Certo esistono molte eccitazioni periferiche (retiniche per esempio) prodotte da stimoli esterni, ma questi ultimi sono controlli, condizioni del percepito e non sua causa dominante. Come il neodarwinismo, l'atomismo e l'associazionismo psicologico identificano surrettiziamente il concetto di controllo e la categoria di causa. L'idea gestaltista è che è impossibile trattare una percezione immediata come un sistema di relazioni fra termini che sarebbero sensazioni atomiche isolate. Un tale sistema è infatti il prodotto di un'analisi e l'analisi è una trasformazione reale dello stato di coscienza. Né i termini né le relazioni hanno un'esistenza psicologica effettiva ed è per questo che bisogna considerare le percezioni come «complessioni» (Meinong), *Gestalten*, strutture, cioè, come dice Guillaume, «unità organiche che si individualizzano e si limitano nel campo spaziale e temporale della percezione o della rappresentazione» (trad. it. p. 22). Queste strutture organizzate ed internamente articolate risultano da un'attività formatrice originale e sono controllate da stimoli esterni. Ancora una volta ciò che le distingue dai sistemi di componenti in interazione è l'esistenza di connessioni strutturali che determinano i valori posizionali. E tutto il problema dei teorici della *Gestalt* è stato quello di pensare, al di là di una semplice fenomenologia, una «fisica» delle strutture tanto rigorosa quanto la fisica, ma diversa da quest'ultima, alternativa. A tal fine essi hanno formulato l'ipotesi, poi magistralmente confermata da Thom, secondo cui «i principî della dinamica oltrepassano, per la loro generalità, le loro applicazioni strettamente fisiche» [*ibid.*, p. 145]. Come osserva Guillaume, «il valore esplicativo [della *Gestalt*] dipende dalla sistemazione che essa riuscirà a stabilire tra codeste diverse forme, dalla costruzione d'una sorta di dinamica che renderà evidenti le leggi delle loro trasformazioni» [*ibid.*, p. 232]. In altre parole, nel quadro di un'aspirazione sistematica di tipo fisico, la *Gestalt* considera gli esseri organizzati, siano essi fisici, biologici o psicologici, «come sottoposti a leggi dinamiche assai generali, quelle degli insiemi organizzati, che non sono né specificamente fisiche, né specificamente psicologiche, ma comuni alla fisica e alla psicologia» [*ibid.*, pp. 233-34].

Il problema di questa dinamica strutturale diventa particolarmente spinoso se si pensa che le *Gestalten* sono inseparabili dall'ordine dei significati. L'espressione, il senso come senso intrinseco (*Sinn*) e non come significato referenziale, come denotazione (*Bedeutung*) è una proprietà primitiva e inerente delle strutture. L'unità razionale messa in luce, se non fondata, dallo strutturalismo dinamico, dalla fisica alla psicologia passando attraverso la biologia, riguarda anche e soprattutto la regione semiolinguistica e simbolica. Ed è per questo che si ritrova la stessa categorialità nello strutturalismo semiolinguistico.

Tutto ciò è già molto chiaro con Saussure. Infatti l'apporto teorico essenziale dello strutturalismo saussuriano è di aver sostituito, in materia di ♦linguaggio♦, dei criteri relazionali dell'identità ai criteri sostanziali. L'identità di una unità linguistica in un sistema paradigmatico (nel senso dell'opposizione paradigmatico/sintagmatico) è un'identità puramente posizionale, vale a dire un valore. Ogni valore è un valore posizionale. Un paradigma è un dominio categorizzato in sottodomini da un sistema di differenze. Ogni sottodominio è definito dalla sua estensione e dunque dalla categorizzazione stessa. È in questo senso che vi è una struttura, poiché l'organizzazione globale determina, essendovi implicitamente presente, le unità locali. In altre parole ancora una volta un paradigma non è un assemblaggio di componenti già esistenti, ma un fenomeno determinato dall'interpretazione strutturale della categoria di comunanza. Saussure è del tutto esplicito su questo punto. Secondo lui, come ha ricordato Ducrot, non vi sono frontiere naturali che delimitano le zone foniche e semantiche ricoperte dai significanti e dai significati di un linguaggio. Il dominio di ogni termine si estende, essendo limitato soltanto dal suo conflitto con gli altri domini. La determinazione di un valore come valore posizionale è una determinazione puramente negativa per limitazione (terza categoria della qualità) e per determinazione reciproca, ed è per questo che vi è una struttura. Questa solidarietà tra lo strutturalismo linguistico, la biologia e la *Gestalt* è ancor piú sottolineata in Jakobson, che interpreta il principio saussuriano del primato della differenza sull'identità in modo «dialettico», vale a dire dinamico.

Per quanto insufficienti, queste osservazioni sullo strutturalismo dinamico mostrano che dietro i diversi aspetti delle teorie e dei metodi strutturalisti c'è sempre lo stesso problema centrale che interviene, vale a dire il maggior problema filosofico che secondo Lautman è soggiacente alla dialettica del locale e del globale.

Se lo si sintetizza, questo problema diventa quello di concepire le strutture: 1) in quanto generate dinamicamente, in modo regolato e stabile; 2) in quanto manifestate come fenomeni, sul modo di «spazi» categorizzati da sistemi di soglie, di discontinuità, di frontiere, in breve sul modo di morfologie discriminanti che determinano dei valori posizionali.

Esiste dunque ciò che si potrebbe chiamare un a priori morfologico-strutturale e il problema è quello di sapere: 1) se questo a priori può essere trasformato in un ♦modello♦ generale dei fenomeni che esso condiziona; 2) se questo modello generale può acquisire un contenuto matematico a partire da una delle realizzazioni matematiche della dialettica del locale e del globale.

Se le cose stessero cosí, si avrebbe una conferma della correttezza delle tesi di Lautman, vale a dire che la storia dei progressi tecnici della matematica realizza una dialettica del concetto e che è attraverso questa dialettica che la matematica può diventare costitutiva dei fenomeni e trasformarli in oggetti dell'esperienza.

Ora, le cose stanno effettivamente cosí. Il modello generale che sviluppa l'a priori morfologico-strutturale sussume in modo molto preciso le situazioni a cui si applica il paradigma catastrofista. Queste situazioni sono del tipo che segue.

Sia S un ♦sistema♦ qualunque considerato come una «scatola nera» (*black box*). Si suppongano soddisfatte le seguenti ipotesi molto generali:

1) Nella scatola nera esiste un processo interno X (in generale non osservabile) che definisce gli stati interni del sistema, vale a dire gli stati che il sistema è in grado di occupare in modo stabile.

2) (Si tratta dell'ipotesi fondamentale, tipicamente strutturale e che è la ragione dell'affinità essenziale tra la teoria delle ♦catastrofi♦ e lo strutturalismo). Il processo interno X definisce globalmente l'insieme degli stati interni del sistema, in altre parole questi stati sono in competizione e dunque la scelta di uno stato come stato attuale del sistema virtualizza gli altri stati. Per usare una terminologia strutturalista, ciò significa che gli stati interni sono determinati sulla base della categoria di determinazione reciproca, dato che gli stati virtualizzati dalla scelta dello stato attuale sono dei presupposti di questo stato attuale. Il termine 'categoria' è qui usato nel suo senso stretto, poiché la categoria strutturale di determinazione reciproca è la specificazione della categoria kantiana di comunanza, vale a dire della terza categoria della relazione corrispondente al giudizio disgiuntivo.

3) La terza ipotesi, che deriva direttamente dalla seconda, è che esiste una istanza I che, sulla base di criteri che possono variare considerevolmente, a seconda dei sistemi empirici considerati, seleziona lo stato attuale tra gli stati possibili.

4) Infine la quarta ipotesi, anch'essa fondamentale, è che il sistema S è un sistema controllato da un certo numero di parametri di controllo, parametri che variano in uno spazio W che, per opporlo al processo interno X, Thom ha chiamato lo spazio esterno del sistema. La conseguenza di quest'ipotesi è che il processo interno X dipende dal valore w del controllo, che dunque esso si deforma quando w varia e che, deformandosi, deforma la struttura degli stati interni cosí come le loro relazioni di determinazione reciproca.

Data una situazione generale siffatta, come si manifesta fenomenologicamente, prendendo 'fenomenologia' in senso intuitivo? Dal punto di vista fenomenologico, l'apparire del sistema è fornito dalle qualità osservabili che esso manifesta quando assume il suo stato attuale. Quando si fa variare continuamente il controllo, queste qualità osservabili variano, in generale in modo continuo. Ma solamente in generale. Infatti al variare del controllo e dunque quando si deformano sia lo stato attuale del sistema sia l'insieme delle relazioni che lo determina per determinazione reciproca relativamente agli altri stati interni virtualizzati, può benissimo accadere che improvvisamente lo stato attuale non soddisfi piú i criteri di selezione imposti dall'istanza di selezione *I*. Si produce allora un ◆evento◆, e cioè una transizione brusca, una transizione catastrofica dello stato attuale iniziale in uno stato inzialmente virtuale che diventa attualizzato. Si produce dunque ciò che si chiama un fenomeno critico. Quando il controllo attraversa i valori eccezionali che si chiamano valori critici, con i quali si ha transizione catastrofica dello stato interno, alcune qualità osservabili del sistema variano in modo discontinuo. In altre parole, la destabilizzazione (relativa all'istanza di selezione *I*) degli stati interni attuali quando ci si sposta dallo spazio esterno di controllo, e le transizioni catastrofiche, le sostituzioni di stato che ne sono la conseguenza, *inducono* un insieme *K* di valori critici nello spazio esterno *W*. Questo insieme *K*, detto insieme catastrofico del sistema, è un sistema di discontinuità di *W*. È in questo senso che in questo modello generale il discontinuo è generato dal continuo. Esiste un'autentica dialettica tra il continuo e il discontinuo, ma affinché una tale dialettica possa realizzarsi effettivamente sono necessarie le quattro ipotesi precedenti e in particolare l'ipotesi della determinazione reciproca degli stati cosí come l'ipotesi del controllo, vale a dire di una dialettica preliminare tra processo interno e spazio esterno.

L'insieme catastrofico *K* è un sistema di frontiere in *W* – un diagramma di fase – che delimita quei domini che sono i domini di *W* corrispondenti al verificarsi in modo stabile dei diversi stati del sistema. *K* definisce dunque una specie di «geografia» in *W*. Nella terminologia strutturalista, si dirà che *K* categorizza *W*. La situazione generale appena descritta è dunque una situazione in cui una scatola nera ammette come entrata, come input, uno spazio di controllo e, per il gioco delle transizioni catastrofiche dello stato interno, produce come uscita, come output, una categorizzazione del suo spazio di controllo. Siamo dunque in presenza di un paradigma per le scatole nere che si oppone al paradigma, divenuto dominante, della teoria degli automi (cfr. gli articoli «Automa» e «Centrato/acentrato»). In un automa gli input sono informazioni discrete e, attraverso la mediazione di un «calcolo» fondato, anche in questo caso, su transizioni degli stati interni, il sistema produce delle uscite che sono anch'esse informazioni discrete. Si hanno dunque almeno due grandi classi di scatole nere, vale a dire in definitiva di fenomeni, da una parte le scatole nere del tipo *information processor* che «calcolano» e trattano informazioni, dall'altra le scatole nere del tipo «fenomeni critici» che categorizzano il loro spazio di controllo inducendovi diagrammi di fase in un senso generalizzato.

Partendo da questo schema generale, Thom ha proposto una nuova definizione del termine primitivo 'fenomeno'. Quella che si potrebbe chiamare la definizione morfologica del fenomeno. Un ◆fenomeno◆ non è soltanto ciò che appare in quanto condizionato dalle forme dello spazio e del tempo; un fenomeno, come dice Thom, è ciò che appare su un certo spazio sotto la forma di un sistema di discontinuità, vale a dire di una morfologia.

Questa definizione morfologica del fenomeno può essere interpretata essenzialmente in tre modi, ogni interpretazione corrisponde a una classe di fenomeni empirici. Ciò permette di comprendere perché la teoria delle catastrofi è necessariamente interdisciplinare. Essa lo è perché sviluppa un a priori comune a regioni fenomeniche considerate finora come eterogenee e dunque costituenti l'oggetto di discipline differenti.

1) Lo spazio esterno è un «vero» spazio di controllo. Il modello descrive allora dei fenomeni critici come fenomeni di transizione di fase in termodinamica, di flessione elastica, di transizione di regimi in idrodinamica, di percezione categoriale in fonetica, ecc.
2) Oppure lo spazio esterno è l'estensione spaziale o spazio-temporale di un sostrato materiale. Gli stati interni sono allora regimi locali del sostrato che variano seguendo questa estensione. Nel caso, per esempio, di un sostrato biologico, questi regimi locali sono regimi del metabolismo cellulare e il modello descrive delle differenziazioni, vale a dire dei processi di morfogenesi.
3) Oppure lo spazio esterno è uno spazio ideale e allora il modello descrive delle strutture semiolinguistiche.

La teoria delle catastrofi consiste essenzialmente nello specificare il modello generale appena tratteggiato, vale a dire nel diversificarlo in modelli matematici espliciti e nel controllare, confermare o infirmare la loro validità sperimentale. Per fare ciò occorre evidentemente assegnare prima un contenuto matematico specifico ed esplicito alle quattro ipotesi costitutive del modello generale, e poi sviluppare la teoria matematica propriamente detta di questi modelli cosí specificati. Poiché il contenuto del paradigma catastrofista è stato esplicitato negli articoli «Catastrofi» e «Locale/globale», ci si limiterà qui a ricordare che la specificazione piú importante consiste nel postulare che il processo interno X della scatola nera sia descritto da ciò che si chiama un sistema dinamico (vale a dire un sistema di equazioni differenziali) su uno spazio interno M. Gli stati interni del sistema sono allora definiti dagli attrattori di X. Si ottiene cosí ciò che Thom ha chiamato un modello metabolico. Si vede che la teoria dei modelli metabolici è di fatto un programma, un programma che consiste essenzialmente nel chiarire 1) la struttura generale di un sistema dinamico (teoria qualitativa delle equazioni differenziali o *global analysis*); 2) la struttura generale degli attrattori strutturalmente stabili che possono descrivere degli stati interni di sistemi; 3) i tipi di biforcazione, di transizione catastrofica, indotti dalla destabilizzazione degli attrattori sotto l'azione di un controllo; 4) la geometria degli insiemi catastrofici cosí generati, vale a dire dei diagrammi di fase in senso generalizzato.

Questo programma matematico è immenso e di una tremenda difficoltà. Esso ha condotto a risultati matematici di una considerevole importanza ma è ancora molto lontano dall'essere portato a termine. È per sviluppare tale programma che si è stati portati ad analizzare in tutta la loro ricchezza matematica concetti tanto fondamentali e di un cosí grande valore categoriale quali sono quelli di stabilità strutturale, di genericità, di trasversalità, di dispiegamento universale, di stratificazione, ecc., in breve a costruire progressivamente un nuovo immaginario geometrico che permetta in qualche modo di schematizzare i concetti di struttura, di morfologia e di *evento*.

Il significato razionale della teoria delle catastrofi può a partire da ciò, essere formulato nel seguente modo. La teoria matematica dei modelli metabolici, vale a dire della biforcazione degli attrattori di sistemi dinamici generali, è una teoria che prolunga la teoria qualitativa delle equazioni differenziali fondata da Poincaré. A questo titolo è nello stesso tempo una teoria moderna e rivoluzionaria e una teoria genealogicamente radicata in ciò che vi è di piú fondamentale nella fisica matematica. Tuttavia, costituendo concettualmente *e* matematicamente delle possibiltà già incluse implicitamente nella fisica matematica classica, e in particolare nella meccanica razionale, tale teoria fuoriesce di fatto completamente dall'ordine di realtà strettamente fisico.

È infatti noto, almeno da Aristotele, che il concetto di movimento è equivoco – bimodale– e ricopre da una parte le evoluzioni temporali che descrivono i sistemi dinamici della meccanica, e dall'altra ciò che Aristotele chiamava la nascita e la corruzione degli esseri del mondo sublunare, vale a dire, per parlare come Thom, il flusso eracliteo della trasformazione delle forme (per esempio i fenomeni di morfogenesi, di organizzazione, di rottura di equilibrio, ecc.). Si sa anche che la fisica non ha potuto costituirsi come scienza matematica ideale ed esatta se non univocando il concetto di movimento, vale a dire respingendo come una «parte maledetta» il suo aspetto «eracliteo». Ora, come hanno ben mostrato Ilya Prigogine e Isabelle Stengers nella *Nouvelle alliance* [1979], ciò che si gioca, molto al di là delle piccole polemiche fra studiosi, nel dibattito sulla teoria delle catastrofi, sulle strutture dissipative, ecc., è l'emergenza di una nuova filosofia naturale attraverso cui la parte maledetta della fisica classica fa ritorno, pur restando, dal punto di vista genealogico, nella storia di questa fisica. In altre parole, con la teoria delle catastrofi tutto avviene come se la fisica facesse in qualche modo ritorno sul suo rimosso costituitivo e con ciò stesso andasse oltre, e per ragioni di principio, la propria razionalità e vedesse il suo formalismo implicato nelle regioni fenomeniche non fisiche e in particolare nelle regioni strutturali e morfologiche dell'organizzazione e del linguaggio. Volendo in questo caso utilizzare un vocabolario hegeliano potremmo dire che la teoria delle catastrofi costituisce un momento dialettico della razionalità fisico-matematica e, piú precisamente, un'*Aufhebung* di questa razionalità.

Tuttavia la controversia che si è sviluppata intorno alla metà degli anni '70 sulla teoria delle catastrofi mette in luce una singolare resistenza epistemologica che occorre tentare di analizzare. Il problema centrale posto dalla comprensione dei modelli catastrofici è un problema di determinazione. Come si è visto, i modelli catastrofici si fondano su una dialettica tra dinamiche interne e morfologie esterne. Le dinamiche interne corrispondono all'essere fisico dei fenomeni e le morfologie esterne al loro apparire fenomenologico. Vi sono dunque due modi di concepire la determinazione. In un caso si conoscono le dinamiche interne, le si sanno derivare dai principî fisici e dalle leggi fisiche, e in questo caso evidentemente esse determinano in modo causale le morfologie esterne. Questo tipo di situazione in cui è l'essere fisico intimo della scatola nera a determinare causalmente l'apparire fenomenologico può essere chiamato situazione fisica. Esso corrisponde al punto di vista detto riduzionista. A questo livello la teoria delle catastrofi non ha suscitato nessuna polemica ed è al contrario stata salutata dalla comunità scientifica come un progresso decisivo. Si vede bene perché. Il fatto è che essa si fonda su una concettualità matematica estremamente potente e integrata che ha condotto a un vasto corpus di teoremi nuovi che, in modo del tutto naturale, hanno una portata considerevole nel quadro di una solidarietà fra matematica e realtà che è quello di un'oggettività già costituita, quella oggettività fisica che è diventata un'evidenza del senso comune e che vive della dimenticanza di ciò che ha dovuto rimuovere per costituirsi.

Tuttavia Thom ha sempre insistito su ciò che ha chiamato la «two-fold way» della teoria delle ✦catastrofi✦, la sua doppia via. E la valutazione della teoria delle catastrofi cambia completamente se s'imbocca la seconda via. Diciamo brevemente che è questa seconda via che ha scatenato la controversia, che è *rifiutata* in modo massiccio dalla comunità scientifica e che purtuttavia è senza dubbio essa la piú ricca di avvenire e la piú significativa dal punto di vista razionale. Cosí la teoria delle catastrofi è ammessa quando appare come un arricchimento dei formalismi matematici di una oggettività già costituita che si è imparato a pensare e a praticare come l'unica oggettività possibile. Ma quando essa appare come il principio costitutivo di oggettività non fisiche, oggettività che si potrebbe chiamare alternative, quando essa appare come una rimessa in causa della credenza all'univocità dell'oggettività, quella credenza oggettivista che Husserl ha passato la vita a denunziare come la molla dell'alienazione delle società moderne, allora la teoria delle catastrofi è rifiutata e trattata come un sogno da visionari.

Che cos'è questa seconda via cosí controversa? Essa consiste essenzialmente nell'invertire il rapporto di determinazione che caratterizza le situazioni fisiche. Invece di porre che è l'essere fisico che determina causalmente l'apparire fenomenologico, s'introducono al contrario le dinamiche interne solo a titolo implicito, come una sorta di «in sé» non determinabile con principî e leggi fisici e si cerca di riportare delle morfologie esterne osservate a costrizioni su queste dinamiche interne implicite. In altre parole, la determinazione in questo caso è una determinazione dell'essere fisico attraverso l'apparire fenomenologico. Questa determinazione soddisfa un principio fenomenologico: si passa dall'apparire a costrizioni sull'essere e non si concepisce dunque piú l'essere fisico come una causa dell'apparire, ma al contrario come un «in sé» costretto dall'apparire.

Il gesto razionale qui in gioco, a parere di chi scrive, può essere formulato in termini neokantiani nel modo seguente. Occorre insistere sul fatto che i fenomeni che sono in causa nella seconda via non sono fenomeni fisici in senso stretto ma fenomeni piú complessi di natura organizzazionale e strutturale. Ora si sa, per lo meno dopo quanto ha detto Kant sulla finalità interna degli esseri organizzati nella terza *Critica* e attraverso la storia del dibattito sul concetto di struttura, che non si potrebbero considerare come acquisiti e come «esposti» (nel senso dell'esposizione degli a priori della sensibilità dell'«estetica trascendentale») gli a priori che condizionano questi fenomeni di natura organizzazionale e strutturale. Il punto di vista riduzionista *postula* che questi fenomeni sono di natura esclusivamente fisica, in altre parole che non sono condizionati da nessun a priori specifico. A questo punto di vista Thom ne ha opposto un altro che consiste in definitiva nel far operare una scissione di tipo fenomeno/noumeno all'interno stesso delle «scatole nere». Piú precisamente: 1) anche se si può fare l'ipotesi che le dinamiche interne sono esplicabili con un determinismo fisico, ciò nondimeno le si tratterà come un «in sé» nella misura in cui esse non sono determinabili. Questo «in sé» non è altro che la «scatola nera». In altre parole si attribuisce alle dinamiche interne un carattere noumenico relativo; 2) sono le morfologie esterne, vale a dire l'apparire fenomenologico, che vengono trattate in quanto tali come fenomeni.

Il problema diventa allora quello di sapere con quale operazione costituente questi fenomeni non fisici (poiché l'essere fisico è passato dal lato dell'in sé noumenico), questi fenomeni puramente morfologici e strutturali possono essere oggettivati in oggetti di una esperienza possibile.

È a questo punto che s'incontra la tesi fondamentle di Thom, una tesi ad avviso di chi scrive tipicamente kantiana ma applicata ad un'altra regione di essere che non la regione dei fenomeni strettamente fisici. Questa tesi è che esiste un ordine di realtà e di legalità autonoma dei fenomeni morfologici e strutturali. Come per Kant il sensibile non era dell'intelligibile confuso ed era suscettibile in quanto tale di una conoscenza oggettiva, cosí per Thom il morfologico e lo strutturale non sono del fisico complesso e sono suscettibili in quanto tali, vale a dire in quanto autonomi, di una conoscenza oggettiva ma ovviamente nel quadro di un'oggettività alternativa che si tratta di costituire. È in questo senso che a parere di chi scrive si può interpretare la costante affermazione di Thom secondo cui esiste una matematica (una geometria) delle forme che è indipendente dalla fisica dei sostrati. Si riconoscerà in ciò il principio strutturale dell'indipendenza ontologica della forma in rapporto alla sostanza. Ed è questo principio che è inaccettabile per il punto di vista riduzionista.

A partire dal momento in cui si ammette l'ipotesi per cui il significato profondo, trascendentale, della teoria delle catastrofi è proprio di mettere in luce il principio costitutivo di quell'oggettività alternativa che è l'oggettività morfologico-strutturale, si possono spiegare le ragioni delle polemiche che hanno opposto Thom in particolar modo ai biologi e ai linguisti.

Infatti, in questo orizzonte aperto dalla seconda via l'oggetto biologico diventa, quanto alla sua oggettività, bimodale, nello stesso tempo fisico *e* morfologico-strutturale. Ciò corrisponde al fatto, ricordato prima, che se il metodo sperimentale necessario al dominio dell'oggetto biologico, deve essere fisicochimico, in compenso la categorialità necessaria alla comprensione di questo stesso oggetto è una categorialità non fisica molto vicina di fatto alla categorialità linguistica. Si può dire in questo senso che l'oggetto biologico è un oggetto in cui si scambiano i domini di due oggettività, cioè di due ontologie regionali nel senso di Husserl. Nel dominio fisico l'oggettività classica legifera da sola, nel dominio semiolinguistico l'oggettività morfologico-strutturale legifera da sola, ma queste oggettività si determinano reciprocamente nel dominio biologico.

D'altra parte nel dominio semiolinguistico il punto di vista thomiano non entra evidentemente in opposizione con il principio di autonomia della forma in rapporto alla sostanza, ma con il trattamento logico-formalista della forma che si trova in tutti gli strutturalisti che hanno affrontato il problema della matematizzazione delle strutture. Ciò è dovuto a due ragioni. Prima di tutto il punto di vista thomiano è dinamico e fenomenologico, cioè gestaltista, se non addirittura vitalista. Ma è un vitalismo geometrico e non speculativo. In secondo luogo, precisamente per il fatto che tale punto di vista ha autonomizzato una specie di nuovo ordine di legalità del reale, l'ordine morfologico-strutturale, esso può porre che i significati e le strutture sintattiche delle lingue naturali siano fondati su universali *che sono invarianti fenomenologici del mondo*, del mondo e non della lingua.

Poiché il punto di partenza furono le riflessioni filosofiche di Lautman sulla matematica, si vede ora che il rapporto che egli stabiliva tra la dialettica del locale e del globale e lo strutturalismo si trova confermato sulla base stessa della sua concezione del reale della matematica. Vi è in questo caso, infatti, una solidarietà razionale tra concetto, matematica ed esperienza che, secondo chi scrive, rimette in causa la concezione positivista delle scienze e conduce alla riabilitazione, su nuove basi, del criticismo. [J. P.].

Appelgate, H., e Tierney, M.
[1966-67] *Categories with Models*, in *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, Springer, Berlin - New York 1969, pp. 156-244.

Cerf, J.
1970 *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Presses Universitaires de France, Paris.

Derrida, J.
1962 Prefazione alla trad. franc. di E. Husserl, *Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentional-historisches Problem*, Presses Universitaires de France, Paris.

Ellison, W. J., e Ellison, F.
1978 *Théorie des nombres*, in J. Dieudonné e altri, *Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900)*, vol. I, Hermann, Paris, pp. 165-334.

Godement, R.
1964 *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris.

Goodwin, B., e Webster, J.
1982 *The origin of species: a structuralist approach*, in «Journal of Social Biology Structure», V, pp. 15-47.

Gramain, A.
1971 *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, Paris.

Guillaume, P.
1937 *La psychologie de la forme*, Flammarion, Paris (trad. it. Giunti, Firenze 1963).

Hatcher, A., e Wagoner, J.
1973 *Pseudo-isotopies of compact manifolds*, in «Astérisque», n. 6.

Kant, I.
1790 *Kritik der Urteilskraft*, Lagarde und Friederich, Berlin-Libau (trad. it. Laterza, Bari 1970[7]).

Lautman, A.
[1935] *Mathématiques et réalité*, in «Actualités scientifiques et industrielles», VI (1936), n. 393; ora in Lautman 1935-46, pp. 281-85.
[1935-46] *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Union générale d'éditions, Paris 1977.
1937 *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, Hermann, Paris; ora in Lautman 1935-46, pp. 21-154.
1939 *Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques*, in «Actualités scientifiques et industrielles», IX; ora *ibid.*, pp. 203-29.
1946 *Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique. Le problème du temps*, in «Actualités scientifiques et industrielles», XVI, n. 1012; ora *ibid.*, pp. 231-80.

Loi, M.
1977 *Préface*, in Lautman 1935-46, pp. 7-14.

Piaget, J.
1968 *Le structuralisme*, Presses Universitaires de France, Paris 1968[2] (trad. it. Il Saggiatore, Milano 1968).

Prigogine, I., e Stengers, I.
1979 *La nouvelle alliance*, Gallimard, Paris (trad. it. Einaudi, Torino 1981).

Serre, J.-P.
1970 *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris.