

Journée Internationale d'Études
Science et philosophie en France et en Italie entre les deux guerres
Maison des Sciences de l'Homme, Paris
11 mai 1996

<p>La dialectique de la vérité objective et de la valeur historique dans le rationalisme mathématique d'Albert Lautman</p>

Jean PETITOT
École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris

I. POSITION DU PROBLEME

Il ne s'agira pas ici d'exégèse lautmanienne. En fait je ne parlerai de Lautman qu'en conclusion. J'aimerais plutôt profiter de cette occasion pour expliquer la principale raison qui m'a conduit à accorder une importance toute particulière à la philosophie mathématique d'Albert Lautman. La raison est que cette philosophie originale est essentielle pour la résolution d'un des problèmes majeurs de l'épistémologie. Or il se trouve que ce problème est par ailleurs central dans les traditions épistémologiques italiennes. Cela justifie donc d'en parler ici. Le problème est : comment concilier la vérité objective et l'évolution historique des sciences ?

Il s'agit en fait presque d'une antinomie entre vérité et histoire.

- L'empirisme logique a réinterprété de façon formaliste et conventionnaliste les a priori des sciences objectives (et l'ensemble de la problématique associée de la constitution transcendantale) comme des méthodes permettant de traduire les faits empiriques dans des langages théoriques. Cela a conduit à réduire
 - (i) la question de la vérité des énoncés possédant une valeur objective à celle de la détermination de leur sens,
 - (ii) à réduire cette détermination elle-même à des procédures effectives de contrôle empirique (critère vérificationniste et principe d'empirisme). D'où une analogie fondatrice avec le rapport entre syntaxe et sémantique que l'on rencontre en théorie logique des modèles : les théories mathématiques y sont identifiées à une syntaxe logique au sens de Carnap et le donné empirique à une sémantique dénotative.
- La mise à nu des limites d'un tel positivisme (en particulier l'impossibilité de réduire la vérité scientifique à une vérité-correspondance, l'inexistence d'un langage neutre d'observation, la globalité du rapport d'un ensemble théorique à un ensemble expérimental dans les procédures de confirmation-réfutation, etc.) a conduit à une épistémologie post-positiviste sceptique et historiciste déniait toute valeur objective

bien fondée aux théories scientifiques et concluant à la relativité de principe des constructions théoriques (et cela malgré leur opérativité).

- Cette antinomie épistémologique oppose donc un dogmatisme de la vérité objective à un scepticisme nourri de la relativité de la valeur historique. Comment la dépasser ?

En insistant sur la nécessité de comprendre l'historicité *intrinsèque* de l'objectivité scientifique comme un processus évolutif, les traditions épistémologiques italiennes, d'Antonio Banfi à Ludovico Geymonat, ont anticipé de façon magistrale sur de nombreux courants post-positivistes de l'épistémologie : les paradigmes de Kuhn, les *themata* de Holton, l'épistémologie évolutionniste de Toulmin. Sur ce point leur apport est tout à fait remarquable.

II. QUELQUES POINTS DES TRADITIONS EPISTEMOLOGIQUES ITALIENNES

1. Ludovico Geymonat

Par exemple Ludovico Geymonat a repris (et a même introduit avant-guerre en Italie) la doctrine logico-linguistique du néo-positivisme. Mais il en a rapidement dénoncé la négligence à l'égard de l'histoire et sa méconnaissance d'une

“storicità della scienza in quanto scienza, non della scienza in quanto filosofia”,

Pour lui le problème théorique fondamental était :

“di riuscire a inserire, all'interno della concezione neo-positivistica, l'istanza della storia”.¹

L'appel à la dimension historique permet de dépasser les limites d'un conventionnalisme naïf en reconnaissant le caractère *évolutionniste* (et donc sélectif au sens des théories de l'évolution) du savoir scientifique au cours de son histoire. Mais les thèses évolutionnistes ne sont pourtant pas suffisantes car il faut aussi comprendre *les conditions de possibilité* d'un évolutionnisme de la vérité objective et de la valeur historique. Et c'est le plus difficile.

Mais avant que d'y venir, j'aimerais dire un mot d'Antonio Banfi et de Giulio Preti.

2. Antonio Banfi²

Il me semble que le moyen le plus efficace pour penser l'actualité du grand ouvrage d'Antonio Banfi que sont les *Principi di una teoria della ragione* est de dire qu'ils tentent de généraliser, comme a également cherché à le faire Cassirer, la doctrine

¹ Geymonat [1956], p. 125. Cf. aussi Geymonat [1985b], p. 149.

² Pour des précisions, cf. l'étude Petitot [1987c].

transcendantale (kantienne) de la constitution de l'objectivité au-delà de l'objectivité physique en tenant compte aussi des “objectivités” culturelles et symboliques. On pourrait formuler ainsi leur question centrale : comment généraliser la Logique transcendantale en la pluralisant et en l'historicisant ?

Si l'on approfondit cette question, on en arrive à la nécessité de penser une dialectique à la fois transcendantale et historique qui serait *immanente* aux a priori eidético-constitutifs des objectivités et aux formalismes mathématiques qui les spécifient. Cela est évidemment fort difficile car une Dialectique historique et une Logique transcendantale s'opposent apparemment d'une façon telle que, si l'on veut les unifier — de façon par exemple hégélienne —, ce ne peut être, semble-t-il, qu'en sacrifiant toute possibilité d'édifier une théorie de la connaissance digne de ce nom, c'est-à-dire compatible aux contenus et aux développements des sciences effectives.

Peut-on, par conséquent, *historiciser* Kant sans pour autant l'hégélianiser ? Peut-on historiciser la Logique transcendantale et la façon dont les mathématiques s'impliquent constitutivement dans l'expérience objective sans pour autant effacer la ligne de démarcation entre Analytique et Dialectique ?

Je rappelle brièvement quelques points de la doctrine de Banfi.³

Le point de départ des *Principi* est la thèse d'une *autonomie* et d'une *universalité objective* de la théoricité. “Autonomie” est pris ici au sens d'un arrachement au sens commun perceptif, linguistique et pragmatique : un peu comme le réalisme transplanté de Bachelard. Dans le mouvement que Banfi appelle la “résolution” transcendantale de l'empirique, la théoricité s'autonomise relativement à la multiplicité des contenus empiriques et des méthodes scientifiques particulières.

On pourrait interpréter cette autonomie rationnelle comme celle de la conventionalité de la syntaxe logique des langages scientifiques. Mais chez Banfi elle est liée à l'action d'*Idées* dialectiques *problématiques*. Il y a pour Banfi une *négativité* du transcendantal qui opère dans l'histoire des sciences. C'est en tant que problématique ouverte que la théoricité acquiert la forme d'un développement historique.

Quant à l'universalité (positivité), elle correspond au moment — spécifiquement *scientifique* — d'une résolution du divers empirique conformément aux essences objective des ontologies régionales. Il s'agit de généraliser la thèse criticiste selon laquelle l'objectivité repose sur une *légalisation catégoriale des phénomènes*. Les phénomènes ne sont insérables dans des dispositifs expérimentaux et théoriques que s'ils sont au préalable *qualifiés comme objets*. En plus de l'ordre *descriptif*, toute connaissance présuppose donc un ordre *prescriptif* normatif (juridique) de légalité objective. Il existe par conséquent une différence entre phénomène et objet d'expérience. Contrairement aux phénomènes, l'objet n'existe que qualifié

³ Pour des précisions voir Minazzi-Petitot [1993].

conformément à des *normes*, à des *règles* eidético-constitutives définissant ce que Husserl appelait une essence objective régionale. Le concept normatif d'objet est présupposé à titre de condition de possibilité par toute activité scientifique. Il *anticipe* et *prédétermine* prescriptivement ce qui appartient en général et typiquement aux phénomènes objectivés de la région considérée.

Banfi critique tout particulièrement la conception représentationnelle de la connaissance comme adéquation de la pensée à une réalité externe substantielle, indépendante et transcendante. Il insiste avec force sur le fait que la connaissance rationnelle est une “résolution” des contenus empiriques. Cette résolution est “fonctionnelle” au sens du Cassirer de *Substance et Fonction*. Elle repose en dernière instance sur la mathématisation des concepts scientifiques. Si l'on veut être cohérent, on doit donc pouvoir arriver à penser comment cette mathématisation *elle-même* peut être animée par des Idées dialectiques problématiques.

On voit ainsi coexister chez Banfi d'une part un système d'ontologies régionales (au sens de Husserl : généralisation de l'Analytique transcendantale, i.e. de la partie positive de la problématique de la constitution) *et* un système d'Idées problématiques. Ils expriment respectivement la positivité et la négativité de la connaissance. Leur solidarité est celle des deux moments de la rationalité que sont respectivement l'universalité et l'autonomie.

Le système rationnel ainsi défini *à la fois* analytiquement et dialectiquement possède un statut interprétatif. Les Idées problématiques fournissent des principes de signification pour la résolution de l'expérience. Elles fonctionnent comme une *herméneutique* mathématique des objectivités transcendantalelement constituées. C'est une couche supplémentaire du sens.

Bref, on pourrait dire en termes kantien que Banfi pense l'ouverture historique de la vérité objective en régulant l'Analytique transcendantale par des Idées dialectiques et le jugement déterminant par le jugement réfléchissant, autrement dit le constitutif par un certain type, très particulier, d'herméneutique.

Si l'on admet ce point de vue, on se trouve confronté à une difficulté incontournable. Si, d'une part, les mathématiques sont bien le principal agent de la résolution fonctionnelle (transpositive) du donné empirique et si, d'autre part, le rationnel unifie bien un système d'ontologies régionales et un système d'Idées problématiques, alors quelle conception peut-on et doit-on se faire des rapports *entre mathématiques et dialectique*? Que devient la pensée des mathématiques lorsque l'on ouvre la légalisation transcendantale de l'expérience à un devenir historique des catégorialités objectives ?

Pour ce faire on doit résoudre un double problème.

(i) Articuler les mathématiques spécifiques servant à modéliser les phénomènes d'une certaine région avec la structure catégoriale normant l'essence objective de cette

région. Ce problème est celui d'une *schématisation* puis d'une *construction mathématique* des catégories.

(ii) Transférer à cette schématisation-construction mathématique la doctrine banfiennne en développant l'hypothèse d'une dialectique d'Idées problématiques qui serait immanente au devenir historique autonome des théories mathématiques elles-mêmes.

Or c'est bien une telle hypothèse qui a été développée par Albert Lautman. Je pense que Lautman a en grande partie résolu pour les mathématiques le problème de la dialectique de la vérité objective et de la valeur historique.⁴ Sa réflexion est donc exemplaire et cruciale.

3. Giulio Preti

On peut considérer que Giulio Preti reprend le problème critico-phénoménologique de Banfi. Mais il essaye de l'articuler aux travaux de l'empirisme et du positivisme logiques. En ce sens, sa philosophie peut, selon la belle formule de Mario Dal Pra, être considérée comme un empirisme critique.

Pour Preti les contenus transcendants sont de nature logique. Ce sont des règles formelles permettant, en la transposant et en la systématisant, de conférer une intelligibilité à l'expérience en opérant la *traduction* entre, d'un côté, des protocoles empiriques exprimés dans un langage d'observation et, d'un autre côté, des langages théoriques formalisés. À ce titre, les catégories spécifiques des ontologies régionales sont des a priori formels, conventionnels et historiques possédant la fonction d'*axiomes empiriques*. Ce sont des cadres pour l'interprétation théorique des phénomènes (et non pas des hypothèses sur la réalité). Sur ce point, Preti rejoint donc le transcendantalisme grammatical du Cercle de Vienne.

La relation entre les théories scientifiques formalisées et les langages de choses dénotatifs est celle d'une *traduction* — d'une transposition au sens de Banfi — opérée à travers les catégories régionales. Il y s'agit de *l'interprétation mathématique de la légalisation catégoriale des objets*.

Dans son article de 1950 "Due orientamenti nell'epistemologia", Preti explique que l'empirisme critique tel qu'il le conçoit est à même de tenir compte de cette traduction scientifique progressive des langages de choses dans des théories mathématiques. C'est même ainsi que, selon lui, se réintroduit le thème transcendantal que la sémantique néo-positiviste cherche à éliminer. Mais, bien que non logiciste, sa conception du transcendantal demeure malgré tout formaliste. Il existe selon lui des

⁴ Sur l'importance cruciale de la pensée d'A. Lautman pour la compréhension d'une dialectique entre la vérité objective et la valeur historique des théories, cf. Petitot [1987b].

énoncés formels sans contenu empirique (et donc ni confirmables, ni réfutables) qui possèdent une fonction systématique et

“costituiscono l'insieme di regole secondo cui si devono organizzare le definizioni per corrispondenza che permette la continua traduzione delle parti formali del discorso nei protocolli e nel linguaggio di cose (e viceversa)” (p. 65).

Dans cette perspective, les a priori kantien (catégories et principes) opèrent comme des *principes de choix* d'un système conventionnel de règles de traduction.

C'est peut-être dans l'idée que l'on peut se faire de l'*unification* des sciences que Preti manifeste le plus d'originalité par rapport au Cercle de Vienne.

Toujours dans l'article de 1950, il aborde ce problème “central” et “vital”. Eu égard à leur technicité, les sciences spécialisées sont non seulement diversifiées mais fragmentaires et morcelées. Pourtant l'*unité systématique* est l'Idée régulatrice par excellence des sciences.

“Ma come può dare unità ciò che non ha in sé tale unità ?” (p. 55).

Quels peuvent donc être le principe et le moteur du projet d'unification ? L'unité ne peut être, selon, Preti, qu'épistémologique :

“l'unità della scienza non può essere data che da un'epistemologia unitaria” (p. 59).

Elle est “l'unità del linguaggio scientifico” (p. 61). Mais Preti ne va pas pour autant penser l'unité du langage comme réduction générale et uniforme des langages scientifiques à un langage de choses universel. Pour lui, l'unité est au contraire celle de la traduction progressive et indéfinie du langage de choses dans *des* langages scientifiques formalisés, celle de la transposition *fonctionnelle* et de la résolution *rationnelle* des moments phénoménologiques de l'expérience.

Ici réapparaît la question de l'*historicité* des objectivités scientifiques. Comment développer

“la dinamica storica della scienza nella sua unità formale” (p. 72).

III. CONSTRUCTION MATHÉMATIQUE ET IDEES PROBLÉMATIQUES

1. Le schématisme généralisé comme construction médiate

L'ayant fait ailleurs, je ne reviendrai pas ici sur la conception kantienne du schématisme et sur les rapports entre schématisme et construction.⁵ Je me borne à

⁵ Cf. Petitot [1991b].

rappeler qu'étant donnée la conception très étroite que Kant se faisait des mathématiques, il n'admettait comme constructibles que les concepts "contenant déjà en soi une intuition pure", c'est-à-dire les concepts "de l'espace et du temps". Il y a là une insuffisance fondamentale parfaitement mise en lumière par Jean Cavailles dans son ouvrage posthume *Sur la Logique et la Théorie de la Science*. En effet, le schématisme devrait être chez Kant mathématique, donc constructif, et prendre la forme générale d'un organon mathématique. Il devrait être purement mathématique et procéder par construction de concepts.

"Mais alors les concepts physiques [devraient] se représenter intégralement dans la mathématique, ce que Kant n'admet pas".⁶

Dans l'idéal scientifique de Kant

"la notion de démonstration (...) reste indécise entre le syllogisme et la construction mathématique".⁷

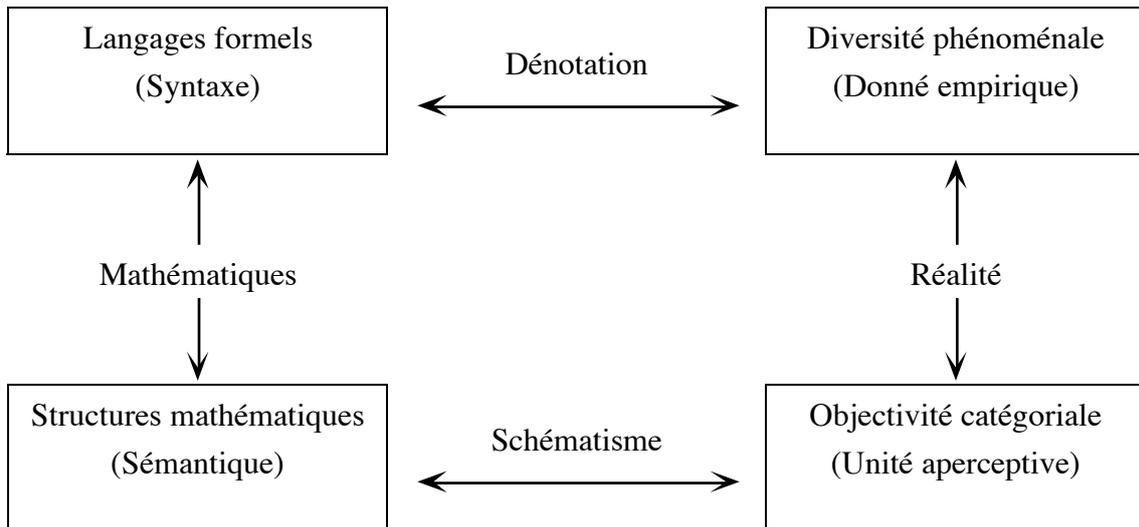
C'est pourquoi le rationalisme kantien est ambivalent et que, Cavailles y insiste, suivant que l'on met l'accent sur la notion de système démonstratif ou sur celui d'organon mathématique, on obtient deux types différents de conception de l'épistémologie : la conception logiciste-formaliste et la conception mathématico-transcendantale.

C'est cette seconde conception que pour ma part je privilégie.

Je généralise très librement les concepts kantien de schématisme et de construction de la façon suivante. L'idée initiale est que, étant donnée la différence entre phénomènes et objet (au sens prescriptif des règles de légalisation), il n'est pas vrai que le monde phénoménal soit en position de "sémantique" pour la "syntaxe" logique des énoncés scientifiques. Le monde n'est pas une dénotation, une référence pour les formalismes théoriques. On ne peut donc pas établir, comme on le fait trop souvent, un parallèle entre le rapport mathématique / réalité et le rapport syntaxe / sémantique que l'on rencontre en théorie logique des modèles. En effet, alors que celui-ci est un jeu à deux, celui-là est un jeu à quatre entre, côté mathématiques, le rapport syntaxe / sémantique et, côté réalité, le rapport diversité phénoménale / objectivité catégoriale. J'appelle alors *schématisme* la relation *interprétative* reliant des structures mathématiques spécifiques aux catégories déterminantes de l'essence objective d'une ontologie régionale.

⁶ Cavailles [1947].

⁷ Ibid.



Conçu de cette manière, le schématisme a pour fonction de concilier deux exigences : d’une part celle de la *conformité* des phénomènes d’une région ontologique à l’essence objective de cette dernière et d’autre part celle de la *générativité* des formalismes permettant aux théories de rejoindre la diversité phénoménale via la modélisation.

Le contenu objectif des phénomènes d’une ontologie régionale est fourni par leur subsomption sous un système de catégories. Leurs *modèles* doivent donc eux-mêmes être compatibles à ce système catégorial. C’est dire que la modélisation ne peut pas être “directe”. Elle doit se “factoriser” à travers un système catégorial. Mais, dans la mesure où les modèles doivent d’un autre côté être des modèles de la diversité empirique alors que la subsomption réduit cette diversité à l’unité synthétique aperceptive du concept, encore faut-il que les modèles puissent redéployer une diversité implicite inhérente au sémantisme des catégories régionales. Pour cela il faut la générativité. Comme seules les mathématiques offrent une méthode générative permettant de transformer des significations en une diversité d’entités (idéales), il faut donc substituer au sémantisme des catégories régionales une construction mathématique explicite et spécifique. C’est le schématisme-construction comme interprétation. Mais pour contrôler une telle interprétation, il faut une idée directrice, une métarègle. Cette “règle d’or” critique est que la donation des phénomènes est conditionnée par des formes de la donation (esthétique transcendantale), que ces formes sont mathématiquement déterminables et que c’est à partir de cette détermination qu’il faut effectuer la schématisation-construction. Avec elle la légalisation catégoriale de l’objet devient une source de modèles diversifiés des phénomènes.

2. La téléologie transcendantale des théories physiques

J’ai montré ailleurs en détail qu’il existe une structure transcendantale des théories physiques postérieures à la Mécanique rationnelle et, plus précisément, qu’il

existe une *histoire transcendantale* de ces théories. Celle-ci concerne en particulier la construction des catégories dynamiques (physiques) de substance, de causalité et d'interaction, c.a.d. leur engendrement à partir d'un *élargissement* de l'interprétation mathématique des catégories mathématiques, c'est-à-dire en définitive d'un enrichissement des principes de relativité.

Je rappelle que chez Kant les catégories mathématiques concernent les intuitions pures et donc *l'essence* comme

“premier principe interne de tout ce qui appartient à la *possibilité* d'une chose”.

Les catégories dynamiques concernent au contraire *la nature* comme

“premier principe interne de tout ce qui appartient à *l'existence* d'une chose”.

Dans la *Critique de la Raison Pure*, à la différence des catégories mathématiques qui concernent l'essence, les catégories dynamiques posent l'existence, la conditionnent tout en la laissant indéterminée. Cela implique qu'elles ne soient pas constructibles. Comme elles ne s'appliquent qu'à l'objet en général, elles ne sont que schématisables. Mais elles deviennent constructibles lorsqu'elles s'appliquent “à une détermination supplémentaire”, en l'occurrence le mouvement, “contenant en soi une intuition pure”.

J'ai étudié en particulier trois exemples particulièrement spectaculaires.

1. Le théorème de Noether et la construction de la catégorie de substance

Ce théorème fondamental montre que, sous la double condition :

- (i) de pouvoir décrire mathématiquement la relation entre Cinématique et Dynamique par l'action d'un groupe de relativité sur l'espace de configurations du système physique considéré ;
- (ii) de disposer d'une formulation *variationnelle* (lagrangienne ou hamiltonienne) de la Mécanique (i.e. des lois du mouvement),

alors il existe une *corrélation* explicite entre les *symétries* et les *grandeurs conservées*. Cela correspond à la *construction* de la catégorie de substance, déjà réduite par Kant lui-même aux lois de conservation.

Le théorème de Noether dit que si un lagrangien est invariant sous un groupe de relativité à un paramètre (i.e. de dimension 1), alors il existe une grandeur physique conservée au cours du mouvement (une intégrale première). Il relie donc

- (i) principes de relativité (inobservabilité de grandeurs cinématiques absolues),
- (ii) symétries (invariance du lagrangien) et
- (iii) lois de conservation (observabilité) de grandeurs physiques corrélatives.

C'est en quelque sorte *le* théorème transcendantal qui donne raison à Kant au-delà de tout ce qu'il pouvait espérer.

Les exemples les plus classiques corrént :

- (i) la conservation de l'énergie au groupe d'invariance des translations temporelles ;
- (ii) la conservation de l'impulsion au groupe d'invariance des translations spatiales ;
- (iii) la conservation du moment angulaire au groupe d'invariance des rotations spatiales.

J'ai exposé ailleurs ⁸ les aspects modernes de ce théorème en géométrie symplectique et en particulier le formalisme de l'application moment, c.a.d. la façon dont on peut associer à un groupe de Lie qui opère symplectiquement sur un espace de phases des intégrales premières a priori et cela de façon indépendante de tout hamiltonien (mais si un hamiltonien est invariant sous l'action du groupe alors il possède ces intégrales premières). Ces résultats renforcent considérablement le contenu *synthétique a priori* du théorème de Noether.

2. La relativité générale et la construction de la catégorie de cause et du concept de force

Le deuxième exemple est celui de la Relativité Générale (RG). On a souvent dit que la RG avait rendu impossible une lecture transcendantale de la physique moderne. Je pense toutefois que c'est exactement le contraire qui est vrai. La structure transcendantale de la RG est évidente et remarquable. Mais elle change profondément le contenu kantien des moments transcendants. Comme l'a bien vu Cassirer dans son ouvrage de 1921 *Zur Einsteinschen Relativitätstheorie*, elle les approfondit. Ce n'est que si l'on interprète ces contenus de façon *fixiste* dans le cadre d'une interprétation *cognitive innéiste* que l'on peut conclure à l'obligation d'abandonner une lecture transcendantale. En fait, transcendantalement parlant, la RG correspond à *la construction de la catégorie de cause (de force)*.

Cette construction consiste à ramener la force à un principe de relativité. C'est bien ce que fait la RG. En RG, les moments transcendants que sont les Axiomes de l'intuition (avec la Cinématique correspondante) et les Anticipations de la Perception (avec la Dynamique correspondante) sont passés du niveau *global et métrique*, qui était le leur en mécanique newtonienne, au niveau *local et différentiable* sous-jacent. Le groupe de relativité de la théorie devient alors le groupe des *difféomorphismes* de l'espace-temps. Les contraintes de covariance deviennent par conséquent beaucoup plus importantes et cela permet de ramener la force, donc la catégorie de cause, à un principe d'inertie généralisé. Les a priori géométriques ne sont plus dès lors de nature métrique

⁸ Petitot [1992a].

mais de nature différentielle et concernent, par exemple, la cohomologie des formes différentielles.⁹

3. Les théories de jauge et la construction de la catégorie d'interaction

L'exemple est encore plus spectaculaire avec les théories de jauge où c'est non seulement la catégorie de force (comme dans la relativité générale) mais aussi la *catégorie d'interaction* qui se trouve ramenée à des principes de symétries élargis. Comme l'explique Yuri Manin¹⁰ :

“From a philosophical point of view, one can speak of a new wave of geometrization of physical thought which for the first time is sweeping far beyond the boundaries of general relativity”.

Rappelons qu'en théorie quantique des champs, on a une chaîne de procédures de déterminations objectives conduisant de principes constitutifs à des modèles explicites.

Les principes de relativité et de symétrie fournissent des lagrangiens L , plus précisément des densités de lagrangien $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ dépendant des champs $\varphi(x, t)$ considérés et de leurs dérivées premières $\partial_\mu \varphi$. Cela permet de définir des actions $S(\Gamma)$ sur des chemins Γ conduisant d'un état initial $\varphi_i = \varphi(x, t_1)$ à un état final $\varphi_f = \varphi(x, t_2)$:

$$S(\Gamma) = \int \mathcal{L} d^4x = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbf{R}^3} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^3x dt .$$

Les axiomes de la mécanique quantique conduisent alors de l'action $S(\Gamma)$ à la formule de Feynman (intégrale de chemin) pour l'amplitude de probabilité de transition (\hbar est la constante de Planck) :

$$\langle \varphi_f | \varphi_i \rangle = \int_{\Gamma} \exp\left(\frac{2i\pi}{\hbar} S(\Gamma)\right) d\Gamma .$$

Il s'agit d'une intégrale fonctionnelle dans l'espace fonctionnel des chemins. Elle n'est pas bien définie comme objet mathématique (c'est l'un des principaux problèmes de la théorie quantique des champs), mais elle fournit néanmoins un algorithme de calcul extraordinairement puissant.

Il est bien connu que cette formule (qui est analogue aux fonctions de partition Z de la mécanique statistique) encode une quantité énorme d'information. Il est possible d'en dériver un nombre considérable de modèles explicites, quantitatifs et prédictifs des phénomènes en utilisant des outils mathématiques appropriés comme par exemple :

- (i) les développements perturbatifs ;

⁹ Dans Petitot [1992a] j'ai analysé en détail dans cette perspective la géométrie-dynamique de John Archibald Wheeler et son débat avec Adolf Grünbaum.

¹⁰ Manin [1988].

- (ii) le théorème de Wick disant que tous les moments d'une loi de probabilité gaussienne peuvent s'exprimer en fonction de ses moments d'ordre 2 ;
- (iii) le théorème de la phase stationnaire disant qu'une intégrale oscillante $e^{i\tau\varphi(x)}$ se concentre pour $\tau \rightarrow \infty$ sur les points critiques de la phase $\varphi(x)$;
- (iv) le groupe de renormalisation.

On rencontre ici un splendide exemple d'une détermination objective conduisant de principes constitutifs à des modèles spécifiques et diversifiés : les principes constitutifs (groupes de relativité, symétries) fournissent des Lagrangiens, qui fournissent à leur tour des intégrales de Feynman, qui fournissent elles-mêmes les modèles :

A priori constitutifs \rightarrow Groupes de relativité et symétries \rightarrow Lagrangiens \rightarrow
Action \rightarrow Intégrales de chemins \rightarrow Modèles spécifiques de phénomènes. ¹¹

Dans ce contexte, les théories de jauge ont réussi à construire *a priori* les interactions en faisant dépendre les symétries *internes* des systèmes (qui sont des symétries globales apparemment non spatio-temporelles associées aux nombres quantiques des particules) de la *position* spatio-temporelle. Si on localise ainsi ces symétries internes et si l'on exige que les théories demeurent invariantes, on doit introduire des termes correctifs. On constate alors que ceux-ci redonnent exactement les termes d'interaction. Les forces et les interactions apparaissent ainsi de façon générale comme dérivables de principes de conservation *locaux*. ¹²

Depuis les travaux pionniers de Chen Ning Yang et Robert Mills (1954) sur l'invariance de jauge concernant l'isospin, dans ces théories il existe *deux classes* de champs.

1) *Les champs fermioniques de matière* qui sont interprétés comme des *sections* de fibrés sur l'espace-temps, fibrés dont le groupe structural reflète les interactions dans lesquelles les particules sont engagées. Les coordonnées des fibres sont les degrés *internes* de liberté. Le groupe structural des *symétries internes* est le groupe de symétrie des fibres.

2) *Les champs bosoniques de jauge* qui sont des champs d'interactions véhiculées par des particules virtuelles d'échange (des bosons) et sont interprétés comme des connexions sur ces fibrés. Les particules véhiculant les interactions sont par conséquent les quanta des champs de connexions sur les fibrés de matière.

Les *dérivations covariantes* permettent d'exprimer géométriquement les interactions. Le lagrangien de Yang-Mills est alors la norme de la courbure des

¹¹ Cf. par exemple Itzykson, Zuber [1985] et Le Bellac [1988].

¹² Cf. par exemple Quigg [1983] et Kaku [1988].

connexions. Il est invariant sous l'action du groupe de jauge et l'espace-temps y contribue comme champ de jauge à travers la courbure scalaire de sa connexion.

Le cas le plus simple (découvert par Hermann Weyl) est celui du "couplage minimal" entre un électron et un champ électromagnétique F . Le potentiel vecteur A s'y interprète comme une *connexion* définie sur un fibré vectoriel \mathcal{F} au-dessus de l'espace temps \mathcal{E} et le champ F s'identifie à la *courbure* de cette connexion. Le groupe de relativité est maintenant encore plus large que le groupe $Diff(\mathcal{E})$. C'est le groupe — dit groupe de jauge — des automorphismes du fibré \mathcal{F} de base \mathcal{E} . Cet élargissement permet de ramener la catégorie dynamique d'interaction à un principe de relativité, et donc de la construire. Dans le cas non abélien, le groupe des symétries internes G ($G = SU(2), SU(3), \text{etc.}$), n'est plus commutatif. Cela introduit des difficultés profondes dans la théorie, mais les idées principales subsistent.

Le cas est encore plus spectaculaire avec la théorie des supercordes.

Ce sont ces stratégies remarquables de détermination objective des phénomènes qui font dire aux physiciens, par exemple à Michio Kaku ¹³

“the secret of this mystery [théories unifiées] most likely lies in the power of *gauge symmetry*”.

“Nature *demand*s symmetry”.

“Symmetry, instead of being a purely aesthetic feature of a particular model, now becomes its most important feature” (p. 8).

Bref, au moyen des intégrales de Feynman et des théories de jauge, il a été possible de construire une véritable ontogenèse de la réalité physique. Une telle construction convertit le synthétique a priori en règles d'engendrement de modèles explicites. Les contraintes mathématiques sont si fortes (renormalisabilité, élimination des anomalies, mécanisme de Higgs et ruptures spontanées de symétries conférant une masse aux bosons de jauge, etc.), qu'il est possible d'inférer le choix du groupe de symétrie de la théorie à partir d'un tout petit nombre de données empiriques significatives.

4. *Interprétation transcendantale du conventionalisme géométrique de Poincaré*

Cette possibilité de construction (au sens fort) des catégories dynamiques en physique théorique a de nombreuses conséquences épistémologiques. J'en signalerai une, concernant l'interprétation transcendantale du conventionalisme géométrique de

¹³ Kaku [1988].

Poincaré (cf. les chapitres IV et V de *La Science et l'Hypothèse* : “L'espace et la géométrie”, “L'expérience et la géométrie”).

Les thèses sont:

1. La géométrie est une convention, i.e. un *a priori* (grammatical si l'on veut) de l'expérience. Elle fixe un langage de description et ne possède pas de vérité expérimentale.
2. L'*a priori* de la géométrie se ramène essentiellement à l'*a priori* des groupes : groupes d'invariance, groupes de relativité, groupes de symétrie des théories physiques.
3. L'*a priori* n'étant pas inné et ne pouvant pas être décidé par l'expérience, il doit être *choisi*.
4. Le critère du choix est pragmatique : c'est celui de la commodité.

Mais nous avons vu que, en ce qui concerne l'évolution de la physique mathématique, on peut observer, à travers le mouvement toujours plus accentué et profond de *géométrisation* de la physique, une évolution qui *motive* le choix des conventions géométriques et qui ramène les contenus physiques empiriques à l'*a priori* mathématique des groupes de symétrie. On peut donc aller plus loin dans l'interprétation du conventionalisme géométrique que ne l'a fait Poincaré en adoptant un point de vue pragmatique de “commodité”. Il existe un télos de la géométrisation en physique : transformer des principes de symétrie en principes dynamiques.

Paraphrasant des affirmations de Jean-Marie Souriau à propos de la quantification géométrique, on peut dire que

“philosophiquement [la géométrisation] c'est ramener la physique à des symétries géométriques pour faire de la physique *a priori*” (c'est-à-dire “rationnelle”).

Autrement dit, comme le dit encore Souriau,

“il n'y a *rien de plus* dans les théories physiques que les groupes de symétrie *si ce n'est la construction mathématique* qui permet précisément de montrer qu'il n'y a rien de plus”.

Cela est une parfaite définition de la réduction à l'*a priori* : il n'y a rien de plus si ce n'est les mathématiques permettant de montrer qu'il n'y a rien de plus.

S'il y a des structures supplémentaires c'est qu'il y a des symétries supplémentaires et que l'on n'a pas pris un groupe de symétrie suffisamment grand. Ce principe est devenu un *principe de découverte* majeur dans les théories physiques actuelles.

Ce rôle déterminant des symétries en physique à travers les mathématiques confère à l'objectivité physique un statut très particulier, qui l'oppose à toute ontologie. L'objectivité physique est transcendantale au sens où ce qui est accessible à la théorie,

son contenu positif, y est défini *négativement*, c'est-à-dire par ce qui lui est inaccessible (à cause des symétries). Les symétries imposent une auto-limitation de ce à quoi la théorie peut accéder et dire qu'elles sont constitutives c'est dire que ce que l'on peut connaître est contraint de façon déterminante par ce que l'on ne peut pas connaître. Il s'agit là du principe de base. On peut le qualifier de *principe galoisien*. Dire philosophiquement que l'objectivité physique transcendantale c'est dire techniquement qu'elle est galoisienne.

Cette nature galoisienne a été excellemment soulignée par Daniel Bennequin, en particulier dans son long article en hommage à René Thom: "Questions de physique galoisienne"¹⁴. C'est elle qui, en dernière instance, exige une reprise de la problématique transcendantale.

Nous voyons comment peut s'effectuer, via la schématisation-construction, l'interprétation mathématique de la légalisation catégoriale de l'expérience. Le problème de la dialectique de la vérité objective et de la valeur historique des sciences dans leur unité formelle se trouve donc déplacé du côté des mathématiques et de leur unité. C'est là que la philosophie d'Albert Lautman devient inappréciable.

2. La dialectique mathématique d'Albert Lautman¹⁵

(a) La thèse fondamentale de Lautman est qu'une intuition intellectuelle opère dans les mathématiques pures et que celles-ci réalisent dans le *devenir unitaire* de leurs théories une véritable *Dialectique historique*.

(b) Cette dialectique immanente n'existe que mathématiquement réalisée. Elle est constituée d'*Idées problématiques* dont la compréhension

"se prolonge nécessairement en genèse de théories mathématiques effectives".¹⁶

Ce point est essentiel. Comme toutes les Idées dialectiques, les Idées lautmaniennes sont constituées de couples de contraires, le problème corrélatif étant celui des *liaisons* à établir entre ces notions opposées. Or

"la détermination de ces liaisons ne se fait qu'au sein des domaines où la dialectique s'incarne".

C'est ce jeu d'expression entre compréhension et genèse historique effective que Lautman a profondément étudié dans de nombreux exemples très techniques (allant de la topologie algébrique à la théorie du corps de classe en passant par la théorie des

¹⁴ Bennequin [1994].

¹⁵ Cf. Petitot [1987b].

¹⁶ Lautman [1937-1939], p.203 (je souligne).

groupes, la géométrie différentielle, ou la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles hyperboliques). C'est ce qu'il appelle

“la venue des notions relatives au concret au sein d'une analyse de l'Idée”¹⁷

ou, plus concisément,

“la genèse du Réel à partir de l'Idée”.

(c) L'interprétation lautmanienne est *transcendantale* :

“cet engagement de l'abstrait dans la genèse du concret, c'est dans une interprétation ‘transcendantale’ (...) qu'on peut le mieux en rendre compte”.¹⁸

Mais cela ne signifie pas pour autant qu'elle s'identifie à une Dialectique transcendantale au sens kantien. Au contraire. Elle est bien une “antithétique fondamentale”, mais elle reste au service d'une extension de l'Esthétique et de l'Analytique transcendantales. Lautman est parfaitement clair sur ce point. Partant de la différence ontologique entre être et étant (à savoir de la thèse que l'existant qui se manifeste ne se révèle que conformément à une essence), et l'homologant à la différence entre théorie et expérience, il ajoute :

“le processus de liaison de la théorie et de l'expérience symbolise la liaison des Idées et des théories mathématiques”.¹⁹

Or comme pour Lautman les concepts théoriques des théories objectives ont une signification mathématique (car user d'un concept théorique c'est parler un certain langage mathématique), on voit que dans cette analogie, les mathématiques interviennent en position de terme moyen et relie la Dialectique à l'expérience phénoménale.

(d) Autrement dit, les mathématiques sont chez Lautman non seulement l'outil de l'interprétation des concepts théoriques et de la modélisation des phénomènes, mais également le principe d'une *herméneutique de l'objectivité* dans la mesure où elles-mêmes, qui sont par définition le lieu de la vérité, sont aussi le lieu d'une dialectique historique. C'est ainsi que chez lui, se trouve résolu le problème central de la dialectique de la vérité objective et de la valeur historique, de l'unité du sens et de l'être, dans une doctrine transcendantale où l'être s'identifie à la construction de l'objectivité.

¹⁷ Ibid, p.205.

¹⁸ Ibid, p.20.

¹⁹ Ibid, p.146 (je souligne).

On peut donc affirmer que par leur *double* fonction qui est :

(i) de transformer le contenu sémantique des concepts théoriques en source de modèles pour les phénomènes (schématisation-construction),

(ii) de réaliser une Dialectique du Concept,

les mathématiques engendrent — dans leur devenir théorique autonome (sur lequel Lautman, comme Cavailles, a beaucoup insisté) — une *histoire* des schématismes-constructions pour une *pluralité* d'ontologies régionales. Elles transforment progressivement une Dialectique idéale en une *histoire* concrète et plurielle d'Analytiques transcendantales. Dans leur rapport à la réalité, elles historicisent l'opération constitutive kantienne en une Critique généralisée. Elles réalisent ce que Lautman appelait lyriquement:

“le germe increé qui contient en lui à la fois les éléments d'une déduction logique et d'une genèse ontologique du devenir sensible”
(p.255).

IV. CONCLUSION

La philosophie d'Albert Lautman permet de convertir l'histoire effective des théories mathématiques en une histoire transcendantale des a priori objectifs. Sa thèse est qu'il existe une dialectique historique des Idées problématiques. Cela n'est pas de peu d'importance pour la conception que l'on peut se faire de l'historicisme scientifique.

Je crois que l'on peut reprendre mot à mot la tâche que Lautman attribuait à la philosophie des mathématiques et à la philosophie des sciences en général.

“Il y a à édifier la théorie des Idées, et ceci exige trois sortes de recherches. Celles qui ressortissent à ce que Husserl appelle l'eidétique descriptive, c'est-à-dire, ici, la description de ces structures idéales, incarnées dans les Mathématiques et dont la richesse est inépuisable. (...) C'est la seconde des tâches (...) d'établir une hiérarchie des Idées et une théorie de la genèse des Idées les unes à partir des autres, comme l'avait envisagé Platon (...). Il reste enfin, et c'est la troisième des tâches annoncées, à refaire le Timée, c'est-à-dire à montrer, au sein des idées elles-mêmes, les raisons de leurs applications à l'univers sensible”.

Ce programme de recherche à été formulé le 4 février 1939 lors d'un débat historique entre Cavailles et Lautmann à la Société Française de Philosophie. Il reste d'avenir.

BIBLIOGRAPHIE

- ALLISON, H.E., 1983. *Kant's Transcendental Idealism. An Interpretation and Defense*, Yale University Press, New-Haven.
- BANFI, Antonio, 1926. *Principi di una teoria della ragione*, Paravia, Turin.
- BENNEQUIN, D., 1994. "Questions de physique galoisienne", *Passion des Formes*, à René Thom (M. Porte ed.), 311-410, E.N.S. Éditions Fontenay-Saint Cloud.
- BITBOL, M., 1996. *Mécanique quantique. Une introduction philosophique*, Flammarion, Paris.
- BOI, L., 1995. *Le problème mathématique de l'espace*, Springer, Berlin.
- BRITTAN, G., 1978. *Kant's Theory of Science*, Princeton University Press.
- CASSIRER, E., 1918. *Kants Leben und Lehre, Kant's Life and Thought* (trad. J. Haden), Yale University Press, 1981.
- CAVAILLES, J., 1947. *Sur la Logique et la Théorie de la Science*, (oeuvre posthume), Presses Universitaires de France, Paris.
- CAVAILLES, J., LAUTMAN, A., 1939. "Discussion sur la pensée mathématique", *Société Française de Philosophie*, volume 40, séance du 4 février 1939. Publié en 1945.
- COHEN-TANNOUDJI, G., SPIRO, M., 1986. *La Matière-Espace-Temps*, Fayard, Paris.
- d'ESPAGNAT, B., 1994. *Le réel voilé*, Fayard, Paris.
- DESANTI, J.T., 1968. *Les Idéalités mathématiques*, Le Seuil, Paris.
- GEYMONAT Ludovico, 1956. *L'esigenza di una storia integrale della ragione*, in AA. VV., *Verità e storia. Un dibattito sul metodo della storia della filosofia*, Arethusa, Asti, 107-129, republié in Geymonat [1985b], 133-153.
- GEYMONAT Ludovico, 1985a. *Lineamenti di filosofia della scienza*, Mondadori, Milan.
- GEYMONAT Ludovico, 1985b. *Scienza e storia*, (Fabio Minazzi ed.), Bertani Editore, Vérone.
- ITZYKSON, C., ZUBER, J.B., 1985. *Quantum Field Theory*, Mc Graw-Hill, Singapour.
- KAK U, M., 1988. *Introduction to Superstrings*, Springer, New York.
- KANT, I., 1781-1787. *Kritik der reinen Vernunft*, Kants gesammelte Schriften, Band III, Preussische Akademie der Wissenschaften, Georg Reimer, Berlin, 1911.
- KANT, I., 1786. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Kants gesammelte Schriften, Band IV, Preussische Akademie der Wissenschaften, Georg Reimer, Berlin, 1911.
- LAUTMAN, A., 1937-1939. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, (réédition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946), Bourgois, Paris, 1977.
- LE BELLAC, M., 1988. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*, InterÉditions - C.N.R.S., Paris.

- MANIN, Y., 1988. *Gau ge Field Theory and Complex Geometry*, Springer, Berlin, New York.
- MINAZZI, F., PETITOT, J., 1993. “La connaissance objective comme valeur historique : le néo-illuminisme italien”, *Philosophies en Italie (I)*, *Archives de Philosophie*, 56, 4, 621-660.
- MISNER, C.W., THORNE, K.S., WHEELER, J.A., 1973. *Gravitation*, Freeman, San Francisco.
- PETITOT Jean, 1987a. “Mathématique et Ontologie”, *La scienza tra filosofia e storia in Italia nel Novecento*, (F. Minazzi, L. Zanzi, eds.), 191-211, Edizione della Presidenza del Consiglio dei Ministri, Rome.
- PETITOT, J., 1987b. “Refaire le “Timée”. Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman”, *Revue d'Histoire des Sciences*, XL, 1, 79-115.
- PETITOT, J., 1987c. “Attualità di una Teoria della Ragione”, *Ragione : Scienza e Morale*, (colloque A. Banfi), Nuova civiltà delle machine, V, 3/4, 39-48.
- PETITOT, J., 1990a. “Logique transcendantale, Synthétique a priori et Herméneutique mathématique des Objectivités”, *Fundamenta Scientiæ*, (numéro en l'honneur de L. Geymonat), 10, 1, 57-84.
- PETITOT, J., 1990b. “Logique transcendantale et Herméneutique mathématique : le problème de l'unité formelle et de la dynamique historique des objectivités scientifiques”, *Il pensiero di Giulio Preti nella Cultura filosofica del novecento*, (F. Minazzi ed.), 155- 172, Franco Angeli, Milan.
- PETITOT, J., 1991a. “Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale”, *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, (G. Granel ed.), 213-282, Éditions TER, Mauvezin.
- PETITOT, J., 1991b. *La Philosophie transcendantale et le problème de l'Objectivité*, Entretiens du Centre Sèvres, (F. Marty ed.), Éditions Osiris, Paris.
- PETITOT, J., 1992a. “Actuality of Transcendental Aesthetics for Modern Physics”, *1830-1930 : A Century of Geometry*, (L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis eds), Springer, Berlin, New-York.
- PETITOT, J., 1992b. “Continu et Objectivité. La bimodalité objective du continu et le platonisme transcendantal”, *Le Labyrinthe du Continu*, (J.-M. Salanskis, H. Sinaceur eds.), 239-263, Springer, Paris.
- PETITOT, J., 1994. “Esthétique transcendantale et physique mathématique”, *Neukantianismus. Perspektiven und Probleme* (E.W. Orth, H. Holzhey Hrsg.), 187-213, Königshausen & Neumann, Würzburg.
- PETITOT, J., 1995. “Pour un platonisme transcendantal”, *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles*, (M. Panza, J-M. Salanskis eds.), 147-178, Masson, Paris.
- POINCARÉ, H., 1902. *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris.

- PRETI Giulio, 1976. *Saggi filosofici*, (2 vol.), La Nuova Italia, Florence.
- QUIGG, C., 1983. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Benjamin-Cummings, Reading.
- SOURIAU, J.M., 1975. *Géométrie symplectique et physique mathématique*, Coll. Internat. du C.N.R.S., 237, Paris.
- WEYL, H., 1922. *Space-Time-Matter*, Dover, New York.