Approche mathématique des catastrophes

Jean Petitot*

2020

Résumé

Nous présentons le modèle mathématique général de la théorie des catastrophes en l'illustrant par l'exemple typique des transitions de phases.

Mots clés. Bifurcation, catastrophe, cusp, phénomène critique, point critique, singularité, système dynamique, stabilité structurelle, transition de phase.

Key words. Bifurcation, catastrophe, critical phenomenon, critical point, cusp, dynamical system, phase transition, singularity, structural stability.

Introduction

La théorie des catastrophes est le nom qui a été donné par Christopher Zeeman à l'utilisation dans différents domaines de la théorie des bifurcations des états d'un système. Il s'agit de situations où un système change brutalement d'état interne lorsque certains des paramètres qui le contrôlent traversent des valeurs critiques. Les mathématiques sous-jacentes sont souvent celles des instabilités provenant de l'existence de singularités dans les fonctions d'état du système. Elles ont été développées en particulier par René Thom dans les années 1960 à la suite des travaux pionniers de Hassler Whitney, mais elles sont l'œuvre d'une pléiade de grands mathématiciens.[1] Dans le contexte général de la théorie des singularités d'applications différentiables et des bifurcations de systèmes dynamiques, la théorie des singularités correspond à la théorie des catastrophes "élémentaires" (TCE) et celle des bifurcations générales à la théorie des catastrophes "généralisées" (TCG).

Dans les sciences naturelles, les phénomènes "catastrophiques" par excellence sont ce que l'on appelle les *phénomènes critiques*, comme par exemple les *transitions de phases*.[2] Il s'agit de situations où des interactions complexes entre unités élémentaires de niveau "micro" peuvent donner lieu à des transformations brutales ("catastrophiques") de structures globales émergentes "macro".

1 L'exemple des transitions de phases

Un bon exemple remplaçant de longs discours, revenons sur le cas le plus simple de transition de phases du premier ordre que nous avons tous appris à l'école.

Considérons un fluide F (de l'eau par exemple). L'état macroscopique de ce fluide, supposé être en équilibre thermodynamique, est décrit par trois paramètres d'état : la température T (variable intensive conjuguée de la variable extensive S qu'est l'entropie), la pression P (variable intensive) et le volume V (variable extensive conjuguée de P). A l'équilibre, ces trois paramètres sont liés par une *équation d'état* $f(T, P, V) = 0$. Cela signifie que les points (T, P, V) de $\mathbb{R}^3$ qui représentent un état thermodynamique de F s'accumulent

*École des Hautes Études en Sciences Sociales (EHESS).

[1] Pour les travaux mathématiques de René Thom on pourra se référer aux *Œuvres mathématiques complètes* en cours de parution à la Société Mathématique de France [3]. Pour une introduction à la théorie des singularités on pourra se référer à [2].

[2] Pour une introduction à la théorie des phénomènes critiques on pourra se référer à [1].

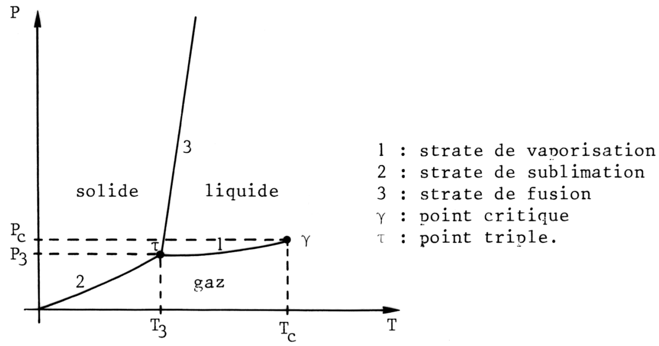

Figure 1: Un diagramme de phases typique.

expérimentalement sur la surface des états Σ d'équation $f = 0$, surface qui est caractéristique du système thermodynamique F et dont la géométrie en résume la phénoménologie macroscopique.

Dans le plan de dimension 2 des variables intensives $W = (T, P)$ considéré comme espace de contrôle (on appelle par convention ces paramètres de contrôle des variables "externes", le volume étant alors une variable "interne"), les points où se produisent des transitions de phases constituent un graphe de dimension 1 (et donc de codimension $2 - 1 = 1$) communément appelé *diagramme de phases* (*cf.* Fig. 1). Cet ensemble singulier K – l'ensemble "catastrophique" du système – partitionne l'espace W en domaines correspondant aux diverses phases que peut présenter le système F. Il "externalise" donc les compétitions entre états internes. Il est constitué de lignes de *coexistence* de deux phases (strates de conflit de codimension 1) aboutissant à des points isolés (strates de codimension 2) correspondant à des valeurs déterminées de T, P et V, et qui sont de deux types :

1. un point triple τ de coexistence de trois phases,

2. un point γ – dit point critique – de coalescence de deux phases.[3]

Phénoménologiquement (qualitativement) parlant, la géométrie des diagrammes de phases est (localement) celle des catastrophes élémentaires (TCE). Considérons par exemple les descriptions classiques des isothermes (T = cste), des isobares (P = cste) et des isochores (V = cste) au voisinage du point critique $\gamma_\Sigma = (T_c, P_c, V_c)$ (*cf.* Fig. 2).

Elles montrent que la surface des états Σ est qualitativement une surface "fronce" constituée par la fusion de deux nappes délimintées par deux "plis" en un point "fronce" γ_Σ dont la projection $\pi(\gamma_\Sigma)$ sur le plan W est le point critique γ (Fig. 3).

En TCE, cette surface cubique omniprésente est liée à la catastrophe déployant une singularité dite "cusp", c'est-à-dire une singularité d'une fonction $\varphi(x)$ d'une variable x où deux minima fusionnent avec un maximum. Le modèle canonique est la fonction $\varphi(x) = x^4/4 + ux^2/2 + vx$ qui possède ce type de singularité pour $u = v = 0$ et la stabilise en la déployant dans le plan des paramètres de contrôle (u, v). Les points critiques au sens mathématique (*i.e.* les minima et les maxima) de $\varphi(x)$ sont les points où $\varphi'(x) = 0$ et satisfont donc $x^3 + ux + v = 0$. La surface fronce est alors la surface d'équation $\varphi'(x) = x^3+ux+v = 0$ dans le $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, u, v).et c'est précisément elle qui est représentée à la figure. 3. Dans le plan W des contrôles (u, v) il y a une "strate de conflit" où les deux

[3]Dans la théorie mathématique des fonctions différentiables, un point critique est un point où la différentielle *df* s'annulle. Les minima non dégénérés (*i.e.* qui ne fusionnent pas plusieurs minima) sont par exemple des points critiques. Dans la théorie des transitions de phases, un point critique est au contraire un point de coalescence de deux phases. Si les phases sont les minima d'un potentiel thermodynamique, un point critique fusionne au moins deux minima en un minimum dégénéré.

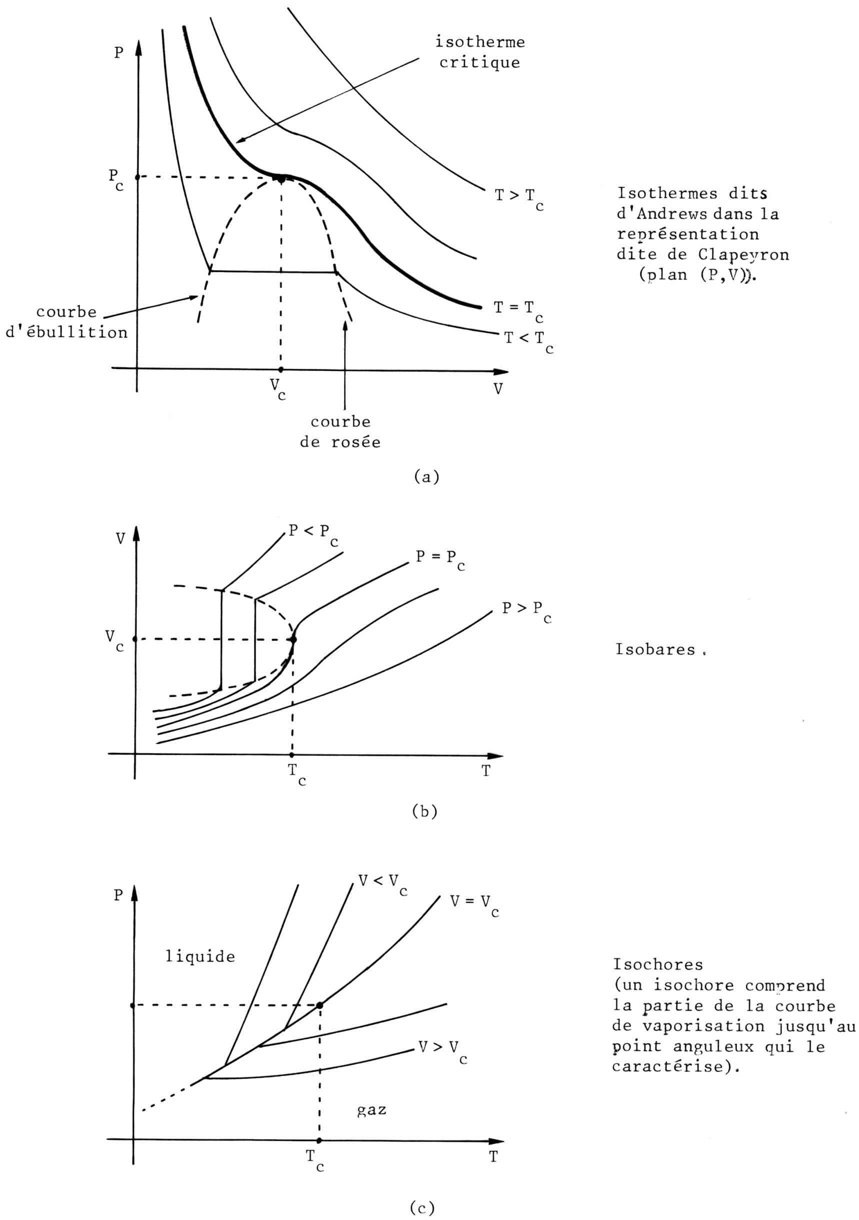

Figure 2: Les isothermes, les isobares et les isochores d'un fluide au voisinage du point critique.

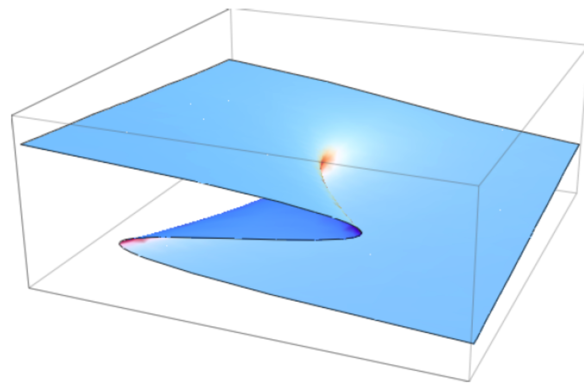

Figure 3: Une surface fronce.

minima de $\varphi(x)$ sont à la même hauteur et deux “strates de bifurcation” sur lesquelles se projettent les plis de Σ et où l'un des minima fusionne avec le maximum en un point d'inflexion.

Le lien des transitions de phases avec les catastrophes vient de la fonction d'état $f(T, P, V)$ dont les minima représentent les phases en vertu d'un principe variationnel. L'ensemble singulier K au voisinage de γ est donné par la convention, dite de Maxwell, stipulant que les isothermes cubiques doivent être remplacées par des isothermes à palier (*cf.* Figs. 2 et 4) dont le palier est défini par l'égalité des aires A et B de la figure 5 (ce qui revient à remplacer l'énergie libre à deux minima par sa convexifiée).

Si l'on admet cette explication classique, alors le profond théorème de classification des CE de Whitney-Thom implique mathématiquement que tous les points critiques soient *qualitativement* (différentiablement) équivalents, en l'occurrence à des fronces de la surface caractéristique Σ. La thermodynamique classique avait déjà reconnu cette *universalité* fondamentale et, en fait, était même allée plus loin puisqu'elle avait établi une équivalence *quantitative* des points critiques. C'est la fameuse “loi des états correspondants” affirmant que, à condition de mesurer les paramètres T, P, V avec un jeu d'unités propres à chaque corps, les équations d'états des divers fluides deviennent toutes identiques à une équation *universelle*. Une telle équation avait été approchée à partir de l'équation des gaz parfaits $PV = rT$ en introduisant un volume minimal b du gaz et en perturbant la pression P par un terme a/V^2 moyennant les interactions moléculaires. C'est la célèbre équation de Van der Waals $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = rT$. Nous savons *a priori* qu'elle doit être équivalente au modèle standard du cusp $\varphi(x) = x^4/4 + ux^2/2 + vx$, c'est-à-dire à la surface $\varphi'(x) = x^3 + ux + v = 0$. Cela se vérifie facilement. Le point critique est donné par $P_c = \frac{a}{27b^2}$, $V_c = 3b$ et $T_c = \frac{8a}{27br}$. En utilisant les variables réduites $p = \frac{P - P_c}{P_c}$, $v = \frac{V - V_c}{V_c}$, $t = \frac{T - T_c}{T_c}$ et en prenant pour variable interne non plus le volume mais $x = \frac{V_c - V}{V} = -\frac{v}{1 + v}$, l'équation de Van der Walls devient $x^3 + ux + v = 0$ avec $u = \frac{8t + p}{3}$ et $v = \frac{8t - 2p}{3}$.

2 Quelques autres exemples

Il existe une foule d'autres exemples de phénomènes catastrophiques dans les sciences naturelles dont on a construit des modèles catastrophistes rigoureux. Citons-en rapidement quelques uns.

1. D'abord, depuis la période héroïque du XIX^e siècle, la théorie des transitions de

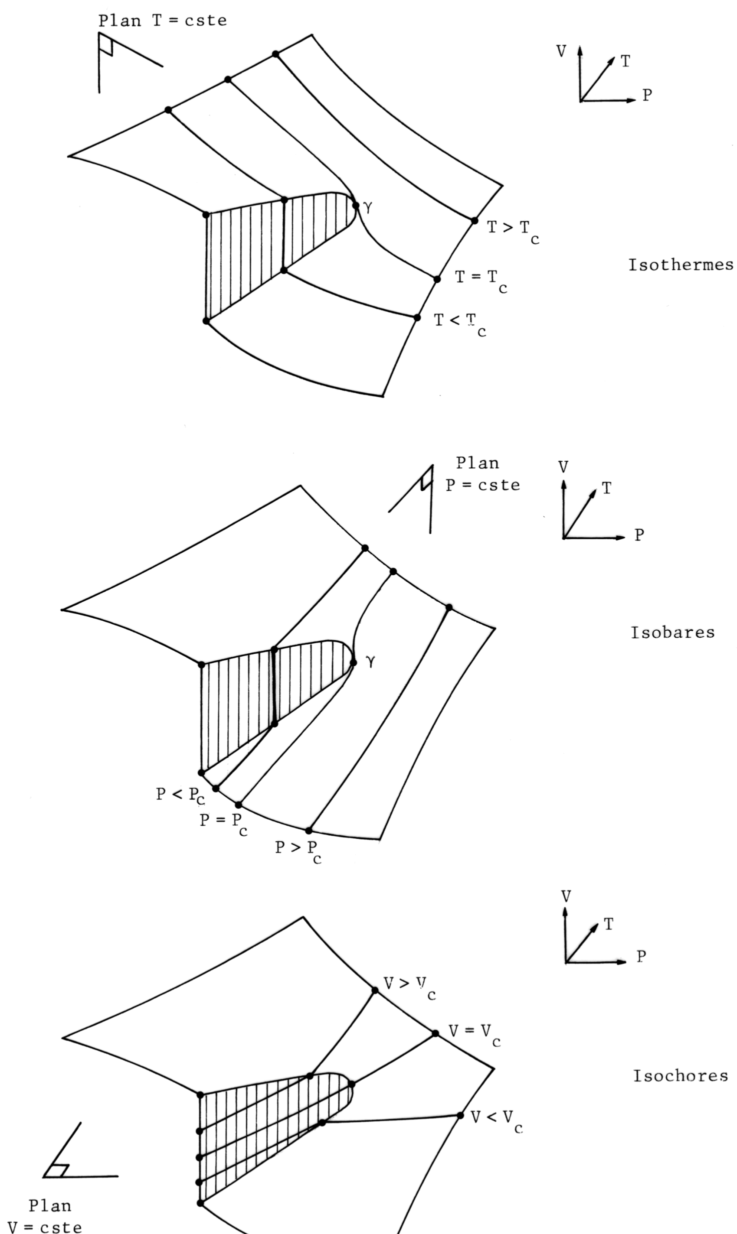

Figure 4: Les isothermes, isobares et isochores d'un fluide définis sur la surface des états (surface fronce d'une catastrophe cusp avec la convention de Maxwell).

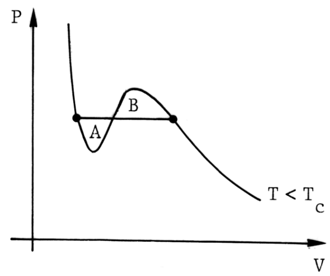

Figure 5: La convention de Maxwell remplaçant une isotherme critique par une isotherme à palier.

phases s'est considérablement développée et a inclus en particulier les transitions de phases magnétiques dont la modélisation en termes de réseaux de spins a conduit au "groupe de renormalisation". On sait qu'au delà d'une température critique T_c (dite point de Curie), un corps ferromagnétique devient paramagnétique. Mais contrairement à ce qui se passe dans la transition du premier ordre liquide/gaz, il n'existe pas de coexistence des deux phases, et la transition est *continue.* Dite du deuxième ordre, elle est due à une compétition entre d'un côté un phénomène coopératif tendant à faire aligner les moments magnétiques atomiques et d'un autre côté l'agitation thermique des atomes. Il s'agit là d'un phénomène spontané de *rupture de symétrie*, de passage d'une phase désordonnée de groupe de symétrie G à une phase ordonnée de groupe de symétrie G' un sous-groupe de G.

Dans ce contexte, l'approche en termes de TCE correspond à ce que l'on appelle la théorie du "champ moyen" ou encore la théorie de Landau.[4] L'idée centrale de Lev Landau était que ces ruptures de symétrie peuvent se décrire à partir d'un *paramètre d'ordre* η qui est une variable extensive nulle dans la phase désordonnée et non nulle dans la phase ordonnée. Ce paramètre d'ordre pouvant être un scalaire, un vecteur, une phase angulaire, un tenseur, etc., la théorie de la représentation des groupes devient un outil essentiel. Lorsque η, qui est a priori une densité $\eta(x)$ dépendant du point x du substrat W considéré, peut être considéré comme une constante (ce qui est une simplification considérable négligeant en particulier les fluctuations), le système est décrit par l'énergie libre $F(\eta)$ dont les minima représente les phases, ce qui ramène le problème à un problème de TCE, *i.e.* un problème de compétition entre les minima d'une fonction d'état.

2. Toutes les CE ont été trouvées (indépendamment des travaux de Thom) par les mécaniciens John M.T. Thompson et George W. Hunt dans l'analyse des bifurcations des *structures élastiques.* Le cas trés simple du flambage d'une lame élastique avait déjà été analysé par Euler en 1744. Si l'on exerce des contraintes w sur une telle structure S, celle-ci emmagasine de l'énergie élastique et, à la traversée de valeurs catastrophiques de w, peut la relaxer brutalement en changeant de configuration. C'est d'ailleurs sur ce principe que Christopher Zeeman a construit sa célèbre "machine à catastrophes" [4].

3. Une autre classe de phénomènes intimement liés à la théorie des singularités et aux transitions de phases est celui des *défauts* que peuvent présenter les milieux ordonnés. Ceux-ci proviennent du fait que les symétries locales prescrites par le principe de minimisation de l'énergie ne sont pas compatibles avec les contraintes topologiques imposées par les conditions au bord. Par exemple lorsque l'on passe d'une phase liquide à une phase solide cristalline, la nucléation initiale se développe en domaines ordonnés locaux et indépendants dont les ordres sont incohérents et qui ne peuvent se recoller en une structure globale qu'à travers des parois de défauts. Depuis les progrès rapides, nombreux et importants faits dans l'analyse des phases mésomorphes (cristaux liquides), les défauts des milieux ordonnés sont devenus

[4] Pour des précision sur ce sujet d'une haute technicité, on pourra se référer par exemple à [1].

un domaine de choix pour les applications physiques de la théorie des singularités et pour certains concepts de topologie algébrique (cf. les travaux de Maurice Kléman et Gérard Toulouse).

4. Une des applications physiques rigoureuses les plus spectaculaires de la théorie des catastrophes concerne l'analyse des *caustiques* en optique (cf. les travaux de Michael Berry). Dans l'approximation de l'optique géométrique dans un milieu homogène et isotrope, les rayons lumineux sont des droites normales aux fronts d'ondes. Si S_0 est un front d'onde initial il évolue parallèlement à lui-même. Ce qui peut rendre la situation non triviale en introduisant des singularités sur les fronts d'ondes est, par conséquent, l'existence d'une *enveloppe* C des normales à S_0. Si elle existe, celle-ci est dite *caustique* de la propagation. Sur la caustique C il se produit une focalisation de l'énergie lumineuse. L'intensité y devient "infinie". On peut montrer que les singularités que peuvent présenter les caustiques génériquement sont des CE.

5. Citons également les phénomènes typiquement catastrophiques de formation et de propagation *d'ondes de choc* en acoustique (cf. les travaux de Martin Golubitsky). En effet, une onde de choc est une enveloppe de fronts d'ondes et, étant donnée l'inhomogénéité naturelle du milieu de propagation (l'air), ces fronts d'ondes peuvent présenter des singularités lorsque les "rayons" associés enveloppent des caustiques.

6. La TCE peut être considérée comme la théorie des singularités sous-jacente aux problèmes *variationnels*. A ce titre, elle est bien *universelle*. Lorsque l'hypothèse classique de *convexité* – qui est l'hypothèse essentielle de régularité dans la transformation de Legendre faisant passer du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien – n'est plus valable, les équations de Hamilton deviennent des équations contraintes et l'on doit alors faire appel à des techniques plus sophistiquées. Cette problématique a été remarquablement développée par Ivar Ekeland.

3 Les modèles catastrophistes

Après avoir donné plusieurs exemples de phénomènes modélisables en termes de "catastrophes" donnons un aperçu simplifié et non technique des modèles utilisés.

Soit S un système satisfaisant les hypothèses suivantes.

(a) Il existe un processus interne (en général inobservable) X qui définit les états internes que le système S est susceptible d'occuper de façon stable et ceux-ci sont en nombre fini.

(b) Le processus interne X définissant l'ensemble des états internes de S, ceux-ci sont en compétition, se déterminent réciproquement et le choix de l'un d'eux comme état actuel virtualise donc les autres.

(c) Il existe donc une instance de sélection I qui, sur la base de critères spécifiques du système, sélectionne l'état actuel parmi les états internes possibles.

(d) Le système S est contrôlé par un certain nombre de paramètres de contrôle, paramètres variant dans un espace W que, pour l'opposer au processus interne X, on appelle l'espace externe (ou espace de contrôle ou encore espace substrat) de S. On suppose de plus que le contrôle est "régulier"[5] au sens où le processus interne X est un processus X_w qui dépend de la valeur w du contrôle, qui varie "régulièrement" lorsque w varie dans W et qui, en se déformant, déforme la structure des états internes ainsi que leurs relations de détermination réciproque.

Soit alors $\mathfrak{X}$ l'espace des processus internes X possibles. Si les hypothèses précédentes sont vérifiées, le système S sera décrit d'abord par le champ (continu) $\sigma : W \to \mathfrak{X}$ associant à $w \in W$ le processus X_w et ensuite par l'instance de sélection I.

L'exemple standard est celui des phénomènes thermodynamiques de transitions de phases que nous avons évoqué. Dans un tel cas, le système S est le système thermodynamique considéré, les états internes sont les phases thermodynamiques (solide, liquide, gaz), l'instance

[5] Régulier au sens intuitif. Il s'agit de plus que de la continuité topologique (qui peut être très irrégulière et même fractale). Il s'agit de différentiabilité.

de sélection I est fournie par le principe de minimisation de l'énergie libre et les paramètres de contrôle sont la pression et la température. Quant au processus interne X_w, indescriptible en raison de sa complexité, il est celui de la dynamique moléculaire. Les valeurs critiques des paramètres de contrôle constituent, nous l'avons vu, un sous-ensemble K de W (le diagramme de phases) qui partitionne W en domaines correspondant aux divers états de S, autrement dit, qui le catégorise et y externalise sous la forme d'un système de discontinuités la compétition des états internes.

Il s'agit là d'une conséquence directe des hypothèses (a)-(d). En effet, un système $S = (W, \mathfrak{X}, \sigma, I)$ se manifeste phénoménologiquement par des qualités observables $q^1 \dots q^n$ exprimant son état interne. Autrement dit, le processus interne X_w s'extériorise en qualités sensibles q^i_w. Lorsque le contrôle w varie, l'état interne actuel varie (hypothèse (d)) et donc les qualités q^i_w varient également. Mais phénoménologiquement parlant, une variation régulière n'est qu'une forme d'invariance qualitative. Elle n'est donc pas significative. René Thom a alors appelé point *régulier* de W une valeur w du contrôle telle que les qualités observables q^i_w varient régulièrement – et restent donc stables – dans tout un voisinage U de w (cela présuppose évidemment que l'on ait défini la notion de voisinage sur W, *i.e.* une topologie). Les points réguliers constituent par définition un ouvert R_W de W, l'ouvert de stabilité des qualités.

Soit alors K_W le fermé complémentaire de R_W dans W. Par définition, les points de K_W sont les valeurs w du contrôle telles qu'au moins une qualité observable q^i_w subisse une discontinuité. Ce sont des valeurs critiques à la traversée desquelles le système S présente un comportement critique.

Cette description phénoménologique est intimement solidaire du concept mathématique de bifurcation. Supposons que le contrôle w parcourt un chemin γ dans W. Soit A_w l'état interne actuel initial sélectionné par I. Au cours de la déformation de X_w le long de γ – et donc, d'après l'hypothèse (d), de la structure A_w et des relations de détermination réciproque qu'il entretient avec les états virtuels B_w, C_w, etc. d'après l'hypothèse (b) – à la traversée d'une valeur critique, A_w ne satisfait plus aux critères de sélection imposés par I d'après l'hypothèse (c). Le système bifurque donc spontanément de A_w vers un autre état actuel (jusque là virtuel) B_w. Cette transition catastrophique d'état interne se manifeste par une discontinuité de certaines des qualités observables q^i_w. Autrement dit, c'est la déstabilisation (relative à l'instance I) des états internes actuels sous la variation du contrôle qui induit dans l'espace externe W un ensemble de discontinuités qualitatives K_W. Dans les bons cas, l'ensemble K_W constituera un système d'interfaces, analogue à un diagramme de phases, partitionnant l'espace externe W en domaines dont chacun correspond à la zone de W où domine l'un des états internes.

Mathématiquement parlant, les modèles reposent sur la possibilité de spécifier mathématiquement le modèle général. La première spécification consiste d'abord à supposer que, eu égard à leur nature, les processus internes X_w constituent un espace $\mathfrak{X}$ muni d'une topologie naturelle $\mathcal{T}$ significative pour le type de processus étudié. Cela signifie que l'on sait dire quand deux processus internes X et Y sont voisins et donc que l'on sait définir rigoureusement la continuité du champ $\sigma : W \to \mathfrak{X}$. En se déplaçant dans $\mathfrak{X}$ on peut alors déformer ses éléments X.

On suppose ensuite que l'on sait définir le type qualitatif des processus X. Le type qualitatif est une relation d'équivalence (en général définie par l'action d'un groupe G sur $\mathfrak{X}$) qui est une identité faible, qualitative. Soit $\widetilde{X}$ la classe d'équivalence de X pour le type qualitatif (i.e. l'orbite de X sous l'action de G). Il n'y a de variation qualitative que lorsqu'une déformation dans $\mathfrak{X}$ fait changer X de classe d'équivalence. La variation se manifeste par une discontinuité de la valeur de certaines propriétés de X.

Or, dès que l'on dispose sur un espace $\mathfrak{X}$ d'une topologie $\mathcal{T}$ et d'une relation d'équivalence définissant le type qualitatif, on peut définir une notion de *stabilité structurelle*. Soit $X \in \mathfrak{X}$. On dit que X est structurellement stable si tout Y assez voisin de X (au sens de $\mathcal{T}$) est équivalent à X. X est donc structurellement stable si son type qualitatif résiste aux petites perturbations, ou encore si la classe $\widetilde{X}$ est un ouvert (au sens de $\mathcal{T}$) en X. Soit alors $K_{\mathfrak{X}}$

le sous-ensemble fermé de $\mathfrak{X}$ constitué des $X \in \mathfrak{X}$ structurellement instables. $K_{\mathfrak{X}}$ est un ensemble catastrophique *intrinsèque*, canoniquement associé à l'espace des $\mathfrak{X}$. C'est une morphologie discriminante qui le catégorise et classifie les types qualitatifs de ses éléments structurellement stables.

Soit $\sigma : W \to \mathfrak{X}$ le champ caractéristique d'un système $S = (W, \mathfrak{X}, \sigma, I)$ et soit $K'_W = \sigma^{-1}(K_{\mathfrak{X}} \cap \sigma(W))$ la trace de $K_{\mathfrak{X}}$ sur W par l'intermédiaire de σ. L'hypothèse de la modélisation est que l'ensemble catastrophique K_W de S est déductible de K'_W à partir de l'instance de sélection I. Elle signifie qu'une valeur w du contrôle appartient à K_W (i.e. est une valeur critique) si et seulement si la situation en w est corrélée de la façon réglée par I à une situation appartenant à K'_W.

Si l'on introduit de plus l'hypothèse qu'un champ σ ne peut exister concrètement que s'il est lui-même structurellement stable, on est conduit à constater qu'une telle contrainte borne drastiquement la complexité susceptible d'être présentée par les K'_W. Dans les bons cas, on peut même accéder à une classification des structures locales des K'_W, et donc des morphologies externes locales, en termes de la *dimensionnalité* de l'espace externe W. L'exemple le plus connu est le théorème de Thom classifiant les CE pouvant apparaître stablement dans un espace W de dimension ≤ 4.

La première spécification mathématique majeure du modèle général consiste à postuler que le processus interne X est un *système dynamique* différentiable sur un espace M "interne" de variables internes caractéristiques du système S considéré. On obtient ainsi ce que René Thom a proposé d'appeler "modèles métaboliques". L'idée de base est d'introduire une différence entre *deux échelles de temps*, l'une interne rapide, l'autre externe lente. La dynamique interne rapide projette rapidement dans l'espace interne les états instantanés transients su système sur des "attracteurs" qui modélisent les états internes et spécifient la qualité phénoménologique locale du substrat. Quant à la dynamique externe lente, elle agit dans l'espace substrat W. Conformément au modèle général, elle peut induire des bifurcations d'attracteurs, *i.e.* d'états internes.

Une fois admises ces diverses hypothèses, le modèle général se convertit de lui-même en programme mathématique : structure générale des systèmes dynamiques (dynamique qualitative ou "global analysis") ; caractérisation géométrique des systèmes dynamiques structurellement stables et de leurs attracteurs ; analyse des propriétés ergodiques des attracteurs ; analyse des causes possibles d'instabilité ; analyse des déformations (des perturbations) des systèmes structurellement instables ; étude de la géométrie (qui peut être d'une extrême complexité) des ensembles catastrophiques $K_{\mathfrak{X}}$; etc.

Ce programme, que l'on pourrait appeler le programme de Thom-Smale[6], prolonge celui de Poincaré et de Birkhoff. C'est en fait celui de la Dynamique qualitative moderne. Mais le programme de Thom-Smale, s'il est d'une immense portée, est également d'une immense difficulté. L'analyse des attracteurs s'est révélée être particulièrement redoutable (attracteurs étranges, chaos déterministe, etc.). En effet, comme on le sait depuis longtemps, la complexité des systèmes dynamiques généraux est prodigieuse. C'est pourquoi Thom a proposé de le simplifier en en faisant une étude en quelque sorte "thermodynamique".

L'idée est de tenter de généraliser aux systèmes généraux ce qui se passe dans le cas des systèmes de *gradient*, à savoir l'existence de lignes de pente et de variétés de niveau. Pour cela, on utilise le fait que, si A est un attracteur d'un système dynamique X sur une variété M, on peut construire sur le bassin $B(A)$ de A (l'ensemble des points dont la trajectoire est attirée asymptotiquement par A) une fonction positive f – dite fonction de Liapounov – qui décroît strictement sur les trajectoires dans $B(A) - A$ et qui s'annule sur A. Cette fonction exprime que, au cours du temps, $B(A)$ se contracte sur A de façon analogue à un système de gradient. Mais elle ne permet pas de dire quoi que ce soit sur la structure interne de l'attracteur A.

L'idée est alors de ne retenir des bifurcations d'attracteurs que les bifurcations de leurs fonctions de Liapounov. Cette réduction ressemble à un moyennage thermodynamique. Elle

[6]Stephen Smale, l'un des plus grands spécialistes des systèmes dynamiques, a beaucoup collaboré avec René Thom.

correspond à un changement de niveau d'observation faisant passer du niveau fin décrit par les X_w au niveau grossier décrit par les f_w. Elle est analogue à celle que l'on trouve dans la théorie du champ moyen (théorie de Landau) que nous avons évoquée à propos des transitions de phases magnétiques.

Les modèles catastrophistes "élémentaires" consistent à passer des quasi-potentiels que sont les fonctions de Liapounov aux systèmes de gradient dérivés d'un potentiel. On suppose que la dynamique interne X_w est en fait la dynamique de gradient associée à une fonction potentiel différentiable $f_w : M \to \mathbb{R}$. Les états internes déterminés par f_w sont alors ses minima (si f est assimilée à une énergie, ce principe est celui de la minimisation de l'énergie du système). Dans la terminologie thomienne, un tel système s'appelle un "modèle statique". Mathématiquement, la théorie des modèles statiques fait donc partie intégrante de la théorie des bifurcations des fonctions potentiel.

Or, pour les potentiels, il existe une caractérisation simple de la stabilité structurelle (théorème de Morse). Sous l'hypothèse que la variété M soit compacte, $f : M \to \mathbb{R}$ est stable si et seulement si :

(i) ses points critiques, i.e. ses minima, ses maxima et ses cols, sont non dégénérés, c'est-à-dire ne sont pas des fusions de plusieurs minima, maxima ou cols ; et si

(ii) ses valeurs critiques (i.e. les valeurs $f(x)$ pour x critique) sont distinctes.

Il y a donc deux causes d'instabilité structurelle :

(i) la dégénérescence de points critiques, correspondant aux catastrophes dites de bifurcation ;

(ii) l'égalité de deux valeurs critiques, correspondant aux catastrophes dites de conflit.

A ces deux types bien distincts de catastrophes correspondent respectivement deux types d'instances de sélection I, ce que Thom a appelé deux conventions:

(i) la convention du "retard parfait" selon laquelle le système S demeure dans un état interne (un minimum de f_w) tant que celui-ci existe : il n'y a donc catastrophe que lorsqu'un minimum disparaît par fusion avec un autre point critique (bifurcation) ;

(ii) la convention de Maxwell selon laquelle le système S occupe toujours le minimum absolu de f_w : il n'y a donc catastrophe que lorsqu'un autre minimum devient à son tour le minimum absolu (conflit).

C'est la convention de Maxwell que nous avons rencontrée d'emblée avec les transitions de phases du premier ordre.

Bibliographie

[1] Petitot, J., *Introduction aux phénomènes critiques*, 1982/2010, http://jeanpetitot.com/ArticlesPDF/Petitot_CritPh.pdf

[2] Petitot, J., *Éléments de théorie des singularités*, 1982/2011, http://jeanpetitot.com/ArticlesPDF/Petitot_Sing.pdf

[3] Thom, R., *Œuvres mathématiques*, Documents mathématiques, Société Mathématique de France, Volumes I (2017) et II (2019).

[4] Zeeman, E.C., 1977. *Catastrophe Theory: Selected Papers 1972-1977*, Addison-Wesley, Mass.