Commentaires de l'article de René Thom "Stable defects in ordered media"*

Jean Petitot

31 octobre 2020

1 TC équivariante

Dans le cadre de la TC, le problème général des *ruptures spontanées de symétries* concerne la TC *équivariante*. Étant donnée une variété interne M sur laquelle opère un groupe G de difféomorphismes, on considère des déploiements universels G-invariants de potentiels G-invariants sur M. Si G est un groupe de Lie compact, son action définit une stratification Σ de M par les types des orbites, x et $y \in M$ appartenant à la même strate S de Σ si et seulement si leurs stabilisateurs respectifs $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ et G_y sont conjugués dans G. Si le potentiel $f : M \to \mathbb{R}$ est G-invariant, x est un point critique si et seulement si x est un point critique de $f|_S$ où S est la strate de x, et alors toute l'orbite $G(x)$ de x est critique. Cela implique en particulier que si S correspond à un stabilisateur G_x maximal, S est fermée dans M, donc compacte si M est compacte, que par suite $f|_S$ possède un point critique et que f admet une orbite critique (théorème de Louis Michel [11]).

La TC équivariante a pu être développée à partir du théorème de Gerald Schwarz généralisant au cas $\mathcal{C}^\infty$ le théorème de finitude classique de Hilbert sur les invariants.[1] Si G est un groupe de Lie *compact* opérant linéairement sur $\mathbb{R}^n$ (cette représentation linéaire $\theta : G \to GL(n, \mathbb{R})$ étant complètement réductible et pouvant être supposée orthogonale puisque G est compact), le théorème de Hilbert dit que l'algèbre $\mathbb{R}[x]^G$ des polynômes G-invariants est engendrée comme $\mathbb{R}$-algèbre par un nombre *fini* de polynômes (homogènes) G-invariants $\rho_1, \ldots, \rho_k$. Si ρ est le morphisme algébrique :

$$\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1 = \rho_1(x), \ldots, y_k = \rho_k(x)) \ ,$$

le morphisme associé entre $\mathbb{R}$-algèbres $\rho^* : \mathbb{R}[y] \to \mathbb{R}[x]^G$ est donc *surjectif* et tout polynôme G-invariant est par conséquent un polynôme en les ρ_i. Il est facile de montrer que l'application ρ est propre, qu'elle sépare les orbites de G et, par passage au quotient, qu'elle induit un *homéomorphisme* $\rho' : \mathbb{R}^n/G \to \rho(\mathbb{R}^n)$.

Autrement dit, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application (continue) G-invariante quelconque, elle ne dépend de x qu'en étant une fonction (continue) des ρ_i. Le théorème de Schwarz dit que l'application naturelle $\rho^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$ est également *surjective*, autrement dit que le plongement $\rho' : \mathbb{R}^n/G \to \mathbb{R}^k$ est différentiable au sens où $\mathbb{R}^n/G$ muni de l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$ est isomorphe à $\rho(\mathbb{R}^n)$ muni de l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k) \mid_{\rho(\mathbb{R}^n)}$. A partir de là on peut généraliser au cas équivariant tous les résultats principaux de la théorie des singularités développée par Whitney, Thom, Arnold et Mather.[2]

Considérons alors un déploiement G-universel f_λ d'une fonction f_0 possédant une singularité isolée au point $a \in M$ de stabilisateur $G_a = G$. Pour $\lambda \neq 0$, l'orbite critique ponctuelle $G(a) = \{a\}$ bifurquera en général en orbites $G(x_0)$ de stabilisateurs $G_{x_0} \neq G$. Il y aura

* *Springer Series in Synergetics* 4, 1979, 129–133

[1] *Cf.* Poénaru [13].

[2] *Cf.* par exemple Schwarz [14], Poénaru [13].

donc rupture spontanée de symétrie. On peut également considérer le déploiement universel W (non G-universel) de f_0. Alors la G-invariance de f_0 induit une action compensatrice de G dans W, et donc une stratification par les classes de conjugaison des stabilisateurs. Ces strates définissent les ruptures de symétrie que le système décrit par f_0 peut présenter.[3]

2 Défauts des milieux ordonnés

Les *défauts* des milieux ordonnés proviennent du fait que les symétries locales prescrites par le principe de minimisation de l'énergie ne sont pas compatibles avec les contraintes topologiques imposées par les conditions au bord. Par exemple lorsque l'on passe d'une phase liquide à une phase solide cristalline, la nucléation initiale se développe en domaines ordonnés locaux et indépendants dont les ordres sont incohérents et qui ne peuvent se recoller en une structure globale qu'à travers des parois de défauts. Avec les progrès rapides, nombreux et importants faits dans l'analyse des phases mésomorphes (cristaux liquides), ils sont devenus un domaine de choix pour les applications physiques de la théorie des singularités et pour certains concepts de topologie algébrique. Pour une introduction à ce sujet, on pourra se référer par exemple, en plus de Thom [16], [17], à Kléman-Toulouse [10], de Gennes [5], Bouligand [2], Nabarro [12], Friedel [6], Kléman [8]. Pour une présentation des défauts propres aux smectiques (travaux de Friedel et Grandjean sur les coniques focales des cyclides de Dupin qui en sont constitutives) on pourra consulter par exemple Bouligand [2]. Pour les interactions et les configurations stables entre défauts (lignes de désinclinaison moebienne, anneaux de dislocations coin, décrochements, etc.) dans les cholestériques, on pourra consulter par exemple Bouligand [3].

Sans entrer dans les détails, on peut présenter intuitivement de la façon suivante l'introduction des concepts de topologie algébrique dans la théorie des défauts. Un milieu ordonné (comme un cristal liquide) est caractérisé par un certain type de symétrie (plus compliqué que celui des réseaux). Qui plus est, ce type de symétrie peut être réalisé dans l'espace avec une position et une orientation données. On définit ainsi une variété d'états internes $\mathcal{V}$ (*cf.* Kléman [8] et Toulouse [18]). Soit alors $\mathcal{U}$ un ouvert de l'extension spatiale W du milieu considéré. Aux points réguliers de $\mathcal{U}$, la structure du milieu est localement triviale. Soit K le fermé complémentaire de l'ouvert des points réguliers. K est le fermé des *défauts*. Dans les bons cas, K possède une structure stratifiée. Soit Z sa strate de dimension maximale. Soient $z \in Z$ et N_z le plan normal à Z en z. Soit S une petite sphère de N_z centrée sur Z. Elle est enchaînée à Z.

Soit θ: $S \to \mathcal{V}$ l'application associant à $s \in S$ la structure locale du milieu en s. *Le principe de Kléman-Toulouse* dit que le défaut K est structurellement stable si et seulement si θ n'est pas homotopiquement triviale. Si on l'applique au cas des smectiques, on voit qu'il ne peut y avoir de strates stables de codimension 1 de K. En effet dans ce cas, N_z serait de dimension 1 et donc $S = S^0$. Mais comme $\mathcal{V}$ est connexe, toute application θ: $S^0 \to \mathcal{V}$ est homotopiquement triviale. Les surfaces des smectiques sont par conséquent telles que leur lieu focal dégénère en courbes de dimension 1. Ce sont donc des cyclides de Dupin, fait déjà connu de Granjean et Friedel.[4]

Si θ: $S \to \mathcal{V}$ n'est pas homotopiquement triviale, les groupes d'homotopie $\pi_k(\mathcal{V})$ classifient les types des défauts (stables). On a ainsi développé une théorie *topologique* des défauts et de leurs "interactions" (coalescence, croisement, etc.) qui est de toute beauté. Celle-ci est liée à la TC car l'espace interne est interprétable comme celui d'une fonction potentiel $V : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sur l'espace interne des configurations moléculaires locales. V est invariante sous l'action du groupe d'invariance de $\mathbb{R}^3$ et ses minima sont des orbites sous cette action (TC *équivariante*).

[3] *Cf.* par exemple Thom [15], Poénaru [13], Michel [11], Golubitsky-Schaeffer [7], Bouligand [4].
[4] *Cf.* Bouligand [2].

3 Travaux d'Yves Bouligand

La théorie des défauts des mésophases a trouvé un champ d'application remarquable en biologie lorsqu'Yves Bouligand a pu montrer que certaines textures biologiques (comme les figures en arceaux observables au microscope dans les organisations fibrillaires de la carapace des crustacés et de beaucoup d'autres tissus biologiques) manifestent exactement les mêmes symétries que certains cristaux liquides et sont donc analogues à des mésophases. La théorie des défauts étant topologico-géométrique et indépendante de la physique spécifique des substrats, elle est applicable à des situations physiques très diverses (*cf.* Bouligand [1], [**?**] et [4]).

Yves Bouligand était très proche de Thom. Il fut président de la "Société francophone de biologie théorique" fondée en 1985 par Pierre Delattre et René Thom qui en furent les premiers présidents et sa découverte est l'un des exemples les plus exceptionnels, expérimentalement validable et quantitativement mesurable, d'approche "à la Thom" de matériels biologiques. Les auto-assemblages cristallins liquides sont régis par des principes "platoniciens" de géométrie et de topologie algébrique très largement indépendants de la nature matérielle spécifique des substrats..

Bibliographie

[1] Bouligand, Y., 1969. Sur l'existence de "pseudomorphoses cholestériques" chez divers organismes vivants, *Journal de Physique*, 11-12, C4, 30, 90-102.

[2] Bouligand, Y., 1972. Recherches sur les textures des états mésomorphes I, *Journal de Physique*, 33, 525-547.

[3] Bouligand, Y., 1974. Recherches sur les textures des états mésomorphes VI, *Journal de Physique*, 35, 959-981.

[4] Bouligand, Y., 1981. Symétries et brisure de symétrie en biologie, *SBS 1981*.

[5] de Gennes, P.G., 1974. *The Physics of Liquid Cristals*, Clarendon Press, Oxford.

[6] Friedel, J., 1964. *Dislocations*, Pergamon Press, Oxford.

[7] Golubitsky, M., Schaeffer, D., 1979. Imperfect Bifurcation in the Presence of Symmetry, *Comm. Math. Phys.* 67, 205-232.

[8] Kléman, M., 1977-1978. *Points, lignes, parois dans les solides cristallins et les fluides anisotropes*, Editions de Physique, Orsay.

[9] Kléman, M., 1978. Aspects classiques et aspects récents de la théorie des défauts, *Journ. de Phys.*, 39, 8, C5, 23-24.

[10] Kléman, M., Toulouse, G., 1976. Principles of Classification of Defects in Ordered Media, *Jour. de Phys.*, 37, L 149.

[11] Michel, L., 1980. Symmetry Defects and Broken Symmetry, *Rev. Mod. Phys.*, 52, 617-751.

[12] Nabarro, F.R.N., 1967. *Theory of Crystal Dislocations*, Oxford University Press, Oxford.

[13] Poénaru, V., 1976. *Singularités en présence de symétries*, Lecture Notes in Mathematics, 510, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.

[14] Schwarz, G., 1975. Smooth Functions Invariant under the Action of a Compact Lie Group, *Topology*, 14, 63-68.

[15] Thom, R., 1976. Symmetries Gained and Lost, *Mathematical Physics and Physical Mathematics*, (K. Maurin, R. Raczka eds.), 293-320, Polish Scientific Publishers, Varsovie.

[16] Thom, R., 1979. Stable Defects in Ordered Media, *SSP 1979*, 129-133.

[17] Thom, R., 1981. Mathematical Concepts in the Theory of Ordered Media, *Cours des Houches : Physique des Défauts*, 388-420, North-Holland, Amsterdam.

[18] Toulouse, G., 1980. Topologie et défauts dans les milieux ordonnés, *MBM 1980*, 67-69.