Sistemi di riferimento

La nozione di sistema di riferimento è d'importanza fondamentale sia per la matematica sia per la fisica. Essa è però divenuta talmente ovvia che spesso si dimentica che è tra le piú ricche e feconde della geometria. Se può essere al tempo stesso cosí basilare eppure cosí ovvia, è perché si tratta di una nozione che non concerne direttamente la realtà dei fenomeni, bensí *le condizioni di possibilità della descrizione dei fenomeni stessi*, e la caratteristica delle grandi *teorie* è la possibilità di dedurre una parte importante della *realtà* dei fenomeni dallo studio matematico approfondito delle condizioni di possibilità della loro descrizione.

Se ci si proponesse un'esposizione esaustiva di questa nozione proteiforme, si dovrebbe ripercorrere tutto il sapere matematico e quello fisico poiché non vi è praticamente alcun dominio di tali scienze in cui essa non intervenga in maniera costitutiva. Una simile esposizione sarebbe dunque un doppione di molti altri articoli di quest'*Enciclopedia* ai quali si farà a mano a mano cenno, senza ulteriori specificazioni, in questo articolo, in cui ci si limiterà a riesaminare, in modo lacunoso ed incompleto sia a livello fisico-matematico sia a livello storico, solo alcuni aspetti della problematica del riferimento.

1. *La necessità del riferimento.*

Il verbo 'riferire' si usa tanto nella forma transitiva ('riferire qualcosa') quanto in quella riflessiva ('riferirsi'). In entrambi i casi inquadra un problema di *posizione*, una strategia finalizzata a *definire un posto*. Il suo contesto generale è perciò caratterizzato dall'esistenza di uno spazio E («substrato» delle posizioni e dei posti possibili), di un oggetto O (l'oggetto cui si vuole assegnare una posizione) e di un soggetto S (agente della strategia di ricerca).

A partire da questo contesto generale, si possono distinguere tre tipi empirici di situazione di riferimento, tra loro radicalmente diversi:

1) Anzitutto vi è il caso in cui E è uno spazio *contrassegnato*, reso eterogeneo da punti o da zone *fenomenologicamente distinguibili*. La strategia consisterà allora essenzialmente nel «reperire» tali punti di riferimento. Per fare ciò occorre che il soggetto S abbia una visione relativamente *globale* dello spazio E.
2) Vi è poi il caso in cui il soggetto S non può disporre d'una visione relativamente *globale* dello spazio E, a prescindere dal fatto che lo spazio E sia o non sia contrassegnato ossia che esistano o meno punti di riferimento. In tal caso il soggetto diventa «miope», non potendo che riferirsi localmente, cioè rispetto a ciò che gli sta attorno, a breve distanza, e non rispetto a tutto lo spazio E. Una tale situazione potrebbe chiamarsi *labi-*

rintica. La strategia di riferimento presuppone in tal caso una strategia di uscita dal labirinto (cfr. «Centrato/acentrato», «Labirinto»).

3) Vi è infine il caso in cui il soggetto è dotato di una visione globale dello spazio E (cioè trattasi di un osservatore), in cui però lo spazio E è «non-contrassegnato», non possiede cioè punti di riferimento, è uno spazio omogeneo. Questo è il caso di un navigatore su un oceano, oppure di chi percorre un deserto.

Quest'ultima situazione è alla base della nozione di sistema di riferimento. Infatti è proprio nel caso in cui, essendo E uno spazio omogeneo, l'osservatore non dispone di alcun punto di riferimento *inerente* ad E, che si rende necessario l'uso di un riferimento nel senso di un sistema di coordinate.

2. *La fecondità concettuale della nozione di riferimento.*

Se si volessero valutare le radici antropologiche, culturali, rappresentative e simboliche della nozione di riferimento bisognerebbe rintracciare in tutta la sua complessità fenomenologica e la sua densità storica la conquista del concetto di spazio a ciò che Husserl chiamava la *Lebenswelt*. Si sarebbe cosí condotti da un lato all'analisi antropologica della rappresentazione dello spazio nelle diverse culture (in particolare nelle società primitive in cui lo spazio è locale e simbolicamente strutturato dall'opposizione sacro/profano: cfr. «Religione», «Puro/impuro», «Sacro/profano»), dall'altro all'analisi della sua genesi psicologica, come anche all'analisi della *desemantizzazione* cosmologica dello spazio (passaggio dall'astrologia all'astronomia) e all'analisi dell'equivalenza, a suo tempo rivoluzionaria, dello spazio celeste e dello spazio sublunare, nonché all'analisi dei rapporti tra spazio pittorico prospettico e rappresentazione topografica delle relazioni narrative, all'analisi della cartografia, ecc. Tutti questi problemi, cosí delicati, sono stati profondamente e largamente dibattuti; si potrà far riferimento a due esempi classici: l'opera di Koyré *From the Closed World to the Infinite Universe* [1957] e la summa impressionante di Duhem [1913-16] (cfr. anche «Infinito», «Mondo» e «Universo»).

2.1. Le coordinate cartesiane.

Allorché si delinea il problema di fornire un riferimento in uno spazio omogeneo, cioè privo di punti di riferimento, cioè di punti fenomenologicamente distinti, la nozione di sistema di coordinate diventa necessaria. Supponendo che lo spazio E sia munito di struttura *euclidea*, è possibile definire i riferimenti come i sistemi massimali di n rette passanti per un medesimo punto, a due a due ortogonali (riferimenti cartesiani). Se si assumono poi delle unità di misura su ciascun asse, ogni punto x di E diventa «riferito» rispetto ad un tale riferimento cartesiano R dando le sue n coordinate $(x_1, x_2, ..., x_n)$ cioè assegnando una n-pla ordinata di numeri reali. Grazie a tale procedimento, E è posto in corrispondenza biunivoca con un modello base standard, ossia il prodotto diretto $\mathbf{R}^n$ di n esemplari della retta reale $\mathbf{R}$, il quale, contrariamente ad E, è munito di un sistema di riferimento *canonico*, cioè quello composto dai vettori $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ (con il numero 1 nella i-esima posizione), $i = 1, ..., n$.

Non s'insisterà mai a sufficienza sulla rottura provocata dall'introduzione delle coordinate cartesiane. Essa è all'origine di *tutta* la geometria algebrica e differenziale moderna (cfr. del resto «Geometria e topologia»). Eccone subito alcune conseguenze le cui diramazioni sono divenute sostanzialmente coestensive al campo geometrico.

Sia R un riferimento cartesiano di E. Il fatto che ogni punto x di E divenga, mediante R, «codificato» da una n-pla ordinata di numeri reali permette d'introdurre delle descrizioni *algebriche*; ciò significa immergere la geometria in quella rivoluzione dell'ordine *simbolico* ch'è stata il perno dello sviluppo dell'algebra. Allorché si dispone della nozione di *variabile* si può dire che un punto x di E è rappresentato dai valori delle n variabili $x_1, x_2, ..., x_n$. Avendo poi a disposizione la nozione di *funzione* si può affermare che un «luogo» di E (cioè l'insieme dei punti di E soddisfacenti a certe proprietà o generati applicando una certa regola) è rappresentato da un certo numero di equazioni $f(x_1, ..., x_n) = 0$. Disponendo infine delle nozioni di *differenziazione* si possono tradurre le proprietà infinitesimali (in particolare tangenziali) dei «luoghi» di E. Cosí, attraverso le nozioni cruciali di variabile, di funzione, di derivata e di differenziale si è spalancato l'immenso universo del trattamento simbolico degli oggetti geometrici di E. Ciò ha permesso non solo di riesprimere e di risolvere con metodi *uniformi* (come quelli, ad esempio, dell'eliminazione) i problemi classici della geometria euclidea, ma ha permesso anche di aprire orizzonti radicalmente nuovi la cui investigazione metodica e concettuale è ben lungi dall'essere compiuta.

La «codificazione» dei «luoghi» di E mediante sistemi di equazioni $f(x_1, ..., x_n) = 0$ vincolerà irreversibilmente una parte della geometria alle funzioni «calcolabili», cioè alle funzioni il cui valore può essere calcolato con applicazioni successive di operazioni algebriche di base. Tali funzioni sono le funzioni *polinomiali*. Sia A l'anello dei polinomi in n variabili su $\mathbf{R}$, $A = \mathbf{R}[x_1, ..., x_n]$. Se P è un elemento di A e R un sistema di riferimento cartesiano di E, è possibile associare ad ogni punto $x = (x_1, ..., x_n)$ di E il valore $P(x)$ di P in x. Si possono dunque considerare i sottoinsiemi V di E definiti dall'annullarsi di un sistema $P_1, ..., P_k$ di polinomi. Un tale sottoinsieme si dice *algebrico* e la nozione di insieme algebrico è la nozione primitiva della geometria algebrica (cfr. «Geometria e topologia», «Curve e superfici», «Invariante»).

Assegnare un sistema di riferimento è una condizione che rende possibile la descrizione simbolica degli oggetti geometrici, ma tale condizione è *estrinseca*. È a priori evidente che gli oggetti geometrici di E sono indipendenti dalla scelta di ogni sistema di riferimento o anche (punto di vista complementare) che, se sono dati un oggetto X di E e un cambiamento di riferimento $R \to R'$ e se si considera l'oggetto X' con una descrizione rispetto ad R' identica a quella di X rispetto ad R, allora X e X' sono oggetti equivalenti. Tale evidenza a priori porta al problema della *classificazione* degli oggetti della stessa natura, in particolare a quello della classificazione degli insiemi algebrici definiti da un'equazione $P(x) = 0$ di grado d fissato (coniche o cubiche nel piano, quadriche nello spazio tridimensionale, ecc.). Come si vedrà meglio piú avanti, quest'idea d'invarianza per cambiamenti di riferimento è fondamentale poiché *genera gli oggetti* e si trova all'origine del principio fisico di *relatività* (cfr. del resto l'omonimo articolo).

2.2. Alcuni tipi di coordinate.

La nozione di riferimento cartesiano è l'esempio originario di sistema di coordinate. Ma la nozione di sistema di coordinate ha subito nel corso della storia sviluppi, diversificazioni e generalizzazioni considerevoli. Ne verranno ora citate alcune aventi livelli concettuali molto diversi fra loro.

Sia R un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo E, ad esempio il piano. Le famiglie di rette aventi rispettivamente equazioni $x = a$ e $y = b$ (ove x e y sono le coordinate rispetto a R) formano un sistema (o «rete») di curve ortogonali. Per ogni punto di E passa una e una sola curva di ogni famiglia e queste due curve s'intersecano ortogonalmente in tale punto. Piú in generale, un sistema composto da due famiglie di curve intersecantisi trasversalmente, dipendenti ciascuna da un parametro e ricoprenti ciascuna tutto il piano, può essere considerato come un sistema di coordinate: le coordinate di un punto sono i rispettivi valori dei parametri di ogni famiglia per l'unica curva della famiglia che passa per quel punto. Un esempio standard di un tale sistema è dato dalle coordinate *polari* (r, ϑ) del piano associate al sistema dei cerchi centrati nell'origine e delle rette passanti per l'origine. Si noti che tale sistema ammette l'origine come punto «singolare», poiché la coordinata angolare è ivi indeterminata. Nello spazio a tre dimensioni, si hanno le coordinate cilindriche ottenute aggiungendo alle coordinate polari del piano una coordinata cartesiana per la terza dimensione; altro esempio si ha con le coordinate di Eulero date dal sistema di sfere centrate nell'origine e, su ognuna di tali sfere, delle coordinate angolari «geografiche» di longitudine e latitudine.

La nozione di riferimento cartesiano è legata alla struttura euclidea degli spazi considerati. È noto però che, per ottenere risultati generali sugli insiemi algebrici, si è stati condotti da un lato ad aggiungere i punti all'infinito (proiettivizzazione), e dall'altro a considerare i punti a coordinate complesse. Nella geometria proiettiva complessa del XIX secolo si sono affrontati due punti di vista radicalmente opposti. Da una parte quello della geometria detta «sintetica» che rifiutava ogni algebrizzazione mediante l'uso di coordinate, dall'altra quello della geometria algebrica che voleva adattare a questa nuova struttura le tecniche proprie della geometria cartesiana. Questo secondo punto di vista si è sviluppato grazie all'introduzione delle coordinate *omogenee* da parte di Möbius, Plücker e Cayley.

Si considerino ad esempio, in un piano euclideo E, tre punti u_1, u_2 e u_3 non allineati. Siano essi dotati di «masse» m_1, m_2 ed m_3 e se ne consideri il baricentro C. Se $R=(x, y)$ è un sistema di riferimento cartesiano di E, le coordinate cartesiane x_c ed y_c di C sono date dalle formule:

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} \qquad y_c=\frac{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}.$$

Möbius ha battezzato m_1, m_2, m_3 coordinate baricentriche di C. È facile verificare che

1) facendo variare le «masse» m_1, m_2, m_3 si possono generare tutti i punti di E ed i punti all'infinito soddisfano alla condizione $m_1+m_2+m_3=0$;
2) fissato C, le sue coordinate baricentriche sono definite a meno di un fattore di proporzionalità $k\neq 0$.

L'inconveniente di tale definizione è ch'essa presuppone di aver fissato un sistema di riferimento cartesiano in E, mentre la struttura proiettiva di un piano proiettivo è una struttura piú debole di quella affine d'un piano affine che vi è immerso. Si può rimediare a questo inconveniente identificando il piano proiettivo $\mathbf{P}^2$ con l'insieme delle rette di $\mathbf{R}^3$ passanti per l'origine e private dell'origine stessa. Viene cosí definito un punto di $\mathbf{P}^2$ mediante una terna (X, Y, T) di tre coordinate dette *omogenee* le quali *a*) non sono mai tutte e tre nulle, ed inoltre *b*) sono definite a meno di un comune fattore di proporzionalità $k\neq 0$. Se $T\neq 0$, si può allora associare alla terna (X, Y, T) il punto di un piano cartesiano E di coordinate, rispetto a un sistema di riferimento R, $x=X/T$, $y=Y/T$. Se (kX, kY, kT), $k\neq 0$, è un'altra terna di coordinate omogenee per lo stesso punto di $\mathbf{P}^2$, il punto di E che corrisponde a tale terna è proprio il medesimo poiché

$$\frac{kX}{kT}=\frac{X}{T} \qquad \frac{kY}{kT}=\frac{Y}{T}.$$

Si ottiene cosí una biiezione tra E e il complementare in $\mathbf{P}^2$ della «retta all'infinito» di equazione $T=0$.

Se allora $P(x, y)=0$ è l'equazione di una curva algebrica C di E, ad essa si può canonicamente associare un'equazione *omogenea* atta a definire una curva algebrica proiettiva C' che prolunga C in $\mathbf{P}^2$. Se ad esempio C è una conica di equazione $ax^2+by^2+c=0$, le si associa l'equazione $a(X/T)^2+b(Y/T)^2+c=0$, ossia l'equazione omogenea $aX^2+bY^2+cT^2=0$.

In altri termini, la geometria algebrica proiettiva in $\mathbf{P}^n$ è l'analisi degli insiemi algebrici definiti mediante polinomi *omogenei* dell'anello dei polinomi $\mathbf{C}[X_0, X_1, ..., X_n]$.

Ma la nozione di sistema di coordinate è di portata ben piú generale. Essa interviene infatti ogniqualvolta si voglia rappresentare un'entità dipendente da certi parametri come un *punto* di uno «spazio» di dimensione corrispondente. Per questo tale nozione è legata all'enorme generalizzazione del concetto di spazio che s'è prodotta nel corso del XIX secolo. Eccone qualche esempio.

In meccanica un sistema di N punti materiali può essere rappresentato da un punto di uno spazio a $3N$ dimensioni e, se questi punti sono vincolati da condizioni, da un sottospazio di tale spazio. Nella teoria di Fourier una funzione periodica può essere considerata un punto di uno spazio funzionale di dimensione infinita e i suoi coefficienti di Fourier diventano, secondo questa interpretazione, le sue coordinate rispetto al sistema di riferimento costituito dalle funzioni trigonometriche (cfr. per esempio «Calcolo»).

In geometria proiettiva bidimensionale, se si considera l'equazione omogenea $X_1x_1+X_2x_2+X_3x_3=0$, essa rappresenta l'equazione di una retta di coordinate omogenee (X_1, X_2, X_3) se le x_i variano e le X_i restano fisse, e l'equazione del punto di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) (considerato come *inviluppo* delle rette passanti per esso) se le X_i variano e le x_i restano fisse (principio di dualità di Plücker). In generale, in uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^n$ si dispone di coordinate omogenee duali per i punti e per gli iperpiani. Nasce cosí il problema di trovare coordinate omogenee per le sottovarietà di dimensione $1<d<n-1$. Si consideri ad esempio uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^3$ di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) per i punti e (X_1, X_2, X_3, X_4) per i piani. Sia Δ la retta passante per due punti x e y di $\mathbf{P}^3$ e si consideri la matrice 2×4

$$\begin{pmatrix} x_1 \dots x_4 \\ y_1 \dots y_4 \end{pmatrix}.$$

Siano p_{ij} i sei minori $p_{ij}=x_iy_j-y_ix_j$, $i, j=1, \dots, 4$, $i\neq j$, $p_{ij}=-p_{ji}$. È facile verificare che, mediante i p_{ij} considerati come coordinate omogenee, la retta Δ viene rappresentata da un punto di $\mathbf{P}^5$. Ma poiché i p_{ij} soddisfano la relazione

$$(1) \qquad p_{14}p_{23}+p_{24}p_{31}+p_{34}p_{12}=0,$$

«lo spazio» delle rette di $\mathbf{P}^3$ è in effetti rappresentabile mediante la *quadrica* Q di $\mathbf{P}^5$ d'equazione (1). I p_{ij} si chiamano *coordinate plückeriane* delle rette di $\mathbf{P}^3$ e la geometria di Q diventa la geometria dei sistemi di rette di $\mathbf{P}^3$. Piú in generale, le sottovarietà lineari di dimensione l di $\mathbf{P}^n$ si possono rappresentare con i punti di una sottovarietà algebrica (non lineare) di uno spazio $\mathbf{P}^N$ di dimensione superiore (teoria delle grassmanniane).

Non soltanto le sottovarietà lineari di $\mathbf{P}^n$ possono essere considerate punti di una sottovarietà algebrica di $\mathbf{P}^N$. Infatti [cfr. Dieudonné 1974] la nozione di coordinate plückeriane può estendersi fino a trattare come punti di una varietà algebrica proiettiva *tutte* le sottovarietà algebriche (non lineari) di $\mathbf{P}^n$. Sia in effetti V una sottovarietà algebrica di dimensione l di $\mathbf{P}^n$. Per la dualità tra punti e iperpiani di $\mathbf{P}^n$ si può considerare un sistema S di $l+1$ iperpiani di $\mathbf{P}^n$ come un punto di $(\mathbf{P}^n)^{l+1}$. Si fa allora vedere che il sistema S la cui intersezione ha elementi in comune con V forma un'ipersuperficie di $(\mathbf{P}^n)^{l+1}$ di equazione $F_V=0$, ove F_V è un polinomio irriducibile omogeneo nelle coordinate omogenee degli iperpiani di S. I coefficienti di F_V si chiamano *coordinate di Chow* di V e permettono di rappresentare V come un punto di uno spazio $\mathbf{P}^N$ la cui dimensione dipende da l e dal grado di V.

Cosicché, mediante lo sviluppo della geometria in $\mathbf{P}^n$, mediante la rappresentazione di enti derivati da $\mathbf{P}^n$ come punti di sottovarietà di $\mathbf{P}^N$ di dimensione superiore, la cui geometria ne traduce le proprietà, è sorto progressivamente uno dei metodi fondamentali della geometria algebrica.

3. *Il passaggio del globale al locale.*

A partire dalla rottura compiuta da Riemann relativamente al contenuto da dare al concetto di spazio, i matematici hanno iniziato a considerare spazi generalizzati costituiti da enti qualsiasi dipendenti da un certo numero (finito o infinito) di parametri o gradi di libertà. Gli spazi hanno allora preso a proliferare, dalle varietà differenziabili agli spazi funzionali.

Tale generalizzazione del concetto di spazio ha assunto due grandi direzioni: da una parte quella degli spazi ottenuti per incollamento di pezzi di spazi standard ($\mathbf{R}^n$ o $\mathbf{C}^n$) e dall'altra quella degli spazi ottenuti estendendo alla dimensione infinita (in particolare alla dimensione numerabile) la struttura di spazio vettoriale e la teoria degli operatori lineari.

Per trattare gli spazi ottenuti per incollamento di pezzi di spazi standard, e cioè le varietà differenziabili, analitiche o algebriche, s'è dovuta introdurre la nozione di *coordinate locali*, ossia localizzare la nozione di sistema di riferimento (cfr. «Locale/globale»). Si ricordi per esempio che una varietà differenziabile reale di dimensione n è uno spazio topologico M ricoperto da aperti U_i, detti *carte locali*, omeomorfi ad aperti V_i di $\mathbf{R}^n$ mediante omeomorfismi φ_i ai quali s'impone di dar luogo a funzioni di incollamento $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ che siano differenziabili. Se U_i è una carta locale di M si possono trasportare ad U_i, tramite l'omeomorfismo φ_i^{-1}, le coordinate di V_i e si ottengono in tal modo le coordinate locali della carta (U_i, φ_i). Ogni sistema di coordinate locali $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di M in un intorno di $x \in M$ definisce un sistema di riferimento (una base) nello spazio vettoriale T_xM dei vettori tangenti ad M in x. Tali riferimenti tangenti variano al variare del punto x considerato e quindi, contrariamente a quanto succedeva nel caso degli spazi standard $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ o $\mathbf{P}^n$, non possiedono alcun carattere globale. Inoltre non si è neanche sicuri di poter spostare differenziabilmente un sistema di riferimento tangente lungo M. Infatti, ciò equivarrebbe a dire che su M è possibile costruire n campi differenziabili di vettori tangenti linearmente indipendenti in ogni punto x di M e ciò implicherebbe che il fibrato tangente $TM \to M$ di M fosse trivializzabile cioè diffeomorfo a un prodotto diretto $M \times \mathbf{R}^n$. Allorché TM è trivializzabile, si dice che M è *parallelizzabile*. È eccezionale che una varietà differenziabile sia parallelizzabile. Si sa per esempio che le sole sfere parallelizzabili sono S^1, S^3, S^7 (teorema di Bott-Kervaire-Milnor: cfr. l'articolo «Locale/globale»).

Il fatto però che M non sia in generale parallelizzabile non vieta di spostare i riferimenti tangenti su M. Spostando un sistema di riferimento su M lungo un cappio, si può ritornare al punto di partenza con un riferimento *differente*. In altri termini, si può considerare il fibrato dei riferimenti su M e, anche se esso non ammette sezioni globali, considerarne delle sezioni, rilevando su di esse cammini di M. La coomologia di tale fibrato è determinante per la coomologia di M a valori nei fibrati vettoriali, punto di vista che sviluppa la teoria dei fibrati *principali* inaugurata da Cartan nel suo metodo detto del (sistema di) *riferimento mobile*.

L'uso delle coordinate locali è ineliminabile in geometria differenziale e riemanniana. Esso sta alla base di tutti i calcoli e permette di definire delle entità cosí importanti quali la curvatura di una varietà, la parentesi di Lie di due campi vettoriali, l'azione di una connessione affine, ecc. (cfr. «Invariante» e «Relatività»). Tuttavia, poiché la geometria di una varietà è *intrinseca*, cioè indipendente dalle coordinate locali scelte, bisogna sempre presentarne i risultati in modo invariante. Le coordinate locali servono ad esprimere e a calcolare, ma devono poter essere eliminate.

4. *Cambiamento di riferimento, invarianza e relatività.*

Il fatto che in uno spazio nel quale nessun punto è fenomenologicamente distinguibile (cioè in uno spazio privo di punti di riferimento) non ci si possa riferire che mediante un sistema di coordinate, che un tale sistema sia arbitrario e che perciò gli enti derivati da tale spazio debbano aver senso a prescindere dalla scelta del sistema di riferimento, è un'evidenza a priori tra le piú feconde di tutta la matematica e soprattutto di tutta la fisica. È anzi doveroso notare che in fisica questa evidenza possiede lo statuto di un autentico *principio a priori dell'esperienza* che è *determinante* per l'oggettività fisica e per la struttura dei suoi oggetti. Questo fatto non è sufficientemente ricordato, eppure esso è epistemologicamente decisivo poiché mostra che la fisica ha confermato, al di là di ogni attesa, il profondo significato dell'apriorismo kantiano. Si tratta, a parere di chi scrive, di un'osservazione essenziale per una rivalutazione dei rapporti tra la scienza e la filosofia critica. L'apriorismo kantiano non dev'essere interpretato come un assoluto d'origine logica ma come un condizionamento dell'esperienza possibile. Esso ha la funzione di dedurre alcune intuizioni dei princìpi sintetici dell'esperienza il cui sviluppo matematico permette di assorbire progressivamente la descrizione dei fenomeni. In altre parole, tale funzione non è per nulla incompatibile con l'esperienza, anzi: essa concerne il ruolo della matematica nella teoria e consiste nell'assegnare a quest'ultima una *finalità* (una teleologia) che non è quella di una semplice modellizzazione *ma di un'identificazione progressiva della matematizzazione dell'esperienza con lo sviluppo matematico del suo inquadramento a priori* [cfr. Petitot 1980; nonché «Categorie/categorizzazione» e «Teoria/modello»]. L'apriorismo kantiano è dunque inscindibile dallo sviluppo *concettuale* della matematica.

Questa teleologia razionale dell'identificazione dell'oggettività con lo sviluppo matematico del suo inquadramento a priori è forse piú che mai manifesta nella storia del principio di relatività. Si deve dunque richiamarne brevemente qualche elemento e ciò sarà fatto partendo dall'ottica generale dell'invarianza per cambiamenti di riferimento.

4.1. Cambiamenti di riferimento e gruppi di Lie.

La classe dei sistemi di riferimento di uno spazio astratto E definisce una struttura geometrica su E. I cambiamenti di riferimento entro questa classe costituiscono un *gruppo*, il gruppo invariante della struttura e, a partire dal programma di Erlangen di Klein, si *definisce* una geometria mediante il suo gruppo invariante e le proprietà intrinseche degli enti di questa geometria sono le proprietà invarianti rispetto a tale gruppo.

Si è stati dunque condotti in modo naturale ad analizzare la struttura generale dei gruppi di cambiamenti di riferimento e in particolare la struttura dei gruppi classici dei cambiamenti di base negli spazi vettoriali (gruppi lineari), delle isometrie negli spazi euclidei (gruppi ortogonali), o degli automorfismi di spazi complessi o simplettici (gruppi unitari o gruppi simplettici). Questi gruppi hanno doppia struttura. Da un lato sono gruppi (struttura algebrica) e dall'altro sono varietà algebriche, analitiche o piú generalmente differenziabili (struttura geometrica). Costituiscono l'oggetto della teoria detta dei gruppi di Lie, teoria sviluppata essenzialmente da Lie, Klein, Killing e soprattutto Cartan; si tratta senza dubbio di una delle teorie piú complete ed estetiche della matematica (cfr. «Invariante»).

In fisica la struttura del gruppo d'invarianza dello spazio-tempo diventa *determinante* di oggetti nel senso già visto a proposito dell'apriorismo kantiano. In fisica si considerano non solo i cambiamenti di riferimento geometrici e statici, ma anche quelli dinamici, cioè quei riferimenti che si spostano gli uni rispetto agli altri. In relatività galileiana-newtoniana si suppone che lo spazio-tempo $\mathcal{E}$ sia il prodotto di uno spazio euclideo tridimensionale e di un asse dei tempi (tempo universale). Tra tutti i riferimenti possibili di $\mathcal{E}$, si ammette che esista una classe $\mathcal{I}$, la classe dei sistemi di riferimento detti *inerziali*, rispetto a cui le leggi della fisica possono esprimersi in modo invariante. Se R è un elemento di $\mathcal{I}$, tutti gli elementi di $\mathcal{I}$ si ottengono sia per cambiamenti geometrici (traslazioni nel tempo, traslazioni e rotazioni nello spazio) sia per traslazioni di velocità uniforme (cfr. «Relatività»). Sia G il gruppo detto di Galileo dei cambiamenti di riferimento inerziali. Le leggi della fisica devono essere invarianti rispetto all'azione di G e ciò impone loro vincoli fortissimi.

La forza miracolosa della fisica fondamentale risiede in gran parte nel fatto ch'essa ha saputo stabilire una *solidarietà* tra la struttura del gruppo d'invarianza dinamica dello spazio-tempo e alcuni attributi e proprietà fondamentali della materia. Infatti, all'invarianza per traslazioni nello spazio sono associati l'impulso di una particella e la sua conservazione, all'invarianza per rotazioni sono associati il suo momento cinetico e la sua conservazione, all'invarianza per traslazioni nel tempo sono associate la sua energia e la sua conservazione. Si sa d'altronde che la relatività ristretta einsteiniana ha avuto origine dalla constatazione che le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico *non erano* invarianti per il gruppo di Galileo. Il loro gruppo d'invarianza è il gruppo delle trasformazioni di Lorentz. Guidato da un profondo senso dell'a priori del principio di relatività, Einstein è stato condotto a fare di questo gruppo d'invarianza dell'elettromagnetismo il gruppo d'invarianza di tutta la fisica e dunque in particolare della *meccanica*. La celebre equivalenza tra massa ed energia non è che una *conseguenza diretta* del cambiamento del gruppo d'invarianza, ossia della geometria di $\mathfrak{S}$ (cfr. l'articolo «Relatività»).

In generale, se G è il gruppo d'invarianza dello spazio-tempo $\mathfrak{S}$, la struttura geometrica di questo gruppo diventa determinante per quelle che prendono il nome di *particelle elementari* di questo spazio-tempo, cioè per la meccanica quantistica che è ad esso associata. Infatti, in meccanica quantistica un sistema viene rappresentato mediante lo spazio H (che, per ragioni di carattere generale, si può supporre essere uno spazio di Hilbert) delle sue funzioni d'onda. È peraltro a priori evidente che, poiché la scelta di un sistema di riferimento è relativa (concerne l'osservatore e non il sistema), il gruppo G deve operare su H. In altri termini, H è una *rappresentazione* di G. Dire che il sistema è elementare equivale dunque a dire che tale rappresentazione è *irriducibile*. La teoria delle rappresentazioni irriducibili di G (eventualmente esteso mediante gruppi di simmetrie interne) diventerà dunque *il principio di classificazione delle particelle elementari* (cfr. «Particella» e «Simmetria»). Si vede allora che mentre in partenza era evidente, *il principio di relatività è divenuto costitutivo per la struttura della materia*. Solo nell'atomismo greco in cui gli atomi sono concepiti come la manifestazione dei sottogruppi finiti (irriducibili a sottogruppi di rotazione del piano) del gruppo di rotazione di $\mathbf{R}^3$, si ritrova l'idea che le simmetrie dello spazio-tempo determinano la struttura degli oggetti che vi evolvono, cioè, piú in generale, che un principio di relatività del sistema di riferimento è ontologicamente costitutivo.

4.2. Campi tensoriali, covarianza e relatività generale.

Quando si considerano varietà differenziabili, per cui la nozione di riferimento vale solo localmente come riferimento tangente, il principio d'invarianza per cambiamenti di riferimento *diventa un principio di covarianza per cambiamenti di coordinate locali*.

Sia x un punto di una varietà differenziabile M di dimensione n e $(x_1, ..., x_n)$ un sistema di coordinate locali in x (x ha dunque come coordinate $(0, ..., 0)$ e può essere notato 0). Sia C una curva differenziabile di M passante per x. In termini di coordinate locali, C è definita da equazioni parametriche $x_i = \varphi_i(t)$, ove le φ_i sono funzioni differenziabili della variabile reale t soddisfacenti per esempio a $\varphi_i(0) = 0$. Il vettore tangente v a C in x ha come coordinate i numeri

$$X_i = \left(\frac{d\varphi_i}{dt}\right)_{t=0}.$$

Se ora si fa un cambiamento di coordinate locali considerando delle funzioni differenziabili $x'_i = x'_i(x_1, ..., x_n)$ che inducono un automorfismo lineare del piano tangente $T_x M$ (cioè soddisfano alla condizione d'*invertibilità* che lo jacobiano $\mathcal{J} = (\partial x'_i / \partial x_j)(0)$ sia non nullo), la curva C sarà definita dalle equazioni

$x'_i = \psi_i(t) = x'_i(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$. Il vettore tangente v a C in x avrà dunque per coordinate i numeri

$$X'_i = \left(\frac{d\psi_i}{dt}\right)_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}(0)\left(\frac{d\varphi_j}{dt}\right)_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}(0)\, X_j.$$

Si denoti α_i^j il numero $(\partial x'_i/\partial x_j)(0)$. Utilizzando la regola della somma degli indici, si ottengono dunque le espressioni

(2) $\quad X'_i = \alpha_i^j X_j.$

Ma il vettore tangente v ha un'esistenza *intrinseca* indipendente dalla scelta delle coordinate locali. Le relazioni (2) di *trasformazione* delle coordinate di v per cambiamento di coordinate locali esprimono proprio tale esistenza intrinseca. Esse la esprimono determinando un *tipo* di variazione di queste coordinate, cioè una *varianza*. Si è dunque condotti ad affermare che ogni sistema di n numeri $x_1, ..., x_n$ che si trasforma mediante la regola di trasformazione (2) per cambiamento di coordinate locali, definisce un oggetto che ha uguale varianza delle coordinate di un vettore tangente ad M. Si dirà che un tale sistema è un *tensore controvariante d'ordine 1 in x*.

Ma le coordinate X_i di v sono le coordinate relative a un riferimento in T_xM canonicamente associato alla scelta $(x_1, ..., x_n)$ di coordinate locali. Per definire questa base la cosa più semplice è considerare v come un *operatore di derivazione* sulle funzioni differenziabili su M (cfr. «Differenziale» e «Infinitesimale»). Se f è una tale funzione, allora l'azione di v è definita dalla formula

(3) $$vf = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

La base di T_xM rispetto alla quale sono definite le coordinate X_i di v è dunque definita dagli n operatori $(\partial/\partial x_i) = \partial^i$. Questi operatori hanno una varianza che non è quella di un vettore tangente. Si operi infatti un cambiamento di coordinate locali. In base alle regole di differenziazione, si ha:

(4) $$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad \text{cioè} \quad \partial'^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\partial^i.$$

Si denoti β_j^i il numero $(\partial x_j/\partial x'_i)$. Le relazioni (4) diventano le relazioni (5):

(5) $\quad \partial'^i = \beta_j^i \partial^j.$

La base ∂^j ha dunque una varianza *duale* di quella di v. Si dice ch'essa è la varianza di un *tensore covariante d'ordine 1 in x*.

Il fatto che la varianza di (∂^i) sia duale di quella di (X_i) permette allora facilmente di esprimere l'*invarianza* di v. Si ha infatti $v = X_i\partial^i$. Per cambiamento di coordinate locali v è trasformato in $v' = X'_i\partial'^i = \alpha_i^j X_j \beta_j^i \partial^j$ in virtú delle (2) e (5). Si ha dunque $v' = \alpha_i^j \beta_j^i X_j \partial^j$. Ma $\alpha_i^j \beta_j^i = 1$ poiché la matrice (β_j^i) è l'*inversa* della matrice jacobiana (α_i^j) e, poiché $X_j\partial^i = v$, si ha $v' = v$: v è invariante.

Si consideri ora la base $(dx_1, ..., dx_n)$ dei differenziali in x, cioè la base dello spazio cotangente T_x^*M. Sempre grazie alle regole di differenziazione si ha

$$dx'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j,$$

cioè $dx'_i = \alpha_i^j dx_j$. La base (dx_i) è dunque un tensore controvariante d'ordine 1 in x, ossia un sistema avente la *stessa varianza* delle coordinate di un vettore tangente. Ciò implica che l'entità $\partial^i dx_i$ è un'entità *invariante*. Tale entità è molto semplicemente l'operatore $d = \partial^i dx_i$ che fornisce il differenziale di una funzione f secondo la regola $df = (\partial f/\partial x_i)dx_i$.

Sia ora $\omega = a^i dx_i$ una 1-forma differenziale in x, cioè un elemento dello spazio cotangente T_x^*M. Il sistema degli (a_i) è un tensore covariante d'ordine 1. Si può dunque costruire un'entità *invariante* considerando la somma $a^i X_i$ ove (X_i) è il sistema delle coordinate di un vettore tangente v. Ma ω è una forma lineare su T_xM e questo numero invariante non è altro che il valore $\omega(v)$ di ω su v.

Si può notare che in tal modo si definisce la varianza di *due* tipi di enti, quelli di tipo «sistemi di coordinate» come (X_i) oppure (a^i) e quelli di tipo «base (di uno spazio vettoriale di enti) associata alla scelta di un sistema di coordinate locali» come (∂^i) oppure (dx_i). Se (X) è un sistema del primo tipo e (α) un sistema del secondo tipo che sia di varianza duale, allora $X\alpha$ è un'entità invariante (come $v = X_i\partial^i$ o $\omega = a^i dx_i$). Se (X) è un sistema del primo tipo e (a) un sistema del primo tipo ma di varianza duale, Xa è un numero invariante (come per $\omega = a^i dx_i$, $v = X_i\partial^i$ e $\omega(v) = X_i a^i$). Se χ è un sistema del secondo tipo e α un sistema del secondo tipo ma di varianza duale, allora $\chi\alpha$ è un operatore invariante (come per $d = \partial^i dx_i$).

Si vede dunque che sulle varietà differenziabili la nozione di cambiamento di riferimento fa sorgere tipi di varianza e mediante ciò crea entità invarianti, cioè *oggetti*. Tali oggetti sono i *tensori*. Ad ogni punto x di M si può dunque associare un'algebra tensoriale.

Un tensore può però evidentemente *variare* con x. Si è dunque condotti a considerare *campi tensoriali* su M, cioè sezioni dei fibrati vettoriali su M le cui fibre sono gli spazi di tensori di un certo tipo. In analogia al calcolo differenziale sulle funzioni, si può anche sviluppare un calcolo differenziale sui tensori. Ma il problema è un po' piú complicato in quanto, se a un tensore si applicano le regole classiche di differenziazione, *non si ottiene*, in generale, *un tensore*.

Si consideri per esempio una funzione $f: M \to \mathbf{R}$. Sia $(x_1, ..., x_n)$ un sistema di coordinate locali in $x \in M$. Le derivate parziali $(\partial f/\partial x_i)$ di f sono le coordinate di un tensore covariante d'ordine 1, che per prodotto con un tensore controvariante d'ordine 1 (X_i), dà lo scalare $Xf = X_i(\partial f/\partial x_i)$ che è la derivata di f rispetto ad X. Ma è facile vedere che le derivate *seconde* $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ non sono le coordinate di un tensore. Poiché anche le derivate d'ordine superiore di una funzione non possono essere definite in modo invariante, si è stati condotti ad introdurre la nozione di *getto* (cfr. «Locale/globale» e «Geometria e topologia»).

Per poter elaborare una teoria invariante della differenziazione dei tensori, bisogna introdurre la nozione di *connessione affine* e sviluppare la teoria della derivazione covariante (cfr. «Relatività»).

Se si ritorna ora alla relatività einsteiniana, si vede che essa riposa interamente sui seguenti principî, alcuni dei quali sono puramente a priori, mentre altri dipendono solo da dati sperimentali di basilare importanza:

1) Lo spazio-tempo $\mathfrak{S}$ è una varietà differenziabile: dato intuitivo fondamentale.
2) Questa varietà è a quattro dimensioni: dato intuitivo fondamentale.
3) In $\mathfrak{S}$ esiste la possibilità di ***misurare***; è dunque una varietà riemanniana: dato pratico primitivo.
4) Gli enti fisici devono essere descritti da entità di varianza ben definita (e dunque da campi tensoriali) dalle quali si possono dedurre entità invarianti (principio a priori).
5) Localmente $\mathfrak{S}$ ammette il gruppo di Lorentz come gruppo invariante (principio di relatività).
6) Vi è un'equivalenza tra massa gravitazionale e massa inerziale (esperienza cruciale) e dunque tra gravità ed inerzia (principio di relatività generale).

Nell'articolo «Relatività» o nel classico *Gravitation* di Misner, Thorne e Wheeler [1973], si vedrà lo sviluppo che, sebbene classico, continua ad affascinare per il suo contenuto teorico, dell'idea fondamentale che l'equivalenza degli *osservatori* (cioè l'invarianza per cambiamenti di sistema di riferimento e di coordinate locali) è *costitutiva* della struttura dell'universo.

5. *Sistemi di riferimento adattati.*

Dati uno spazio E e una certa entità dipendente da tale spazio, è spesso utile considerare dei riferimenti o delle coordinate locali in E *adattate* all'entità in questione. Ciò permette infatti di descrivere tale entità in maniera particolarmente semplice. In matematica esistono un'enorme quantità di procedure di questo tipo. Ci si limiterà a citare brevemente quattro esempi di natura molto diversa.

5.1. Sistemi di riferimento adattati in geometria differenziale.

Dati una curva piana C e un punto x di C, si può considerare il sistema di riferimento costituito dalla tangente e dalla normale a C in x. Se S è una superficie in $\mathbf{R}^3$ e x un punto di S, si può analogamente considerare il riferimento costituito dalla normale in x a S e, nel piano tangente a S in x, gli assi principali della conica che descrive la curvatura (cfr. «Differenziale»).

5.2. Sistemi di riferimento adattati in algebra lineare.

Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n e u un endomorfismo di E. È noto che l'*analisi spettrale* di u consiste nel cercare una base di E in cui l'espressione di u (la sua matrice) diventi il piú semplice possibile. Si può dunque parlare di base «adattata» ad u.

Similmente, se A è la matrice di una forma quadratica, la ricerca degli «assi principali» è la ricerca di una base adattata ad A.

Questo procedimento può essere generalizzato agli spazi vettoriali di funzioni ed agli operatori lineari che sono gli operatori integro-differenziali. La ricerca di riferimenti adattati ad alcuni di questi operatori diventa allora la ricerca di funzioni particolari, come le funzioni trigonometriche e le funzioni speciali (cfr. «Spettro»).

5.3. Sistemi di riferimento adattati in teoria delle singolarità.

Sia $f: M \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile a valori reali definita su una varietà differenziabile di dimensione n. Sia x_0 un punto critico non degenere di f (cfr. «Locale/globale»). Il teorema di Morse dice che esiste un sistema di coordinate locali $(x_1, ..., x_n)$ in x_0 (ivi x_0 ha dunque coordinate $(0, ..., 0)$) tale che f assuma la forma particolarmente semplice

$$f(x) = f(x_0) - \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + \sum_{j=r+1}^{n} x_j^2$$

(il numero r di termini quadrati preceduti dal segno negativo è l'*indice* del punto critico). Tale risultato significa due cose. Da un lato che mediante un cambiamento di coordinate locali si possono annullare, nello sviluppo di Taylor di f in x, tutti i termini di grado ≥ 2 (in un punto critico non degenere f è determinata dal suo getto di ordine 2). Inoltre che, poiché la hessiana di f in x è di rango massimo, è possibile, mediante un cambiamento lineare di coordinate, assumere come sistema di riferimento il sistema dei suoi «assi principali».

In generale, dato un punto singolare di un'applicazione $f: M \to N$ tra due varietà differenziabili, si cercheranno sistemi di coordinate locali sia nel dominio M sia nel codominio N per cui l'espressione di f diventi la piú semplice possibile. Il teorema di Whitney sui modelli canonici delle singolarità delle applicazioni differenziabili strutturalmente stabili tra varietà di dimensione 2 ne è un tipico esempio.

5.4. Variabili azione-angolo in meccanica hamiltoniana.

In meccanica hamiltoniana (cfr. in particolare «Geometria e topologia», VI, pp. 713-23) è dato uno spazio delle fasi munito d'una struttura *simplettica*, cioè una varietà differenziabile E di dimensione pari $2n$ munita di una 2-forma differenziale *chiusa e regolare* ω. In generale E sarà il fibrato cotangente di una varietà di configurazione M.

Per il teorema di Darboux, se $x \in E$, esistono sempre dei sistemi di coordinate locali di tipo (p, q), $q=(q_1, ..., q_n)$ e $p=(p_1, ..., p_n)$ per cui ω prende la forma standard $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$. Tali sistemi «adattati» a ω si chiamano sistemi di coordinate simplettiche e i cambiamenti di coordinate simplettiche si chiamano trasformazioni *canoniche*. Si tratta delle trasformazioni che lasciano invariante la 2-forma ω.

È noto che un sistema hamiltoniano è allora definito da uno *hamiltoniano* su M cioè da una funzione «energia» $H: M \to \mathbf{R}$ (differenziabile). Ad H viene associata la 1-forma dH che è il suo differenziale. Ma la 2-forma ω stabilisce un isomorfismo tra vettori tangenti e vettori cotangenti di E e si può dunque, tramite ω, associare a dH (e dunque ad H) un campo di vettori su E, detto flusso hamiltoniano, le cui traiettorie sono date dalle equazioni canoniche di Hamilton:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Per costruzione, la 2-forma ω è invariante per l'azione del flusso (e dunque anche ω^n che è la forma «volume» di E: teorema di Liouville); cosí pure lo è lo hamiltoniano H (conservazione dell'energia).

Per cercare d'integrare le equazioni di Hamilton riportate sopra, il procedimento consiste nel cercare *integrali primi* ossia invarianti del flusso *indipendenti* da ω e da H. Infatti esiste un teorema fondamentale, dovuto a Liouville, che afferma che se si conoscono $n-1$ integrali primi (cioè $n-1$ funzioni $F_i: E \to \mathbf{R}$ le cui parentesi di Poisson (F_i, H) con lo hamiltoniano H sono identicamente nulli) i quali, da un lato sono tra loro *indipendenti* ed indipendenti da H (cioè tali che in ogni punto x di E i differenziali dF_i e dH siano linearmente indipendenti) e dall'altro sono tra loro *in involuzione* ed in involuzione con H (cioè tali che le parentesi di Poisson (F_i, F_j) e (F_i, H) siano identicamente nulle), allora le equazioni di Hamilton s'integrano per quadrature.

Piú precisamente, se le condizioni del teorema di Liouville sono soddisfatte, se $a=(a_1, ..., a_{n-1})$ è un sistema di valori per le F_i, e se e è un valore di H, il sottoinsieme $V_{a,e}$ di E definito da $H=e$ e $F_i=a_i$ $(i=1, ..., n-1)$ è un sottoinsieme *invariante* rispetto al flusso hamiltoniano. Poiché le F_i e H sono indipendenti, $V_{a,e}$ è in effetti una sottovarietà regolare di E. Se per di piú essa è compatta e connessa, considerazioni di natura puramente geometrica implicano ch'essa è diffeomorfa a un *toro n*-dimensionale T. Il moto su T è allora *quasi periodico*, il che significa che, se $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ sono le coordinate angolari di T, le equazioni di Hamilton si riducono a $d\varphi/dt=\Omega$, ove Ω è una n-pla che dipende da a e da e.

Un tale sistema avente n integrali primi (tra cui H) indipendenti e in involuzione si chiama sistema *integrabile*. Si può allora mostrare che in un intorno di $V_{a,e}$, E è un prodotto diretto di $V_{a,e}$ (cioè di T) per un aperto U di $\mathbf{R}^n$. Si ha dunque un sistema di coordinate (Ω, φ) in cui le equazioni di Hamilton si scrivono $d\varphi/dt = \Omega$, $d\Omega/dt = 0$, e s'integrano dunque immediatamente ottenendo $\Omega = \text{cost}$ e $\varphi(t) = \varphi(0) + \Omega t$. Tali coordinate non sono in generale simplettiche. È però possibile trovare altri integrali primi I_i, funzioni delle F_i, tali che le coordinate (I, φ) siano simplettiche. Le coordinate simplettiche (I, φ) si chiamano *variabili azione-angolo* [cfr. Arnol'd 1974]. Se le coordinate simplettiche sono «adattate» alla 2-forma ω che definisce la struttura simplettica di E, le variabili azione-angolo sono coordinate simplettiche «adattate» allo hamiltoniano H.

6. *Sistemi di riferimento e classificazioni.*

I pochi, drammaticamente lacunosi richiami che precedono, mostrano la straordinaria «fecondità» delle nozioni di sistema di riferimento e di coordinate. Esse hanno però preso origine da una situazione in cui lo spazio di base considerato è omogeneo, cioè privo di punti di riferimento. Ora, com'è stato notato, il problema del sistema di riferimento si pone anche in spazi «eterogenei», ossia *marcati* o *contrassegnati*. Fino ad ora questo aspetto del problema del riferimento era rimasto estraneo alla matematica. Per concludere, si desidera fare una breve osservazione sulla recente presa di coscienza di tale problema.

Un metodo radicalmente diverso di riferire un oggetto è quello di riferirlo non allo spazio ma *agli oggetti di ugual natura*. Il paradigma ora non è piú quello di un osservatore di fronte all'omogeneità dello spazio ma è quello della *classificazione*. Si tratta del paradigma dello *strutturalismo*. Esso consiste nel dare una posizione a un'entità in uno «spazio strutturale», cioè uno «spazio» *categorizzato* in classi mediante un sistema di differenze, di soglie, di scarti differenziali (cfr. «Sistematica e classificazione»). Se gli enti considerati sono discreti, tale paradigma si sviluppa in teorie logico-combinatorie. Ma se questi enti dipendono da parametri *continui*, la situazione cambia radicalmente. Il concetto di classificazione acquista un contenuto *geometrico* e diventa suscettibile di un'analisi geometrica profonda dalla quale la teoria delle catastrofi ha tratto nuove possibilità di modellizzazione.

Si ricordino dunque (in riferimento all'articolo «Locale/globale») alcune prerogative del paradigma *catastrofista*. Si considerino «forme» descrivibili in termini di applicazioni $f: M \to N$ tra due varietà differenziabili. Tali «forme» costituiscono uno spazio funzionale $\mathfrak{F}$. Questo spazio è *intrinsecamente eterogeneo*. Infatti è naturale considerare che due forme f e g siano *equivalenti*, che esse abbiano lo stesso tipo differenziabile, se si può passare dall'una all'altra mediante cambiamenti di coordinate nel dominio (M) e nel codominio (N) o, in altri termini, se esistono un diffeomorfismo φ di M e un diffeomorfismo ψ di N tali che si abbia $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. In questa definizione di equivalenza entra in gioco il principio di relatività del riferimento negli spazi M ed N. È però essenziale notare che l'uso del principio di relatività del riferimento implica che il problema del riferimento stesso si pone in modo *totalmente diverso* in $\mathfrak{F}$. Infatti, $\mathfrak{F}$ essendo munito della topologia adeguata alla struttura differenziabile, è possibile definire le forme *strutturalmente stabili* di $\mathfrak{F}$ come le forme f che ammettono un intorno di forme g tutte equivalenti ad f. Se U è l'aperto di $\mathfrak{F}$ composto di forme stabili, il chiuso ad esso complementare K – detto insieme catastrofico globale di $\mathfrak{F}$ – è un sottospazio di $\mathfrak{F}$ *classificante* i tipi stabili. Tale insieme catastrofico K essendo *inerente* ad $\mathfrak{F}$ (intrinseco), il problema del riferimento in $\mathfrak{F}$ diventa duplice: 1) dare una posizione agli elementi di $\mathfrak{F}$ rispetto a K (aspetto puramente qualitativo del riferimento); 2) data una classe V definita da K, dare una posizione agli elementi di V in V mediante l'uso di coordinate (aspetto quantitativo del riferimento).

Nei modelli trasversi delle singolarità di tipo catastrofi elementari, va sottolineato (cfr. «Locale/globale») il carattere «misto» tra l'aspetto qualitativo del riferimento (basato sulla *morfologia* di K e sul modo con cui *separa* lo spazio) e l'aspetto quantitativo del riferimento stesso (basato sull'uso delle coordinate). [J. P.].

Arnol'd, V. I.

1974 *Matematičeskie metodi klassičeskoi mehaniki*, Nauka, Moskva (trad. it. Editori Riuniti, Roma 1979).

Dieudonné, J.

1974 *Cours de géométrie algébrique*, Presses Universitaires de France, Paris.

Duhem, P.

[1913-16] *Le système du monde; histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, 10 voll., Hermann, Paris 1913-59.

Koyré, A.

1957 *From the Closed World to the Infinite Universe*, Johns Hopkins Press, Baltimore (trad. it. Feltrinelli, Milano 1974²).

Misner, C. W.; Thorne, K. S.; e Wheeler, J. A.

1973 *Gravitation*, Freeman, San Francisco.

Petitot, J.

1980 *Per un nuovo criticismo*, in «L'uomo, un segno», IV, n. 2-3.

La ricognizione antropologica (cfr. **anthropos**) della **rappresentazione** dello spazio nelle diverse culture (cfr. **cultura/culture**) – in particolare nelle **società** primitive (cfr. **primitivo**) ove lo spazio è locale (cfr. **locale/globale**) e simbolicamente (cfr. **segno, simbolo**) scandito dall'**opposizione/contraddizione** di **sacro/profano** – e l'indagine della **genesi** psicologica delle nozioni spaziali e del loro **apprendimento** mettono in luce la rilevanza dei sistemi di riferimento nella modellizzazione (cfr. **modello**) del **reale**. La ricerca di un punto di riferimento in un viaggio sugli **oceani** o nella costituzione delle varie **cosmologie** (slittate progressivamente dall'**astrologia** all'**astronomia**), l'analisi della **spazialità** pittorica con gli studi sulla prospettiva (cfr. **disegno/progetto**), le varie raffigurazioni della **terra** che via via vengono approntate dalla cartografia (cfr. **atlante**) sono tutte alla base della nozione moderna di sistema di riferimento che con Descartes e Leibniz è venuta svolgendo un ruolo chiave per le **matematiche**, consentendo l'articolazione sistematica dello studio delle varie **funzioni**, la nascita del moderno punto di vista

differenziale, rilevanti sviluppi del **calcolo** stesso (cfr. anche **infinitesimale**). Con i grandi progressi dell'astrazione matematica (cfr. **astratto/concreto**) dell'Ottocento, in particolare con la rottura concettuale promossa da Riemann, la considerazione di spazi generalizzati costituiti da entità qualsiasi dipendenti da un numero finito o infinito di parametri ha potenziato in modo formidabile lo studio – in chiave di **geometria e topologia** – di moltissimi problemi matematici. Nel contesto della **fisica** ha contemporaneamente preso corpo la definizione degli oggetti fisici come invarianti (cfr. **invariante**) rispetto ai cambiamenti di riferimento, al punto che l'esigenza che una **legge** fisica non dipenda da un particolare sistema (scelto in modo arbitrario, dunque convenzionale; cfr. **convenzione**) è stata incorporata nelle teorie fisiche di base (cfr. **teoria/modello**) come la **relatività** (cfr. anche **spazio-tempo**) e i **quanti** (cfr. anche **conservazione/invarianza** e per altri aspetti **particella**). Ma se enormi progressi intellettuali si sono compiuti nell'analisi dei sistemi di riferimento per spazi omogenei, anche gli spazi eterogenei possono venir contrassegnati dagli opportuni «riferimenti» mediante un sistema di scarti differenziali, di soglie (cfr. **soglia**). Si ritrova così l'antico problema della **sistematica e classificazione**: quando le entità considerate sono discrete (cfr. **continuo/discreto**) questo **paradigma** si sviluppa in una **combinatoria** logico-linguistica (cfr. **logica**, **linguaggio** e anche **codice**, **immagine**); se invece dipendono da parametri continui, la classificazione acquisisce un carattere geometrico, come è nei casi modellizzati dalla teoria delle **catastrofi**.