Pour un Platonisme transcendantal *

Jean PETITOT

Abstract

Résumé

1 Introduction.

Il existe essentiellement deux aspects de la question du platonisme en mathématiques:

1. l'aspect philosophique, réflexif, extra-mathématique et non technique: il concerne l'ontologie des objets et des structures abstraites que sont les idéalités mathématiques;

2. l'aspect technique, intra-mathématique (méta-mathématique): il concerne essentiellement les axiomes d'existence que l'on peut admettre comme "naturels" en théorie des ensembles.

L'aspect (1) est "régulateur" pour l'aspect (2) car il justifie l'engagement ontologique que l'on considère comme acceptable en théorie des ensembles.

On peut alors dire que l'antiplatonisme dominant consiste en grande partie:

1. à développer une thèse philosophique nominaliste (anti-ontologique ou, plus précisément, ontologiquement "déflationniste") pour (1), et

2. à arguer de cette thèse pour justifier philosophiquement le rejet d'axiomes d'existence ontologiquement trop riches en théorie des ensembles et à opter par là même pour des conceptions constructives.

---

*Je dédie cette étude à la mémoire d'Abderahmane Chemaa, esprit d'une subtile acuité métaphysique et d'une rare qualité spirituelle, qui, malgré des conditions physiques et sociales gravement handicapantes, a su mener à bien une remarquable thèse sur le platonisme de Cantor et qui, après avoir essayé en vain pendant des années de franchir l'infranchissable mur de nos institutions est mort d'avoir trop attendu le droit de vivre.

Mon argumentation sera ici la suivante. Je voudrais montrer:

1. que la thèse nominaliste ne possède aucune portée ontologique en mathématiques;
2. qu'elle ne peut donc servir de principe régulateur justifiant une décision philosophique quant à (2);
3. que le problème du platonisme n'est pas celui d'un réalisme ontologique vulgaire en mathématiques mais celui de l'objectivité des mathématiques, et cela à un double titre:
   (i) celui de l'objectivité des idéalités mathématiques elles-mêmes,
   (ii) celui du rapport entre ces idéalités objectives et les formes de l'objectivité externe, en particulier physique;
4. que pour ce faire on a besoin d'une doctrine de l'objectivité qui soit "à la hauteur" des mathématiques et de la physique mathématique;
5. qu'une telle doctrine est la doctrine transcendantale;
6. que la reprise du problème (2) dans une telle perspective justifie (entre autres) l'introduction d'axiomes d'existence forts en théorie des ensembles.

J'appellerai *platonisme transcendantal* un platonisme repensé à partir d'une doctrine transcendantale de l'objectivité. Nous verrons qu'il justifie philosophiquement les thèses "réalistes" de Gödel.

Une remarque à propos de ce terme de "platonisme transcendantal". Quand je l'ai adopté, je pensais qu'il s'agissait d'un qualificatif nouveau. Mais au cours des recherches bibliographiques que j'ai menées à bien pour cette étude, j'ai découvert qu'il avait déjà été utilisé par Gottfried Gabriel dans sa reprise (Felix Meiner, 1989) de l'édition de 1928 de la Logik d'Hermann Lotze (1817-1881) l'un des maîtres de Frege. Dans le Livre III, Lotze développe une forme de platonisme qui essaye d'éviter l'engagement ontologique du platonisme naïf en insistant sur la validité objective des jugements mathématiques. A propos de la question de savoir si Frege était un réaliste platonicien (thèse de Dummett), Gabriel développe la thèse que Lotze avait en fait élaboré ce qu'il appelle un "platonisme transcendantal" (i.e. *objectif* en un sens *non ontologique*) qui aurait inspiré Frege.

2 La question philosophique du platonisme.

2.1 Les apories du réalisme platonicien.

Dans sa forme *non technique*, la question traditionnelle du réalisme platonicien est double:

1. celle de l'existence des idéalités mathématiques, c'est-à-dire de l'acceptabilité d'une ontologie d'entités abstraites (réalisme ontologique),

2. celle de l'admission de conditions de vérité transcendant nos capacités cognitives (supposées être purement algorithmiques et computationnelles), i.e. nos conditions épistémiques effectives d'accès à une connaissance en général (réalisme sémantique).

Ces deux aspects sont intimement liés car ce sont des objets transcendants abstraits, a-temporels, a-spatiaux, et donc inobservables, qui sont censés servir de "truth makers" aux énoncés mathématiques non finitistes.[1]

Comme le rappelle Crispin Wright,

> the traditional platonist answer is that the truth-conditions of pure mathematical statements are constituted by the properties of certain mind-independent abstract objects, the proper objects of mathematical reflection and study.[2]

L'époque contemporaine restant encore dominée par la conception dogmatique de la logique comme "organon" (et non pas comme "canon") des sciences, ce type de réalisme est en général critiqué à partir des préjugés suivants:

1. "objectivité" et "réalité" signifient référence à des objets transcendant la conscience et existant à titre d'êtres séparés et indépendants;

2. conformément à la théorie causale de la référence, la référence est la relation converse de la façon dont un sujet est causalement affecté par des objets physiques externes;

3. l'ontologie des objets physiques est une ontologie substantialiste de *choses* matérielles, c'est-à-dire d'étants singuliers individués, identiques à soi, matériels et spatio-temporels;

[1] Le refus de ces deux formes de réalisme renoue avec des thèses transcendantales canoniques: (i) thèse du refus d'une réalité en soi, (ii) thèse de la finitude radicale de la connaissance (auto-limitation de la raison).

[2] Wright [1988], p. 426.

4. il est sensé et légitime d'utiliser les méta-concepts de réalité extérieure, de matière, de chose, d'objet, de causalité, etc. dans un sens absolu et prédéterminé (dogmatique), indépendamment de toute *constitution préalable* de domaines d'objectivité particuliers, de ce que Husserl appelait des "ontologies régionales";

5. l'existence doit être interprétée en termes de théorie de la référence et de quantification logique et celles-ci sont universellement et indifféremment applicables aux objets d'un domaine quelconque: on peut quantifier uniformément sur les nombres, les fonctions, les zéros de la fonction zêta, les courbes modulaires, les grands cardinaux, les pommes, les étoiles (du matin et du soir), les rois de France (chauves ou non), les présidents de la République (actuels ou non).

Nous considérons pour notre part que ces préjugés sont trop dogmatiques et que leur acception a conduit la philosophie des mathématiques de ce siècle à de grosses difficultés. Mais acceptons-les malgré tout un instant. Il est facile de voir qu'ils ne peuvent que conduire à une prolifération de positions incompatibles entretenant entre elles des conflits dialectiques. En effet, ils obligent à dénier toute réalité aux objets et aux structures mathématiques pour la raison triviale que si "exister objectivement" signifie bien "exister physiquement dans le monde externe en tant que chose matérielle spatio-temporelle", alors il est impossible que nous puissions posséder un accès épistémique (un apprentissage, des croyances, mieux: des croyances vraies, mieux encore: des croyances vraies rationnellement justifiées, c'est-à-dire des connaissances) à des entités externes qui sont *abstraites* et ne peuvent par conséquent posséder *aucun efficace causal*. Comme le souligne (avec tant d'autres) Michael Resnik:

> If we have no physical traffic with the most basic mathematical entities and they are not literally the products of our own minds either, how can we learn any mathematics? How could it even be possible for us to acquire beliefs about mathematical objects?[3]
>
> Since Platonic mathematical objects do not exist in space or time the very possibility of our acquiring knowledge and beliefs about them comes into question.

La théorie causale de la référence interdit a priori, comme l'affirme Philip Kitcher, que des constructions et des manipulations symboliques «provide any type of access to abstract reality».[4]

Si l'on admet cette impossibilité de développer une ontologie d'entités abstraites, alors le dilemme est immédiat. Il possède la structure d'une *antinomie dialectique* (au sens d'une Dialectique transcendantale).

[3] Resnik [1988], p. 403.

[4] Kitcher [1988], p. 527.

Thèse. *Les mathématiques sont descriptives et vraies. Elles décrivent des entités abstraites transcendantes réellement existantes.*

Cette thèse ontologique n'est pas tenable car nous ne pouvons disposer d'aucun accès épistémique à de telles idéalités et à la vérité des énoncés les concernant.

Antithèse. *Les mathématiques sont prescriptives et non descriptives. Analytiques et conventionnelles, elles ne concernent que des règles grammaticales d'usage de concepts.*

Cette thèse syntaxique n'est pas non plus tenable car elle est réfutée par les théorèmes de limitation interne des formalismes. Qui plus est, elle ne permet pas de rendre compte de façon plausible de l'applicabilité des mathématiques.[5]

2.2 Dialectique des positions épistémologiques.

Une bonne doctrine de l'objectivité a pour vocation de dépasser – en la dissolvant – une telle antinomie. Si l'on refuse d'y recourir, alors l'antinomie se déploie en un spectre de positions rivales dont, comme c'est toujours le cas dans des situations dialectiques, il est impossible de décider argumentativement de la valeur.[6] Commençons par des formes "faibles" (non ontologiques) de platonisme.

2.2.1 Le platonisme pragmatique (tolérant et bien tempéré) de W.V.O. Quine.

Quine a fort justement remarqué que les objets physiques postulés par les théories physiques sont tout aussi idéaux que les idéalités mathématiques et qu'il est donc tout aussi légitime (ou tout aussi illégitime) d'accepter les uns que les autres. On ne peut pas être à la fois réaliste en physique et nominaliste en mathématiques. En effet, les objets physiques sont eux aussi des idéalités explicatives qui permettent de réduire à une simplicité conceptuelle la complexité des données empiriques encodées par transduction dans les sensations. A partir du moment où on les utilise comme des entités réelles, on doit accepter leur existence ("ontological commitment").

> Platonist ontology (...) is, from the point of view of the strictly physicalistic conceptual scheme, as such a myth as that physicalistic conceptual scheme itself is for phenomenalism.[7]

On doit par suite accepter l'existence des idéalités mathématiques. La refuser serait une «intellectual dishonesty».[8] Quine critique par conséquent les

[5] Cf. Petitot [1991a].

[6] Pour quelques indications sur l'actualité de ces débats, cf. par exemple (parmi une énorme bibliographie): Maddy [1988], [1989] et Chihara [1990].

[7] Quine [1948].

[8] Cf. Maddy [1989], p. 1131.

positivistes qui veulent exclure comme non significatifs les énoncés d'existence d'objets abstraits. Les mathématiques appartiennent à la science et

> we can have reasons, and essentially scientific reasons, for including numbers or classes or the like in the range of values of our variables.[9]

Bien qu'évidemment juste, cette position reste toutefois limitée par son refus d'aborder de front la problématique de la *constitution* des objectivités physiques et mathématiques. Pour Quine, la justification du fait de poser l'existence d'entités abstraites est en définitive celle d'un bénéfice pragmatique: «the pragmatic benefits do count as evidence». D'un autre côté, en ce qui concerne l'engagement ontologique des théories, Quine considère que les théories scientifiques doivent être réduites à des théories logiques extensionnelles (sans modalités) du premier ordre pour que l'on puisse y appliquer son critère de l'"ontological commitment". Or cela est impossible à réaliser pour les théories physiques un tant soit peu sophistiquées.[10]

2.2.2 Le réalisme modéré de J. Burgess.[11]

John Burgess distingue trois formes de nominalisme, respectivement "instrumentaliste", "herméneutique" et "révolutionnaire". Pour le premier, la science est une fiction utile. Pour le second, l'ontologie physico-mathématique procède d'une hypostase ontologisante véhiculée par la langue naturelle. Une bonne analyse linguistique doit permettre de la dissoudre. Pour le troisième, l'élimination des assertions existentielles sur les idéalités abstraites est une obligation uniquement motivée par la «medieval superstition» du rasoir d'Ockham. Burgess critique alors ces trois positions, qu'il considère être non plausibles.

> Unless he is content to lapse into a mere instrumentalist or "as if" philosophy of science, the philosopher who wishes to argue for nominalism faces a dilemma: he must search either for evidence for an implausible hypothesis in linguistics, or else for motivation for a costly revolution in physics. Neither horn seems very promising, and that is why I am not a nominalist.[12]

---

[9] Quine [1969], p. 97.

[10] Par exemple, comme l'a remarqué Hilary Putnam, toutes les théories physiques reposant sur un principe de moindre action (c'est-à-dire pratiquement toute la physique fondamentale, de la mécanique symplectique à la théorie quantique des champs) font intervenir de façon constitutive la modalité de la possibilité puisque la stationarité $dS = 0$ de la fonctionnelle d'action y sélectionne une trajectoire actuelle dans un espace de phases fonctionnant comme univers des possibles.

[11] Cf. Chihara [1990], p. 181 sq.

[12] Burgess [1983], p. 101.

Pour Burgess, le problème de la possibilité d'une interaction causale avec des abstracta est un problème purement *scientifique* (et non pas philosophique) relevant des sciences cognitives.

> A philosopher's confession that knowledge in pure and applied mathematics perplexes him constitutes no sort of argument for nominalism, but merely an indication that the philosopher's approach to cognition is inadequate.[13]

Selon Burgess, la seule épistémologie authentique est par conséquent *interne* aux sciences et un argument typiquement externaliste comme celui dérivé de la théorie causale de la référence (les entités mathématiques sont causalement inertes et non spatio-temporelles, etc.) est par conséquent inacceptable. Le point de vue internaliste est conforme à la thèse qu'en science les "ontologies" sont toujours *régionales* et que les méta-concepts doivent donc toujours y être *relativisés* .

2.2.3 Le platonisme cognitif et génétique de P. Maddy.

Penelope Maddy a elle aussi développé cette idée que la question du platonisme est un problème scientifique (de sciences cognitives) et non pas philosophique. L'une de ses thèses principales est que les ensembles sont, du moins au départ, c'est-à-dire au niveau de l'amorçage concret des chaînes causales, des entités perceptibles, constituant une espèce naturelle et avec lesquelles nous pouvons entretenir une relation d'"acquaintance". Tels qu'elle les décrit, ces ensembles concrets (naïfs et primitifs) sont des Gestalten perceptuelles localisées sur les agrégats d'objets qu'elles unifient et permettent de dénombrer. Il existe, selon elle, des "sets detectors" dans notre esprit et par conséquent

> as in the case of knowledge of physical objects, it is the presence of the appropriate detector which legitimizes the gap between what is causally interacted with, and what is known about.[14]

Bref, ces ensembles concrets – qui ne sont pas des entités séparées indépendantes – sont causalement responsables de croyances perceptuelles et celles-ci peuvent par conséquent être acquises par des sujets. Evidemment, tout le problème est de ne pas tomber dans une régression à l'infini en ajoutant à l'agrégat physique des objets un double indiscernable qui serait l'ensemble concret les unifiant.[15] Sur ce point, P. Maddy relance les réflexions (par exemple du Husserl de la *Philosophie de l'Arithmétique*) sur les fondements gestaltistes des opérations ensemblistes (cf. plus bas § 3.).

[13] Ibid.
[14] Maddy [1980], p. 182.
[15] Cf. Chihara [1990], p. 201 sq.

2.2.4 Le platonisme structuraliste de M. Resnik.

Certains parmi les plus importants philosophes des mathématiques (par exemple Wilfrid Stegmüller et Stewart Shapiro) ont tenté de résoudre le problème du platonisme en partant du fait évident et basique que, dans les mathématiques modernes, les objets mathématiques sont en fait des *structures* abstraites (au sens hilberto-bourbakiste). Si l'on admet que les théories mathématiques décrivent et réfèrent à des structures obtenues par abstraction, alors, dans la mesure où elles ne sont au mieux déterminables qu'à isomorphisme près, la question ontologique se trouve également réglée. Selon Michael Resnik, l'un des structuralistes actuellement les plus influents, la grande erreur de la philosophie des mathématiques serait l'erreur *nominaliste* consistant à croire que l'objectivité des mathématiques exige que les mathématiques portent sur des choses (des étants singuliers individués). Selon lui, la quantification porte en mathématiques sur des éléments de structure, c'est-à-dire sur des "positions" s'entre-déterminant à travers un réseau de relations. Cela permet de maintenir une conception référentielle de la sémantique tout en conjurant le spectre du platonisme sous sa forme ontologique naïve. Mais, évidemment, les préjugés que nous avons évoqués plus haut conduisent immédiatement à poser la question de l'identité et de l'individuation des structures. Celles-ci n'étant en effet définies qu'à isomorphisme près et des objets différents pouvant être éléments de structures isomorphes, elles violent le principe d'identité et ses conséquences. Ainsi que le note Chihara,

> Resnik is a Platonist of sorts: he believes in the existence of abstract mathematical objects. But by characterizing these objects as mere positions in a structure and by adopting his extreme doctrine of the nonsensicality of trans-structural identity, he thought he could avoid the chief philosophical problems that have plagued the traditional Platonic views of mathematics. But (...) he has merely exchanged one set of problems for another.[16]

2.2.5 L'antiplatonisme cognitif de Ph. Kitcher et de J.-P. Changeux.

Une des façons les plus classiques de régler la question du platonisme est de réduire les contenus mathématiques à des contenus de représentations et d'actes mentaux. Une telle option "psychologiste" subordonne l'épistémologie des mathématiques à une psychologie cognitive et la fait donc dépendre des thèses cognitives adoptées.[17] On sait qu'il existe actuellement une alternative dominant les sciences cognitives. Soit l'on admet, dans la perspective dite *fonctionnaliste* (J. Fodor, Z. Pylyshyn, etc.), le parallèle cerveau/ordinateur et l'on admet alors que des représentations symboliques constituant un langage formel

[16] Chihara [1990], p. 145.

[17] Pour quelques remarques épistémologiques sur la psychologie cognitive, cf. Petitot [1990b].

"interne" de la machine cognitive se trouvent compilées et implémentées comme un "software" dans le "hardware" neuronal, la structure logique du "software" étant indépendante de cette implémentation, soit l'on admet au contraire, dans le cadre de la perspective dite *éliminativiste* (P. Churchland, dans une certaine mesure D. Dennett, etc.) que les représentations, états, actes et contenus mentaux, se réduisent en réalité à des processus cérébraux et ne sont que des artefacts descriptifs. Dans ce dernier cas, on pourra faire usage des modèles connexionnistes pour comprendre comment les structures symboliques peuvent *émerger* de la dynamique physique des substrats neuronaux.[18]

Philip Kitcher Un bon exemple d'antiplatonisme cognitif d'orientation fonctionnaliste est fourni par les travaux de Philip Kitcher.[19] Selon ce dernier, les mathématiques constituent une activité symbolique nous permettant, par une suite d'approximations successives sédimentées dans les traditions, de structurer de plus en plus adéquatement notre expérience au moyen d'*idéalités*. Les mathématiques émergeraient, par ce processus *d'idéalisation*, de connaissances *proto*-mathématiques (perceptives par exemple, cf. P. Maddy § 2.3.) contraintes par la réalité du monde externe et ayant eu une fonction d'amorçage. Véhiculées historiquement et socialement par le patrimoine scientifique de l'humanité, elles progressent comme toutes les autres formations symboliques. Nul n'est donc besoin pour les comprendre d'invoquer un quelconque monde d'entités séparées auquel une incompréhensible intuition intellectuelle nous fournirait un quelconque accès. Le point de vue de Kitcher est par conséquent "évolutionniste" et accepte la théorie causale de la référence. Selon lui, les mathématiques sont avant tout une tradition, une pratique et une compétence. L'approche doit être psychologique mais, dans la mesure où il s'agit de compétence idéale, affranchie des limitations contingentes des performances concrètes, la psychologie dont il s'agit est celle *d'agents idéaux*. Autrement dit, les mathématiques spécifient progressivement

> the constructive power of an ideal subject.[20].

Le débat Connes-Changeux Un bon exemple d'antiplatonisme cognitif éliminativiste est celui défendu par Jean-Pierre Changeux dans son débat avec Alain Connes.[21] Brièvement résumées, ses thèses sont les suivantes.

1. Les objets mathématiques sont des «êtres de raison» (p.28), des représentations, des objets mentaux dont la réalité est purement cérébrale. Ils sont

[18] Dans le domaine sémio-linguistique, nous avons développé depuis 1975, à la suite de René Thom, des modèles morphodynamiques analogues à ceux du connexionnisme (usages des concepts dynamiques d'attracteur, de contrôle, de bifurcation, de dynamique rapide/lente, etc. à des fins syntactico-sémantiques). Cf. par exemple Petitot [1989b], [1989c], [1991b], [1994].

[19] Cf. par exemple Kitcher [1983] et [1988].

[20] Kitcher [1983], p. 160.

[21] Changeux-Connes [1989]. Nous avons analysé en détails ce débat dans Petitot [1991a].

«codés dans le cerveau comme des formes» (p. 171) et sont donc «identifiables à des états physiques» (p. 30). Certes, leurs contenus objectaux sont réflexivement analysables et l'on peut clarifier axiomatiquement leurs propriétés, mais leur réalité est purement matérielle.

2. On pourrait chercher à sauver une autonomie du formel en admettant les thèses fonctionnalistes du mentalisme computationnel. Mais le fonctionnalisme n'est pas tenable biologiquement car le cerveau est une machine biologique issue de l'évolution et possédant une embryogenèse.

3. Le matérialisme neuronal ne conduit pas forcément au solipsisme (idéalisme subjectif). Les représentations mathématiques sont publiques, communicables, historiques et culturelles (p. 35). Elles sont sélectionnées par un processus évolutif contingent. Elles sont donc elles-mêmes contingentes. Il ne peut pas y avoir, pour des raisons de principe, d'ontologie mathématique. L'historicisme évolutionniste, donc le hasard, peut seul expliquer leur nécessité. L'existence, la réalité, la cohérence, la vérité, la nécessité des mathématiques «résultent a posteriori de l'évolution» (p. 59).

4. L'épistémologie des mathématiques doit donc désormais reposer sur un «darwinisme mental» (p. 116) qui est le prolongement en psychologie du darwinisme neural. Tout «scientifique averti, honnête avec lui-même» (p. 46) doit adopter un matérialisme radical et dénoncer tout platonisme comme une croyance religieuse, comme un «résidu mythique» (p. 45) des temps magico-théologiques archaïques, comme une croyance irrationnelle devant être éliminée par «l'ascèse intellectuelle du matérialisme» (p. 45).

2.2.6 L'antiplatonisme radical d'H. Field.

Dans *Science without Numbers*,[22] Hartry Field a développé une forme radicale d'antiplatonisme éliminativiste. Il abandonne complètement le problème de la vérité en mathématiques, c'est-à-dire celle des "truth-makers" (en particulier, contrairement aux structuralistes, aux constructivistes ou aux intuitionnistes, il ne cherche pas à changer la nature de la référence des énoncés mathématiques en passant d'objets à des structures ou à des constructions mentales). Reprenant l'ancienne problématique positiviste de l'éliminabilité des termes théoriques depuis Mach et Hempel et s'inspirant des nombreux théorèmes de logique mathématique affirmant qu'une théorie formelle "forte" est en fait *conservative* sur une théorie formelle "faible", il essaie de montrer que les théories scientifiques utilisant des mathématiques sont en fait conservatives sur des théories *sans* mathématiques.

[22] Field [1980].

De façon plus précise,[23] Field va supposer qu'il existe une théorie logique générale pouvant servir de cadre *à la fois* aux théories scientifiques et aux théories mathématiques (ce panlogicisme n'est pas du tout évident). Soit ZFU la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec Urelemente. Field y ajoute le prédicat (impossible à définir) M = "être un objet mathématique", avec les axiomes convenables. Il obtient ainsi une théorie ZFU^1. Soit alors N une théorie scientifique "nominaliste", c'est-à-dire une théorie dont les variables ne portent que sur des entités non mathématiques. Le vocabulaire non logique de N n'interfère donc pas avec celui de ZFU^1. Soit N^* la théorie obtenue en relativisant la quantification de N à non $-M$. Soit ZFU^2, la théorie obtenue à partir de ZFU^1 en permettant au vocabulaire de N d'apparaître dans l'axiome de compréhension. Le théorème de conservation de Field s'énonce alors:

Théorème. *Pour tout énoncé φ de N, si $N^* + ZFU^2 \vdash \varphi^*$ alors $N^* \vdash \varphi^*$.*$\square$

D'où la thèse:

> Platonistic formulations of physical theories are simply conservative extensions of underlying nominalistic formulations.[24]

De par son aspect technique, la thèse d'Hartry Field peut évidemment paraître séduisante. Mais elle n'est pas pour autant véritablement convaincante. En effet, pour éliminer par exemple les nombres entiers, Field est obligé d'introduire des quantificateurs numériques: $\exists^k x$ (il existe k éléments tels que ...), etc. Les énoncés numériques du genre $\#\mathrm{Ext}(A) = k$ [25] deviennent alors trivialement des "contreparties abstraites" (éliminables) d'énoncés logiques $\exists^k x A(x)$. De même, en ce qui concerne l'espace, Field est obligé d'admettre que les points et les régions de l'espace-temps sont des objets physiques concrets (i.e. des $x \in$ non $-M$) sur lesquels on peut quantifier (au premier ordre pour les points, au deuxième ordre pour les régions). Il introduit alors des relations de comparaison, d'incidence, de congruence entre points, segments, etc. et montre que la métrique (la distance) en est la contrepartie abstraite (éliminable). Mais, ainsi que l'a souligné Michael Resnik, adopter une ontologie physique (en fait substantialiste) de l'espace est inacceptable car

> no particular body of observable phenomena led to the introduction of space-time points.[26]

En fait, il est en grande partie illusoire de vouloir distinguer, dans un cadre logique général, le vocabulaire physique et le vocabulaire mathématique des

[23] Cf. Chihara [1990] pour un résumé et une discussion des travaux techniques de Field.
[24] Field [1982], p. 20.
[25] $\#\mathrm{Ext}(A)$ est le cardinal de l'extension de A.
[26] Resnik [1985], p. 167.

théories physiques. L'espace est une *forme* (et non pas un contenu) de la réalité physique et, à ce titre, il est indiscernablement physico-mathématique.

Toutefois, il n'en reste pas moins que le nominalisme éliminativiste d'H. Field renoue en fait (sans le vouloir) avec l'un des problèmes majeurs de la tradition transcendantale, à savoir que l'objectivité scientifique est gouvernée par des "contreparties abstraites", tels le nombre et l'espace, d'opérations logico-cognitives. Cette contrepartie correspond chez Kant au schématisme et chez Husserl à la corrélation noèse-noème. H. Field a par exemple redécouvert cette vérité profonde que le nombre est le schème de la quantité logique.

2.3 Phénoménologie des idéalités

Il est nécessaire de démêler dans ce spectre de positions épistémologiques ce qui relève d'authentiques et difficiles problèmes scientifiques et ce qui relève au contraire d'une argumentation proliférant sur des antinomies dialectiques que l'on refuse d'analyser en tant que telles. D'une façon assez vague et grossière, on peut dire que ce qui concerne une psychologie cognitive des états, actes et processus mentaux corrélatifs des objectivités mathématiques relève des premiers et que ce qui concerne en revanche le débat sur la réalité et l'existence de ces objectivités relève au contraire de la seconde.

Par exemple, le platonisme cognitif et génétique de Penelope Maddy et l'antiplatonisme cognitif de Philip Kitcher reprennent et prolongent tous deux, de façon implicite, les profondes analyses effectuées au début du siècle par la Gestalttheorie (Stumpf, Meinong, Ehrenfels) et la phénoménologie husserlienne. Dans notre étude *Idéalités mathématiques et Réalité objective*, nous avons analysé ces travaux à la lumière du remarquable ouvrage *Logic and the Objectivity of Knowledge* consacré par Dallas Willard à la *Philosophie de l'Arithmétique* et aux *Recherches Logiques* de Husserl.

Les descriptions husserliennes des actes intuitifs de colligation et de comptage sont tout à fait remarquables: saisie des unités, saisie de leurs différences, appréhension et représentation de leur simultanéité, successivité énumérative, unification spatiale par la délimitation d'une frontière virtuelle pour un agrégat, saisie aperceptive de l'unité, etc. Elles permettent de décrire de façon rigoureuse la chaîne d'actes noétiques (morphé intentionnelle) conduisant, dans un acte concret de colligation, d'une hylé sensorielle à une unité intentionnelle noématique (en l'occurrence l'unité idéale d'une totalité aperceptivement saisie comme telle à travers une *intuition catégoriale*). Il est évident que les problèmes abordés par P. Maddy constituent une version cognitive de ces analyses et qu'une *naturalisation de la phénoménologie* en termes de sciences cognitives y est à l'œuvre.[27]

[27] En fait, la Gestalttheorie et la phénoménologie, parce que descriptives et donc affranchies des contraintes de l'explication, sont allées beaucoup plus loin sur certains points que les sciences cognitives contemporaines. Le temps est venu, semble-t-il, de reprendre leur héritage. Sur ce

Les travaux récents sur la perception confirment pleinement un certain nombre d'affirmations de Maddy. Pour ne prendre qu'un exemple élémentaire, de nombreux spécialistes de la perception (Stephen Grossberg, le regretté David Marr, Jan Koenderink, etc.) considèrent que deux des routines visuelles les plus fondamentales sont celles de la détection de contours et celles de la diffusion de qualités sensibles (couleurs, textures) dans les domaines délimités par les contours. Soit alors A_1, $A_2, ...$, A_n n objets simples (n spots noirs par exemple) délimités par des bords B_1, $B_2, ...$, B_n. Une routine de diffusion de contour D permet de faire diffuser le contour $B^0 = B_1 + ... + B_n$ (possédant n composantes connexes) jusqu'à un contour virtuel B^1 ne possédant plus qu'une seule composante connexe.[28] D construit ce que l'on appelle en topologie différentielle un *cobordisme* C entre B^0 et B^1. C exprime géométriquement *l'unité gestaltiste* de l'agrégat $A = A_1 + ... + A_n$, c'est-à-dire "l'ensemble" A^* dont les A_i sont les éléments. Ce que l'on appelle la théorie de Morse permet alors facilement de *dénombrer* A à partir de C. Cette simple géométrisation permet de justifier la plupart des affirmations de Maddy. Il y a bien une perception des ensembles concrets naïfs et ceux-ci forment bien une espèce naturelle; l'ensemble A^* (unité idéale) est bien distinct, comme expérience perceptive, de l'agrégat physique A; l'ensemble A^* est bien localisé là où est localisé l'agrégat A; il existe bien des "détecteurs cérébraux" de A^*; etc. Elle permet aussi de comprendre pourquoi ces thèses n'impliquent aucun paradoxe du type double indiscernable, troisième homme, régression à l'infini. En effet, le cobordisme C n'est pas un objet supplémentaire. C'est une forme – une structure géométrique – construite à partir de l'agrégat A et engendrant le moment d'unité A^*.

Le cognitivisme de Philip Kitcher est également le prolongement des profondes analyses phénoménologiques husserliennes sur le genre de compétence idéale qu'est la connaissance symbolique.

De même encore, il est évident que les progrès de l'informatique, tant techniques que théoriques, valident massivement la conception grammaticale des idéalités mathématiques (à la Carnap-Wittgenstein), ainsi que la conception intuitionniste et constructiviste des procédures mathématiques, mais en y ajoutant (ce qui change tout et fonde la validation) les dimensions de la compilation et de l'implémentation.[29]

---

thème, cf. par exemple Dreyfus (ed.) [1982], Smith (ed.) [1988] et Petitot [1991d].

[28] Cf. Petitot [1991b] et [1994] pour des indications techniques sur ce formalisme perceptif.

[29] Jean-Pierre Desclés m'a aidé à comprendre la portée épistémologique (et pas seulement technique) de la compilation et de l'implémentation. Celles-ci permettent de définir une "sémantique intrinsèque" des énoncés qui soit non référentielle et, en fait, d'origine purement syntaxique. Sans les dimensions de la compilation et de l'implémentation, la conception syntaxique des mathématiques divorce de toute dimension sémantique et ne peut retrouver celle-ci qu'à travers une conception dénotationnelle qui conduit aux apories du réalisme.

2.4 Le passage à la doctrine de l'objectivité.

Mais quels que soient l'intérêt et la pertinence de ces recherches, elles laissent entier le problème de l'existence et du statut de réalité des idéalités mathématiques.

En effet, ainsi que l'a déjà montré Husserl il y a fort longtemps dans sa critique du psychologisme, les mathématiques exigent, en plus d'une psychologie cognitive, une compréhension *de la normativité du formel en tant que tel*. Il existe une légalité sui generis du formel qui s'implique de façon constitutive (au sens d'une doctrine transcendantale de la constitution) dans l'objectivité mathématique.[30] Par exemple, le système symbolique des nombres de l'arithmétique formelle substitue aux nombres "concrets" (avec leur genèse cognitive évoquée plus haut) des nombres "systématiques" dont le calcul s'affranchit des limites de notre finitude cognitive. La conséquence en est que la formellité symbolique de l'arithmétique formelle *n'est plus représentationnelle* et échappe donc à toute psychologie cognitive, serait-elle formulée dans le cadre d'un mentalisme computationnel fonctionnaliste.[31]

Comme nous l'avons montré ailleurs,[32] la phénoménologie husserlienne résout les apories purement philosophiques du platonisme dans la mesure où elle montre comment des transcendances objectives peuvent, à titre d'invariants, être fondées dans l'immanence des actes cognitifs corrélatifs qui y donnent accès. Les idéalités mathématiques ne sont pas des entités séparées et indépendantes qui doivent être ontologiquement interprétées. Ce sont des idéalités noématiques, et donc *dépendantes*, dépendantes des synthèses noétiques corrélatives. Mais, dans la mesure où elles ne constituent pas des composantes réelles de ces dernières, elles ne sont pas pour autant cognitivement réductibles: "dépendantes" n'impliquent pas "réductibles".

D'ailleurs, à supposer que l'on arrive à montrer qu'il faut réduire les objectivités mathématiques aux actes qui y donnent accès, il faudrait alors appliquer le même raisonnement à la perception elle-même et donc opter pour un solipsisme radical.

C'est ce que remarque Alain Connes, en retrouvant spontanément une argumentation à la Quine.[33] La seule chose qui prouve la réalité du monde externe est la cohérence des perceptions (il s'agit en fait d'une thèse husserlienne). Pourquoi donc ne pas considérer que les objets réels perçus ne sont que

[30] Cf. Petitot [1991a].

[31] Les points de vue néo-intuitionnistes sur l'arithmétique et l'analyse non standard (Reeb, Harthong, Nelson, Cartier, Salanskis) ont remis au premier plan cette distinction entre les entiers "concrets" cognitivement accessibles (même si le "cognitif" en question est un "cognitif" idéal, informatique) et les entiers "formels", axiomatiquement légalisés, que Husserl appelait "systématiques".

[32] Petitot [1991a].

[33] Changeux-Connes [1989].

> des constructions mentales destinées à rendre compte de certains phénomènes visuels.(p. 41)

Si l'on admet des corrélats objectifs de la perception, alors on doit également admettre des corrélats objectifs des actes mathématiques. On ne peut pas être à la fois réaliste pour la perception et nominaliste pour les mathématiques. Le solipsisme ne se partage pas. Selon Alain Connes, un certain réalisme est par conséquent justifié:

> la suite des nombres premiers, par exemple, a une réalité plus stable que la réalité matérielle.(p. 28)

La réalité mathématique est «aussi contraignante», «aussi incontestable», que la réalité physique (p. 49). D'ailleurs il existe des critères d'objectivité des idéalités mathématiques. Par exemple:

1. La possibilité de classifier exhaustivement les objets définis par une axiomatique (corps finis, corps localement compacts, groupes finis simples, algèbres de Lie simples, etc.). Ces résultats manifestent l'existence de contraintes objectives contraignant les univers de possibles.

2. La cohérence et l'harmonie inter-théoriques globales des théories mathématiques (leur unité au sens de Lautman). Bien qu'«inexpliquées» (p. 33), elles sont incontestables et constituent un «problème central» (p. 197).

3. Le fait que les théories mathématiques intéressantes possèdent un contenu informationnel infini:

   > n'est-ce pas là une caractéristique d'une réalité indépendante de toute création humaine ?(p. 211).

On remarquera que ces critères d'objectivité ne sont satisfaits par aucun autre des systèmes symboliques ("jeux", "grammaires", etc.) auxquels on a voulu comparer les mathématiques.

La question du contenu de l'objectivité des idéalités mathématiques (comme corrélats noématiques d'actes cognitifs) reste donc non seulement ouverte mais pratiquement inentamée. Pour y répondre, serait-ce partiellement, il faut remettre en cause les préjugés qui, nous l'avons vu, sont à l'origine des antinomies dialectiques sous-jacentes au spectre des positions épistémologiques que nous avons évoquées. Comme nous l'avons souligné d'emblée, ces préjugés se ramènent aux thèses suivantes:

1. "Réalité" et "Existence" ne peuvent être entendues qu'au sens d'une ontologie substantielle de choses matérielles spatio-temporelles, d'étants singuliers individués (numériquement uns et identiques à soi).

2. "Objectivité" ne peut être entendu qu'au sens référentiel (dénotation de tels individus par des symboles).

3. Tout est donc dit en ces matières par une théorie logique générale de la quantification et de la référence.

Ces préjugés procèdent d'une "superstition médiévale" scholastique. Ils ne tiennent aucun compte de la coupure qui existe entre la science moderne et le sens commun et, en particulier, du fait que le concept de chose matérielle (avec ses caractères d'individuation, d'extension spatio-temporelle, de perceptibilité, etc.) n'a rien à voir avec un donné primitif mais est bien au contraire le résultat d'un procès transcendantal de constitution encore bien plus complexe que celui engendrant les objets physiques.

Contrairement aux thèses positivistes dogmatiques, la science n'est pas une connaissance prédicative portant sur une ontologie substantialiste. Les énoncés proprement scientifiques ne dénotent pas des choses et des états de choses.[34] Ils déterminent – *légalisent* – des phénomènes sans ontologie sous-jacente, ce qui est tout à fait autre chose. La problématique de l'objectivité n'est pas une problématique sémantique de la référence, mais une problématique juridique de la détermination.

Les apories que nous avons rencontrées confirment toutes, d'une faç on ou d'une autre, le célèbre verdict kantien de la Section III de l'Introduction à la *Logique Transcendantale* dans la *Critique de la Raison Pure*:

> la logique générale, considérée comme organon, est toujours une logique de l'apparence, c'est-à-dire dialectique.

La logique générale (non transcendantale) n'est qu'un "canon". Elle ne concerne que la forme de la connaissance et de la vérité, que la cohérence de la pensée. Elle n'est à ce titre valable que comme condition *négative* de la vérité. C'est pourquoi, ainsi que l'affirme Kant, l'utiliser

> comme d'un *organon* pour produire réellement, du moins en en donnant l'illusion, des affirmations objectives, [c'est] en fait [en] abuser.

[34] Nous parlons ici des fondamentaux (principes, lois et équations) des théories physiques et non pas d'énoncés descriptifs non proprement scientifiques du genre "l'aiguille du compteur marque 10" qui dénotent de façon linguistiquement naturelle.

Une erreur philosophique majeure aura été d'avoir cru que les remarquables conquêtes de la logique formelle – et en particulier celles de la quantification et de la sémantique formelle – permettaient, parce qu'elles étaient remarquables, d'ignorer ce verdict et de refaire de la logique un "organon" pour la connaissance.

2.5 Au-delà du nominalisme.

Les préjugés philosophiques d'orientation nominaliste qui pèsent sur les débats concernant le statut de l'objectivité des idéalités mathématiques postulent d'une façon ou d'une autre une ontologie commune aux mathématiques, à la physique et au monde du sens commun ainsi qu'une conception commune de la sémantique, de l'inférence et de la vérité. Et c'est sur de telles bases qu'ils justifient le rejet du platonisme.

Par exemple quand Feferman conclut sa discussion du platonisme gödelien en affirmant:

> I am convinced that the platonism which underlies Cantorian set theory is utterly unsatisfactory. (...) To echo Weyl, platonism is the medieval metaphysics of mathematics; surely we can do better.[35]

c'est parce qu'il interprète ontologiquement le platonisme comme la thèse que ZFC serait une méta-théorie qui porterait "sur un monde fixe et bien défini" où tout serait déterminé et décidable. Ce qui est évidemment faux.

Le problème du rapport entre une conscience et des objets, qu'ils soient singuliers et individués ou généraux et abstraits, est un problème difficile, à la fois cognitif et physique. C'est un problème *scientifique*. Sa résolution passe par la compréhension de nombreux autres problèmes. Par exemple:

1. la stabilité des objets matériels macroscopiques: cela engage les théories de l'organisation et de la stabilité structurelle (émergence d'unités et de structures macroscopiques à partir d'agrégations de phénomènes microphysiques, collectifs et coopératifs, sous-jacents);

2. la façon dont le système perceptif analyse les images et en extrait les objets (détection et renforcement de contours, homogénéisation des domaines délimités par ces contours): cela engage des algorithmes sophistiqués de vision computationnelle (fortement dépendants de problèmes de géométrie différentielle);

3. la façon dont l'esprit catégorise le monde externe, par exemple en regroupant des objets en classes et en leur associant des symboles: cela engage les modèles de type réseaux de neurones, etc.; par exemple le

[35] Feferman [1989].

problème gestaltiste du groupement (cf. Maddy) commence à peine à être résolu en vision computationnelle et exige nombre d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires (équations de diffusion anisotropes).

Bref, pour être justifiée, l'ontologie nominaliste présuppose que soient résolus certains des problèmes les plus fondamentaux du cognitivisme. Or le concept purement logique de référence n'en est qu'une simple trace symbolique. À ce titre c'est un épiphénomène.

La conséquence en est qu'il existe une solution de continuité dans les théories de la référence lorsqu'elles passent de la cognition réelle biologiquement implémentée aux mathématiques symboliques. En mathématiques, les sémantiques véríconditionnelles n'ont aucun contenu ontologique ou cognitif. Il est par suite illicite de considérer qu'il puisse y avoir une théorie sémantique qui serait commune aux mathématiques et aux relations esprit (conscience)-monde et qui, dans le même temps, pourrait prétendre légiférer en matière d'ontologie. Si l'on veut légiférer en matière d'ontologie, il faut traiter dans toute leur difficulté les problèmes physico-cognitifs évoqués plus haut. Mais alors les mathématiques ne sont plus concernées quant à leur statut de réalité. Au contraire, elles s'impliquent dans les modélisations et garantissent leur objectivité. Si l'on veut en revanche garder une théorie logique générale de la référence, alors on ne peut plus lui accorder de contenu ontologique. Dans les deux cas, les critiques nominalistes du réalisme platonicien perdent toute pertinence.

L'ontologie ensembliste est une *quasi*- ou une *pseudo*-ontologie – une sémantique qui "mime" une ontologie – et ce n'est donc pas à partir d'elle que l'on peut poser les problèmes du statut de réalité des idéalités mathématiques. C'est parce que l'on a interprété les problèmes de réalisme et d'ontologie en termes de sémantique dénotative que le sens du platonisme est devenu incompréhensible.

2.6 Intérêt actuel du transcendantalisme

Entre, d'un côté, une réalité indépendante, transcendante et en soi et, d'un autre côté, une réalité immanente réduite à son accessibilité épistémique, il existe le concept d'objectivité au sens transcendantal. Les philosophes transcendantalistes, Kant, Peirce, Husserl, Wittgenstein (la philosophie mathématique de Wittgenstein est typiquement transcendantale, comme il l'a d'ailleurs lui-même expliqué à Waismann)[36] ont, chacun à leur façon, montré comment l'on pouvait passer de l'ontologie transcendante à l'objectivité transcendantale sans pour autant dissoudre l'objectivité dans un idéalisme subjectif (solipsiste) ou une conception pragmatique (le pragmaticisme de Peirce est anti-pragmatique). La question centrale n'est pas, nous l'avons dit, celle de l'ontologie des idéalités mathématiques, mais celle des relations entre mathématiques et objectivité. Or

[36] Cf. Petitot [1991a].

l'objectivité externe ne se réduit pas à la donnée d'étants singuliers. Il existe des formes intuitives de donation et de présentation de l'objectivité comme l'espace et le temps. Elles sont fondées dans la forme première (l'intuition donatrice originaire dirait Husserl) qu'est le *continu*.

La meilleure philosophie moderne du continu est sans doute celle de Peirce. Elle reprend et reformule l'intuition pure kantienne. Non compositionnelle, elle est fondée sur une logique du vague et sur la thèse de "l'inépuisabilité" du continu.[37] Peirce est d'ailleurs sans doute le philosophe moderne qui a le plus fait pour dénoncer les limites du nominalisme comme ontologie des singuliers liée à un atomisme logique. Dans sa réfutation réaliste récurrente du nominalisme et de l'atomisme logique (reposant sur l'idée que la détermination complète des singuliers est possible alors que pour Peirce, comme pour Kant, il ne s'agit là que d'une Idée régulatrice), il est constamment revenu sur le fait que toute détermination reste nécessairement partiellement générale et vague et que le problème du continu est précisément celui d'une logique du général et du vague. Pour lui, les individus singuliers auxquels les nominalistes réduisent l'ontologie ne sont que des fictions utiles auxquelles on attribue les propriétés du principe de non contradiction et du tiers exclu.

Peirce est sans doute l'un des premiers a avoir eu une conscience claire des limites de l'arithmétisation du continu à la Weierstrass-Cantor-Dedekind et de ce qu'il appellait «the distrust of intuition». Selon lui, on pouvait insérer dans chaque coupure de Dedekind des modèles entiers de $\mathbb{R}$ (d'échelle incommensurable), et cela suivant une induction transfinie. C'est ainsi qu'il interprète la "vraie" complétude de $\mathbb{R}$. Une conception non archimédienne analogue sera reprise par Veronese, formalisée par l'Analyse non standard et radicalisée par Conway (théorie des nombres surréels). La théorie mathématique de $\mathbb{R}$ devait, selon Peirce, fournir un modèle correct du continu comme intuition pure, du continu comme forme de la manifestation phénoménale (forme qu'il a étudiée par ailleurs dans sa "phanéroscopie"). Or ce n'est pas le cas du modèle standard.

Le problème central du platonisme est alors de faire droit à des philosophies anti-nominalistes du continu intuitif pur et d'en fournir *un modèle mathématique dans le cadre même d'une quasi-ontologie ensembliste*. Nous allons voir que cela n'est possible que si cette quasi-ontologie est très riche, maximale et non pas minimale. C'est ce que montrent certains résultats de la théorie descriptive des ensembles auxquels nous voudrions consacrer la seconde partie de cette étude. On voit que si l'on confond la quasi-ontologie ensembliste avec une ontologie réelle et si l'on argue d'une telle confusion pour minimaliser cette quasi-ontologie, on s'interdit dès lors toute compréhension des liens entre les mathématiques et des formes de l'objectivité comme celle du continu.

---

[37] Cf. le beau livre de Claudine Engel-Tiercelin *La pensée-signe*. Cf. également Machuco [1993].

3 Détermination projective, grands cardinaux et théorie descriptive des ensembles.

Nous allons considérer dans cette seconde partie des résultats concernant la classification des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ en fonction de leur complexité ensembliste. Nous nous appuierons pour cela sur la bibliographie de base suivante:

1. Quelques remarquables Séminaires Bourbaki:

   - Séminaire 478 (1975/76) de Serge Grigorieff: *Détermination des jeux boréliens d'après Martin.*
   - Séminaire 494 (1976/77) de Jacques Stern: *Le problème des cardinaux singuliers d'après Jensen et Silver.*
   - Séminaire 632 (1983/84) de Jacques Stern: *Le problème de la mesure.*
   - Séminaire 710 (1988/89) de Patrick Dehornoy: *La détermination projective d'après Martin, Steel et Woodin.*

2. L'ouvrage de référence: *Descriptive Set Theory de Yannis Moschovakis*, North-Holland, 1980.

3. Les *Cabal Seminars* parus dans les *Lecture Notes* de Springer.

4. L'important *Set Theory of the Continuum*, édité par H. Judah, W. Just et H. Woodin, Springer, 1992.

3.0.1 Les hiérarchies respectivement borélienne et projective

On travaille sur $\mathbb{R}$ ou, plus communément, sur $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ou $\mathcal{N} = \omega^{\omega}$), ou sur $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$, et, plus généralement, sur des espaces polonais $\mathcal{X}$ (i.e. métriques, séparables et complets) parfaits (i.e. fermés sans point isolé). On définit dans $\mathbb{R}$ des classes de sous-ensembles. D'abord la hiérarchie des *boréliens* en partant des *ouverts* et en itérant la complémentation et les "projections" de produits avec $\mathbb{N}$, $\mathcal{X} \times \mathbb{N} \to \mathcal{X}$. Si $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ (autrement dit, si P est une famille de $P_n \subseteq \mathcal{X}$ paramétrés par $\mathbb{N}$), on considère $\exists^{\omega} P = \exists^{\mathbb{N}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists n \ P(x,n)\}$.

On note $\boldsymbol{\Sigma}_1^0$ les ouverts et $\boldsymbol{\Pi}_1^0$ les fermés.

On définit ensuite récursivement les classes:

$\boldsymbol{\Pi}_n^0 = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \boldsymbol{\Sigma}_n^0\}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^0 = \exists^{\omega} \neg \boldsymbol{\Sigma}_n^0 = \exists^{\omega} \boldsymbol{\Pi}_n^0$, $\boldsymbol{\Delta}_n^0 = \boldsymbol{\Pi}_n^0 \cap \boldsymbol{\Sigma}_n^0$.

On obtient ainsi une hiérarchie *stricte*:

$$\begin{array}{ccccc} & & \boldsymbol{\Sigma}_n^0 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \boldsymbol{\Delta}_n^0 & & & & \boldsymbol{\Delta}_{n+1}^0 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \boldsymbol{\Pi}_n^0 & & \end{array}$$

On définit ensuite la hiérarchie des *projectifs* (dite aussi hiérarchie de Lusin (1925)) en admettant, en plus, des projections par applications *continues.* En fait, comme tout espace polonais $\mathcal{X}$ est l'image d'une surjection continue de source $\mathcal{N}$, $\pi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{X}$, il suffit de considérer des projections $\mathcal{X} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{X}$, notées $\exists^{\mathcal{N}}$. On obtient ainsi une nouvelle hiérarchie, commençant avec la classe $\Sigma_1^1 = \exists^{\mathcal{N}} \Pi_1^0$ et continuant avec les classes:

$\Pi_n^1 = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Sigma_n^1\}$, $\Sigma_{n+1}^1 = \exists^{\mathcal{N}} \neg\Sigma_n^1 = \exists^{\mathcal{N}} \Pi_n^1$, $\Delta_n^1 = \Pi_n^1 \cap \Sigma_n^1$.

Par exemple, $P \subseteq \mathcal{X}$ est Σ_1^1 s'il existe un fermé $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ tel que :

$P(x) \Leftrightarrow \exists\alpha\ F(x, \alpha)$.

De même, $P \subseteq \mathcal{X}$ est Σ_2^1 s'il existe un ouvert $G \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tel que:

$P(x) \Leftrightarrow \exists\alpha\ \forall\beta\ G(x, \alpha, \beta)$, etc.

On démontre qu'on obtient aussi une hiérarchie *stricte.*

Le lien entre ces deux hiérarchies, boréliens et projectifs, est établi par le:

Théorème de Souslin. $B = \Delta_1^1$ *(où B est la classe de tous les boréliens (i.e. la plus petite classe contenant les ouverts et fermée par complémentation et union dénombrable) ($B \subset \Delta_1^1$ est facile à montrer).*$\square$

Ce théorème remarquable est un *principe de construction* puisqu'il affirme que l'opération (compliquée) de projection continue peut être ramenée à une itération d'opérations plus simples d'union et de complémentation. Il en va de même du:

Théorème de Sierpinski. *Tout Σ_2^1 est une union de $\aleph_1$ boréliens.*$\square$

Il existe en analyse et en topologie des Π_n^1 et des Σ_n^1 *stricts* dont la définition est tout à fait naturelle. Considérons par exemple l'espace fonctionnel $C[0, 1]$ des fonctions réelles sur $[0, 1]$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On montre que le sous-ensemble:

$\{f \in C\,[0, 1] \mid f$ différentiable$\}$

est un vrai Π_1^1 (i.e. n'est pas Δ_1^1). De même, Woodin a montré que:

$\{f \in C\,[0, 1] \mid f$ satisfait le théorème de Rolle$\}$

est un vrai Σ_1^1, et

$\{f \in C\,[0, 1] \mid f$ satisfait le théorème de la moyenne$\}$

est un vrai Π_2^1.

En ce qui concerne l'espace $C[0, 1]^\omega$ des suites (f_i) de fonctions, on montre que:

$\{(f_i) \in C\,[0, 1]^\omega \mid (f_i)$ converge simplement$\}$

est un vrai Π_1^1 (les suites à convergence uniforme constituent un borélien).

Howard Becker [38] à également montré que:

$\{(f_i) \in C\,[0, 1]^\omega \mid$ une sous-suite converge simplement$\}$

est un vrai Σ_2^1 , et

$\{(f_i) \in C\,[0, 1]^\omega \mid \forall g \in C[0, 1]^\omega$ une sous-suite converge simplement vers $g\}$

est un vrai Π_3^1.

[38] Cf. Becker [1992].

Considérons alors les sous-ensembles:

$A_{(f_i)} = \{g \in C[0,1] \mid$ une sous-suite de (f_i) converge simplement vers $g\}$

Ce sont des Σ_2^1 . A leur propos, Becker a démontré le *théorème de représentation suivant*:

Théorème de Becker. *Tout Σ_2^1 $S \subseteq C[0,1]$ est représentable de cette façon: il existe une suite (f_i) telle que $S = A_{(f_i)}$.*$\square$

Ajtai et Kechris ont montré pour leur part que dans les espaces $C[0,2\pi]$ et $L^p[0,2\pi]$ $p \geq 1$:

$\{f \mid$ la série de Fourier converge partout$\}$

est un vrai Π_1^1.

En ce qui concerne la complexité des notions de connexité, de simple connexité et de connexité par arcs pour les compacts $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a les résultats suivants. D'abord:

$\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \mid K$ connexe$\}$

est fermé (Π_1^0).[39] Ensuite, Becker a montré que:

•Pour $n \geq 3$,

$\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \mid K$ connexe par arcs$\}$

est un vrai Π_2^1.

•Pour $n = 2$,

$\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \mid K$ simplement connexe$\}$

est un vrai Π_1^1.

•Pour $n \geq 4$,

$\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \mid K$ simplement connexe$\}$

est un vrai Π_2^1.

•Pour $n = 2$,

$\{K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \mid K$ connexe par arcs$\}$

est entre un Π_1^1 et un Π_2^1.

3.0.2 La régularité des projectifs.

L'école française (Borel, Baire, Lebesgue) et l'école polonaise (Souslin, Lusin, Sierpinski) ont commencé l'analyse des propriétés de ces ensembles particuliers. Ils ont obtenu tout un ensemble de théorèmes sur leur *régularité* et leur *représentation.*

"Régularité" signifie par exemple être mesurable Lebesgue, ou avoir la propriété de l'ensemble parfait (i.e. être dénombrable ou posséder sinon un sous-ensemble parfait), ou encore avoir la propriété de Baire (i.e. être approximable par un ouvert au sens où il existe un *ouvert* P^* tel que la différence symétrique $P \Delta P^* = (P - P^*) \cup (P^* - P)$ est *maigre*, i.e. réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses).

L'un des premiers théorèmes de régularité est le:

[39] Pour $n = 1$, connexe = simplement connexe = connexe par arcs.

Théorème de Cantor-Bendixson. *Si A est fermé alors A est décomposable de façon unique en une somme disjointe $A = P + S$ où P est* parfait *et S* dénombrable.$\square$

Comme tout espace polonais parfait P est isomorphe à $\mathcal{N}$ et donc de cardinal $\#P = 2^{\aleph_0}$, cela montre que *l'hypothèse du continu HC est vraie pour les fermés.*

Un autre grand théorème classique de régularité est le:

Théorème de Souslin. *Les analytiques (Σ_1^1) possèdent la propriété de l'ensemble parfait et l'HC est donc vraie pour les Σ_1^1.*$\square$

Pour démontrer ce résultat on part de la remarque que les Σ_1^1 sont, par définition, les $\aleph_0$-sousliniens.

Définition. *Si χ est un cardinal infini, on dit que $P \subseteq \mathcal{X}$ est χ-souslinien s'il existe un fermé $F \subseteq \mathcal{X} \times \chi^{\mathbb{N}}$ tel que $P = \exists^{\chi^{\mathbb{N}}} F$ (i.e. tel que P est la projection de F).*$\square$

Si $\chi = \aleph_0$ on a $P = \exists^{\mathcal{N}} F$ et donc $P \in \Sigma_1^1$.

Un théorème de Martin dit que $P \subseteq \mathcal{X}$ est $\aleph_n$-souslinien ssi $P = \bigcup_{\xi < \aleph_n} P_\xi$ avec les P_ξ boréliens.[40]

On utilise alors la représentation des fermés $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$ au moyen d'*arbres* définis sur X.[41]

Définition. *Un arbre sur X est un ensemble T de suites finies d'éléments de X (i.e. un sous-ensemble du monoïde X^*) tel que si $u \in T$ et si $v \leq u$ est un segment initial de u alors $v \in T$.[42] Un chemin de T est une branche infinie, c'est-à-dire une fonction $f \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \; f|_n \in T$. On note $[T]$ l'ensemble des chemins de T.*$\square$

On a alors le théorème de représentation suivant:[43]

Théorème. *$F \subseteq X^{\mathbb{N}}$ fermé $\Leftrightarrow$ il existe un arbre T sur X tel que $F = [T]$.*$\square$

En effet, soit T un arbre sur X et $f \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $f \notin [T]$. Cela signifie qu'il existe n tel que $u = f|_n = (f(0), ..., f(n-1)) \notin T$. Le voisinage N_u de $X^{\mathbb{N}}$ défini par $N_u = \{g | g = f$ jusqu'à l'ordre $n\}$ est par conséquent *disjoint* de $[T]$. $X^{\mathbb{N}} - [T]$ est donc ouvert. Réciproquement, si $F \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est fermé, soit T l'ensemble des segments initiaux des $f \in F$: $T = \{(f(0), ..., f(n-1)) \,|\, f \in F\}$. C'est un arbre $F \subseteq [T]$. Le fermé F est dense dans $[T]$ qui est fermé et donc $F = [T]$.$\blacksquare$

On montre alors le:

Théorème. *Si P est un χ-souslinien de cardinal $\#P > \chi$, alors P possède un sous-ensemble parfait.*[44]$\square$

---

[40] Cf. Moschovakis [1980], p. 97.

[41] Cf. par exemple Grigorieff [1976].

[42] Autrement dit, T est un arbre au sens combinatoire dont les nœuds sont étiquetés par X et où l'on considère des chemins finis.

[43] Cf. Moschovakis [1980], p. 77.

[44] Cf. Moschovakis [1980], p. 79.

On ramène d'abord le problème au cas $\mathcal{X} = \mathcal{N}$. Soit alors $P \subseteq \mathcal{N}$ un χ-souslinien de cardinal $\#P > \chi$. On représente P comme la projection d'un fermé de $\mathcal{N} \times \chi^{\mathbb{N}} = (\mathbb{N} \times \chi)^{\mathbb{N}}$. On a donc $P = \pi([T])$ avec T arbre sur $\mathbb{N} \times \chi$, i.e.:

$P = \left\{\alpha \in \mathcal{N} \mid \exists f \in \chi^{\mathbb{N}}\ (\alpha, f) \in [T]\right\}$.[45]

A partir de T on construit alors par induction transfinie une chaîne descendante d'arbres $T^{\xi} \subset T$:

(i) $T^0 = T$,

(ii) $T^{\xi+1} = \left\{u \in T^{\xi} \mid \pi\left(\left[T_u^{\xi}\right]\right) \text{ a plus d'un élément}\right\}$,

(iii) et si λ est un ordinal limite $T^{\lambda} = \bigcap\limits_{\xi<\lambda} T^{\xi}$.

Comme il y a au plus χ nœuds dans T, il existe un ordinal λ de cardinal χ tel que $T^{\lambda+1} = T^{\lambda}$. Soit λ le plus petit. On montre alors, en utilisant le fait que $\#P > \chi$, que $T^{\lambda} \neq \emptyset$ (car si $T^{\lambda} = \emptyset$, alors P est une union d'un nombre $\leq \chi$ de singletons). A partir d'un élément $u \in T^{\lambda}$ on construit alors explicitement un sous-ensemble parfait de P en construisant un arbre J de T^{λ} tel que:

(i) $[J]$ soit *parfait* et *compact* et

(ii) la projection π soit *injective* sur $[J]$.

$\pi([J])$ est alors un sous-ensemble parfait de P.■

Le théorème de Souslin est un corollaire immédiat de ce résultat. Si P est Σ_1^1, P est $\aleph_0$-souslinien. S'il est non dénombrable, $\#P > \aleph_0$ et donc P possède un sous-ensemble parfait.

On montre de même que les Σ_1^1 ont la propriété de Baire et que les Σ_1^1 et les Π_1^1 sont mesurables. Mais *on ne peut pas* montrer dans ZF, par exemple, que les Δ_1^1 et les Σ_2^1 ont la propriété de l'ensemble parfait. De même, on ne peut pas montrer dans ZFC que les Δ_2^1 ont la propriété de Baire. Il s'agit là d'un problème fondamental. Il existe de nombreuses propriétés "naturelles" qui sont au-delà des ressources démonstratives de ZF et ZFC. Cela montre que les axiomes de ces théories *ne sont pas suffisamment contraignants.*

3.0.3 La sous-détermination de l'arithmétique des cardinaux dans ZFC.

En fait, l'un des problèmes majeurs de l'axiomatique ZFC est qu'elle ne détermine pratiquement rien de *l'arithmétique des cardinaux.*[46]

Dans un univers modèle de ZFC, soit $F(\alpha)$ la fonction telle que $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{F(\alpha)}$. On démontre les deux propriétés de base suivantes:

[45] Evidemment, si $a = (a_i)$ et $f = (f_i)$ alors $(a, f) = \{(a_i, f_i)\}$.

[46] Cf. l'excellente exposition de Jacques Stern [1976] dans l'exposé Bourbaki n° 494 cité plus haut.

(i) F est monotone croissante: si $\alpha \leq \beta$ alors $F(\alpha) \leq F(\beta)$;

(ii) Loi de König: $cf\left(\aleph_{F(\alpha)}\right) > \aleph_\alpha$, où l'on définit la *cofinalité* $cf(\alpha)$ d'un ordinal comme le plus petit cardinal χ tel qu'il existe un sous-ensemble X de cardinal χ qui soit cofinal dans α (i.e. $\operatorname{Sup} X = \alpha$). On dit que le cardinal χ est *régulier* si $cf(\chi) = \chi$.

Si l'Hypothèse généralisée du continu (HGC) est vérifiée, la loi de König est évidente car alors $F(\alpha) = \alpha + 1$. Or tout cardinal de la forme $\aleph_{\alpha+1}$ est régulier et donc $cf\left(\aleph_{\alpha+1}\right) = \aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha$.

Le fait que ZFC sous-détermine terriblement l'arithmétique des cardinaux est remarquablement manifesté par le résultat suivant:

Théorème d'Easton. *Pour les* $\aleph_\alpha$ réguliers *on peut imposer dans ZFC la loi* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{F(\alpha)}$ *pour (pratiquement)*[47] *toute fonction* F *satisfaisant les propriétés de base (i) et (ii).*$\square$

Un autre aspect du fait que ZF et ZFC ne déterminent pas suffisamment les notions reliées à la cardinalité est que ces notions *ne sont pas ZF-absolues.*[48]

•Une relation n-aire $R(x_1, ..., x_n)$ est ZF-absolue s'il existe une formule $\varphi(x_1, ..., x_n)$ telle que pour tout modèle standard M (transitif) de ZF et $\forall x_i \in M$ on ait $R(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow M \models \varphi(x_1, ..., x_n)$.

•Une opération $F : C_1 \times ... \times C_n \to V$ est ZF-absolue si

(i) les C_i sont ZF-absolus,

(ii) si $x_i \in C_i \cap M$ alors $F(x_1, ..., x_n) \in M$,

(iii) il existe une formule $\varphi(x_1, ..., x_n, y)$ telle que pour tout modèle M et $\forall x_i \in C_i \cap M$ on ait $F(x_1, ..., x_n) = y \Leftrightarrow M \models \varphi(x_1, ..., x_n, y)$.

•Un objet c est ZF-absolu si pour tout modèle M contenant c la relation $x = c$ est ZF-absolue.

L'appartenance, les opérations logiques, les opérations ensemblistes comme les projections, les produits, etc., les relations bien fondées, les opérations $\xi \to L_\xi$ définissant l'univers constructible L de Gödel (cf. plus bas 4), l'ensemble $\mathbb{N}$ sont ZF-absolus. Mais en revanche $\mathcal{N}$, $\mathbb{R}$, $Card(x)$, $x \to \mathcal{P}(x)$, $x \to \#x$ *ne sont pas* ZF-absolus. Ces notions varient considérablement suivant les modèles d'univers considérés et il faut donc *classer* ces modèles.

Face à une telle situation, deux stratégies opposées sont envisageables. Elles ont toutes deux été introduites par Gödel et l'on peut donc considérer que c'est bien en connaissance de cause que celui-ci a en définitive clairement choisi la seconde. Ce sont les stratégies que nous appellerons respectivement "minimaliste-constructive" VS "maximaliste-transcendante".

---

[47] "Pratiquement" renvoie à des conditions techniques peu contraignantes.

[48] Cf. Moschovakis [1980], pp. 500 sq.

3.0.4 La stratégie minimaliste des constructibles.

La première stratégie consiste à *restreindre* l'univers V. C'est la stratégie gödelienne $V = L$ de l'univers L des constructibles (Gödel 1938).

Une façon simple de définir L est de remplacer, dans le processus de construction de la hiérarchie cumulative de V au moyen de $x \to \mathcal{P}(x)$, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(x)$ — qui n'est pas ZF-absolu — par un ensemble plus petit $\mathcal{D}(x) = \{y \subseteq x \mid y \text{ est élémentaire}\}$[49] — qui est, lui, ZF-absolu. On définit alors L par une induction transfinie sur la classe des ordinaux: $L_0 = \emptyset$, $L_{\xi+1} = \mathcal{D}(L_\xi)$, $L_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi$ si λ est un ordinal limite et, finalement, $L = \bigcup_{\xi\in On} L_\xi$. En utilisant le fait que la construction de L est ZF-absolue, on montre alors (Gödel 1938-1940) que si $V = L$ on peut définir *un bon ordre global* sur L, ce qui est une forme globale extrêmement forte d'AC. Gödel a également montré que dans ZF on a $V = L \vdash HCG$.

L est en fait *le plus petit modèle intérieur* de l'univers $\mathcal{U}$ considéré. Cela signifie:

(i) $On \subset L$,

(ii) L est transitif: si $y \underset{\mathcal{U}}{\in} x \underset{L}{\in} L$,alors $y \underset{L}{\in} L$,

(iii) $(L, \in|_L)$ est un modèle de ZF.

L peut être défini dans $\mathcal{U}$ par un *énoncé* $L(x) =$ "x est constructible" qui est *indépendant* de $\mathcal{U}$ (i.e. ZF-absolu).

On montre que dans L on a $\mathcal{N} \subseteq L$ (i.e. tout sous-ensemble de $\mathcal{N}$ est constructible).[50] Cela implique qu'il existe une bijection $\rho : \mathcal{N} \leftrightarrow \aleph_1$ telle que la relation $\alpha \leq_L \beta \Leftrightarrow \rho(\alpha) \leq \rho(\beta)$ soit un bon ordre sur $\mathcal{N}$ de classe Δ^1_2! Comme d'après un théorème de Fubini un tel bon ordre ne peut pas être mesurable il existe donc dans L des Δ^1_2 non mesurables!

Cette propriété est *la plus stricte* qui soit consistante avec ZF. En effet, un théorème de Kunen et Martin affirme qu'un bon ordre $<$ sur un $\mathcal{X}$ parfait χ-souslinien est de longueur $|<| < \chi^+$ (où χ^+ est le plus petit cardinal $> \chi$). Comme les Σ^1_1 sont les $\aleph_0$-sousliniens (cf. plus haut § 2.), un bon ordre Σ^1_1 sur $\mathcal{N}$ devrait être de longueur dénombrable.

Par ailleurs, s'il existe un bon ordre $<$ Σ^1_2 sur $\mathcal{N}$, comme les Σ^1_2 sont les $\aleph_1$-sousliniens d'après un théorème de Schönfield, l'ordinal de $<$ est $< \aleph_2$ et l'HC est donc valide.

[49] Une partie y de x est élémentaire si elle est définissable par une formule du premier ordre de la structure $< x, \in, \{s|s \in x\} >$.

[50] Cf. Moschovakis [1980], pp. 486 sq.

On montre de même que si $V = L$, et donc $\mathcal{N} \subset L$, il existe une application $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ($\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ parfaits) dont le graphe est un Π^1_1 fin (i.e. sans sous-ensemble parfait). Une telle application n'est pas mesurable.

Ces résultats sont fondamentalement contre intuitifs. Ils proviennent du fait que l'AC, qui implique l'existence d'ensembles très compliqués et très irréguliers, reste vrai dans L. L'axiome $V = L$ les force par conséquent à exister dans la hiérarchie projective et donc dans des classes d'ensembles pourtant relativement "simples".

3.0.5 La stratégie maximaliste des grands cardinaux.

Il est par conséquent légitime de changer complètement de stratégie et de chercher des axiomes *supplémentaires* "naturels" pour ZFC.

Plusieurs stratégies sont envisageables:

(i) Faire une récurrence transfinie de théories $T_{\alpha+1} = T_\alpha +$ consistance T_α en partant de ZF ou ZFC.

(ii) Postuler des bonnes propriétés de régularité des projectifs, et donc du continu. Pour des raisons méta-mathématiques, celles-ci ne sont plus démontrables dans ZFC dès le niveau 2. Quel est donc le "prix" en termes "d'ontologie" ensembliste d'une bonne théorie du continu ?

(iii) *Rigidifier* la théorie du continu,[51] i.e. chercher à quelles conditions *on ne peut plus modifier* les propriétés de $\mathbb{R}$ par forcing.[52]

Ces trois stratégies convergent dans l'introduction d'axiomes d'existence de grands cardinaux.

Le rejet nominaliste d'une "ontologie" ensembliste forte a fait que ces stratégies n'ont été que fort peu étudiées, voire même rejetées, philosophiquement. Elles nous paraîssent pourtant essentielles. En fait, nous pensons même que l'une des meilleures façons de formuler *philosophiquement* les théorèmes de limitation interne est précisément de dire qu'une bonne théorie du continu exige

[51] Cf. le Séminaire Bourbaki de P. Dehornoy [1988].

[52] Rappelons la définition du forcing de Cohen. On veut construire des sur-modèles M' d'un modèle M de ZF ou de ZFC (i.e. M est un modèle intérieur de M') possédant des propriétés désirées. Pour ce faire, on se donne des ensembles *ordonnés* C de conditions à satisfaire. Un ensemble de condition C est dense si tout p appartenant à C admet un minorant.

On définit alors des classes *génériques* G de conditions. G est générique si (i) $p \in G$ et $p < q \Rightarrow q \in G$, (ii) $\forall p, q \in G$, $\exists$ minorant $r < p$, $r < q$ tel que $r \in G$, (iii) $\forall$ ensemble dense de conditions, $\exists p \in C$ tel que $p \in G$.

Le théorème du forcing dit qu'il existe $\mathcal{A} = M[G]$ modèle de ZF tel que (1) M soit un modèle intérieur de $\mathcal{A}$, (2) G est un *ensemble* dans $\mathcal{A}$, (3) Si $\mathcal{A}'$ est un autre modèle de ZF statisfaisant (1) et (2), alors il existe $j : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}'$ tel que $j(\mathcal{A})$ modèle intérieur de $\mathcal{A}'$ et $j|_M = Id(M)$, (4) $\mathcal{A}$ est unique à isomorphisme près (qui est l'Id sur M).

une ontologie ensembliste en quelque sorte *maximale* (et pas du tout minimale). *La "simplicité" du continu exige un platonisme radical.*

Comme le note Patrick Dehornoy:

> les propriétés mettant en jeu des objets aussi "petits" que les ensembles de réels (du point de vue de la cardinalité et de celui du nombre minimal d'itérations de l'opération "passer à l'ensemble des parties" nécessaires à leur construction à partir de l'ensemble vide) sont liées à d'autres propriétés mettant en jeu des ensembles "immenses" qui paraissent très éloignés de ces mêmes points de vue.[53]

Il existe de très nombreux théorèmes montrant que le coût platonicien d'une "bonne" théorie du continu est très élevé. Avant de l'expliciter dans le cas des propriétés de détermination, donnons l'exemple de deux théorèmes particulièrement frappants de Robert Solovay.

Soit CM l'axiome d'existence d'un cardinal mesurable (cf. plus bas § 6.2. pour la définition). Le premier théorème est le:

Théorème de Solovay (1969). *$ZFC + CM \vdash \forall\Sigma^1_2$ " est "régulier" (i.e. a la propriété de Baire, est mesurable et a la propriété de l'ensemble parfait).*[54]$\square$

L'autre théorème concerne la possibilité d'étendre la mesure de Lebesgue à une mesure μ rendant mesurables *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (ce qui est contradictoire avec l'AC). Pour cela il faut que la puissance du continu $2^{\aleph_0}$ soit très grande — ce qui va radicalement à l'encontre de l'HC.

Théorème de Solovay-Jensen (1967).

(i) $ZFC + CM$ et $ZFC + \exists\mu$ sont des théories equiconsistantes.

(ii) Si κ est le plus petit cardinal t.q. un $A \subseteq \mathbb{R}$ de mesure $\mu(A) > 0$ soit l'union de κ sous-ensembles de μ-mesure nulle (c'est aussi le plus grand κ tel que μ soit κ-additive), alors $\aleph_0 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ (trivial), κ est faiblement inaccessible (Ulam), et κ est le κème cardinal faiblement inaccessible.[55]$\square$

3.0.6 Détermination projective et régularité du continu.

La propriété de détermination. Une hypothèse de régularité que l'on a beaucoup étudiée depuis les années 60 est celle dite de *détermination*. On considère des jeux infinis à information parfaite sur des ensembles X. Chaque joueur (I et II) choisit à tour de rôle un élément a de X:

$$\begin{array}{ccccccccc} I & a_0 & & & & a_2 & & & \dots \\ & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \\ II & & & a_1 & & & & a_3 & \end{array}$$

---

[53] Dehornoy [1988].

[54] Cf. Moschovakis [1980], p. 284.

[55] Cf. Solovay [1971].

A la fin de la partie on obtient une suite $f \in X^{\mathbb{N}}$. Soit alors $A \subset X^{\mathbb{N}}$. On dit que le joueur I (resp. II) gagne la partie f du jeu $G = G_X(A)$ associé à A si $f \in A$ (resp. $f \notin A$).

Définition. *On dit que A est* déterminé *(noté* $\mathrm{Det}(A)$ *ou* $\mathrm{Det}\, G_X(A)$*) si l'un des joueurs possède une stratégie gagnante. A est donc déterminé ssi:* $\exists a_0 \forall a_1 \exists a_2 ... (a_0, a_1, a_2, ...) \in A.\Box$

Il s'agit d'une forte propriété de "régularité". En effet on montre que $\forall B \subset \mathbb{R}$, $\exists A \subset \mathcal{N}$ tel que A déterminé $\Leftrightarrow B$ a la propriété de Baire, la propriété de l'ensemble parfait et est mesurable.

Le premier théorème liant la détermination et la hiérarchie projective a été le:[56]

Théorème de Gale et Stewart (1953). *Dans ZFC, les fermés A de $X^{\mathbb{N}}$ (i.e. les Π^0_1) sont déterminés.*$\Box$

En effet, soit $A \subset X^{\mathbb{N}}$ et $u = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in X^*_p$ un début de partie. On définit le sous-jeu des parties gagnantes commençant par u: $A(u) = \left\{ f \in X^{\mathbb{N}} \mid (u, f) \in A \right\}$. Il est facile de voir que si II ne gagne pas $A(u)$ (i.e. ne possède pas de stratégie gagnante pour le sous-jeu $A(u)$), alors $\exists a \forall b$ (II ne gagne pas $A(u.(a, b))$). En effet, si $\forall a \exists b$ (II gagne $A(u.(a, b))$), soit b^a un tel b et τ^a une telle stratégie gagnante (on utilise ici l'AC et on se place donc dans ZFC). Si I joue a_0, II peut gagner en jouant d'abord b^{a_0} puis en gagnant $A(u.(a_0, b^{a_0}))$ au moyen de la stratégie gagnante τ^{a_0}.

Supposons donc que II soit sans stratégie gagnante pour A (car sinon A serait déterminé). Il faut montrer que I possède une stratégie gagnante. Mais pour I $\exists a \forall b$ (II ne gagne pas $A(u.(a, b))$). Soit a_0 un tel a. I joue a_0. II joue a_1, mais sans pouvoir gagner $A(a_0, a_1)$. Donc $\exists a \forall b$ (II ne gagne pas $A((a_0, a_1, a, b))$). I joue alors un tel $a = a_2$. Etc. On obtient ainsi une suite $f = (a_i)$ telle que II ne puisse gagner aucun des sous-jeux $A((a_0, a_1, ..., a_{n-1}))$.

Comme A est *fermé*, cette stratégie est *gagnante* pour I. En effet $\forall n \exists (f_n \in A \subset X^{\mathbb{N}})(f_n|_n = f|_n)$. Car sinon on aurait $\exists n \forall f_n (f_n \notin A)$ et II n'aurait qu'à jouer au hasard dans $A((a_0, a_1, \ldots, a_{n--1}))$ pour posséder une stratégie gagnante. Mais f est la limite de la suite (f_n). Comme A est fermé et $f_n \in A$, on a bien $f \in A.\blacksquare$

La preuve est élémentaire. Mais dès que l'on monte dans la hiérarchie des boréliens et a fortiori dans la hiérarchie des projectifs, très vite les preuves de détermination deviennent très complexes et, pour les projectifs, exigent des hypothèses *plus fortes que ZFC.*

Tout de suite après le théorème de Gale et Stewart on a montré le:

Théorème de Wolfe (1955). *Les Σ^0_2 (réunions dénombrables de fermés) sont déterminés.*$\Box$

Le résultat fondamental pour les boréliens, résultat qui a clos une première période de recherche, a été le:

[56] Cf. Grigorieff [1976] et Moschovakis [1980], p. 288.

Théorème de Martin (1975). *ZFC* $\vdash$ *les boréliens (i.e. les* Δ_1^1*) sont déterminés.*$\square$

Ce résultat remarquable est la *limite* de ce que l'on peut obtenir dans ZFC. ZFC ne peut en effet impliquer que les Σ_1^1 soient déterminés, car alors tout Σ_1^1 aurait par exemple la propriété de l'ensemble parfait. Or dans le modèle L de ZFC (cf. § 4.) il existe des Σ_1^1 ne possédant pas cette propriété. Il en va de même pour les Π_1^1. En effet la détermination des Π_1^1 implique que tous les Σ_2^1 sont mesurables Lebesgue. Or il existe dans L un bon ordre Δ_2^1 , et donc a fortiori Σ_2^1, sur $\mathcal{N}$. D'après Fubini un tel bon ordre ne peut pas être mesurable.$\blacksquare$

Donnons une idée de la démonstration du théorème fondamental de Donald Martin.[57] On commence par le lemme fondamental suivant.

Lemme. *Soit* T *un arbre et* $A \subset [T]$. *Soit* $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une famille* dénombrable *de* fermés *de* $[T]$. *Il existe alors un arbre* T^* *sur un ensemble* Y *de cardinal* $\#Y = 2^{\#T}$ *et une surjection continue* $\varphi : [T^*] \to [T]$ *tels que:*

(i) les $\varphi^{-1}(F_i)$ *sont des* clopens *(des ouverts-fermés) de* $[T*]$,

(ii) $\mathrm{Det}\,(G^* = G_{T^*}\,(\varphi^{-1}(A))) \Rightarrow \mathrm{Det}\,(G_T(A))$.$\square$

Ce lemme permet de démontrer immédiatement le théorème de Martin par récurrence. Si A est un borélien de classe n, on considère une représentation de A

$$A = \bigcup_{k_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{k_1\in\mathbb{N}} \cdots \bigcup_{k_{n-1}\in\mathbb{N}} F_{k_0,\dots,k_{n-1}}$$

par des F_{k_i} fermés. Soient alors T^* et φ comme dans le lemme. Le borélien

$$\varphi^{-1}(A) = \bigcup_{k_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{k_1\in\mathbb{N}} \cdots \bigcap_{k_{n-2}\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k_{n-1}\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}\left(F_{k_0,\dots,k_{n-1}}\right) \right)$$

est de classe $n-1$ puisque, étant des clopens, les $\varphi^{-1}\left(F_{k_0,\dots,k_{n-1}}\right)$ sont en particulier *ouverts*. D'après l'hypothèse de récurrence, G^* (i.e. $\varphi^{-1}(A)$) est déterminé. Donc, d'après le lemme, G (i.e. A) est également déterminé.$\blacksquare$

Considérons par exemple le cas d'un borélien Σ_3^0 A sur X.[58] On lui associe un jeu A^* de classe Σ_2^0 sur la fermeture de X et l'on montre qu'un joueur qui gagne A^* gagne aussi A.. Comme

$\Sigma_3^0 = \exists^\omega \Pi_2^0,\ \Pi_2^0 = \neg\Sigma_2^0 = \neg\left(\exists^\omega \Pi_1^0\right) = \forall^\omega \neg\Pi_1^0,$

on a la représentation de A:

$f \in A \Leftrightarrow \exists i\ \forall j\ \ (f \notin F_{i,j})\ ,\ F_{i,j} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ fermés.

Soit F_n une énumération des $F_{i,j}$ et $F_n = [T_n]$ une représentation des F_n sous forme d'arbres. On a par définition:

$(x_0, x_1, \dots) \notin F_n \Leftrightarrow \exists k\,[(x_0, \dots, x_k) \notin T_n]$.

Définition du jeu A^*. Les joueurs jouent des coups auxiliaires Σ_i et $< t_i, u_i >$ *codant leurs stratégies* pour gagner A.

[57] Cf. Martin [1975] et Grigorieff [1976].

[58] Cf. Moschovakis [1980], pp. 359 sq.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} I & x_0 & & & & \Sigma_0 & & & & x_2 & & & & \Sigma_2 & & \\ & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ II & & & x_1 & & & & < t_0, u_0 > & & & & x_3 & & & & < t_2, u_2 > \end{array}$$

Les règles de A^* sont les suivantes (on dit que Σ est un sous-jeu *I-imposé* sur le début de partie u si $\forall \sigma \in \Sigma (u < \sigma)$, i.e. si les parties de Σ commencent par u, et si II peut jouer ce qu'il veut à condition de rester dans Σ):

(i) $x_i \in X$;

(ii) Σ_0 est un sous-jeu I-imposé sur le début de partie (x_0, x_1) précédant Σ_0; Σ_2 est un sous-jeu I-imposé sur le début de partie (x_0, x_1, x_2, x_3) précédant Σ_2; etc.;

(iii) $t_{2n} = 0/1$ et u_{2n} est une chaîne de longueur impaire compatible avec $(x_0, ..., x_{2n+1})$. Quand I joue Σ_0, il propose à II de jouer dans Σ_0.

- Si II accepte, il joue $t_0 = 0$ en s'engageant à ce qu'en fin de partie $(x_0, ...) \in F_0$ (et donc à ce que $\forall n (x_0, ..., x_{2n+1}) \in T_0$. Sinon il perd.
- Si II refuse, il joue $t_0 = 1$ et doit alors jouer une suite paire (commençant par x_0) $u_0 = (x_0, ..., x_{2m}) \in (\Sigma_0 - T_0)$. En fin de partie on aura donc $(x_0, ...) \notin F_0$.

(iv) On généralise aux Σ_{2n}.

Le jeu A^* est alors défini par la formule:
$(x_0, x_1, \Sigma_0, < t_0, u_0 >, \dots) \in A^* \Leftrightarrow$
$\exists n \ \ [(t_{2n} = 0) \wedge ((x_0, x_1, \dots) \notin F_n)] \bigvee \exists i \ \forall j \ \ [(F_{i,j} = F_n) \Rightarrow (t_{2n} = 1)]$.

La première partie de la disjonction du second membre de cette équivalence exprime que II ne peut pas tenir ses engagements (car II ne tient ses engagements que si $\forall n (x_0, ...) \in F_n \Leftrightarrow t_{2n} = 0$). La seconde signifie que $\exists i \forall j \ (f \notin F_{i,j})$et donc que $(x_0, ...) \in A$. Si II tient ses engagements on a donc $(x_0, ...) \in A$..

La démonstration consiste alors à montrer que si l'un des joueurs gagne A^* alors il gagne également A .■

La nécessité des grands cardinaux. Pour démontrer des résultats de détermination pour les projectifs au-delà de Δ^1_1, il faut introduire dans ZFC des axiomes d'existence de grands cardinaux.

Définition. *Un cardinal* mesurable *est un cardinal* $\chi > \omega$ *qui supporte un ultrafiltre libre (i.e. non principal)* $\mathcal{U}$ *qui est* χ-complet *(i.e. stable par* $\bigcap\limits_{\lambda < \chi} X_\lambda$ *pour tout* $\lambda < \chi$*). Il est équivalent de dire que* χ *supporte une* mesure μ *à valeurs binaires* $0, 1$ *(avec* $\mu(\chi) = 1$*), diffuse (*$\forall \xi \in \chi (\mu(\{\xi\}) = 0)$*) et* χ*-additive. La correspondance s'établit à travers les équivalences* $\mu(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}$ *et* $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \chi - A \in \mathcal{U}$.□

Un résultat typique est par exemple un autre théorème de Donald Martin.

Théorème de Martin (1970). *Si il existe χ mesurable alors $Det(\Sigma^1_1)$* .□

D'où comme corollaire le théorème de Solovay (1969): $ZFC + CM \vdash \Sigma^1_2$ "réguliers".

Théorème de Scott (1961). *L'hypothèse CM (il existe un cardinal mesurable) est fausse dans $V = L$ et l'on a donc $ZFC \nvdash CM$.*□

Un cardinal mesurable χ est très grand. Il est *régulier* (i.e. il n'existe pas de $f : \lambda \to \chi$ avec $\lambda < \chi$ qui soit non bornée, cf. § 3.), *fortement inaccessible* (i.e. $\forall \lambda < \chi$, $2^\lambda < \chi$) et possède au moins χ cardinaux fortement inaccessibles avant lui.

Il possède une propriété *combinatoire* fondamentale de partition qui est une propriété *à la Ramsey*.[59] Soit $\chi^{[n]}$ l'ensemble des parties de χ de cardinal n et $\chi^{<\omega} = \bigcup_n \chi^{[n]}$ l'ensemble des parties finies de χ.

Définition. *Une* partition *de $\chi^{[n]}$ est une application $F : \chi^{[n]} \to \lambda$ (les classes d'équivalence sont les fibres de F). On dit alors qu'une partie $I \subseteq \chi$ est* F-homogène *si $I^{[n]}$ est entièrement inclus dans une fibre de F, autrement dit, si $\forall A, B \in I^{[n]}$ $(F(A) = F(B))$. Si $F : \chi^{<\omega} \to \lambda$ est une partition des parties finies de χ, I est F-homogène si $\forall n \forall A, B \in I^{[n]}$ $(F(A) = F(B))$. Par ailleurs, un ultrafiltre $\mathcal{U}$ est dit* normal *s'il satisfait:*

$\forall f \in \chi^\chi\, [f(\xi) < \xi\ \mathcal{U}\text{-p.p.} \Rightarrow \exists \lambda_0 < \chi\ \ (f(\xi) = \lambda_0\ \mathcal{U}\text{-p.p.})]$.□

On montre qu'un cardinal mesurable possède un ultrafiltre normal. On a alors le:

Théorème de Rowbottom (1971). Si χ est mesurable, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre normal et si F est une partition de χ avec $\lambda < \chi$, alors il existe une partie homogène I de χ telle que $I \in \mathcal{U}$ (et est donc très grande).□

Plus généralement, on a le:

Théorème. *Si χ est mesurable, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre normal et si pour tout i on se donne une partition $F_i : \chi^{<\omega} \to \lambda$, alors il existe une partie* simultanément *homogène I de χ telle que $I \in \mathcal{U}$.*□

Donnons une esquisse de la preuve du théorème de Martin.[60] On utilise d'abord un *lemme de représentation* des Σ^1_1 et des Π^1_1 qui explicite le résultat fondamental que $A \subseteq \mathcal{N}$ est Π^1_1 ssi il existe $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ de complexité Δ^1_1 telle que $\forall \alpha \in \mathcal{N}$ $f(\alpha)$ soit un ordre total et que l'on ait l'équivalence $\alpha \in A \Leftrightarrow f(\alpha)$ est un *bon* ordre. On utilise pour cela le fait que on peut associer à tout $\alpha \in \mathcal{N}$ une relation binaire sur $\mathbb{N}$:

$n \leq_\alpha m \Leftrightarrow \alpha(\langle n, m \rangle)\, [= \alpha\,(2^{n+1} 3^{m+1})] = 1$.

Plus précisément, si $A \subseteq \mathcal{N}$ est Π^1_1 il existe une fonction D telle que:

(i) $\mathrm{Dom}(D) = \{$codes u des suites finies de cardinal impair$\}$: $u =< t_0, \ldots, t_{n-1} >= p_0^{t_0+1} \times \ldots \times p_{n-1}^{t_{n-1}+1}$ où les p_i sont les n premiers nombres premiers.

[59] Cf. Moschovakis [1980], p. 368.

[60] Nous résumons Moschovakis [1980], pp. 370 sq.

(ii) (ii) Si $|u| = 2n$, $D(u)$ est un ordre sur un ensemble de n entiers.

(iii) Si $t < s$, $D\left(\overline{\alpha}(2t)\right)$ est un sous-ordre de $D\left(\overline{\alpha}(2s)\right)$ où, pour $\alpha \in \mathcal{N}$, $\overline{\alpha}(n) =< \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) >$. Pour $\alpha \in \mathcal{N}$, l'union $\bigcup_t D\left(\overline{\alpha}(2t)\right)$ des $D\left(\overline{\alpha}(2t)\right)$ est donc un ordre total sur un ensemble dénombrable N.

(iv) $\alpha \in A \Leftrightarrow \bigcup_t D\left(\overline{\alpha}(2t)\right)$est un *bon* ordre sur N.

Si donc $A \subseteq \mathcal{N}$ est de classe Σ^1_1 et si D est une fonction comme ci-dessus pour le Π^1_1 complémentaire $\mathcal{N} - A$, on a la représentation: $\alpha \notin A \Leftrightarrow \bigcup_t D\left(\overline{\alpha}(2t)\right)$ est un bon ordre.

On construit alors un jeu auxiliaire A^* où le joueur II joue ses coups auxiliaires en choisissant des ordinaux *dans le cardinal* χ.

$$\begin{array}{lccccccc} I & a_0 & & & a_2 & & & \cdots \\ & & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\ II & & a_1, \xi_1 & & & a_3, \xi_3 & & \end{array}$$

En fin de partie on obtient un $\alpha = (a_0, a_1, ...) \in \mathcal{N}$ et une suite d'ordinaux $\xi_i < \chi$. Soit alors $\{x_1, ..., x_t\} \subset N$ le codomaine de $D\left(\overline{\alpha}(2t)\right)$ et $D = \{x_1, ...\}$ celui de l'union $\bigcup_t D\left(\overline{\alpha}(2t)\right)$ des $D\left(\overline{\alpha}(2t)\right)$. La règle du jeu A^* est que II gagne si l'application $x_t \to \xi_t$ *préserve l'ordre* (les ξ_t étant ordonnés par l'ordre naturel de χ comme cardinal).

On montre alors:

(i) A^* est *ouvert*, et donc déterminé. Il existe par conséquent des stratégies gagnantes.

(ii) Si II gagne A^*, il gagne A en appliquant la même stratégie gagnante car en fin de partie il obtient un bon ordre $\bigcup_t D\left(\overline{\alpha}(2t)\right)$et donc $\alpha \notin A$.

(iii) Si I gagne A^* avec une stratégie gagnante σ^*, alors il gagne aussi A. C'est pour démontrer ce point (qui est le cœur de la preuve) que l'on a besoin de la propriété de Ramsey garantie par le fait que χ est mesurable.

En effet, soit $(\xi_1, ..., \xi_t; (a_0, a_1, ..., a_{2t-1}))$ de code $u =< a_0, a_1, ..., a_{2t-1} >$ un début de partie de A^*. Il existe un bon ordre unique $\xi_{n(i)}$ sur ξ_i qui est tel que II n'a pas déjà perdu au rang t. C'est celui là que l'on considère. Au code u (de longueur $|u| = 2t$) on associe la partition $F_u : \chi^{[t]} \to \mathbb{N}$ donnée par la stratégie gagnante σ^* de A^*:

$F_u\left(\{\xi_1, \ldots, \xi_t\}\right) = \sigma^*\left[a_0, \left(a_1, \xi_{n(1)}\right), \ldots, a_{2t-2}, \left(a_{2t-1}, \xi_{n(t)}\right)\right].$

Comme χ est *mesurable*, il existe une partie $J \subset \chi$ de cardinal $\#J = \aleph_1$ (donc non dénombrable) qui est *simultanément homogène* pour toutes ces partitions. On pose alors $\sigma\left(a_0, \ldots, a_{2t-1}\right) = F_u\left(\{\xi_1, \ldots, \xi_t\}\right)$ en prenant les ξ_i de faç on quelconque dans J. Cette stratégie σ est bien définie car J est homogène. Elle simule *dans* J les choix ordinaux de II dans A^*.

On montre alors que σ est bien une stratégie gagnante de I pour le jeu A. Supposons en effet que I joue selon σ et perde, autrement dit obtienne $\alpha = (a_0, a_1, ...) \notin A$. Cela conduit à une contradiction. En effet, $\bigcup_t D(\overline{\alpha}(2t))$ est alors un bon ordre de rang dénombrable. Soit $\{x_1, x_2, ...\}$ son domaine. Comme $\#J = \aleph_1$, il existe une application $x_t \to \xi_t$ *préservant l'ordre* telle que $\forall t\ (\xi_t \in J)$. Mais cela implique qu'en remontant dans A^*, I joue selon σ^* et *perd* si II joue les ξ_t . Or σ^* est une stratégie gagnante.■

La détermination des Δ^1_2 exige des hypothèses encore plus fortes que CM (et même que l'existence d'un nombre quelconque de cardinaux mesurables).

3.0.7 Détermination et phénomènes de réflexion.

Pour garantir la détermination de classes plus élevées dans la hiérarchie des projectifs, il faut introduire des hypothèses de plus en plus fortes. Pour "mesurer" la grandeur des grands cardinaux, le mieux est d'utiliser les phénomènes associés de *réflexion*.[61] Intuitivement, un phénomène de réflexion signifie que ce qui se passe dans totalité peut déjà de lire dans une partie stricte de cette totalité.

Définition. *On dit que le cardinal* χ reflète *une relation* $\Phi(x, y)$ *si on a l'implication:*

$\forall\alpha(\in On) < \chi\ [\exists\beta \geq \chi\ \Phi(\alpha, \beta) \Rightarrow \exists\beta^* < \chi\ \Phi(\alpha, \beta^*)]$.□

Soit j un plongement élémentaire $j : M \hookrightarrow M^*$ de modèles de ZFC.[62] On s'intéresse au cas où M^* est un *modèle intérieur* de M (cf. plus haut § 4.). Cette réflexion de M dans un de ses propres modèles intérieurs est philosophiquement très profonde. Or elle s'identifie à une hypothèse d'existence de grands cardinaux. En effet, si $\alpha \in On(M)$ est un ordinal de M, on a $j(\alpha) \in On(M^*) \subset On(M)$ et, à cause de l'élémentarité de j, $\alpha < \beta \Leftrightarrow j(\alpha) < j(\beta)$. Cela implique $j(\alpha) \geq \alpha$. On montre alors qu'il existe nécessairement un α tel que $j(\alpha) > \alpha$. Soit χ le plus petit de ces α. χ s'appelle *l'ordinal critique* de j. C'est un grand cardinal, qui devient de plus en plus grand au fur et à mesure que M^* se rapproche de M, la limite $M^* = M$ étant *inaccessible* (inconsistante) d'après un théorème de Kunen. En fait on montre que les ordinaux critiques sont exactement les cardinaux mesurables.

Il s'agit bien d'un phénomène de réflexion. Soit en effet $\Phi(\alpha, \chi)$ une relation qui est vraie dans M pour $\alpha < \chi$. Si M^* est assez proche de M pour que $\Phi(\alpha, \chi)$

[61] Cf. l'article fondamental Martin-Steel [1989] et le bel exposé Bourbaki de Patrick Dehornoy [1989] qui lui est consacré.

[62] Si A est une sous-structure d'une structure B, on dit que l'injection $A \hookrightarrow B$ est un plongement élémentaire si B a la même théorie du premier ordre que A (i.e. est "discursivement" indiscernable de A) dans le langage formel (riche) où il existe un symbole de constante *pour chaque* élément de A. La logique du premier ordre d'un univers hierarchisé en types est identifiable à la logique d'ordre supérieur de ses éléments. Pour une introduction pédagogique à ce concept, cf. Petitot [1979], [1989b].

reste vraie dans M^*, alors $M^* \models \exists(x < j(\chi))\Phi(\alpha, x)$ (il suffit de prendre $x = \chi$). Mais d'après l'élémentarité de j cela est équivalent à $M \models \exists(x < \chi)\Phi(\alpha, x)$.

Pour aller au-delà des cardinaux mesurables on a utilisé la technique suivante. Soit V_ξ la hiérarchie cumulative des ensembles jusqu'au rang ξ. Pour χ critique (donc mesurable) comme ci-dessus, on a $V_\chi^{M^*} = V_\chi^M$ (i.e. égalité de M et de M^* jusqu'au rang χ).

Définition. *On dit que χ est superfort dans M s'il existe un plongement élémentaire intérieur j tel que $V_{j(\chi)}^{M^*} = V_{j(\chi)}^M$.*$\square$

Entre les mesurables et les superforts, Woodin a introduit d'autres cardinaux, dits *de Woodin.*

Définition. *Un cardinal δ est de Woodin si $\forall F : \delta \to \delta$, $\exists \kappa < \delta$ et un plongement élémentaire j d'ordinal critique κ tel que κ soit clos (invariant) par F (i.e. $F|_\kappa : \kappa \to \kappa$) et $V_{j(F(\kappa))}^{M^*} = V_{j(F(\kappa))}^M$ (i.e. $M = M^*$ jusqu'au rang $j(F(\kappa))$).*$\square$

On montre:

(i) que si δ est de Woodin, il existe une infinité de χ mesurables $\chi < \delta$, et

(ii) que si λ est superfort, il existe une infinité de δ de Woodin $\delta < \lambda$.

Le théorème clé est alors le:

Théorème de Martin-Steel (1985). *Si dans M (modèle de ZFC) il existe n cardinaux de Woodin δ_i et un cardinal mesurable $\kappa > \delta_i$ $\forall i$, alors* Det $\left(\Pi_{n+1}^1\right)$.$\square$

La réciproque est due à Woodin.

Corollaire. *Si dans M il existe λ superfort, alors l'axiome DP de* détermination projective *(tous les projectifs sont déterminés) est valide dans M.*$\square$

On a également le résultat remarquable:

Théorème de Martin-Steel-Woodin. *Si dans M il existe λ superfort alors $L(\mathcal{N})$ (le plus petit modèle intérieur de ZF contenant $\mathcal{N}$) satisfait l'axiome de détermination complète AD: $\forall A \subset \mathcal{N}$ est déterminé.*$\square$

Les travaux de Woodin et Shelah ont également montré que s'il existe dans M un cardinal κ *supercompact* (encore plus grand qu'un superfort) alors aucune propriété de $\mathcal{N}$ ne peut plus être modifiée par forcing. Autrement dit, il y a *"rigidification" de la théorie des réels.* On peut considérer que ce résultat explicite la nature des axiomes "platoniciens" nécessaires à une "bonne" théorie, régulière, du continu.

Il existe un nombre impressionnant de résultats sur la *structure fine* des modèles de ZFC que l'on peut obtenir par des techniques de cet ordre. Nous nous bornerons pour conclure à citer un résultat particulièrement significatif dû à Steve Jackson.

On considère $L(\mathcal{N})$ (i.e. le plus petit modèle intérieur de ZF contenant $\mathcal{N}$, cf. plus haut). Nous venons de voir que l'axiome de détermination complète AD

($\forall A \subseteq \mathcal{N}$ est déterminé) est vrai s'il existe λ superfort. Sous cette hypothèse, Jackson a pu calculer explicitement les *ordinaux projectifs* δ^1_n de $L(\mathcal{N})$.

Définition. $\delta^1_n =$ Sup *de la longueur des bons ordres* Δ^1_n *sur* $\mathcal{N}$.$\square$

Les δ^1_n donnent une information fondamentale sur les projectifs. On a par exemple:

Théorème. *AD$\vdash$ Tout* Σ^1_{2n+1} *est* $\left(\delta^1_{2n+1}\right)^+$ *-Borel (les κ-boréliens constituent la plus petite classe contenant les ouverts et stable par* $\bigcup\limits_{\xi<\kappa}$ *et* $\bigcap\limits_{\xi<\kappa}$ *).*$\square$

Après de nombreux travaux pionniers: $\delta^1_1 = \omega_1$ (ZFC), $\delta^1_2 = \omega_2$ (Martin, AD), $\delta^1_3 = \omega_{\omega+1}$ (id.), $\delta^1_4 = \omega_{\omega+2}$ (Martin-Kunen), $\delta^1_{2n+2} = \left(\delta^1_{2n+1}\right)^+$, Jackson a démontré le remarquable résultat suivant.

Théorème de Jackson (1989). *ZF+AD+DC* $\vdash \delta^1_{2n+1} = \left[\aleph_{\left.\omega^{\omega^{\cdots\omega}}\right\}\ 2n+1 \text{ fois}}\right]$.$\square$

(L'axiome des choix dépendants DC est une forme faible d'AC: toute relation binaire mal fondée possède une chaîne descendante infinie).

Ce résultat permet d'analyser en détail l'arithmétique et la structure des cardinaux au-dessous de la borne $\chi_{\varepsilon_0} = \operatorname*{Sup}_n \delta^1_n$ $\left(\text{avec } \varepsilon_0 = \left.\omega^{\cdots\omega^{\cdots\omega}}\right\}\ \omega \text{ fois}\right)$.

3.1 Conclusion

De tels résultats montrent explicitement à quelles conditions il est possible d'élaborer une "bonne" théorie du continu, c'est-à-dire une bonne *interprétation mathématique* du continu comme forme de l'objectivité, comme forme de l'intuition au sens de Kant-Peirce.

En ce sens, le platonisme de Gödel qui traitait ces axiomes d'existence comme des sortes "d'hypothèses physiques" paraît philosophiquement parfaitement justifié. Il l'est dès que l'on admet que l'ontologie ensembliste n'est qu'une quasi-ontologie et que ce n'est pas à son niveau que se posent les problèmes du lien entre mathématiques et objectivité.

C'est dans sa capacité "herméneutique" à interpréter les formes de l'objectivité du monde que les mathématiques se nouent à l'objectivité. L'ontologie platonicienne associée à cette "herméneutique" (au sens que nous donnons avec J.-M. Salanskis à ce terme) est une quasi-ontologie. Elle sert à relier les mathématiques avec une doctrine transcendantale (non ontologique) de l'objectivité physique. C'est en ce sens qu'il s'agit d'un *platonisme transcendantal*.

3.2 Bibliographie.

AST, 1971. Axiomatic Set Theory, (D. Scott ed.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol XIII, Providence, AMS.

Becker, H., 1992. "Descriptive Set Theoretic Phenomena in Analysis and Topology", STC [1992], 1-25.

BENACERRAF, P., PUTNAM, H. (eds.), 1964. Philosophy of Mathematics: Selected Readings, Englewood Cliffs, New-Jersey, Prentice Hall.

BRITTAN, G., 1978. Kant's Theory of Science, Princeton University Press.

BURGESS, J., 1983. "Why I am not a Nominalist", Notre Dame Journal of Formal Logic, 24, 93-105.

CHANGEUX, J.P., CONNES, A., 1989. Matière à Pensée, Paris, Editions Odile Jacob.

CHEMAA, A., 1992. "La philosophie mathématique de Georg Cantor", Thèse, Grenoble, Université Pierre Mendès France.

CHIHARA, Ch., S., 1990. Constructibility and Mathematical Existence, Oxford, Clarendon Press.

Dehornoy, P., 1989. "La détermination projective d'après Martin, Steel et Woodin", Séminaire Bourbaki 710.

ENGEL-TIERCELIN, Cl., 1993. La Pensée-signe, Nîmes, Jacqueline Chambon.

FEFERMAN, S., 1989. "Infinity in Mathematics: Is Cantor Necessary ?", Philosophical Topics, XVII, 2, 23-45.

FIELD, H., 1980. Science without Numbers, Princeton.

FIELD, H., 1982. "Realism and Anti-Realism about Mathematics", Philosophical Topics, 13, 45-69.

FRIEDMAN, H., 1986. "Necessary Uses of Abstract Set-theory in Finite Mathematics", Advances in Mathematics, 60, 92-122.

Gödel, K., 1938. "The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis", Proc. Nat. Acad. Sci., 25, 556-557.

Gödel, K., 1940. "The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory", Annals of Math. Studies, Study 3, Princeton Univ. Press, Princeton.

GÖDEL, K., 1947. "What is Cantor's Continuum Problem", American Mathematical Monthly (repris dans Benacerraf-Putnam 1964), 470-485.

GÖDEL, K., 1958. "Über eine bisher noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes", Dialectica, 12, 280-287.

Grigorieff, S., 1976. "Détermination des jeux boréliens d'après Martin", Séminaire Bourbaki 478.

HARTHONG, J., REEB, G., 1989. "Intuitionnisme 84", MNS 1989.

HEIJENOORT, J. van (ed), 1967. From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931, Cambridge, Harvard University Press.

Husserl, E., 1891. Philosophie der Arithmetik, Niemeyer, Halle, (repris dans Husserliana XII).

HUSSERL, E., 1900-1901. Logische Untersuchungen, Niemeyer, Halle, (2ème éd. Husserliana XVIII, XIX/1, XIX/2, 1913-1921), trad. Recherches Logiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1969-1974.

HUSSERL, E., 1950. Idées Directrices pour une Phénoménologie, (trad. P. Ricoeur), Paris, Gallimard, 1982.

HUSSERL, E., 1969-1974. Recherches Logiques, Paris, Presses Universitaires de France.

JACKSON, S., 1989. "AD and the very fine structure of L(R)", Bulletin of the American Mathematical Society, 21, 1, 77-81.

KANT, E, 1980-1986. Oeuvres philosophiques (F. Alquié ed.), Paris, Bibliothèque de la Pléïade, Gallimard.

KEISLER, H.J., KUNEN, K., MILLER, A., LETH, S., 1989. "Descriptive Set Theory over Hyperfinite Sets", The Journal of Symbolic Logic, 54, 4, 1167-1180.

KITCHER, Ph., 1983. The Nature of Mathematical Knowledge, New-York, Oxford University Press.

KITCHER, Ph, 1988. "Mathematical Progress", PM 1988, 518-540.

MACHUCO, A., 1993. Le concept de continuité chez Charles S. Peirce, Thèse, Paris, EHESS.

MADDY, P., 1980. "Perception and Mathematical Intuition", The Philosophical Review, 89, 163-196.

MADDY, P., 1988. "Believing the Axioms I, II", The Journal of Symbolic Logic, 53, 2, 481-511; 53, 3, 736-764.

MADDY, P., 1989. "The Roots of Contemporary Platonism", The Journal of Symbolic Logic, 54, 4, 1121-1144.

MARTIN, D., 1975. "Borel Determinacy", Annals of Mathematics, 102, 363-371.

MARTIN, D., STEEL, J., 1989. "A Proof of Projective Determinacy", Journal of the American Mathematical Society, 2, 1, 71-125.

MNS, 1989. La Mathématique non-standard (Barreau, H., Harthong, J., eds.), Paris, Editions du CNRS.

Moschovakis, Y., 1980. Descriptive Set Theory , North-Holland.

PARIS, J. B., 1972. "ZF O Σ_4^0 Determinateness", The Journal of Symbolic Logic, 37, 4, 661-667.

PETITOT, J., 1979. "Infinitesimale", Enciclopedia Einaudi, VII, 443-521, Einaudi, Turin.

PETITOT, J., 1985. Morphogenèse du Sens. Pour un Schématisme de la Structure, Presses Universitaires de France, Paris.

PETITOT, J., 1987(a). "Refaire le "Timée". Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman", Revue d'Histoire des Sciences, XL, 1, 79-115.

PETITOT, J., 1987(b). "Mathématique et Ontologie", La scienza tra filosofia e storia in Italia nel Novecento, (F. Minazzi, L. Zanzi, eds.), 191-211, Edizione della Presidenza del Consiglio dei Ministri, Rome.

PETITOT, J., 1989(a). "Rappels sur l'Analyse non standard", La Mathématique non standard, 187-209, Editions du CNRS, Paris.

PETITOT, J., 1989(b). "Hypothèse localiste, Modèles morphodynamiques et Théories cognitives: Remarques sur une note de 1975", Semiotica, 77,1/3, 65-119.

PETITOT, J., 1989(c). "Modèles morphodynamiques pour la Grammaire cognitive et la Sémiotique modale", Recherches Sémiotiques/ Semiotic Inquiry, 9, 1-2-3, 17-51.

PETITOT, J., 1990(a). "Logique transcendantale, Synthétique a priori et Herméneutique mathématique des Objectivités", Fundamenta Scientiæ, (numéro en l'honneur de L. Geymonat), 10, 1, 57-84.

PETITOT, J., 1990(b). "Le Physique, le Morphologique, le Symbolique. Remarques sur la Vision", Revue de Synthèse, 1-2, 139-183.

PETITOT, J., 1991(a). "Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale", Hommage à Jean-Toussaint Desanti, (G. Granel ed.), 213-282, Editions TER, Mauvezin.

PETITOT, J., 1991(b). "Syntaxe topologique et Grammaire cognitive", Langages, 103.

PETITOT, J., 1991(c). La Philosophie Transcendantale et le problème de l'Objectivité, Entretiens du Centre Sèvres, (père F. Marty ed.), Paris, Editions Osiris.

PETITOT, J., 1992(a) Physique du Sens, Editions du CNRS, Paris.

PETITOT, J., 1992(b). "Actuality of Transcendental Aesthetics fot Modern Physics", 1830-1930, A Century of Geometry, (L. Boi, D. Flament, J-M. Salanskis eds.), 273-304, Berlin, Springer.

PETITOT, J., 1992(c). "Continu et Objectivité. La bimodalité objective du continu et le platonisme transcendantal", Le Labyrinthe du Continu, (J.-M. Salanskis, H. Sinaceur eds.), 239-263, Springer, Paris.

Petitot, J., 1993(a). "Phénoménologie naturalisée et Morphodynamique: la fonction cognitive du synthétique a priori", Philosophie et Sciences cognitives (J.-M. Salanskis éd.), Intellectica, 1993/2, 17, 79-126.

Petitot, J., 1993(b). "Topologie phénoménale. Sur l'actualité scientifique de la phusis phénoménologique de M. Merleau-Ponty", Merleau-Ponty. Le philosophe et son langage, (F. Heidsieck ed.), Cahiers Recherches sur la philosophie et le langage, 15, 291-322, Paris, Vrin.

Petitot, J., 1994. "Morphodynamics and Attractor Syntax. Dynamical and morphological models for constituency in visual perception and cognitive grammar", Mind as Motion, (T. van Gelder, R. Port eds.), Cambridge, MIT Press.

Petitot, J., 1995. "La sémiophysique: de la physique qualitative aux sciences cognitives", Passion des Formes. A René Thom (M. Porte, ed.), 499-545, ENS Editions, ENS de Fontenay-St Cloud.

PM, 1988. Philosophie des Mathématiques, (Ph. Kitcher ed.), Revue Internationale de Philosophie, 42, 167.

QUINE, W. V. O., 1948. "On what there is", repris dans From a Logical Point of View. Cambridge, Harvard University Press, 1961.

QUINE, W. V. O., 1960. Word and Object, Cambridge, MIT Press.

QUINE, W. V. O., 1969. "Existence and Quantification", Ontological Relativity and other Essays, 91-113, New-York.

RESNIK, M., 1985. "How Nominalist is Hartry Field's Nominalism?", Philosophical Studies, 47, 163-181.

RESNIK, M. D., 1988. "Mathematics from the Structural Point of View", PM 1988, 400-424.

SALANSKIS, J.-M., 1991. L'Herméneutique formelle. L'Infini - Le Continu - L'Espace, Paris, Editions du CNRS.

SHANKER, S.G., 1987. Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics, State University of New York Press.

SHAPIRO, St., 1983. "Mathematics and Reality", Philosophy of Science, 50, 523-548.

SOLOVAY, R. M., 1971. "Real-Valued Measurable Cardinals", AST [1971], 397-428.

STC, 1992. Set Theory of the Continuum, (H. Judah, W. Just, H. Woodin, eds.), Berlin, Springer.

Stern, J., 1976. "Le problème des cardinaux singuliers d'après Jensen et Silver", Séminaire Bourbaki 494.

Stern, J., 1984. "Le problème de la mesure", Séminaire Bourbaki 632.

VUILLEMIN, J., 1955. Physique et Métaphysique kantiennes, Paris, Presses Universitaires de France.

WANG, H., 1987. Reflections on Kurt Gödel , Cambridge, MIT Press.

WEYL, H., 1918. Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, Leipzig, Veit.

WILLARD, D., 1984. Logic and the Objectivity of Knowledge, Ohio University Press.

WRIGHT, C., 1988. "Why Numbers can believably be: a Reply to Hartry Field", PM 1988, 425-473.

YOURGRAU, P., 1989. "Review Essay: Reflections on Kurt Gödel", Philosophy and Phenomenological Research, 1, 2, 391-408.ß