

Théorie des singularités et équations de diffusion: illustration graphique d'un exemple

Jean Petitot

Abstract

Nous illustrons graphiquement un exemple, dû à James Damon, de solution stable de l'équation de la chaleur qui est un déploiement à un paramètre d'un ombilic elliptique. Il fait partie d'une adaptation de la théorie des singularités de Thom-Mather aux modèles multiéchelle de l'analyse d'images (scale-space analysis).

1 Introduction

Pour évaluer l'héritage de l'œuvre de René Thom, il faut je crois voir les choses à un double niveau. Il y a d'abord la postérité directe de ses idées et puis il y a ensuite le développement, dans d'autres contextes, d'idées de type thomien concernant l'application à des domaines originaux d'un certain nombre de formalismes de géométrie différentielle, de théorie des singularités, de théorie des bifurcations, de ruptures de symétrie, de phénomènes critiques, de phénomènes de transitions de phases qui, jusque-là, ne concernaient que la physique. René Thom a été l'un des principaux fondateurs d'un nouveau paradigme, le paradigme que j'appelle "morphodynamique" (théorie dynamique des formes), pour la biologie théorique et les sciences cognitives et ce dernier est devenu dominant dans de nombreux domaines.

En ce qui concerne la postérité directe des idées de René Thom, il y a eu bien sûr le travail de ses disciples. Même si René Thom n'a pas constitué d'école à proprement parler, il a fécondé la pensée d'un nombre considérable de personnes, aussi bien dans le domaine des mathématiques pures que dans celui des applications et celui de la philosophie. Tous les chercheurs qu'il a inspirés ont continué à développer certains aspects de son œuvre même si, sur le plan sociologique et médiatique, après les grands débats des années 70, la théorie des catastrophes conçue au sens strict a connu un certain retrait. Mais ce retrait, d'ailleurs tout relatif, a été, selon moi, très largement compensé par

l'extraordinaire succès d'idées *de type* thomien. En particulier dans le domaine des sciences cognitives que je connais un peu, les idées introduites par Thom et Zeeman à la fin des années 60 sont devenues des idées-force.

L'un des centres d'intérêt majeurs de René Thom a été d'élaborer une théorie des formes qui puisse être compatible à la fois avec la genèse objective de morphologies à l'intérieur des substrats matériels physico-chimiques et biologiques (cf. ses travaux fondamentaux sur l'embryogenèse) et aussi avec la perception subjective de morphologies à partir du traitement cognitif du flux optique manifestant ces substrats.¹

L'un des premiers principes de la métaphysique thomienne de la nature est que les *singularités* constituent, en tant que discontinuités qualitatives, *l'interface phénoménologique* entre le monde objectif et la conscience perceptive. Cela était déjà bien connu pour l'espace depuis l'esthétique transcendantale kantienne, l'espace opérant à la fois comme cadre de l'objectivité physique et comme forme de la manifestation phénoménale, mais René Thom a ajouté à ce fondement de l'expérience sensible l'intuition des discontinuités qualitatives comme brisures de symétrie de l'homogénéité spatiale et cas généralisés de transitions de phase (Thom [1972], [1980]).²

Dans mon hommage à René Thom de 1994 dans l'ouvrage *Passions des formes* édité par Michèle Porte, j'insistais beaucoup sur l'actualité scientifique des thèses thomiennes dans les sciences cognitives, en particulier en ce qui concerne les structures de la vision. J'aimerais aujourd'hui dans cette courte note commenter un exemple allant non pas de la théorie des singularités vers la théorie de la vision mais de la théorie de la vision vers la théorie des singularités.

En effet, comme pour toutes les idées séminales de René Thom, l'approfondissement du côté perceptif de la théorie morphologique a conduit à des problèmes mathématiques originaux. Pour comprendre le rôle des singularités dans la perception des formes, il a fallu faire la synthèse entre la classification de Thom-Mather et le point de vue naturel de l'analyse géométrique des images en vision computationnelle, qui est celui des modèles dits *multiéchelle*. La synthèse a été effectuée par James Damon dans une série d'articles et en particulier dans le papier "Local Morse theory for solutions to the heat equation and Gaussian blurring" (Damon, 1995) sur lequel nous nous appuyerons ici.

La classification des modèles multiéchelle de singularités fait apparaître certains phénomènes nouveaux dont le plus surprenant est celui de la possibilité de création de points critiques lorsque l'échelle augmente, événement qui semble violer le principe du maximum auquel satisfont ces modèles. D'où l'intérêt

¹Le lecteur intéressé par les différents aspects de la théorie de la forme chez René Thom pourra consulter notre article "Forme" dans l'*Encyclopædia Universalis* (Petitot [1989]).

²Pour une introduction aux multiples facettes de la philosophie de René Thom, on pourra se référer aux actes du Colloque d'hommage tenu à Cerisy en 1982 ainsi qu'à leur présentation synthétique dans *Physique du Sens* (Petitot [1992]).

de préciser ce phénomène curieux. Nous le ferons ici au moyen de graphiques calculés avec *Mathematica*TM.

Ces petits calculs ont été effectués il y a quelques années lors d'un colloque à la Fondation des Treilles organisé avec Bernard Teissier, Jean-Michel Morel et David Mumford dans le cadre du Trimestre spécial du Centre Emile Borel "Questions mathématiques en traitement du signal et de l'image" (septembre-décembre 1998). Ils devaient servir de base à des discussions avec René Thom mais la vie en a décidé autrement.

2 Le concept de "Scale space analysis"

L'idée d'analyse multiéchelle, de "scale space analysis" ou d'algorithmes "pyramidaux", domine les théories de l'analyse géométrique des images. Elle remonte à Witkin (1983) et à Koenderink (1984, 1986) et part de la remarque suivante. Pour être morphologiquement correcte, une analyse des images doit s'effectuer en termes de géométrie différentielle. Le problème est que les outils de cette dernière ne sont pas directement applicables au signal en tant que tel, qui est trop bruité pour être différentiable. Pour que les images puissent acquérir le statut d'observables géométriquement analysables par détection d'invariants, il faut par conséquent définir au préalable une échelle, c.à.d. fixer un niveau de régularisation du signal bruité. Jan Koenderink l'a souvent souligné : le scaling est essentiel. C'est ce que fait d'ailleurs la vision naturelle puisque les neurones visuels primaires possèdent un champ récepteur qui est un petit domaine de photorécepteurs rétiniens et opèrent sur le signal optique comme des filtres par convolution avec leur profil récepteur (leur fonction de transfert) qui est une fonction définie sur leur champ récepteur.

Mais comment une analyse multiéchelle peut-elle déboucher sur une véritable analyse morphogénétique d'une image 2D définie comme une fonction (ou, mieux, une distribution) $I(x, y)$ sur la fenêtre rétinienne R de coordonnées x et y ? L'idée directrice est de plonger l'image dans une famille $I_s(x, y)$ paramétrée par une échelle s de façon à ce que :

- (i) $I_0 = I$,
- (ii) I_1 soit une image indifférenciée, et
- (iii) Lorsque l'échelle s croît, l'évolution de I_0 à I_1 "simplifie" strictement l'image. Cette contrainte dite de "causalité" interdit l'apparition *ex nihilo* de nouveaux détails lorsque l'échelle croît.

L'évolution avec l'échelle s des lignes de niveau de I_s , c'est-à-dire la suite d'événements de bifurcation qu'elles subissent en se simplifiant progressivement, fournit une méthode puissante pour analyser la structure morphologique de l'image et sa décomposition en éléments constituants. On montre que, sous

des contraintes générales de linéarité, d'invariance par translation, d'isotropie et d'invariance d'échelle, la façon la plus simple d'obtenir un tel résultat est de prendre pour I_s une solution de l'équation de diffusion typique qu'est l'équation de la chaleur $\partial I_s / \partial s = \Delta I_s$. Dans la mesure où le noyau de la chaleur est gaussien, on est ainsi conduit à l'idée d'un lissage gaussien multiéchelle de l'image (Gaussian blurring).³

Mais ce qui domine phénoménologiquement une image sont les singularités. Si l'on veut adapter à l'analyse d'images la théorie de Thom-Mather des singularités génériques et des déploiements universels, il faut par conséquent la rendre multiéchelle.

3 Théorie multiéchelle des singularités

James Damon a montré comment on pouvait transformer la théorie de Morse-Whitney-Thom-Mather-Arnold dans le cas de l'équation de la chaleur. La difficulté principale est que les formes normales de Morse ne satisfont pas à cette EDP. Les méthodes doivent donc être transposées des espaces de germes d'applications C^∞ aux espaces de germes de solutions de l'EDP, or ces espaces n'ont pas les "bonnes" propriétés algébriques qui font marcher la théorie et permettent d'appliquer des théorèmes de transversalité de Thom pour obtenir des résultats de généricité.⁴

James Damon a donc dû d'abord redéfinir le concept d'équivalence pour des germes C^∞ d'applications $f(x, s)$

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, s) &\longmapsto z = f(x, s) \end{aligned}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$.

• f et g sont H -équivalentes s'il existe un germe de difféomorphisme $\varphi : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ de la forme $\varphi(x, s) = (\varphi_1(x, s), \varphi_2(s))$ avec $\varphi_2'(0) > 0$ et un germe $c : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tels que

$$g(x, s) = f \circ \varphi(x, s) + c(s).$$

Autrement dit, la différence entre g et f peut être résorbée

(i) par des translations au but $c(s)$ dépendant de s ,

³Il faut insister sur le fait que s est ici un paramètre d'échelle et non pas un paramètre temporel comme c'est le cas d'habitude. L'évolution s'effectue dans un espace-échelle et non pas dans un espace-temps.

⁴Pour une première introduction à la théorie des singularités de Thom-Mather on pourra consulter en particulier le séminaire Bourbaki Chenciner [1973], l'article de l'*Encyclopædia Universalis* Chenciner [1980] et le Graduate Text Golubitsky&Guillemin [1973]. Les six articles de base de John Mather sont inclus dans la bibliographie.

(ii) par un changement de coordonnée (préservant l'orientation) φ_2 sur l'axe s de la source,

(iii) par des changements de coordonnées $\varphi_1(\bullet, s)$, dépendant de s , du sous-espace \mathbb{R}^n de la source.

• De même f et g sont IS -équivalentes (IS signifie "Intensity Sensitive") si c est constant ⁵ et s'il existe de plus un germe de difféomorphisme $\psi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ de la forme $\psi(z, s) = (\theta(z, s), s)$ avec $\frac{\partial \theta}{\partial z}(0, 0) > 0$ et $\theta(0, s) = 0$ pour tout s tels que

$$g(x, s) = \theta \circ f \circ \varphi(x, s) + c.$$

Cela signifie que l'on peut remplacer $c(s)$ par des changements de coordonnées appropriés au but (préservant l'orientation) $\theta(\bullet, s)$ dépendant de s .

À ces notions d'équivalence sont naturellement associées des notions de stabilité par déformation. On considère des familles $f_w(x, s)$ de fonctions $f(x, s)$ paramétrées par des paramètres $w \in \mathbb{R}^q$

$$\begin{aligned} f_w : (\mathbb{R}^{n+1+q}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, s, w) &\longmapsto z = f(x, s, w) = f_w(x, s) \end{aligned}$$

et déformant $f(x, s, 0) = f_0(x, s)$.

Définition. $f_0(x, s)$ est H -stable (resp. IS -stable) si $f_0(x, s)$ est son propre déploiement universel, autrement dit si toute déformation assez petite est triviale pour la H -équivalence (resp. la IS -équivalence).

En adaptant les démonstrations de René Thom et de John Mather, James Damon a trouvé les formes normales des singularités stables et des déploiements universels de bas degré. Par exemple les équivalents H -stables des points critiques quadratiques (points critiques non dégénérés stables) pour la H -équivalence ont pour forme normale :

$$\pm \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \pm (2n)s$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i^2 \text{ avec } a_i \neq 0 \text{ pour tout } i \text{ et } \sum_{i=1}^{i=n} a_i = 0$$

dont on vérifie trivialement qu'ils satisfont l'équation de la chaleur. Mais on obtient aussi des singularités H -stables *cubiques* de forme

⁵ $c = 0$ si $g(0, 0) = 0$, mais on peut avoir à considérer des cas $c \neq 0$.

$$x_1^3 + 6sx_1 + Q(x_2, \dots, x_n, s)$$

et

$$x_1^3 - 6sx_1 - 6x_1x_2^2 + Q(x_2, \dots, x_n, s)$$

où $Q(x_2, \dots, x_n, s)$ est une singularité quadratique en (x_2, \dots, x_n) . Cela est dû au fait que la variable d'échelle s est de poids 2 relativement aux variables x_i qui sont de poids 1 et qu'un terme apparemment quadratique comme sx_i est donc en fait cubique.

Pour la IS -équivalence, on obtient la même première forme de singularités quadratiques stables

$$\pm \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \pm (2n)s$$

Mais la seconde forme n'est plus la même et devient

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i \right) s \text{ avec } a_i \neq 0 \text{ pour tout } i \text{ et } \sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0$$

Pour $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = 0$ on obtient une nouvelle forme plus compliquée qui, dans le cas $n = 2$, s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{i=2} a_i x_i^2 \pm \left(s^2 + \frac{1}{2}s \left(\sum_{i=1}^{i=2} x_i^2 \right) + \frac{1}{16} \left(\sum_{i=1}^{i=2} x_i^2 \right)^2 \right)$$

avec $a_i \neq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = 0$. On obtient également deux formes cubiques IS -stables :

$$x_1^3 + 6sx_1 + \sum_{i=2}^{i=n} a_i x_i^2 + 2 \left(\sum_{i=2}^{i=n} a_i \right) s \text{ avec } a_i \neq 0 \text{ pour tout } i \text{ et } \sum_{i=2}^{i=n} a_i \neq 0$$

et

$$x_1^3 - 6sx_1 - 6x_1x_2^2 + \sum_{i=2}^{i=n} a_i x_i^2 + 2 \left(\sum_{i=2}^{i=n} a_i \right) s \text{ avec } a_i \neq 0 \text{ pour tout } i \text{ et } \sum_{i=2}^{i=n} a_i \neq 0$$

C'est cette dernière forme qui est surprenante car elle conduit à des *créations* de points critiques, ce qui pourrait sembler interdit par le principe de causalité exposé plus haut.

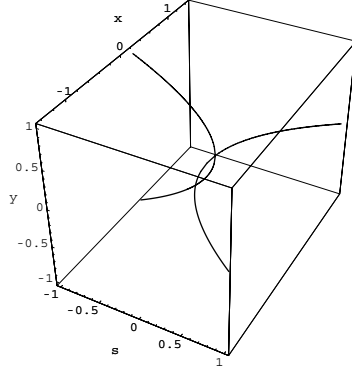


Figure 1: Les points critiques de $f(x, y, s)$ se regroupent en 2 branches.

4 Analyse graphique de la création de points critiques par diffusion

Nous allons analyser graphiquement la création de points critiques dans le cas $n = 2$. Nous étudions donc la solution de l'équation de la chaleur :

$$f(x, y, s) = x^3 - 6xy^2 + y^2 - 6sx + 2s$$

considérée comme une famille à un paramètre (l'échelle s) de fonctions de (x, y) .

4.1 Forme des points critiques

Les points critiques sont donnés par

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y^2 - 6s = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -12xy + 2y = 0 \end{cases}$$

dont les 4 solutions sont :

$$\begin{cases} x_{1\pm} = \frac{1}{6}, y_{1\pm} = \pm \frac{(1-72s)^{1/2}}{6\sqrt{2}} \\ x_{2\pm} = \pm\sqrt{2s}, y_{2\pm} = 0 \end{cases}$$

Ils constituent deux branches paraboliques paramétrisées par s , $pc_1(s)$ et $pc_2(s)$. Pour $s < 0$ (ce qui est interdit pour une échelle), $pc_2(s)$ est imaginaire. Pour $s > 1/72$ c'est la branche pc_1 qui devient imaginaire, pc_2 donnant deux points critiques opposés. Pour $0 \leq s \leq 1/72$, il y a 2 paires de points critiques (indexées par $1\pm$ et $2\pm$) : la branche pc_2 apparaît (création de deux points critiques opposés) et reste en compétition avec pc_1 tant que $s < 1/72$. Cf. Figure 1.

Le Hessien H de f étant donné par

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \right) = \begin{pmatrix} 6x & -12y \\ -12y & 2 - 12x \end{pmatrix},$$

sa valeur aux points critiques est

$$H_{1\pm} = \begin{pmatrix} 1 & \mp \sqrt{2(1-72s)} \\ \mp \sqrt{2(1-72s)} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H_{2\pm} = \begin{pmatrix} \pm 6\sqrt{2s} & 0 \\ 0 & 2(1 \mp 6\sqrt{2s}) \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres (dans l'ordre de H_{1+} , H_{1-} , H_{2+} , H_{2-}) sont

$$\left\{ \frac{1-3\sqrt{1-64s}}{2}, \frac{1+3\sqrt{1-64s}}{2} \right\}, \left\{ \frac{1+3\sqrt{1-64s}}{2}, \frac{1-3\sqrt{1-64s}}{2} \right\}, \\ \left\{ 2-12\sqrt{2s}, 6\sqrt{2s} \right\}, \left\{ 2+12\sqrt{2s}, -6\sqrt{2s} \right\}.$$

Quant aux vecteurs propres, on trouve, toujours pour le même ordre,

$$\left\{ \left\{ \frac{-1+3\sqrt{1-64s}}{2\sqrt{2(1-72s)}}, 1 \right\}, \left\{ \frac{-1-3\sqrt{1-64s}}{2\sqrt{2(1-72s)}}, 1 \right\} \right\}, \\ \left\{ \left\{ \frac{1-3\sqrt{1-64s}}{2\sqrt{2(1-72s)}}, 1 \right\}, \left\{ \frac{1+3\sqrt{1-64s}}{2\sqrt{2(1-72s)}}, 1 \right\} \right\}, \\ \left\{ \{0, 1\}, \{1, 0\} \right\}, \left\{ \{0, 1\}, \{1, 0\} \right\}.$$

Comme les deux points critiques de la branche pc_1 deviennent imaginaires conjugués pour $s > 1/72$, ce sera a fortiori le cas pour $s > 1/64$. Les changements de signe des valeurs propres des points critiques réels s'effectuent pour $1-3\sqrt{1-64s} = 0$ et $1-6\sqrt{2s} = 0$, ce qui dans les deux cas donne $s = 1/72$. D'où les tableaux suivants où λ et μ sont les deux valeurs propres.

(i) Pour $0 < s < 1/72$:

$pc_{1+} =$	$pc_{1-} =$	$pc_{2+} =$	$pc_{2-} =$
$\left(\frac{1}{6}, \frac{(1-72s)^{1/2}}{6\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{6}, -\frac{(1-72s)^{1/2}}{6\sqrt{2}}\right)$	$(\sqrt{2s}, 0)$	$-(\sqrt{2s}, 0)$
$\lambda < 0$	$\lambda > 0$	$\lambda > 0$	$\lambda > 0$
$\mu > 0$	$\mu < 0$	$\mu > 0$	$\mu < 0$
col	col	sommet	col

(ii) Pour $s > 1/72$:

$pc_{2+} =$	$pc_{2-} =$
$(\sqrt{2s}, 0)$	$-(\sqrt{2s}, 0)$
$\lambda < 0$	$\lambda > 0$
$\mu > 0$	$\mu < 0$
col	col

4.2 Représentations des surfaces

Aux points critiques les valeurs de $f(x, y, s)$ sont $z_{1\pm} = s + 1/216$, $z_{2\pm} = 2s(1 \mp 2\sqrt{2s})$. Pour bien visualiser la famille de fonctions $f(x, y, s)$ nous allons représenter de plusieurs manières les graphes de leurs sections à $s = \text{cste}$.

La planche 1 représente 6 sections pour s variant de $-(1/3)1/72$ à $(4/3)1/72$ par pas de $(1/3)1/72$. Le point de vue par le dessus permet de bien visualiser la position des points critiques.

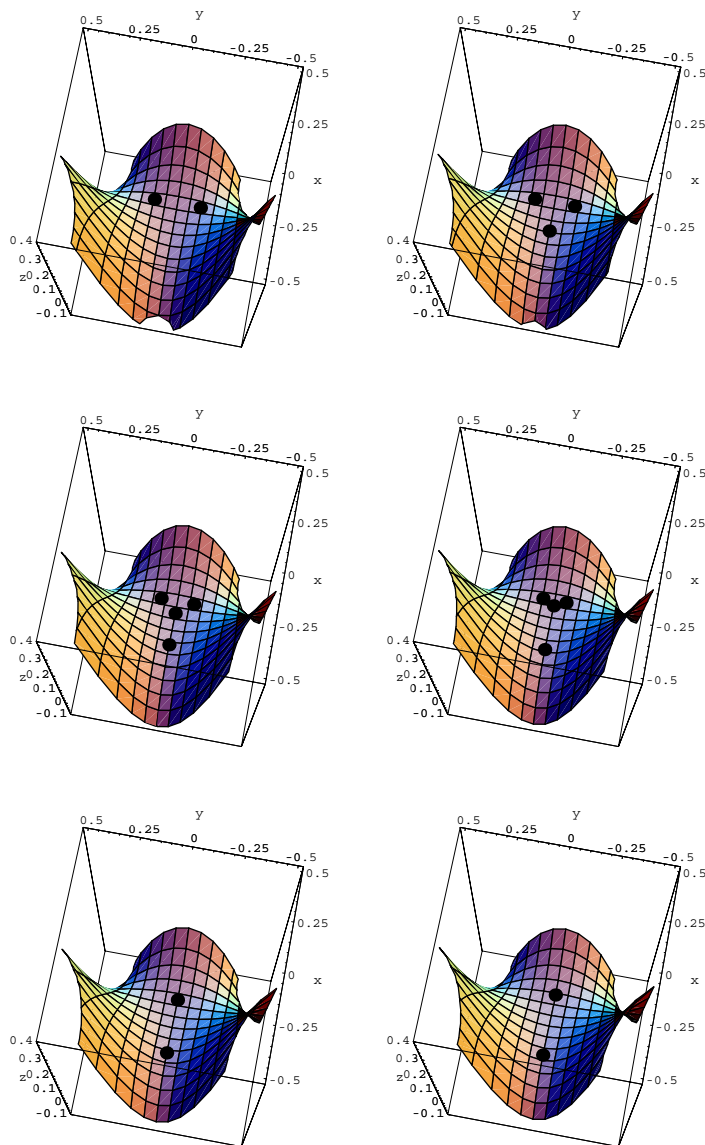


Planche 1

La planche 2 représente les mêmes sections mais dans un point de vue plus frontal permettant de mieux voir le relief de f .

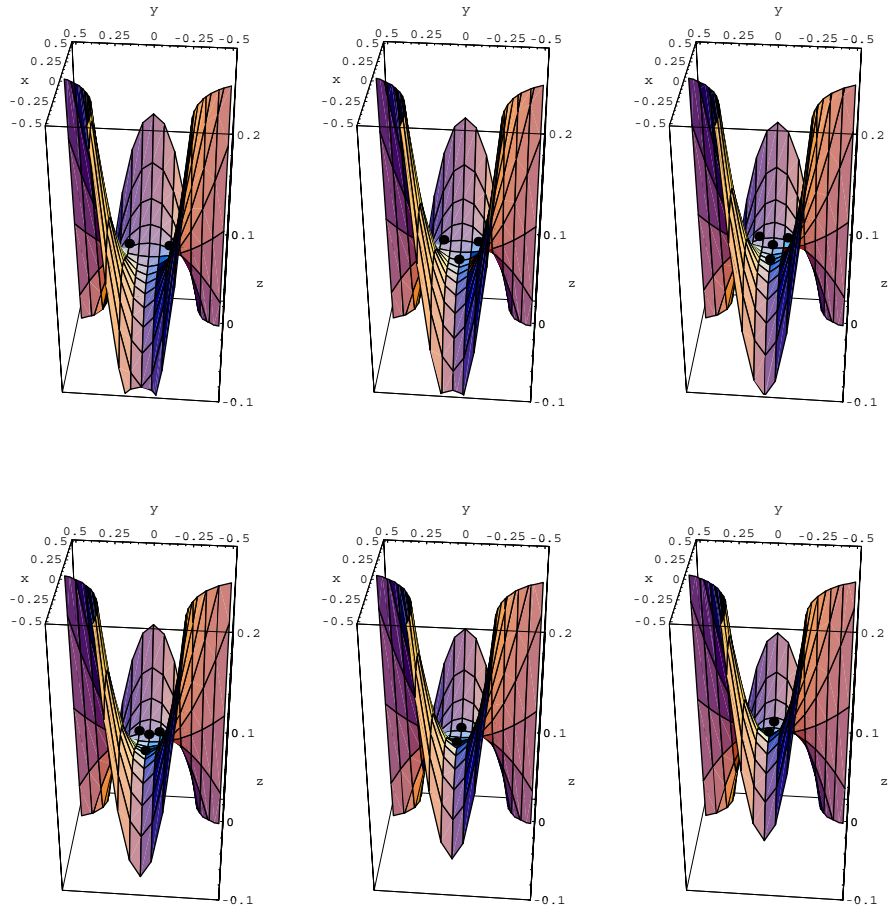


Planche 2

Quant à la planche 3 elle montre les lignes de niveaux de f ainsi que son champ de gradient ∇f par rapport aux variables spatiales x et y .

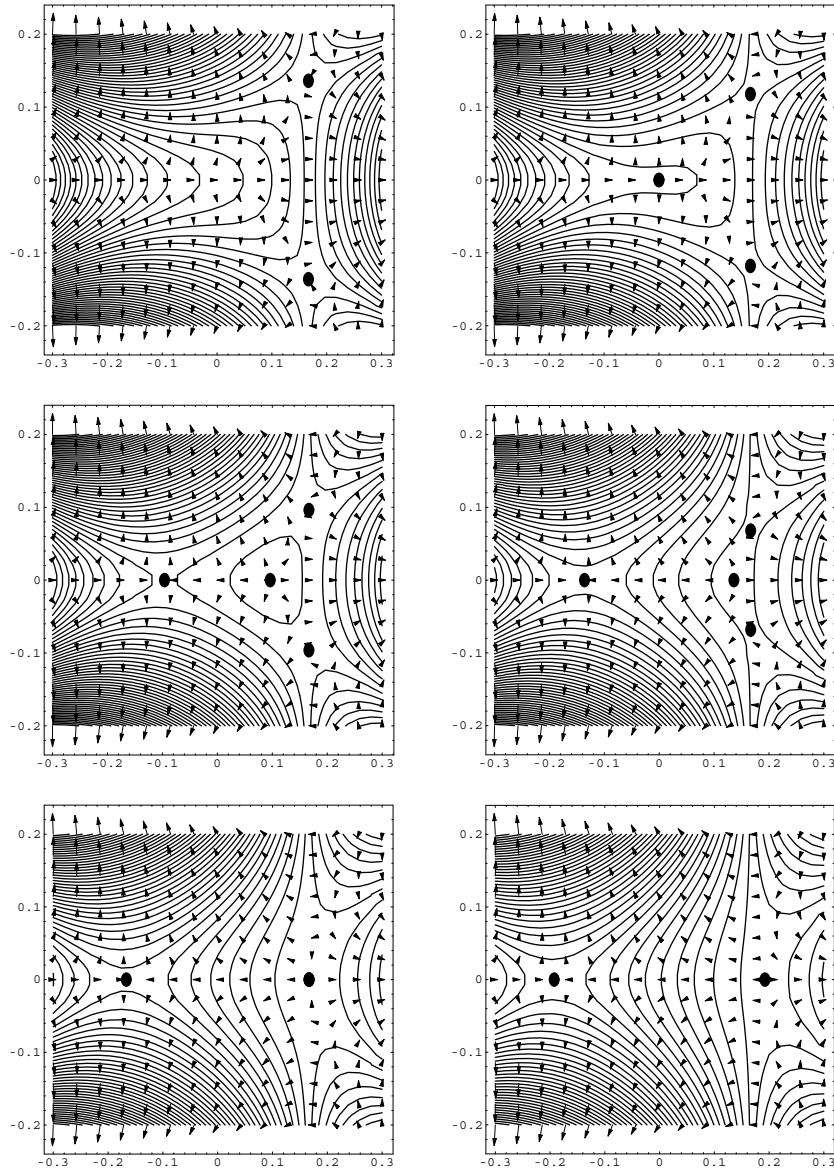


Planche 3

La figure 2 zoome sur la situation $s = (2/3)1/72$ proche de la valeur critique $s = 1/72$.

On voit bien la suite des bifurcations. Au départ ($s < 0$) il n'y a que les deux cols $pc_{1\pm}$ symétriques par rapport à l'axe des x et d'abscisse fixe $1/6$. Ils se rapprochent de l'axe des x comme $\sqrt{1 - 72s}$. Pour $s = 0$ apparaissent sur l'axe des x un sommet pc_{2+} d'abscisse $\sqrt{2s}$ et un col pc_{2-} d'abscisse $-\sqrt{2s}$. Pour $s = 1/72$, pc_{1+} et pc_{1-} fusionnent sur l'axe des x en $x = 1/6$ au moment où pc_{2+} est précisément en $x = \sqrt{2s} = \sqrt{2/72} = 1/6$. La fusion de ces trois points critiques transforme pc_{2+} en un col qui s'éloigne sur l'axe des x en $\sqrt{2s}$.

On voit clairement sur ces images l'apparition temporaire du maximum. Si

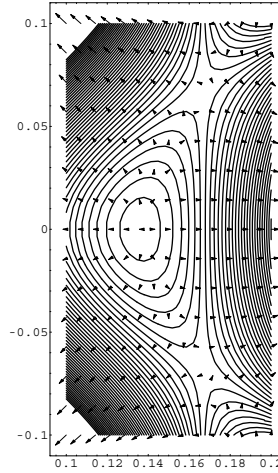


Figure 2: Zoom sur la valeur de l'échelle $s = (2/3)1/72$ proche de la valeur critique $s = 1/72$.

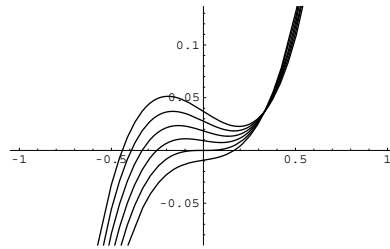


Figure 3: Section des surfaces $f(x, y, s)$ le long de l'axe de symétrie $y = 0$.

le principe de causalité n'est pas violé c'est à cause de la façon dont les surfaces se positionnent les unes par rapport aux autres. La nappe montante reste à peu près fixe alors que la nappe descendante s'abaisse comme le montre la figure 3 qui représente la section le long de l'axe de symétrie $y = 0$.

4.3 Plongement dans le déploiement de l'ombilic elliptique

La famille $f(x, y, s) = x^3 - 6xy^2 + y^2 - 6sx + 2s$ est une déformation de la singularité ombilic elliptique $g_0(x, y) = x^3 - 6xy^2$ et il est donc pertinent de la positionner par rapport au déploiement universel standard de ce dernier, $g_{w,u,v} = x^3 - 6xy^2 + wx^2 + ux + vy$. En fait c'est ce qui se passe au voisinage du point critique dégénéré triple $(1/6, 0)$ pour $s = 1/72$ qui est le plus intéressant. On a

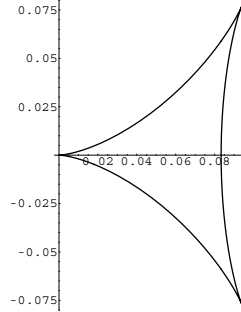


Figure 4: La section du déploiement universel de l'ombilic elliptique $g_{w,u,v} = x^3 - 6xy^2 + wx^2 + ux + vy$ pour $w = 1/2$.

$$f\left(\frac{1}{6} + x, y, s\right) = x^3 - 6xy^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{12} - 6s\right)x + s + \frac{1}{216}$$

ce qui, pour $s = 1/72$, donne la singularité (centre organisateur)

$$f\left(\frac{1}{6} + x, y, \frac{1}{72}\right) = x^3 - 6xy^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{54}.$$

Le déploiement universel $g_{w,u,v} = x^3 - 6xy^2 + wx^2 + ux + vy$ a pour discriminant dans le $\mathbb{R}^3 (u, v, w)$ une surface conique sur une hypocycloïde à 3 rebroussements. Sa section plane $w = 1/2$ est une telle hypocycloïde H d'équation

$$(-1 + u)u^3 + (486 - 648u + 144u^2)v^2 + 5184v^4 = 0$$

Elle est représentée à la figure 4.

Pour se faire une idée de la structure de l'ombilic elliptique on peut considérer dans le $\mathbb{R}^3 (u, v, z)$ le graphe des valeurs critiques de $g_{1/2,u,v}(x, y)$. Les figures 5 et 6 en donnent deux points de vue.

Pour visualiser le détail de la structure près de l'origine, on a représenté à la planche 4 trois sections au-dessus de trois fenêtres du plan de contrôle (u, v) .

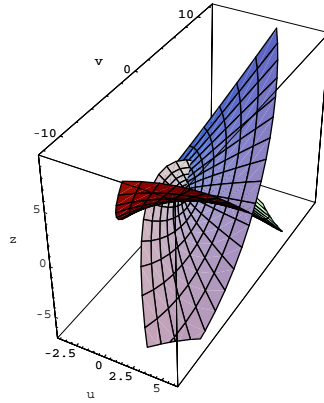


Figure 5: Un point de vue sur le graphe des valeurs critiques de l'ombilic elliptique $g_{1/2,u,v}(x, y)$.

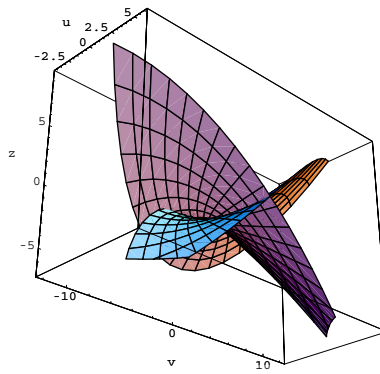


Figure 6: Un autre point de vue sur le graphe des valeurs critiques de l'ombilic elliptique $g_{1/2,u,v}(x, y)$.

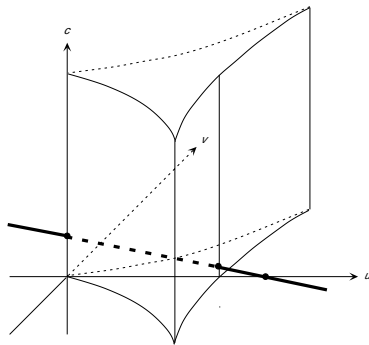


Figure 7: Le positionnement de la solution $f(x, y, s)$ de l'équation de la chaleur dans le déploiement de l'ombilic elliptique.

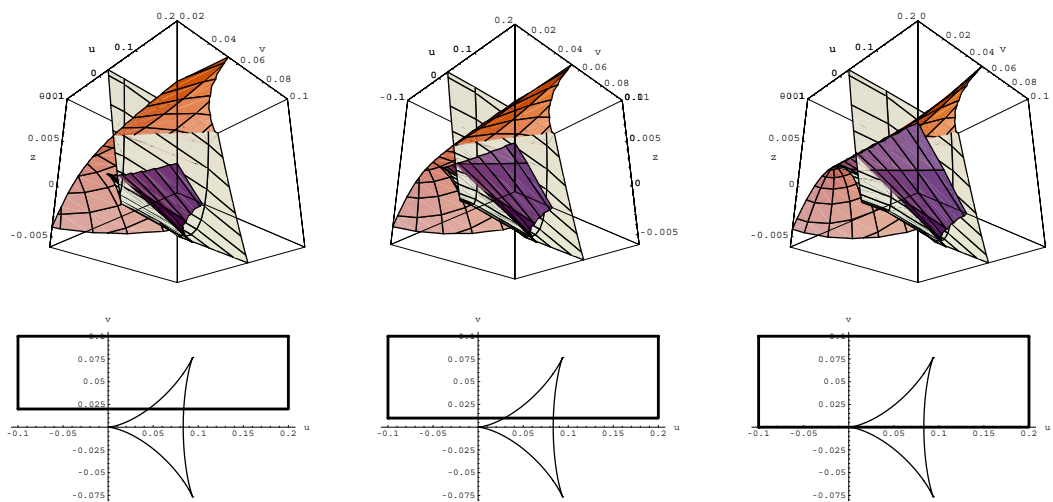


Planche 4

On voit que la solution *stable* de l'équation de la chaleur $f(x, y, s)$ correspond à un déploiement à un paramètre hautement *non générique* de l'ombilic elliptique. Dans le $\mathbb{R}^3 (u, v, c)$ le discriminant du déploiement $g_{w,u,v} = x^3 - 6xy^2 + \frac{1}{2}x^2 + ux + vy + c$ est le cylindre de base H . La solution stable $f(x, y, s)$ correspond à la droite $u = (\frac{1}{12} - 6s)$, $c = s + \frac{1}{216}$ au-dessus de l'axe u qui rentre dans H pour $s = 0$ en $u = 12$ à la hauteur $c = 1/216$ et en ressort par le cusp $u = 0$, $c = 1/54$ pour $s = 1/72$ (cf. Figure 7).

5 Equations de diffusion non linéaires et traitement d'images

Nous avons vu comment la théorie des singularités de Whitney-Thom-Mather-Arnold pouvait être adaptée aux solutions d'une EDP parabolique de diffusion comme l'équation de la chaleur. Mais il ne s'agit là que du début de l'histoire.

En effet les méthodes de diffusion simple (homogène et isotrope) font problème car le lissage (Gaussian blurring) qu'elles effectuent est indifférent à la géométrie de l'image. D'où l'idée qui s'est progressivement imposée au cours des années 80 que, pour pouvoir effectuer une bonne analyse morphologique des images, il faut concilier deux exigences apparemment contradictoires :

- (i) régulariser le signal de façon multiéchelle par diffusion;
- (ii) préserver la géométrie de l'image, c'est-à-dire les discontinuités d'éléments différentiels possédant une signification géométrique intrinsèque.

Pour ce faire, il faut *adapter* l'équation de diffusion à la préservation de ces éléments différentiels construits à partir des jets successifs de la fonction $I_s(x, y)$.

Le cas le plus simple est celui des *bords* qui délimitent les domaines homogènes d'une image et sont essentiels à la définition de ses constituants. Un bord est idéalement une discontinuité du gradient $\nabla I_s(x, y)$ de I_s . Pour qu'une diffusion préserve le caractère discontinu des bords tout en les simplifiant progressivement, il faut qu'elle soit *anisotrope* et, plus précisément, inhibée dans la direction du gradient. L'EDP la plus simple possédant cette propriété est l'équation de diffusion non linéaire :

$$\frac{\partial I_s}{\partial s} = |\nabla I_s| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I_s}{|\nabla I_s|} \right) = \Delta I_s - \frac{H(\nabla I_s, \nabla I_s)}{|\nabla I_s|^2}$$

où H est le Hessien de I_s . Elle est uniformément parabolique le long des courbes de niveau de I_s mais totalement dégénérée dans la direction du gradient. Elle fait évoluer les lignes de niveau — et donc en particulier les bords — comme des fronts avec une vitesse normale égale à leur courbure.

Jean-Michel Morel et ses collègues (Alvarez *et al.* 1992) ont introduit un lissage gaussien supplémentaire dans ces EDP de façon à contrôler la vitesse de diffusion en la couplant à la géométrie de l'image. L'équation de base devient alors :

$$\frac{\partial I_s}{\partial s} = g(|G * \nabla I_s|) |\nabla I_s| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I_s}{|\nabla I_s|} \right)$$

où G est un noyau gaussien et $g(x)$ une fonction décroissante telle que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Ils ont également montré que si l'on impose une contrainte d'invariance affine (au lieu de l'invariance euclidienne), l'EDP type devient :

$$\frac{\partial I_s}{\partial s} = |\nabla I_s| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla I_s}{|\nabla I_s|} \right)^{1/3} .$$

On peut généraliser ces équations de façon à améliorer l'analyse morphologique de l'image. Par exemple les “crêtes” d'une forme — qui fournissent une “squelétisation” essentielle à son analyse morphologique, ce que René Thom avait souvent souligné à la suite de Harry Blum en utilisant le concept de “cut-locus”) — peuvent être extraites du signal en tant que des discontinuités de la direction du gradient qui sont préservées de la diffusion.

En considérant les lignes de niveau des fonctions $I_s(x, y)$ on obtient des évolutions de courbes planes C_s fermées qui se propagent comme des fronts conformément à une loi du type $\frac{\partial p}{\partial s} = F(\kappa)\vec{n}$ où p est un point de C_s , \vec{n} la normale (externe) en p à C_s et κ la courbure de C_s en p . Les cas les plus étudiés sont :

- (i) celui de la propagation à vitesse constante : $\frac{\partial p}{\partial s} = \pm\vec{n}$, $\frac{\partial \kappa}{\partial s} = -\kappa^2$ (modèles de propagation d'ondes de type “grassfire” engendrant le cut-locus de la courbe), et
- (ii) celui de la propagation à une vitesse proportionnelle à la courbure (τ est l'abscisse curviligne de la courbe) : $\frac{\partial p}{\partial s} = -\kappa\vec{n}$, $\frac{\partial \kappa}{\partial s} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \tau^2} + \kappa^3$
- (iii) Stanley Osher et James Sethian (1988) ont également étudié les cas intermédiaires où $F(\kappa) = 1 - \varepsilon\kappa$. La courbure κ satisfait alors une équation de réaction-diffusion du type : $\frac{\partial \kappa}{\partial s} = \varepsilon \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \tau^2} + \varepsilon\kappa^3 - \kappa^2$.

Sous les titres de “curve shortening”, “flow by curvature” ou “heat flow on isometric immersions”, le cas (ii) a été particulièrement investigué par des géomètres comme M. Gage, R. Hamilton (1986), M. Grayson (1987), S. Osher, J. Sethian (1988), J. Sethian (1990), L.C. Evans et J. Spruck (1991).⁶ Si $j_s : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est l'immersion isométrique définissant C_s , comme on a $\Delta j_s = -\kappa\vec{n}$, l'équation de diffusion $\frac{\partial j_s}{\partial s} = -\kappa\vec{n}$ est en fait l'équation de la chaleur (pour les immersions) $\frac{\partial j_s}{\partial s} = \Delta j_s$. Dans l'espace fonctionnel \mathcal{J} des immersions $j : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, cette équation définit le champ de gradient de la fonction de Morse donnant la longueur de la courbe image $C = j(S^1)$.

Un théorème fondamental de “curve shortening” dû à M. Gage et R. Hamilton (1985) et généralisé par Matthew Grayson (1987) dit que si C_0 est une courbe plongée dans le plan (même très sinueuse), alors l'équation de la chaleur la contracte sur un point, C_s devenant asymptotiquement un cercle (convergence pour la norme C^∞). En particulier C_s devient convexe avant de pouvoir développer des singularités.

⁶En fait, la théorie vient de Richard Hamilton qui cherchait à résoudre des problèmes de Relativité générale. En utilisant l'équation de la chaleur, il a montré que si X est une variété riemannienne compacte de dimension 3 avec courbure de Ricci $R_{ij} > 0$, alors X admet une métrique riemannienne à courbure > 0 constante. Or, ces dernières sont classifiées. Il cherchait également à engendrer des géodésiques fermées à partir de courbes fermées quelconques. (Cf. le séminaire Bourbaki Bourguignon [1985]).

6 Conclusion

C'est en fait toute la conception morphodynamique thomienne sur le rôle des singularités, des bifurcations et des ruptures de symétries dans la perception qui se trouve confirmée par un nombre croissant de travaux contemporains en vision computationnelle et en neurosciences de la vision. Citons pour conclure trois exemples :

- (i) Celui des processus de segmentation des images en région homogènes délimitées par des discontinuités qualitatives. Ce problème central était à la base des modèles morphologiques de Thom dès le début avec la différence entre les points réguliers d'un substrat où toutes les qualités phénoménologiques (couleur, texture, etc.) sont localement homogènes et les points singuliers où au moins une qualité phénoménologique subit une discontinuité qualitative. Il a été formulé comme un (difficile) problème variationnel de type "free boundary problem" par David Mumford dans les années 80 et à donné lieu à tout un ensemble de travaux, en particulier autour d'Ennio De Giorgi à Pise (Luigi Ambrosio, Gianni Dal Maso). La conjecture de Mumford sur la nature des points singuliers des solutions optimales a presque été démontrée par Alexis Bonnet et Guy David.
- (ii) La squelettisation des formes planes au moyen de leur cut locus, c'est-à-dire des singularités d'un processus de propagation à la Huyghens à partir du bord. Cette idée profondément morphologique a été introduite dans les années 60 par le spécialiste de la vision Harry Blum [1973] et a toujours été très fortement défendue par René Thom. L'avantage du squelette d'une forme est d'être un graphe de dimension 1 constitué d'arcs se rejoignant génériquement en des points triples ou s'arrêtant en des points singuliers. Il fournit donc automatiquement une décomposition qualitative de la forme en constituants qui sont des cylindres généralisés (cf. Marr [1982]). L'homéomorphismes des squelettes définit une relation d'équivalence qui est plus forte que les difféomorphismes et plus faible que les isométries tout en étant très différente de l'équivalence conforme. Pendant longtemps cette méthode était peu prisée car instable et trop sensible aux déformations du bord, toute petite aspérité du bord engendrant une branche supplémentaire du squelette. Mais le développement de méthodes de pruning multiéchelle a rendu la méthode stable et elle est aujourd'hui très utilisée. Un des meilleurs spécialistes en est Benjamin Kimia.
- (iii) La reconstruction des surfaces plongées dans \mathbb{R}^3 à partir de la famille de leurs contours apparents. Là encore René Thom a toujours insisté sur l'importance du problème. Si S est une surface dans \mathbb{R}^3 , à chaque point de vue p (plan de projection et direction de projection, les p forment une grassmannienne \mathcal{P}) est associé un contour apparent C_p . Le type qualitatif

de C_p stratifie \mathcal{P} à travers une hypersurface H et le problème est de comprendre l'équivalence entre la géométrie de S et la géométrie de la stratification définie par H . Par exemple si l'on connaît des équations algébriques pour S peut-on en déduire des équations pour H ? Le problème est difficile. Or le système visuel est capable d'anticiper avec une précision remarquable les variations de C_p lorsque l'on tourne autour de S . On ne connaît pas les algorithmes neuralemement implémentés sous-jacents à cette performance perceptive.⁷

Tous ces travaux convergents montrent que le rêve de René Thom de développer une "physique phénoménologique" et une "sémiophysique" de la perception est en train de se réaliser. Il en va de même dans le domaine de la morphogenèse biologique où René Thom estimait avoir introduit ses idées les plus fondamentales. Là aussi, comme pour les sciences cognitives, on peut dire que l'utilisation de modèles dynamiques et de la théorie des bifurcations engendrant des discontinuités qualitatives dans des substrats physiques, s'est beaucoup développée parallèlement à d'autres modèles de théorie des patterns comme les modèles de réaction-diffusion de type Turing. Ce qui a peut-être le plus changé d'avec la façon dont René Thom lui-même voyait les choses, est qu'il semble désormais possible d'établir une convergence avec les résultats de la génomique. L'on commence à comprendre le contrôle génétique du développement et des réactions morphogénétiques qui intéressaient René Thom.

René Thom était non seulement un puissant génie mathématique et un maître humainement extraordinaire, mais aussi l'un des esprits philosophiques les plus inspirés du XXe siècle. Ce fût un privilège inoubliable que d'avoir pu collaborer étroitement et continûment avec lui. Au-delà des aléas humains trop humains de la sociologie des milieux académiques, ses idées ont d'ores et déjà triomphé dans de nombreux domaines et, j'en suis convaincu, continueront à le faire, ainsi que toutes les grandes idées appartenant au patrimoine de la pensée.

7 Bibliographie

ALVAREZ, L., LIONS, P.L., MOREL, J.M., 1992. "Image selective smoothing and edge detection by non linear diffusion, *SIAM J. Numer. Anal.*, 29, 845-866.

BLUM, H., 1973. "Biological Shape and Visual Science", *Journal of Theoretical Biology*, 38, 205-287.

BOURGUIGNON, J.-P., 1985. "L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci", *Séminaire Bourbaki 653*, Astérisque.

CHENCINER, A., 1973. "Travaux de Thom et Mather sur la Stabilité Topologique", *Séminaire Bourbaki 424*.

⁷Le lecteur intéressé par l'actualité de certains modèles de géométrie différentielle en vision pourra consulter le double numéro spécial (97, 2-3) du *Journal of Physiology-Paris* (Petitot, Lorenceau [2003], disponible sur www.sciencedirect.com).

- CHENCINER, A., 1980. "Singularités des Fonctions Différentiables", *Encyclopædia Universalis*, Paris.
- DAMON, J., 1995. "Local Morse Theory for Solutions to the Heat Equation and Gaussian Blurring", *Journal of Differential Equations*, 115, 2, 368-401.
- EVANS, L.C., SPRUCK, J., 1991. "Motion of Level Sets by Mean Curvature. I", *J. Differential Geometry*, 33, 635-681.
- FLORACK, L., 1993. *The Syntactical Structure of Scalar Images*, Thèse, Université d'Utrecht.
- GAGE, M., HAMILTON, R. S., 1986. "The Heat equation shrinking convex plane curves", *J. Differential Geometry*, 25, 69-96.
- GIBSON, J.J., 1979. *The Ecological Approach to Visual Perception*, Boston, Houghton-Mifflin.
- GOLUBITSKY, M., GUILLEMIN, V., 1973. *Stable Mappings and their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics, 14, Springer, New-York, Heidelberg, Berlin.
- GRAYSON, M., 1987. "The Heat Equation Shrinks Embedded Plane Curves to Round Points", *J. Differential Geometry*, 26, 285-314.
- KOENDERINK, J.J., 1984. "The Structure of Images", *Biological Cybernetics*, 50, 363-370.
- KOENDERINK, J.J., VAN DOORN, A.J., 1986. "Dynamic Shape", *Biological Cybernetics*, 53, 383-396.
- MARR, D., 1982. *Vision*, San Francisco, Freeman.
- MATHER, J., 1968(a). "Stability of C^∞ Mappings I : the Division Theorem", *Ann. of Math.*, 87, 89-104.
- MATHER, J., 1968(b). "Stability of C^∞ Mappings III : Finitely Determined Map Germs", *Publications Mathématiques de l'IHES*, 35, 127-156, Presses Universitaires de France, Paris.
- MATHER, J., 1969(a). "Stability of C^∞ Mappings II : Infinitesimal Stability Implies Stability", *Ann. of Math.*, 89, 254-291.
- MATHER, J., 1969(b). "Stability of C^∞ Mappings IV : Classification of Stable Germs by R -algebras", *Publications Mathématiques de l'IHES*, 37, 223-248.
- MATHER, J., 1970. "Stability of C^∞ Mappings V : Transversality", *Advances in Math.*, 4, 301-336.
- MATHER, J., 1971. "Stability of C^∞ Mappings VI : the Nice Dimensions", *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium* (C.T.C. Wall, ed.), Lecture Notes in Mathematics 192, Springer, New-York, Heidelberg, Berlin., 207-253.
- MUMFORD, D., SHAH, J., 1988. "Boundary Detection by Minimizing Functionals", *Proceedings IEEE Computer Vision and Pattern Recognition Conference*, Ann Arbor, Michigan.
- OSHER, S., SETHIAN, J. A., 1988. "Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations", *Jour-*

nal of Computational Physics, 79, 1, 12-49.

PETITOT, J., 1989. "Forme", *Encyclopædia Universalis*, XI, 712-728, Paris.

PETITOT, 1989 (ed.). *Logos et Théorie des Catastrophes* (Colloque de Cerisy à partir de l'oeuvre de René Thom), Genève, Editions Patino.

PETITOT, J., 1992. *Physique du Sens*, Paris, Editions du CNRS.

PETITOT, J., 1994. "La sémiophysique : de la physique qualitative aux sciences cognitives", *Passion des Formes, à René Thom* (M. Porte éd.), 499-545, E.N.S. Editions Fontenay-Saint Cloud.

PETITOT, J., 2003 (ed. avec Jean Lorenceau). *Neurogeometry and Visual Perception*, *Journal of Physiology-Paris*, 97, 2-3.

SETHIAN, J.A., 1990. "Numerical Algorithms for Propagating Interfaces : Hamilton-Jacobi Equations and Conservation Laws", *J. Differential Geometry*, 31, 131-161.

THOM, R., 1972. *Stabilité structurelle et Morphogenèse*, New York, Benjamin, Paris, Ediscience.

THOM, R., 1980. *Modèles mathématiques de la Morphogenèse* (2ème ed.), Paris, Christian Bourgois.

WITKIN, A., 1983. "Scale-Space Filtering", *Proc. Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, 1019-1021, Karlsruhe.