Séminaire Jean-Guy Meunier et Pierre Poirier

UQAM, Montréal

Perception et Prédication

Jean Petitot
EHESS & CREA – Paris

14 octobre 2009

1 Introduction

Il y a déjà longtemps, en particulier pour le "16th International Wittgenstein Symposium" de 1994, *Philosophy and Cognitive Science [13]*, nous avons introduit un certain nombre de propositions pour formaliser les jugements perceptifs au moyen de la théorie des topoï.

La raison en était double :
(i) donner un statut rigoureux à certaines descriptions eidétiques de Husserl, en particulier celles de *Erfahrung und Urteil* et de *Ding und Raum*,
(ii) préciser l'interprétation géométrique de la prédication proposée par René Thom.

Le problème posé par les *jugements* perceptifs est difficile parce que la perception a un format géométrique et continu alors que le jugement a un format prédicatif et discret, l'opposition de formats entre géométrique / prédicatif étant l'un des aspects de la dialectique générale continu / discret.

Il se trouve que ces derniers temps des idées théoriques tout à fait analogues, mais non-formalisées, ont été retrouvées par les psychologues cognitivistes (soit un siècle après Husserl !). Nous pensons en particulier à un dialogue fort intéressant entre Austen Clark et Zenon Pylyshyn.

Notre plan sera le suivant :

1. Les propositions de Clark et Pylyshyn.

2. Husserl précurseur de la théorie des jugements perceptifs.

3. La prédication selon Thom.

4. Pourquoi la théorie des topoï fournit un cadre formel naturel à la logique des jugements perceptifs.

2 Le débat A. Clark / Z. Pylyshyn

2.1 Austen Clark : "Feature-Placing and Proto-objects"

En 2004, dans un article *Feature-Placing and Proto-objects*, Austen Clark dialogua avec Zenon Pylyshyn qui lui-même, dans un article de 2001 *Visual indexes, preconceptual objects, and situated vision*, discutait un article initial de Clark de 2000.

Commençons par l'article d'A. Clark.[1]

Le problème concerne la vision de bas niveau préattentive, de la transduction rétinienne au traitement dans les aires visuelles primaires. Les stimuli correspondant aux diverses modalités sensorielles conduisent à des qualités sensibles constituant des espaces de qualités (comme l'espace des couleurs) possédant un certain nombre de dimensions (la construction de ces espaces de qualités par similarités et différences est déjà en soi un problème passionnant et difficile). On appelle *features* les valeurs de ces qualités sensibles. Une donnée empirique est qu'elles s'organisent en "cortical feature maps" qui sont *topographiques*. Cela signifie que les features sont *spatialement localisées*, autrement dit, qu'il existe un format spatial et, qui plus est, que ce format est commun aux différentes modalités sensorielles.

Ce format organise les objets de la perception visuelle au moyen de segmentations, de ségrégations figure-fond, d'extractions de contours, etc. (p. 13). Le problème théorique posé par ce fait empirique est formulé de la façon suivante par Clark.

> This old picture [that we can describe perception only with feature terms] contains a big mistake, which is still doing damage in neurophysiology. Not only do we need more terms than just feature terms; we need a totally different *kind* of terms – one which has logical and semantic properties distinct from that of any possible feature term. (p. 5)

[1]Nous citerons directement dans le texte les pages de l'article.

La “big mistake” est d’étudier les facultés cognitives de haut niveau sans se soucier du fait qu’elles se fondent dans des structures de bas niveau très structurées.

> Any solution to this problem [binding, feature integration], I argue, requires a distinction in kind between features and their apparent locations. (p. 6)
> Terms for features and terms for places must play fundamentally distinct and non-interchangeable roles, because otherwise one could not solve the binding problem. (p.6)

Ceux qui s’intéressent à l’histoire de la philosophie reconnaîtront un aspect d’un débat Leibniz / Kant. Clark redécouvre le problème kantien de l’irréductibilité de principe du spatial au conceptuel.

Il redécouvre aussi, sur la base d’arguments fonctionnels, que ce qui compte dans la localisation des traits sont trois opérations fondamentales :
(i) l’inclusion et la restriction $S \subset R$ de régions spatiales,
(ii) l’identité de qualités sur des intersections $R \cap S$ de régions spatiales,
(iii) l’identité cross-modale des régions spatiales.

Bref, dans la logique des jugements perceptifs, il faut “a new kind of term, with a distinct function” (p. 8), “terms like names” (p. 8) – des termes singulier – pour identifier les localisations. Cela est nécessaire pour que des jugements puissent porter sur des individus car la localisation individue. D’un côté les qualités sont conceptuelles, génériques, abstraites et non individuantes, et de l’autre côté, la localisation des traits est “proto- prédicative” et “proto-référentielle”, mais individuante ; toute la difficulté est d’intégrer les deux côtés dans un formalisme *à la fois* géométrique *et* logique de niveau supérieur.

Le problème est difficile car, sur le plan “linguistique” où règne le format prédicatif des jugements, la localisation est *déictique* et s’exprime par des indexicaux. En ce sens tout jugement perceptif, même le plus primitif, est *pragmatique* car sa référence ne peut être déterminée que de façon indexicale.

Clark explique alors qu’il faut fonder les jugements perceptifs dans une forme non-conceptuelle de représentation correspondant au schéma “appearance of quality Q at region R” (p. 8) où les rôles de Q et de R ne peuvent pas être échangés. R identifie indexicalement une localisation et Q attribue une qualité à R.

> I claim that this "appearance of quality Q at region R" is the form of non-conceptual representation employed in any vertebrate sensory modality that can solve the many properties problem. (p. 8)

Il s'agit donc de décrire correctement des "ways of filling space" (p. 9). Clark comprend qu'il y a là un problème logique qui est d'élaborer des "*features-placing languages*" comportant des indexicaux et des démonstratifs déictiques. Il faut comprendre la logique et la sémantique de ces "features-placing languages" qui existent aussi dans la perception animale (p. 11), et sont donc non conceptuels et proto-prédicatifs.

Un tel langage est pauvre, sans descriptions définies, sans quantifications, avec des énoncés de base du genre "ici c'est rouge", "là c'est froid".

> The prototypical sentence indicates the incidence of a feature in some demonstratively identified space-time region. (p. 9)

Les données élémentaires en sont des (r, q), $r \in R$, $q \in Q$ et Clark remarque que ce "pairing principle" est à *l'origine* de la relation sujet / prédicat dans les jugements :

> Specification of the content of an act of sense requires pairs of the form $([q_1, \ldots, q_n], [r_1, \ldots, r_m])$ and (I argue) the pairing principle is analogous to the tie between subjects and predicates. (p. 11)

Ainsi

> Space-time provides a simple and universally available principle of organization (p. 16)

et les langages de "features-placing" font référence à des proto-objets :

> [The reference to proto-objects is] preconceptual, direct, and derived from the causal mechanisms of perceptual processing. (p. 21)

2.2 Zenon Pylyshyn : "Visual indexes, preconceptual objects, and situated vision"

Dans son article de 2001, Zenon Pylyshyn s'accorde avec Clark pour affirmer que la perception et l'action exigent *plus* que des représentations conceptuelles donnant une description des stimulations sensorielles proximales.

En effet, de telles représentations conceptuelles reposent par définition sur des catégorisations, des abstractions, des jugements discrets qui ne peuvent pas établir de relations *causales* directes avec des choses *individuelles* de l'expérience du monde externe. Pylyshyn redécouvre cette thèse qu'avec des concepts catégorisants qui sont des classes d'équivalence d'une infinité de cas concrets (p. 131) on ne peut pas rejoindre l'expérience vécue.[2]

> Sooner or later the regress of specifying concepts in terms of other concepts has to bottom out. (p. 129)

Il y a donc un problème fondamental de référence directe de type déictique et indexical dans un énoncé comme "ceci est rouge", référence directe qui peut être pensée comme l'inverse d'une connexion causale dans le cadre d'une théorie causale de la référence.

Zenon Pylyshyn se focalise ainsi sur ce caractère indexical de la perception visuelle et introduit l'hypothèse qu'il existe dans le système cognitif des index pointant vers des "visual objects" qui sont des proto-objets individuels dans une scène visuelle. Ces proto-objets sont "moins" que de vrais objets tridimensionnels (p. 144) et le problème est celui de leur "pick out". Il est lié à la localisation mais ne s'y réduit pas :

> The present proposal is that the grounding begins at the point where something is picked out directly by a mechanism that works like a demonstrative. (p. 129)
> [The problem is] to pick out an individual in the world other than by finding the tokens in a scene that fall under a particular concept, or satisfy a particular description, or that have the properties encoded in the representation. (p. 130)
> There would have to be a non-descriptive way of picking out the unique object in question. (p. 138)

[2]Nous citerons également directement dans le texte les pages de l'article.

> The visual system has a mechanism for picking out and accessing individual objects prior to encoding their properties (Burkell & Pylyshyn, 1997[3]). (p. 139)

Zenon Pylyshyn a fait de nombreuses expériences sur le mouvement d'objets (MOT, Multiple object tracing) pour montrer que c'est la trajectoire spatio-temporelle qui garantit l'identité numérique de l'objet. Il insiste beaucoup sur le problème central venant du fait qu'il n'y a pas seulement en jeu une localisation mais aussi une identité *translocale* le long d'une trajectoire et que l'on ne peut pas considérer ces trajectoires comme le déplacement d'un spot attentionnel dans un "large panoramic display" car celui-ci n'existe pas.

Sa conclusion est qu'il faut des assignations d'index non conceptuels qui constituent un mécanisme primitif pour sélectionner et maintenir l'identité des objets visuels (p. 141) et qui permettent d'adresser les objets au sens informatique (p. 150). Bref :

> Sooner or later concepts must be grounded in a primitive causal connection between thoughts and things. (p. 154)
> The principle of grounding concepts in perception remains an essential requirement if we are to avoid an infinite regress. (p. 154)
> Without such a preconceptual grounding, our percepts and our thoughts would be disconnected from causal links to the real-world objects of those thoughts. (p. 154)
> Whithout preconceptual reference we would not be able to decide that a particular description D was satisfied by a particular individual (i.e. by that individual). (p. 154)

Ce débat Clark / Pylyshyn s'inscrit dans l'un des débats les plus importants actuellement en sciences cognitives, celui des contenus non conceptuels de la perception dans leur rapport au jugement.

Dans sa formulation actuelle, le problème a été lancé par Gareth Evans (*The Varieties of Reference*, 1982, [6]) qui a introduit des contenus non conceptuels proto-propositionnels comme rapport informationnel à l'environnement dont le grain est beaucoup plus fin (format géométrique continu) que le conceptuel (format propositionnel discret), tout en posant par ailleurs que l'expérience consciente par le sujet de tels états informationnels exige du conceptuel. Des spécialistes de la perception comme Christopher Peacocke sont

[3] Voir [4].

d'accord avec cette thèse, tout en estimant que les contenus non-conceptuels ne sont pas autonomes. José Luis Bermudez pense qu'il y a autonomie mais alors le lien avec les jugements devient un vrai problème. D'autres, comme John Mc Dowell (*Mind and World*, 1994, [9]), pensent que la perception est toujours un *jugement* perceptif, donc conceptuel, et essayent de déconstruire le "mythe du donné".

3 Présentation perceptive et représentation propositionnelle dans *Erfahrung und Urteil* de Husserl

Les problèmes soulevés dans le débat Clark / Pylyshyn ont en fait déjà été élaborés, presqu'un siècle plus tôt et de façon plus profonde, par Husserl.

3.1 Présentation géométrique et représentation propositionnelle

Les formules atomiques "S est p" que sont les jugements d'attribution de qualités sensibles p à des objets spatialement localisés S se situent au degré zéro de l'échelle logique. Tant leur syntaxe que leur sémantique sont triviales. Mais, comme nous y avons insisté dans [13], cette trivialité évidente disparaît dès que l'on essaye de comprendre les liens qui peuvent exister entre leur structure syntactico-sémantique et la scène perceptive – que nous noterons $< S, p >$ – qu'ils décrivent et dénotent.

La scène perceptive $< S, p >$ correspond à la donnée d'un domaine spatial W_S (l'extension de l'objet S) rempli par une qualité sensible p. Elle est "synthétique", de format géométrique et "présentationnelle" (au sens de l'opposition philosophique classique entre *Darstellung* (présentation) et *Vorstellung* (représentation)). Au contraire, le jugement prédicatif "S est p" est quant à lui de format propositionnel et "représentationnel". Quel rapport il y a-t-il entre ces deux formatages, c'est-à-dire, entre d'un côté le remplissement intuitif d'extensions spatiales par des qualités et d'un autre côté les catégories syntaxiques de la prédication ?

Ces problèmes ont été fort peu étudiés par les traditions logico-sémantiques. Il existe pourtant une exception notable, de première importance, celle de

Husserl. En particulier dans les extraordinaires réflexions sur l'origine perceptive de la prédication que l'on trouve dans *Erfahrung und Urteil*.

Husserl avait déjà bien distingué entre "ce que nous voyons" et "comment nous voyons". Il avait montré que nous voyons des particuliers individués entrant en relation dans des états de choses. Ces particuliers sont des extensions spatiales remplies par des moments dépendants ("Momente") c'est-à-dire des features ("Merkmale"). La principale thèse de Husserl à leur sujet est que voir n'est pas utiliser des concepts, n'est pas juger. Husserl pense que la perception n'est pas propositionnelle, on dirait aujourd'hui "sentence-like" (même au sens d'un "language of thought" à la Fodor). Pour lui, la perception interprète les sensations ("Auffassung", au sens du traitement d'information effectué par les synthèses noétiques) à travers un format géométrique de type "l'extension R est remplie par la qualité Q" (c'est ce qu'a retrouvé Clark). Il anticipe Fred Dretske et sa distinction entre "perceptually articulated information" et "conceptually vehiculated information". La perception organise et structure noétiquement la hylé sensorielle (qui n'a aucune dimension intentionnelle en tant que telle). D'où le problème ainsi formulé par Kevin Mulligan (Article "Perception" dans le *Cambridge Companion to Husserl* [11]) :

> What, then, is the relation between the perceptual judgements reported by "see that p" and simple, direct perception of particulars ?

Les particuliers apparaissent comme des esquisses ("Abschattungen", "adumbrations"), des profils, des aspects ("one-sideness" de la perception). Ces esquisses sont non-conceptuelles et non judicatives et caractérisent la perception comme à la fois directe *et* incomplète. D'où la problématique de l'horizon de co-donation des esquisses, de l'anticipation perceptive, de la "grammaire" du flux temporel des esquisses, du rôle constitutif des kinesthèses, du tracking d'objets, des trajectoires spatio-temporelles et des "rayons intentionnels" de "l'intentionnalité transversale". Tous problèmes admirablement étudiés par Husserl.[4]

3.2 *Erfahrung und Urteil*

Dans cet ouvrage posthume (1939, Husserl ayant disparu en 1938) édité à Prague par son disciple et assistant Ludwig Landgrebe, et dont le sous-titre

[4]Une synthèse d'une partie de nos travaux sur ces questions se trouve dans [16].

Untersuchungen zur Genealogie der Logik exprime bien les intentions, Husserl cherche à clarifier phénoménologiquement les origines de la prédication. Dans la 2ème section : *La pensée prédicative et les objectivités d'entendement*, Chap. I : *La structure générale de la prédication et la genèse des formes catégoriales les plus importantes*, §§50 sq. (p. 237[5]), il y élabore (entre autres) une théorie des propositions atomiques "S est p" dans le cadre d'une apophantique formelle (i.e. d'une théorie syntaxique) et d'une ontologie formelle (i.e. d'une théorie sémantique comme la méréologie ou la théorie des ensembles). Si sa perspective est "généalogique", c'est parce que, selon lui, la logique formelle classique occulte le problème fondamental de l'intégration de *l'évidence* dans le concept logique de *vérité*. "Évidence" signifie ici l'immédiateté de la donation des phénomènes dans la présentation perceptive. Elle est constitutive de la vérité au sens des sémantiques logiques et fonde le jugement dans l'expérience anté-prédicative (problème qui sera celui du "bottom out" de Pylyshyn). Il faut donc une sémantique logique non-conceptuelle fondée sur un schéma qui anticipe le "placing-feature" à la Clark : "appearance of quality Q at region R".

Husserl développe donc la thèse que les substrats ultimes sont les particuliers individués à travers lesquels les jugements se connectent à ce qu'il appelle le "sol universel du monde". Même si elle est "formelle", la logique doit dépendre constitutivement du monde prédonné intuitivement dans l'expérience sensible "antérieurement" à la logique.

> Le caractère formel de l'analytique logique consiste en ce qu'elle ne s'interroge pas sur la qualité matérielle [i.e. perceptive] de ce quelque chose [donné dans la perception], qu'elle n'envisage les substrats qu'en fonction de la forme catégoriale qu'ils prennent dans le jugement. (p. 28)

Dans de nombreux textes (entre autres *Recherches logiques* III, *Ding und Raum*, *Ideen* I), Husserl décrit la donnée intuitive primitive de toute perception comme "remplissement" ou "recouvrement" d'une extension spatiale par une qualité sensible.

Comme "jugement catégorique fondé dans la perception" (p. 79), un jugement prédicatif à contenu perceptif de type "S est p" est enraciné dans l'expérience ante-prédicative et pré-judicative du monde perceptivement donné et c'est bien cet enracinement – ce qu'il appelle une "fondation" – que Husserl

[5]Nous citons dans le texte les pages de la traduction française [7].

veut thématiser comme tel. Il retrace dans ce dessein la "genèse catégorielle" des catégories logiques "primitives" (sujet / prédicat), genèse qui convertit l'unité perceptive synthétique $< S, p >$ d'un substrat S d'extension spatiale W_S délimitée par un bord (contour apparent) et possédant un moment dépendant p (qualité sensible donnée par la "synthèse passive" de l'intuition) en l'unité syntaxique analytique de la proposition "S est p" (déterminée "activement" par la spontanéité de l'entendement).

Tout le problème est ce changement de format $< S, p > \longrightarrow$ "S est p" conduisant, comme l'a redécouvert Clark d'une extension-localisation / qualité à une structure sujet / prédicat.

Husserl ramène cette conversion d'une présentation perceptive en une représentation propositionnelle à une opération réflexive de *thématisation* et de *typification logique* qui typifie les substrats en thèmes-sujets et les moments dépendants en thèmes-prédicats. Telle est selon lui

> l'origine des premières catégories dites "catégories logiques". (p. 134)

Il y a une "réflexion objectivante", une "conversion d'attitude" menant de l'unité pré-constituée passivement dans la perception à la spontanéité de la forme prédicative, et permettant de passer ainsi de l'expérience perceptive privée à la description d'objets et d'états de choses publics.

Husserl y insiste,

> dans le jugement prédicatif le plus simple, *une double information* est traitée (p. 252)

car *sous* l'information syntaxique catégoriale "sujet / prédicat" concernant les "formes fonctionnelles" des termes de la proposition, il existe une autre information concernant les "formes noyaux" : [substrat = indépendance] et [moment qualitatif = dépendance]. C'est presque mot à mot du Dretske. Selon Husserl, la prédication est un processus basé sur

> le recouvrement des formes noyaux comme matériel syntaxique pour les formes fonctionnelles. (p. 252).

Le monde de l'expérience est un monde typifié (§83, p. 400) où les objets sont saisis selon leur type et la typification précède la généralité conceptuelle, l'erreur fondamentale des logicismes étant d'identifier les deux.

C'est cette typification logique des relations synthétiques de dépendance substrats-qualités en catégories syntaxiques qu'il s'agit de formaliser.

Husserl reprend alors des problèmes d'apophantique formelle et d'ontologie formelle. Par exemple, "S est p et q" signifie que la *même* extension spatiale est recouverte par les deux qualités, etc.

3.3 Nécessité d'une approche morphologique

Si l'on veut, au-delà de la description eidétique pure, transformer la description phénoménologique en source de modélisation, il faut alors pouvoir formaliser les phénomènes de remplissement qualitatif constitutifs des états de choses $< S, p >$. La possibilité de disposer d'une présentation *morphologique* d'un schème sensible $< S, p >$ qui soit différente de la proposition "S est p" est absolument nécessaire si l'on veut briser
(i) le cercle vicieux qui affirme que les structures et les propriétés qualitatives du monde sensible n'existent qu'à travers les jugements qui les prédiquent et ne peuvent pas être montrés (présentés) autrement (c'est-à-dire, au fond, que toute *Darstellung* est toujours-déjà une *Vorstellung*), et
(ii) le caractère tautologique de la définition tarskienne de la vérité : l'énoncé "la neige est blanche" est vrai si et seulement si l'état de choses "la neige est blanche" est réalisé.[6]

Elle permet d'expliquer pourquoi la représentation propositionnelle "S est p" de la présentation morphologique $< S, p >$ possède un contenu qui est intensionnel à un double titre. D'abord parce qu'il représente l'état de choses sous un certain aspect, celui présenté par $< S, p >$. Ensuite parce que les spécificités de l'aspect de $< S, p >$ (par exemple l'extension exacte de S, les valeurs exactes de p) ne sont pas reflétées dans le jugement "S est p" : celui-ci fonctionne en fait, nous l'avons vu, de façon indexicale. Tout jugement perceptif élémentaire ne peut fixer sa référence que de façon pragmatique. Comme nous allons le voir, la sémantique naturelle des jugements perceptifs est donc une sémantique à la Kripke, mais d'un nouveau type.

[6]Pour une critique de cette définition tautologique dans le cadre de la théorie des topoï que nous utilisons plus bas, cf. Moerdijk-Reyes [10].

4 L'indexicalité pragmatique des jugements perceptifs

Comme nous l'avons développé en 1994 [13], le fait que les jugements perceptifs soient indexicaux, que la spatialité implicite des objets y fonctionne comme les déictiques et qu'elle doive être actualisée par le contexte pragmatique de la situation perceptive, ce fait signifie que *l'espace modalise la vérité* des jugements perceptifs. Dans un jugement d'attribution de qualité de type "S est p", on ne dit pas que S est un symbole de variable référant à un individu possédant la propriété p (ce serait une approche par "mauvaise" abstraction : S appartient à l'ensemble des objets possédant la propriété p). On dit que le symbole S est un index qui réfère à un individu d'extension W et que W est "rempli" par la qualité p. Mais l'extension W demeure implicite dans la syntaxe de l'énoncé et n'intervient qu'au niveau de sa sémantique.

5 La prédication selon René Thom

L'idée de base permettant de formaliser Husserl est due selon moi à René Thom avec sa théorie de la prédication. Thom avait souligné dans *Esquisse d'une Sémiophysique* que, en ce qui concerne les jugements perceptifs, il existe bien un "hiatus infranchissable entre le logique et le morphologique" ([20], p. 248). Cela est dû au fait que dans l'expression "jugement perceptif" les deux termes renvoient à des univers *formels* complètement différents : "jugement" à une syntaxe logique de catégories grammaticales, "perceptif" à une géométrie morphologique. Il faut combler ce hiatus.

La formalisation morphologique de la prédication est exposée par Thom dans l'*Esquisse d'une Sémiophysique* (Chapitre 6. "La dynamique aristotélicienne comme sémiophysique", F. "Axiomes de l'acte", 2. "Phrases univalentes"). Il y analyse un jugement perceptif de base comme "le ciel est bleu". Le remplissement de l'extension spatiale W d'un objet S par une qualité sensible (comme une couleur) p appartenant à un genre de qualité G se décrit par une application :

$$\begin{aligned} g: \quad & W \longrightarrow G \\ & w \longrightarrow g(w) \end{aligned}$$

qui, à tout point w de W, associe la valeur de la qualité en ce point. En fait, il est naturel, et c'est ce que fait Thom, d'interpréter g comme une *section de la fibration*

$$\pi : E = W \times G \to W$$

de base W et de fibre G qui associe au couple (w, s) d'un point w de la base W et d'un point s de la fibre G le point base w. Une section d'une fibration $\pi : E \to W$ est une application $s : W \to E$ qui "relève" π, i.e. telle que $\pi \circ s = 1_W$. La valeur $g(w) = s$ de g en w est donc considérée comme appartenant à l'exemplaire de G qui est la fibre $\pi^{-1}(w)$ de π au-dessus de w.

La nécessité d'introduire une fibration est fortement soulignée par Thom (en référence à Aristote) :

> C'est pourquoi, en tant que mathématicien, pour définir l'homéomère[7], je dois multiplier l'espace substrat par un espace invisible, un espace (interne) de qualités – un espace de genre – , pour y définir le bord de ma qualité homéomère.

Dans une certaine mesure, toute la théorie des catastrophes a développé cette idée de base que la façon dont les qualités "secondes" remplissent les extensions ("qualité première") devait s'interpréter, comme en physique, par des sections de fibrations bien choisies.

Le *remplissement* de S par p se trouve ainsi décrit par la section $g : W \to W \times G$ de π qui associe à tout point w de W, le couple $(w, g(w))$ où $g(w)$ est la valeur de la qualité p en w. La section g décrit donc le remplissement que nous avons noté $< S, p >$, i.e. la structure perceptive (évidemment hypersimplifiée).

Le concept géométrique de fibration est *neuro-physiologiquement* pertinent. Les structures (hyper)columnaires du cortex (qui permettent d'associer à chaque position rétinienne un élément comme une couleur, une texture, une direction, etc. et donc de définir des champs *rétinotopiques* de tels éléments) constituent des implémentations (discrétisées) de fibrations.[8]

Ce formalisme morphologique permet de schématiser les relations de dépendance unilatérale (les hiérarchies que Husserl appelle "ontologiques") entre les genres. Que l'extension spatiale (qualité "première") soit ontologiquement

[7] Thom utilise souvent les concepts aristotéliciens d'homéomère et d'anhoméomère pour parler des substrats homogènes et hétérogènes dont il modélise les morphologies.

[8] Le lecteur intéressé pourra se référer à notre traité de *Neurogéométrie* [17].

première par rapport aux qualités "secondes" se trouve traduit par le fait que, dans la fibration $\pi : E = W \times G \to W$, l'extension W est *la base* (qui peut exister de façon indépendante) alors que le genre de qualités G est *la fibre* (qui est un "moment dépendant").

En général l'espace de genre G est en plus catégorisé en espèces (en "essences" qualitatives ou "species" comme des types $C_1, ..., C_n$ de couleurs), par exemple par un potentiel $V : G \to \mathbb{R}$. Les bassins d'attraction des minima définissent alors les catégories (les espèces) de G et les minima fonctionnent comme des prototypes. Si $p \subset G$ est une de ces catégories, si ∂p est son bord dans G et si S est l'entité substrat d'extension W considérée, le jugement perceptif "S est p" s'interprète selon Thom par le fait que l'image $g(W)$ de la section $g : W \to W \times G$ est "encapsulée" dans le cylindre $W \times \partial p$ (cf. [20], pp. 158 sq. et 205 sq.) : "S est p" est vrai si et seulement si $g(W) \subset W \times \partial p$.

Nous disposons donc maintenant deux CNS[9] de validité pour un énoncé "S est p" :

1. La CNS tarskienne : l'énoncé "S est p" est vrai si et seulement si l'état de choses correspondant [S est p] est vérifié ([S est p] ne pouvant d'ailleurs être présenté qu'au moyen du jugement "S est p" !).[10]

2. La CNS thomienne : l'énoncé "S est p" est vrai si et seulement si l'image $g(W)$ de la section $g : W \to W \times G$ est encapsulée dans le cylindre $W \times \partial p$.[11]

La première est logique et prédicative mais "aveugle" dirait Kant, sans intuition remplissante dit Husserl. La seconde est morphologique mais ante-prédicative et pré-judicative. Comment effectuer la synthèse de ces deux approches complémentaires ? Comment penser le lien entre le schématisme géométrique de la perception et la formalisation traditionnelle des jugements en termes de logique formelle ? Le problème est délicat car, redisons-le cette fois avec Wittgenstein, dans des jugements perceptifs du type "S est p", "X est plus clair que Y", etc., la spatialisation des qualités n'est pas explicite.

[9] CNS = condition nécessaire et suffisante.

[10] Chez Tarski la sémantique et les critères de vérité restent dans l'univers mathématique formel. Il n'y a donc pas de problème de "bottom out" de la sémantique. Mais la philosophie analytique a fait du critère de Tarski un critère pour la référence à des objets perçus externes, ce qui ouvre la problématique dont nous traitons.

[11] Thom donne donc un critère de vérité pour des structures "géométriques" référant au monde perçu externe.

Dans la CNS de Thom, *la vérité est spatialement localisée* et c'est tout le problème du "hiatus entre le logique et le morphologique". C'est cela qu'il faut comprendre.

6 La pertinence des concepts de faisceau et de topos

L'on voit que si l'on articule ainsi morphologie perceptive et logique judicative en respectant leur *spécificité*, alors le problème devient de formaliser l'analyse husserlienne-thomienne des liens entre un schème morphologique$< S, p >$ (intuition remplissante) et un jugement "S est p" (intention de signification), et, donc, de faire droit à la *priorité* du formatage morphologique (présentationnel) sur le formatage propositionnel (représentationnel) pour pouvoir ensuite comprendre la *conversion* faisant passer de l'un à l'autre.

Essayons d'imaginer un chemin menant du signal optique à un jugement en essayant de repérer exactement à quel moment géométrie et logique doivent s'articuler.

1. Le signal doit d'abord être traité, régularisé et segmenté. On connaît des algorithmes très performants : ondelettes de Mallat, modèle variationnel de Mumford-Shah, équations de diffusion anisotropes de Morel, etc. Nous en avons souvent parlé en relation avec les modèles de Thom, par exemple dans notre contribution [14] à l'hommage à René Thom *Passion des formes* et dans notre traité [17][12].

2. Les aspects, les profils ("Abschattungen", "adumbrations") – et en particulier les *contours apparents* – doivent être reconnus comme des aspects d'objets. On sait que René Thom s'était énormément intéressé à ce problème. C'est une très jolie application de la théorie des singularités. En se situant dans la grassmannienne des projections, il associe un contour apparent (i.e. un lieu singulier avec des singularités) à chaque point de vue et la question de savoir comment les types génériques de contours apparents stratifient l'espace des points de vue est un problème difficile encore non complètement résolu.

[12] Accessible sur notre site à l'URL https://jeanpetitot.com/ArticlesPDF/Petitot_NGV_2008.pdf

3. Mais ce qui doit être transformé en jugement est d'abord un aspect particulier, celui sélectionné par l'observateur. Comme nous l'avons vu, la sélection du point de vue et son changement correspondent à la nature "pragmatique" des jugements perceptifs.

4. C'est donc bien le remplissement d'une extension spatiale par une qualité sensible qui constitue la donnée primitive, celle que René Thom a formalisée avec la notion de point régulier et de point singulier dès le début de *Stabilité structurelle et Morphogenèse* [19]. C'est bien elle qu'il faut faire passer du géométrique au logique.

L'idée est alors d'utiliser certains résultats fondamentaux concernant les liens entre géométrie et logique qui ont été découverts dans le cadre de la théorie des catégories (au sens mathématique du terme) et, plus précisément, dans celui de ladite théorie des *topoï*. Très intuitivement, les idées de bases sont les suivantes.[13]
(i) Les remplissements possibles de domaines spatiaux W d'un espace ambiant M par des qualités sensibles – et donc les sections s qui les modélisent – reposent sur une dialectique du local et du global (possibilité de restreindre un recouvrement à un sous-domaine, possibilité de recoller des recouvrements compatibles, etc.) qui est caractéristique de ce que l'on appelle la structure de *faisceau* sur un espace de base M.
(ii) Les opérations formelles catégoriques que l'on peut faire sur des *faisceaux* – qui sont des objets *géométriques* – sont exactement parallèles aux opérations syntaxiques que l'on peut faire sur des *symboles* – qui sont des objets *logiques*. Cette grande découverte est due à William Lawvere à la fin des années 1960. On dit que la catégorie des faisceaux sur un espace de base M possède la structure de topos.
(iii) On peut par conséquent associer à la catégorie des faisceaux sur M un langage formel, que l'on appelle sa "logique interne". Dans un tel langage logique, une variable x va être interprétée syntaxiquement par un faisceau X (par exemple le faisceau des sections d'une fibration $\pi : M \times G \to M$) qui représente son *type logique*. Mais, sémantiquement, x sera interprétée comme une section particulière de X définie sur un domaine particulier W de M.[14]

[13] Pour une introduction à la théorie des topoï, cf. Asperti-Longo [1] et MacLane-Moerdijk [8].

[14] Techniquement, il faut tenir compte du fait que, traditionnellement, les sections de faisceaux sont définies sur des ouverts de l'espace topologique de base. Mais on peut généraliser cette situation traditionnelle (cf. section 8).

Cette sémantique très particulière s'appelle la sémantique de Kripke-Joyal des topoï.

Autrement dit, le formalisme "toposique" permet de typifier logiquement les symboles qui réfèrent à des remplissements de domaines spatiaux par des qualités. Mais c'est exactement le genre de formalisme dont on a besoin pour formaliser la description eidétique de *Erfahrung und Urteil* à partir de la géométrisation de la prédication proposée par René Thom.

Il s'agit donc de reprendre l'analyse logique des propositions (et donc les bases mêmes de la sémantique logique) à partir de ce primat du perceptif. Il s'agit de relier au moyen d'une logique géométrique une typification logico-catégorielle et un schématisme morphologique.

7 Faisceaux, topoï et logique

7.1 Remarques préliminaires

1. La théorie des topoï a été inventée et développée par Alexandre Grothendieck et son école dans les années 1960 pour résoudre des problèmes très sophistiqués de géométrie algébrique (construction de théories cohomologiques généralisées). Il peut donc paraître étrange de la détourner pour des problèmes cognitifs non mathématiques et qui plus est apparemment élémentaires. Mais en fait si ces problèmes sont traités de façon neurocognitive (ce qui nous intéresse au premier chef, mais dont nous ne parlerons pas ici[15]) ils ne sont plus du tout triviaux et doivent être modélisés avec des outils convenables.
2. La théorie mathématique des catégories est certainement la meilleure ontologie formelle dont nous disposions actuellement (par beaucoup d'aspects, elle est supérieure à la théorie des ensembles) et il est donc naturel de s'y placer.
3. Certains spécialistes de la théorie des topoï ont déjà appliqué ces outils à la clarification de certains problèmes sémantiques. Par exemple Gonzalo Reyes (qui a travaillé, avec Eduardo Dubuc, Anders Koch, Ieke Moerdijk et Marta Bunge sur les applications de la théorie des topoï à la *Géométrie différentielle synthétique*[16]) a utilisé ces techniques pour formaliser la théorie kripkéenne des noms propres comme désignateurs rigides.

[15] Le lecteur intéressé pourra consulter notre traité de 2008 [17].
[16] Pour la "Synthetic Differential Geometry", cf. [10].

4. En général, la théorie des topoï est utilisée en logique formelle et en informatique théorique comme un outil pour le λ-calcul typé (cf. par exemple les travaux de John Mitchell, Philip Scott, Giuseppe Longo[17], etc.). Comme nous allons le voir, quand des variables sont typées par des objets d'un topos, les propriétés catégoriques du topos conduisent à une logique interne (en général intuitionniste) qui est un λ-calcul typé. Dans la mesure où la correspondance de Curry-Howard montre que les formules peuvent être traitées comme des types, les preuves comme des λ- termes et la réduction d'une preuve par élimination de coupures à la réduction d'un λ- terme à sa forme normale, la théorie des topoï est devenue un outil fondamental pour comprendre la sémantique des langages formels, et en particulier des langages de programmation.

Dans ces applications logiques, l'origine (la "généalogie") géométrique des concepts de faisceau et de topos est occultée. Ici, nous utilisons au contraire cette origine géométrique pour clarifier la "montée cognitive" du morphologique perceptif vers le propositionnel prédicatif.

7.2 Le concept de faisceau

Pour le concept de faisceau, le concept topologique primitif n'est plus celui de point mais celui d'ouvert (ce que Peter Johnstone appelle la "pointless topology").[18]

De façon abstraite, une fibration sur un espace de base M est caractérisée par l'ensemble de ses sections $\Gamma(U)$ sur les ouverts $U \subset M$. C'est un dispositif produisant des sections. Si $s \in \Gamma(U)$ est une section sur U et si $V \subset U$, on peut naturellement considérer la *restriction* $s \restriction_V$ de s à V. Cette restriction est une application $\Gamma(U) \to \Gamma(V)$. Il est évident que si $V = U$ alors $s \restriction_V = s$ et que si $W \subset V \subset U$ et $s \in \Gamma(U)$ alors $(s \restriction_V) \restriction_W = s \restriction_W$ (transitivité de la restriction). On obtient ainsi un *foncteur* (i.e. un morphisme de catégories) *contravariant*

$$\Gamma : \mathcal{O}^*(M) \to \mathbf{Ens}$$

[17] Cf. par exemple l'ouvrage d'Asperti-Longo [1].

[18] Dans les sections techniques qui suivent nous traiterons les extensions d'objets comme des ouverts car les concepts géométriques qui nous intéressent ont été définis et étudiés à partir de ce concept primitif. Mais, comme nous l'avons dit, une telle hypothèse n'est pas réaliste puisque la plupart des objets étant délimités par des bords leur extension est fermée. Mais on peut remédier à ce problème (cf. section 8I).

de la catégorie $\mathcal{O}(M)$ des ouverts de M[19] dans la catégorie **Ens** des ensembles.[20]

Réciproquement, soit Γ un tel foncteur – ce que l'on appelle un *préfaisceau* sur M. Pour avoir une chance d'être le foncteur des sections d'une fibration, il est clair que Γ doit satisfaire les deux propriétés caractéristiques suivantes .
(F1) Deux sections localement égales sont globalement égales. Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de la base M et si $s, s\prime \in \Gamma(M)$ sont deux sections globales, alors si $s \restriction_{U_i} = s' \restriction_{U_i}$ pour tout $i \in I$ on a l'égalité $s = s\prime$.
(F2) Une famille de sections s_i définies sur un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ d'un ouvert U et compatibles sur les intersections $U_i \cap U_j$ peut être recollée en une section globale s sur U. Autrement dit si $s_i \in \Gamma(U_i)$ est une famille sur $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ et si les s_i sont compatibles i.e. si $s_i \restriction_{U_i \cap U_j} = s_j \restriction_{U_i \cap U_j}$ quand $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, alors il existe $s \in \Gamma(M)$ telle que $s \restriction_{U_i} = s_i$ pour tout $i \in I$.

Il est remarquable que les propriétés (F1) et (F2) puissent être exprimées de façon purement catégorique. Cela montre en effet que certains des caractères les plus "synthétiques" de l'espace peuvent être décrits dans le cadre de l'ontologie formelle qu'est la théorie des catégories. Par exemple (F2) dit que la flêche e qui associe à la section s la famille de ses restrictions

$$e : s \rightarrow \{s \restriction_{U_i}\}_{i\in I}$$

est l'"equalizer"

$$\Gamma(U) \xrightarrow{e} \prod_i \Gamma(U_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j)$$

des deux projections p, q correspondant aux inclusions $U_i \cap U_j \subset U_i$ et $U_i \cap U_j \subset U_j$. Cela signifie d'abord que $p \circ e = q \circ e$ mais surtout que e est *universel* pour cette propriété, au sens où tout morphisme $A \xrightarrow{f} \prod_i \Gamma(U_i)$ tel que $p \circ f = q \circ f$ se factorise de façon unique par e.

Prises comme axiomes pour des préfaisceaux, les propriétés (F1) et (F2) définissent une structure plus générale que celle de fibration, nommément

[19]Les objets de $\mathcal{O}(M)$ sont les ouverts de M et les morphismes sont les inclusions d'ouverts.

[20]Le foncteur est "contravariant" car une flèche $V \subset U$ de V dans U de $\mathcal{O}(M)$ s'envoie sur une flèche $\Gamma(U) \rightarrow \Gamma(V)$ de **Ens** qui va dans l'autre sens. $\mathcal{O}^*(M)$ est la catégorie "opposée" ou "duale" de $\mathcal{O}(M)$: elle a les mêmes objets mais le sens des flèches y est inversé.

celle de *faisceau*. On peut d'ailleurs montrer que si les axiomes (F1) et (F2) sont satisfaits alors on peut représenter le foncteur section Γ par une structure fibrée généralisée $\pi : E \to M$ (appelée un espace "étalé") de telle façon que $\Gamma(U)$ devienne l'ensemble des sections de π sur U. Mais π n'est plus nécessairement localement triviale comme doit l'être par définition une fibration. La fibre E_x de E au-dessus de x est la limite inductive :

$$E_x = \lim_{V \subset U \in \mathcal{U}_x} \{(\Gamma(U), \Gamma(V \subset U))\}$$

où $\mathcal{U}_x$ est le filtre des voisinages ouverts de x. E_x est l'ensemble des "germes" s_x des sections s en x et E est la somme des fibres E_x. Si $s \in \Gamma(U)$, elle peut être interprétée comme l'application

$$x \in U \mapsto s_x \in E_x \ .$$

La topologie de E est alors définie comme la plus fine rendant toutes ces sections continues.

Il faut se convaincre que le concept de faisceau n'est pas seulement technique et formalise en fait des propriétés d'essence – eidétiques, "synthétiques a priori" – de l'intuition pure spatiale. Il est a priori adapté à toutes les situations où
(i) le formatage spatial se ramène essentiellement à un passage de domaines locaux à des domaines globaux par recollement, et
(ii) les entités considérées proviennent d'opérations de remplissement ("Erfüllung", "filling-in") de tels domaines spatiaux.

C'est le cas dans de très nombreux domaines de la géométrie et de la physique mathématique et c'est pourquoi ce concept y est devenu omniprésent. Mais tel est aussi le cas de la *perception*.[21] Le recollement y intervient de façon constitutive, et cela à un double titre. D'abord parce que le champ visuel lui-même est constitué par le recollement des champs récepteurs des cellules ganglionnaires. Ensuite parce que l'espace global s'obtient par recollements de différents exemplaires du champ visuel contrôlés kinesthésiquement (par les mouvements des yeux, de la tête et du corps). Contrairement à ce qui se passe en géométrie différentielle classique, la notion de recollement n'est pas imposée ici par la nécessité de prendre en compte des fibrations non globalement triviales. Elle est imposée par le câblage de l'architecture (le hardware neuronal).

[21] Cf. [17] pour tout un ensemble de données expérimentales fascinantes justifiant les affirmations qui suvent.

Quant au remplissement, il correspond dans les aires rétinotopiques du cortex visuel à des fibrations : le système s'obtient en "recollant" par des connexions latérales les "colonnes" qui, au-dessus de chaque position rétinienne codent la fibre appropriée (direction, couleur, texture, etc.).

7.3 Généralisations

Il existe de nombreuses généralisations de cette situation de base. La plus connue est celle des topologies de Grothendieck : les recouvrements ouverts y sont définis en termes de "cribles" et le concept de faisceau est généralisé en celui de "site".

Une autre généralisation est celle des "frames" et des "locales". Les "frames" sont des treillis A possédant les propriétés des treillis d'ouverts $\mathcal{O}(X)$, autrement dit des treillis distributifs complets possédant des infs (intersections) finis et des sups (unions) quelconques. Les "locales" sont les objets de la catégorie duale. Dans le cas des espaces topologiques la correspondance est donnée par

$$f : X \to Y \text{ continue } \rightsquigarrow f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$$

l'image réciproque $f^{-1}(V)$ d'un ouvert V de Y étant un ouvert de X.

Les points sont alors définis comme des morphismes $p : A \to 2 = \mathcal{O}(1)$ (dans le cas des espaces topologiques, si $A = \mathcal{O}(X)$, les points correspondent à des vrais points $p : 1 \to X$). Soit $Pt(A)$ l'ensemble des points p de A. Une topologie est définie sur $Pt(A)$ par les sous-ensembles

$$\varphi(a) = \{p \in Pt(A) \mid p(a) = 1\} .$$

$\mathcal{O}(Pt(A))$ est la meilleure approximation possible du locale A par un "locale spatial".

7.4 La découverte de William Lawvere

Nous nous sommes restreints au cas le plus élémentaire, celui de relations de recouvrement de domaines spatiaux W par des qualités appartenant à un espace de qualités G. Nous avons vu que ces relations sont géométriquement décrites par des sections de fibrations appropriées.

Les faisceaux de sections prennent en charge l'aspect morphologique du schématisme thomien de la prédication. Mais qu'en est-il de son aspect logique ? Nous avons vu que le problème est le suivant. Les jugements portant sur des situations de recouvrement d'un domaine W par des qualités appartenant à un genre G ne font pas intervenir dans leur forme *syntaxique* la localisation de ces qualités. Ils se situent au niveau de G et non pas au niveau de W. La localisation reste implicite, c'est-à-dire *potentielle* et de nature "pragmatique". Pour rendre compte de ce caractère potentiel, il faut donc considérer le faisceau des sections Γ des sections de la fibration $\pi : W \times G \to W$ et le traiter en tant que tel comme une *unité syntaxique*. Mais dans le même temps, pour qu'un tel jugement puisse être vrai ou faux il faut – si l'on veut pouvoir appliquer la CNS de Thom et non pas celle de Tarsky – qu'au niveau de la sémantique, l'extension des objets considérés devienne *explicite*, autrement dit s'actualise.

La réponse naturelle à ces difficultés est de considérer les faisceaux comme des types de variables dont les référents sont des sections particulières. Or il se trouve que cela est rendu techniquement possible par un lien profond entre la théorie des faisceaux et la logique qui a été découvert par William Lawvere au début des années 1970.

Très brièvement exposées les idées directrices sont les suivantes.

La catégorie $\mathfrak{F}$ des faisceaux sur un espace topologique M possède un certain nombre de propriétés catégoriques fondamentales qui lui confère la structure de *topos*. Or celle-ci est précisément la structure catégorique permettant d'interpréter un langage des prédicats dans une catégorie d'objets. Selon Lawvere, cela permet de considérer $\mathfrak{F}$ comme un univers du discours dont les objets sont des entités variables dépendant d'une *localisation* spatiale U. Cette dépendance spatiale
(i) est constitutive des valeurs de vérité et possède donc une pertinence sémantique, mais
(ii) elle n'est pas directement visible dans la syntaxe (qui ne concerne que les faisceaux comme types logiques) et n'est donc pas syntaxiquement pertinente.

Or c'est exactement d'un tel formalisme dont nous avons besoin pour formaliser la façon "indexicale" et "pragmatique" dont opère l'extension spatiale dans les jugements perceptifs.

7.5 Éléments de théorie des topoï

Précisons un peu les choses. Par définition, un topos $\mathfrak{F}$ (de faisceaux) est d'abord une catégorie cartésienne fermée : il possède des produits fibrés (des "pull-backs"), un objet terminal – classiquement noté $\mathbf{1}$(pout tout objet A de

$\mathfrak{F}$ il existe un et un seul morphisme $A \to \mathbf{1}$) – et des objets "exponentiels" B^A qui permettent d'*internaliser* les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(A, B)$.[22] Le faisceau B^A est défini de façon évidente en utilisant les restrictions $A\,(U)$ et $B\,(U)$ aux ouverts : $B^A(U) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(A\,(U)\,, B\,(U))$. Il est appelé le "Hom interne" ou encore le faisceau des germes de morphismes de A vers B.

Il est trivial de vérifier que le foncteur $(\bullet)^A$ est adjoint à droite du foncteur $A \times (\bullet)$. Cela signifie que pour tout objet C de $\mathfrak{F}$ il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\underset{\mathfrak{F}}{\mathrm{Hom}}(C, B^A) \simeq \underset{\mathfrak{F}}{\mathrm{Hom}}(A \times C, B) \ .$$

Par exemple, pour $C = \mathbf{1}$, on obtient

$$\underset{\mathfrak{F}}{\mathrm{Hom}}(\mathbf{1}, B^A) \simeq \underset{\mathfrak{F}}{\mathrm{Hom}}(A \times \mathbf{1}, B) \simeq \underset{\mathfrak{F}}{\mathrm{Hom}}(A, B) \ .$$

Mais un morphisme $f : \mathbf{1} \to B^A$ est comme un "élément" de B^A. En fait, si A est un faisceau, un morphisme $s : \mathbf{1} \to A$ est une section globale de A, c'est-à-dire un élément $s \in A(M)$.

L'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(C, B^A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(A \times C, B)$ est évident dans le topos des ensembles : si f_c est une famille d'applications $f_c : A \to B$ alors elle est équivalente à l'application $f : A \times C \to B$ définie par $f(a, c) = f_c(a)$.

Si l'on considère B^A et Id_{B^A}, l'adjonction à droite définit ce que l'on appelle une co-unité $\varepsilon : A \times B^A \to B$ telle que pour chaque $f : C \to B^A$ (et donc $\mathbf{1} \times f : A \times C \to A \times B^A$) le morphisme associé $h : A \times C \to B$ soit donné par $h = \varepsilon \circ (1 \times f)$. La co-unité généralise l'application d'*évaluation* $(x, f) \mapsto f(x)$ de la théorie des ensembles.

Dans le topos **Ens** de la théorie des ensembles les sous-ensembles peuvent-être exprimés en termes catégoriques à partir de l'ensemble des valeurs de vérité $\{1, 0\} = \{\text{Vrai, Faux}\}$. En effet, si S est un sous-ensemble d'un ensemble A, on peut le reconstruire à partir de sa "fonction caractéristique" $\varphi_S : A \to \{1, 0\}$ par $S = \varphi_S^{-1}(1)$. Le prédicat $p(x)$ est alors vrai pour $x \in A$ si et seulement si le diagramme suivant est un pull-back :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & \{*\} \arrow[d, "\mathbf{Vrai}"] \\ A \arrow[r, "\varphi_S"] & \{1, 0\} \end{tikzcd}$$

[22] $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{F}}(A, B)$ est l'ensemble des morphismes de A vers B dans $\mathfrak{F}$.

où $\{*\}$ est un ensemble à un seul élément $*$ (i.e. l'objet $\mathbf{1}$ de **Ens**) et Vrai: $\{*\} \to \{1, 0\}$ envoie $*$ sur $\mathbf{1}$.

En tant que catégorie un topos $\mathfrak{F}$ possède aussi par définition un *classificateur de sous-objets*, c'est-à-dire un monomorphisme Vrai: $\mathbf{1} \to \Omega$ dans un ensemble Ω de "valeurs de vérité" tel que tout sous-objet S d'un objet A (i.e. tout monomorphisme $m : S \to A$) soit reconstructible par pull-back à partir d'une "fonction caractéristique" $\varphi_S : A \to \Omega$ de S :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \arrow[d, "\mathbf{Vrai}"] \\ A \arrow[r, "\varphi_S"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Ω est l'ensemble des "valeurs de vérité" du topos $\mathfrak{F}$. Ce classificateur "internalise" donc les sous-objets. Il en représente le foncteur. Dans la catégorie des ensembles **Ens**, $\Omega = \{0, 1\}$ correspond aux valeurs de vérité booléennes. C'est le fait que Ω puisse être beaucoup plus compliqué qui fait l'intérêt majeur de la théorie des topoï. Nous allons voir que c'est ce qui permet dans notre cas de localiser la vérité conformément à l'idée de René Thom.

À partir de ces constructions catégoriques, on peut définir d'autres constructions et donner un sens aux concepts "ensemblistes" d'élément, de propriété et de partie.

1. Par exemple, un morphisme $\theta : A \to \Omega$ est un "prédicat" de A, c'est-à-dire une propriété de ses "éléments généralisés" $a : B \to A$. La formule $\theta(a)$ est valide si et seulement si a "appartient" au sous-objet S de A défini par θ (i.e. $\varphi_S = \theta$), c'est-à-dire si et seulement si $\varphi_S \circ a =$ Vrai_B avec $\text{Vrai}_B : B \to \mathbf{1} \to \Omega$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "a"] \arrow[drr] & A \arrow[r, "\theta", "=\varphi_S"'] & \Omega \\ & & \mathbf{1} \arrow[u, "\text{Vrai}"'] \end{tikzcd}$$

2. De même, les parties de A (ses sous-objets) sont définies par $P(A) = \Omega^A$ (et donc $\Omega = P(\mathbf{1})$). Dans la catégorie des ensembles **Ens**, $\Omega = \{0, 1\}$ correspond aux valeurs de vérité booléennes. Il en va tout autrement ici. Le faisceau Ω est défini par$\Omega(U) := \{V \subset U\}$ et Vrai $: \mathbf{1} \to \Omega$ par $\text{Vrai}(U) : \mathbf{1} \to U \in \Omega(U)$, i.e. par l'élément maximal de $\Omega(U)$. Cela signifie :
(i) que la vérité devient spatialement localisée,

(ii) qu'"être vrai sur U" signifie "être vrai partout sur U".

$\Omega(U)$ n'est pas en général une algèbre de Boole (car le complémentaire d'un ouvert n'est pas un ouvert mais un fermé). C'est une algèbre de Heyting. Ω est donc un faisceau d'algèbres de Heyting.

7.6 Topoï et logique

Le point fondamental est que l'on peut canoniquement associer à un topos $\mathfrak{F}$ une "logique interne", c'est-à-dire :
(i) un *langage formel* $L_{\mathfrak{F}}$ appelé son langage de Mitchell-Bénabou,
(ii) une *sémantique* de type forcing appelée sa sémantique de Kripke-Joyal.

Comme nous l'avons vu, l'idée directrice est qu'un faisceau $X \in \mathfrak{F}$ peut être traité comme un *type* pour des variables x qui seront interprétées comme des *sections* s de X, $s \in X(U)$. On obtient donc *à la fois* une typification et une localisation spatiale des variables et c'est exactement ce dont nous avons besoin pour relier la géométrie des sections à une logique du jugement : la syntaxe des jugements porte sur les types et la sémantique perceptive sur la localisation. La sémantique concerne donc (dans le cas qui nous occupe ici) les conditions de vérité associées aux phénomènes de recouvrement de domaines spatiaux par des qualités. Ce qui est précisément la façon Thom définit la vérité des jugements perceptifs et ce que cherchaientt Clark et Pylyshyn.

Comme le souligne avec force Andreas Blass dans *Topoi and Computation* :

> The crucial point (...) is that topos theory connects a geometric aspect (at the forefront of the Grothendieck theory) with a logical aspect (at the forefront of the Lawvere-Tierney theory).

7.6.1 Syntaxe

De façon générale, la structure de topos d'une catégorie $\mathfrak{F}$ (de faisceaux) permet de construire récursivement les termes σ du langage $L_{\mathfrak{F}}$ comme des *morphismes* entre faisceaux.

Le langage possède des types, $\mathbf{1}$, Ω (type des formules et type des valeurs de vérité), des types de base, des types produits d'autres types ΠX_i, un type $P(X)$ de parties pour chaque type X, des variables typées $x : X$ pour chaque type X[23] et des symboles de fonction $f : A \to B$ entre types. On définit alors récursivement les *termes* typés de façon naturelle par les règles .

1. Il y a un terme unique $* : \mathbf{1}$ de type $\mathbf{1}$.
2. Si $\tau : A$ et $f : A \to B$ alors il y a un terme $f(\tau) : B$.
3. Si $\tau_i : A_i$ alors il y a un terme $\tau = \langle \tau_i \rangle : \Pi A_i$ et réciproquement si $\tau : \Pi A_i$ on sait définir ses projections $\tau_i : A_i$.
4. Si $\varphi(a) : \Omega$ est une formule avec $a : A$ alors il y a un terme "partie de A satisfaisant φ" $\{a \mid \varphi\} : P(A)$.
5. Si $\sigma, \tau : A$ alors $\sigma = \tau : \Omega$.
6. Si $\sigma : A$ et $\tau : P(A)$ alors $\sigma \in \tau : \Omega$.

L'interprétation dans un topos $\mathfrak{F}$ se fait alors de la façon suivante. $* : 1$ est interprété par l'objet terminal $\mathbf{1}$. Si le terme σ est de type A et est construit à partir de variables libres x_i de types respectifs X_i, il est interprété par un morphisme $\sigma : \Pi X_i \to A$ qui traduit sa construction. Le fait décisif est que la structure de topos est précisément celle qui permet de définir toutes les structures logiques nécessaires en prenant Ω comme type pour les formules.

Soient par exemple $\sigma : X \to A$ et $\tau : Y \to A$ deux morphismes interprétant deux termes de même type A. Le terme $\sigma = \tau$ de type Ω sera interprété par le morphisme :

$$\sigma = \tau : Z = X \times Y \to A \times A \xrightarrow{\delta_A} \Omega$$

où δ_A est la fonction caractéristique du sous-objet diagonal $\Delta : A \to A \times A$. C'est la diagonale (côté géométrie) qui traduit l'égalité (côté logique). En théorie des ensembles σ et τ correspondent à des éléments a et b de A et la diagonale correspond aux paires (a, b) telles qye $a = b$.

De même, soient deux morphismes $\sigma : X \to A$ et $\tau : Y \to \Omega^A$ interprétant deux termes de types respectifs A et Ω^A. Le terme $\sigma \in \tau$ de type Ω est interprété par le morphisme :

[23] La notation standard $x : X$ pour "la variable x est de type X" ne doit pas être confondue avec d'autres notations, elles aussi standard, comme $f : A \to B$ pour des applications.

$$\sigma \in \tau : Z = X \times Y \to A \times \Omega^A \xrightarrow{e} \Omega$$

où e est le morphisme d'évaluation. En théorie des ensembles σ correspond à un élément a de A et τ à la fonction caractéristique d'un sous-ensemble S de A.

On définit aussi naturellement les termes $f \circ \sigma$ (termes composés), $\psi(\sigma)$ (termes fonctionnels), $\lambda_x \sigma$ (λ- termes), ainsi que les quantificateurs. Ces derniers sont les adjoints à droite et à gauche des morphismes "image inverse" $P(f) : P(B) \to P(A)$ (où $P(A) = \Omega^A$ est le faisceau des "parties" de A) canoniquement associés aux morphismes $f : A \to B$.

7.6.2 Sémantique

Quant à la sémantique de Kripke-Joyal, c'est une sémantique de type "forcing". Elle repose sur des règles du type $U \Vdash \varphi(s)$ ("U force la vérité de $\varphi(s)$") où U est un ouvert de M, s une section de $X(U)$, x une variable de type X et $\varphi(x)$ une formule. Côté syntaxe x est une variable typée, mais côté sémantique (dénotation) elle est une section s, i.e. un remplissement qualitatif d'une extension spatiale. La relation de forcing $\Vdash$ signifie que l'extension U localisant la vérité dans U valide $\varphi(s)$. Si $x : X$, si $\varphi(x)$ est une formule et si $s \in X(U)$, alors $U \Vdash \varphi(s)$ si et seulement si $s \in \{x|\varphi\}(U)$.

Les règles sémantiques naturelles pour les connecteurs logiques, l'implication, la négation et la quantification montrent que la logique interne d'un topos est en général de nature intuitionniste. Elles sont données par :

1. $U \Vdash \varphi(s) \wedge \psi(s)$ si et seulement si $U \Vdash \varphi(s)$ et $U \Vdash \psi(s)$. Cette règle est classique et dit que $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ doivent être toutes deux globalement réalisées sur U.

2. $U \Vdash \varphi(s) \vee \psi(s)$ si et seulement si il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de U tel que pour tout i on ait $U_i \Vdash \varphi(s \upharpoonright_{U_i})$ ou $U_i \Vdash \psi(s \upharpoonright_{U_i})$. Cette règle pour la disjonction est intuitionniste. Elle dit que localement sur U au moins l'une des $\varphi(s)$ ou $\psi(s)$ doit être réalisée. Si V (resp. W) est l'union des U_i forçant $\varphi(s \upharpoonright_{U_i})$ (resp. $\psi(s \upharpoonright_{U_i})$), alors $U = V \cup W$ avec $V \Vdash \varphi$ et $W \Vdash \psi$.

3. $U \Vdash \varphi(s) \Longrightarrow \psi(s)$ si et seulement si, pour tout $V \subseteq U$, $V \Vdash \varphi(s \upharpoonright_V)$ implique $V \Vdash \psi(s \upharpoonright_V)$.

4. $U \Vdash \neg\varphi(s)$ si et seulement si il n'existe pas de $V \subseteq U$, $V \neq \varnothing$ tel que $V \Vdash \varphi(s \restriction_V)$ (la négation $\neg$ est intuitionniste car Ω est une algèbre de Heyting et non pas une algèbre de Boole).

5. $U \Vdash \exists y \varphi(s, y)$ (y étant de type Y) si et seulement si il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de U et des sections $\beta_i \in Y(U_i)$ tels que pour tout $i \in I$ on ait $U_i \Vdash \varphi(s \restriction_{U_i}, \beta_i)$.

6. $U \Vdash \forall y \varphi(s, y)$ si et seulement si pour tout $V \subseteq U$ et $\beta \in Y(V)$ on a $V \Vdash \varphi(s \restriction_V, \beta)$.

Les subtilités de cette forme de sémantique résultent du problème suivant. Dans un topos, on peut interpréter des expressions de type ensembliste comme:

$$\{(x_i)_{i \in I} \in \Pi_i X_i \mid \varphi(x_i)\}$$

définies par $(a_i) \in \{(xi) \mid \varphi(x_i)\}(U)$ si et seulement si $U \Vdash \varphi(a_i)$. Mais on doit s'assurer que de telles expressions définissent des *sous-faisceaux*. Pour cela, il faut "faisceautiser" les sous-foncteurs intervenant dans de telles constructions.

8 Le problème des bords d'objets

Nous avons signalé plus haut la difficulté concernant le fait que l'extension des objets perçus est en général fermée dans la mesure où les objets sont limités par des bords. Qui plus est, on sait depuis Brentano que les bords ont un statut quelque peu paradoxal. Il y a plusieurs façons de prendre en compte cette difficulté. Nous en évoquerons deux pour conclure.

8.1 Les co-algèbres de Heyting

Une première idée, due à Lawvere, est d'utiliser des co-algèbres de Heyting. Dans une algèbre de Heyting d'ouverts, la négation $\neg U$ d'un ouvert U est l'intérieur de son fermé complémentaire, c'est-à-dire le plus grand ouvert V tel que $U \cap V = \varnothing$. Dualement, dans une co-algèbre de Heyting de fermés, la négation $\neg F$ d'un fermé F est la fermeture de son ouvert complémentaire, c'est-à-dire le plus petit fermé H tel que $F \cup H = 1$ (l'espace tout entier).

On a évidemment $\neg(F \cap H) = \neg F \cup \neg H$ (dualisation de l'intersection et de la réunion par la négation), mais on a seulement $\neg(F \cup H) \subseteq \neg F \cap \neg G$.

On définit alors le bord ∂F de F comme l'intersection $F \cap \neg F$. ∂F est donc défini en termes de contradiction logique. L'opérateur bord satisfait la règle de Leibniz :

$$\partial(F \cap H) = (\partial F \cap H) \cup (F \cap \partial H) \ .$$

Les bords B sont caractérisés par $\partial B = B$ c'est-à-dire par $\neg B = 1$ ou $\neg\neg B = 0$. De façon générale, la double négation $\neg\neg F \subset F$ (la fermeture de son intérieur) est le noyau régulier (le "regular core") de F. On a bien sûr $F = (\neg\neg F) \cup \partial F$.

8.2 Les fibrations stratifiées

Une autre façon d'introduire les bords dans le formalisme toposique est, de façon très générale, de tenir compte du fait que les remplissements intuitifs d'extensions (dans un espace de base M) par des qualités sont *segmentés* par des *discontinuités qualitatives* K. Les sections de fibration s exprimant ces remplissements sont discontinues le long de K. Par ailleurs il est justifié de faire l'hypothèse que K est un ensemble fini de morceaux de courbes régulières C_i s'arrêtant en des points d'arrêt A_j et se connectant à travers des points multiples T_k (génériquement des points triples si l'espace de base est de dimension 2) comme des jonctions en T. En effet les meilleurs modèles de segmentation dont on dispose (en particulier le modèle variationnel dit de Mumford-Shah) semblent posséder cette propriété (la conjecture est presque démontrée).[24]

Cela signifie que K stratifie M. En dimension 2, les strates de dimension 2 sont les composantes connexes du complémentaire de K. Elles sont ouvertes. Ce sont les régions homogènes de remplissement qualitatif. Les strates de dimension 1 sont les morceaux de courbes C_i et les strates de dimension 0 les points singuliers isolés A_j et T_k .

On peut alors reprendre le formalisme faisceautique du recollement de sections locales mais
(i) en considérant des ouverts stratifiés (U, K_U) et en imposant des règles de compatibilité dimensionnelle pour le recollement des strates, et

[24] Cf. [17] chapitre 11.

(ii) en permettant aux sections d'être discontinues le long des strates singulières de K_U.

Qui plus est, pour que le formalisme proposé soit plausible, il faudrait également étendre les formulations "faisceautiques" et "toposiques" aux cas où les fibres des fibrations considérées sont catégorisées (au sens cognitif).

9 La structure des jugements perceptifs : combler le hiatus morphologique / logique

Revenons à notre problème husserlien-thomien des liens entre la présentation perceptive $< S, p >$ et la représentation prédicative "S est p". Soit M l'espace et C la fibration (triviale) de base M et de fibre l'espace G, par exemple des couleurs. Le genre qualitatif G est catégorisé en espèces $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Soit $\mathfrak{C}$ le faisceau des sections de C. Aux différentes catégories C_i (au sens non mathématique d'"espèces" du "genre" G), correspondent des sous- faisceaux $\mathfrak{C}_i$ de $\mathfrak{C}$.

Soit S un *symbole* dénotant un individu. S est un *index* qui, dans chaque situation perceptive (monde possible) $\mathfrak{M}$, sélectionne son extension $W_S \in \mathcal{O}(M)$ et, pour tout genre pertinent de qualité G, une section $g_S \in \mathfrak{C}(W_S)$. Cela signifie que, relativement à G, S s'interprète comme un morphisme $g_S : W_S \to \mathfrak{C}$, c'est-à-dire comme un point de $\mathfrak{C}$ à valeurs dans W_S. Soit alors p la catégorie-espèce C_i considérée et $\mathfrak{p}$ le sous-faisceau de $\mathfrak{C}$ associé. On peut retraduire l'interprétation thomienne (ante-prédicative, pré-judicative) du jugement "S est p" en disant que

$$\text{“}S \text{ est } p\text{” est vrai si et seulement si } g_S \in \mathfrak{p}(W_S) \ .$$

Le sous-objet $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{C}$ correspond à un prédicat sur $\mathfrak{C}$, c'est-à-dire à un morphisme $\varphi_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{C} \to \Omega$. $\varphi_{\mathfrak{p}}$ associe à toute section g de $\mathfrak{C}(U)$ l'ouvert maximal V de U sur lequel g est à valeurs dans p. On a alors :

$$\text{“}S \text{ est } p\text{” est vrai si et seulement si } \varphi_{\mathfrak{p}}(g_S) = \text{Vrai} \ .$$

On retrouve ainsi l'interprétation ensembliste-prédicative (tarskienne) standard :

$$\text{“}S \text{ est } p\text{” est vrai si et seulement si } p(S) = \text{Vrai}$$

mais en ayant tenu compte de *l'extension spatiale* de l'entité S considérée pour *localiser la vérité*, comme le souhaitaient Clark et Pylyshyn et comme l'avaient eidétiquement décrit et formalisé Husserl puis Thom.

10 Conclusion

Nous pensons que l'approche proposée ici constitue le formalisme de complexité minimale permettant, et uniquement dans le cas des propositions les plus triviales, de faire explicitement le lien entre perception et prédication en partant des conditions de vérité définies par René Thom. Ces développements formels prouvent qu'il est possible d'articuler le schématisme morphologique sur une sémantique formelle de nature indexicale (donc en fait plus pragmatique que proprement sémantique). Dans une telle approche, il apparaît que l'espace fonctionne bien comme une modalité dans la mesure où la sémantique des situations où les variables sont à la fois typifiées et localisées est une sémantique modale à la Kripke. Cela permet de réinterpréter le caractère "synthétique a priori" de l'espace.

References

[1] ASPERTI, A., LONGO, G., 1991. *Categories, Types, and Stuctures*, MIT Press, Cambridge, 1991.

[2] BELL, J., 1988. *The Development of Categorical Logic*, https://publish.uwo.ca/~jbell/catlogprime.pdf

[3] BLASS, A. 1993. "Topoï and Computation", *Current Trends in Theoretical Computer Science*, 1993, 310-317.

[4] BURKELL, J., PYLYSHYN, Z., 1997. "Searching through subsets: a test of the visual indexing hypothesis", *Spatial Vision*, 11 (2), 1997, 225-258.

[5] CLARK, A., 2004. "Feature-Placing and Proto-objects", *Philosophical Psychology*, 17 (4), 2004, 443-469.

[6] EVANS, 1982. *The Varieties of Reference*, Clarendon Press, Oxford, 1982.

[7] HUSSERL, E., 1954. *Erfahrung und Urteil , Untersuchungen zur Genealogie der Logik*, Claassen&Goverts, Hamburg, 1954. Trad. D. Souches-Dagues, PUF, Paris, 1970.

[8] MAC LANE, S., MOERDIJK, I., 1992. *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer, New York, 1992.

[9] Mc DOWELL, 1994. *Mind and World*, Harvard University Press, Cambridge, 1994.

[10] MOERDIJK, I., REYES, G., 1991. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer, Berlin, 1991.

[11] MULLIGAN, K., 1995. "Perception", *The Cambridge Companion to Husserl*, (B. Smith, ed.), 1995, 168-238.

[12] PETITOT, J., 1992. *Physique du Sens*, Éditions du CNRS, Paris, 1992.

[13] PETITOT, J., 1994a. "Phenomenology of Perception, Qualitative Physics and Sheaf Mereology", *Philosophy and the Cognitive Sciences*, Proceedings of the 16th International Wittgenstein Symposium, (R. Casati, B. Smith, G. White eds), Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, 387-408.

[14] PETITOT, J., 1994b. "La sémiophysique : de la physique qualitative aux sciences cognitives", *Passion des Formes, à René Thom* (M. Porte éd.), 499-545, E.N.S. Éditions, Fontenay-Saint Cloud, 1994b.

[15] PETITOT, J., 1995. "Sheaf Mereology and Husserl's Morphological Ontology", *International Journal of Human-Computer Studies*, 43, 1995, 741-763, Academic Press.

[16] PETITOT, J., 1999. "Morphological Eidetics for Phenomenology of Perception", *Naturalizing Phenomenology: Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science*, (J. Petitot, F. Varela, J.-M. Roy, B. Pachoud, eds.), Stanford University Press, 1999, 330-371.

[17] PETITOT, J., 2008. *Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles*, Les Éditions de l'École Polytechnique, Distribution Ellipses, Paris, 2008.

[18] PYLYSHYN, Z., 2001. “Visual indexes, preconceptual objects, and situated vision”, *Cognition*, 80, 2001, 127-158.

[19] THOM, R., 1972. *Stabilité structurelle et morphogenèse*, InterEditions, Paris, 1972.

[20] THOM, R., 1988. *Esquisse d’une Sémiophysique*, InterÉditions, Paris, 1998.