Documents du CREA, Ecole Polytechnique, 2001.

Complexité neurodynamique en sciences cognitives

Jean Petitot*

Résumé Cet article présente brièvement un certain nombre d'implications de modèles physico-mathématiques dans les sciences neurocognitives. Son propos est de fournir quelques aperçus sur la façon dont est en train de s'y opérer la physicalisation du mental.

Table des Matières

Introduction 2
1 **Champs recepteurs et pro ls recepteurs des neurones visuels : mesure et formatage du signal optique** 2
2 **Geometrie de la perception et "Scale space analysis"** 5
2.1 Analyse en ondelettes et géométrie 5
2.2 "Scale space analysis" et équations de diffusion non linéaires 7
2.3 Modèles variationnels de segmentation 10
2.4 Liens entre les modèles variationnels et les modèles de diffusion 13
3 **Hypercolonnes corticales d'orientation, champ d'association, integration des contours et structures de contact** 14
3.1 La structure hypercolomnaire de l'aire V1 14
3.2 Le concept de champ d'association et l'intégration des contours 15
3.3 L'implémentation neuronale de la structure de contact 17
3.4 Structures de contact et vision 17
3.5 Contours illusoires et structure de contact 19
3.6 Cohérence et binding 19
4 **Reseaux de neurones, categorisation et apprentissage** 19
5 **Le probleme du liage et les reseaux d'oscillateurs** 22
5.1 Codage neuronal de la cohésion 22
5.2 Le modèle général 23
5.3 La synchronisation comme transition de phase 23
5.4 Le groupe de renormalisation 24
5.5 Distances ultramétriques et synchronisation par palliers 26
Conclusion 26
Bibliographie 26

*CREA (Ecole Polytechnique), 1 rue Descartes, 75005 Paris, France.
CAMS (EHESS), 54 boulevard Raspail, 75006 Paris, France.
e-mail : petitot@poly.polytechnique.fr
URL : http://www.polytechnique.fr/laboratoires/crea/JeanPetitot/home.html

Introduction

En physique, l'un des paradigmes de la relation entre le simple et le complexe reste celui de l'interprétation de la thermodynamique en termes de physique statistique. De l'interaction complexe (coopérative/compétitive) d'un grand nombre d'unités "micro" élémentaires émergent des propriétés "macro" souvent relativement simples. Un *changement de niveau* d'organisation résulte d'une telle émergence du simple macro hors du complexe micro.

Les théories contemporaines de la perception et de la cognition, en particulier en ce qui concerne la vision (qu'elle soit naturelle ou "computationnelle") et, plus généralement, les représentations mentales, fournissent tout un ensemble de nouveaux exemples de ce phénomène. Il s'agit non seulement de l'émergence de grandeurs macroscopiques comme la température, la pression ou l'aimantation, mais de *structures morphologiquement organisées* composées de constituants en relation (il suffit de penser à la façon dont une scène visuelle est décomposable en objets autonomes reliés entre eux par des relations spatio-temporelles). Il existe une différence fondamentale entre ces structures en constituants macro qui restent simples et l'étonnante complexité de leur implémentation qui se trouve distribuée sur un nombre énorme d'unités élémentaires (photorécepteurs rétiniens, pixels d'une image, etc.).

Pour comprendre ce type de structures émergentes il a fallu transférer aux sciences cognitives tout un ensemble de modèles physiques déjà connus mais en les utilisant pour modéliser des phénomènes perceptifs et cognitifs qui ne possèdent aucun équivalent physique.

Certains de ces modèles sont désormais bien connus. Par exemple, on sait depuis les travaux du grand spécialiste de la vision David Marr à la fin des années 70 que les cellules ganglionnaires de la rétine effectuent une analyse en ondelettes du signal optique au sens d'Yves Meyer et de Stéphane Mallat. De même on sait depuis le transfert des modèles magnétiques de verres de spins aux réseaux de neurones par Hopfield au début des années 80 que l'on peut modéliser en termes de physique statistique les processus cognitifs de catégorisation et d'apprentissage.

Cet exposé a pour but de donner quelques exemples de l'implication des modèles physiques dans les sciences cognitives contemporaines.

1. Champs recepteurs et pro lsrecepteurs des neurones visuels : mesure et formatage du signal optique

Commençons par la façon dont, dès les plus bas niveaux, le système visuel représente le signal optique. Une première donnée fondamentale de la neurophysiologie est celle de *champ récepteur* et de *profil récepteur* d'un neurone visuel. Ces deux concepts sont particulièrement clairs pour les cellules ganglionnaires de la rétine qui effectuent ce que l'on appelle la *transduction* (le codage neuronal) du signal, le mesurent et le transforment en une information neuronale exploitable par le système nerveux. Dès ce bas niveau, sensoriel et périphérique, il existe un filtrage et un formatage géométrique précoces.

La rétine comprend cinq couches $(3 + 2)$. Les trois couches principales sont :

(i) celles des photorécepteurs qui sont les "appareils de mesure" (au sens quantique) du signal et le "pixélisent". Ils sont de taille quelques μ et leur population est de l'ordre de 6.10^6 cônes et 120.10^6 bâtonnets (environ vingt fois plus) ;

(ii) celles des cellules bipolaires qui connectent les photorécepteurs à la troisième couche ;

(iii) celle des cellules ganglionnaires (CGs) dont les axones sont les fibres du nerf optique. Leur nombre est de l'ordre de 10^6 et le rapport de compression photorécepteurs→CGs (ce que les neurophysiologistes appellent le "degré de convergence" des photorécepteurs sur les CGs) est donc de l'ordre de 100.

Ces trois couches principales sont reliées entre elles par deux couches "horizontales" intermédiaires dites *plexiformes*, celle des cellules horizontales (couche plexiforme externe entre les photorécepteurs et les bipolaires) et celle des cellules amacrines (couche plexiforme interne entre les bipolaires et les cellules ganglionnaires).

À travers la connectivité "verticale" et "horizontale" compliquée de ces couches, chaque CG se trouve reliée à un domaine précis de la rétine (un disque approximatif de 0.1 à 2mm^2 de surface et de 0.5° à 10° d'angle visuel) que l'on appelle son *champ récepteur* (RF pour "receptive field").

De façon générale, la définition la plus simple du RF d'un neurone visuel est la zone de la rétine à laquelle il répond parce qu'il s'y trouve connecté à travers la connectivité compliquée des voies rétino-géniculo-corticales menant de la rétine au cortex à travers le relais thalamique du corps genouillé latéral. On montre qu'il existe des zones — dites ON — du RF qui répondent de façon positive (excitatrice) à des stimuli lumineux ponctuels (des Dirac, c'est un problème de réponse impulsionnelle). D'autres zones — dites OFF — répondent de façon négative (inhibitrice). D'où le concept de *profil récepteur* (RP pour "receptive profile") d'un champ récepteur. Le RP est une fonction $\varphi : D \to \mathbb{R}$ définie sur le domaine D (l'extension) du RF.

En fait, la définition du RF peut varier considérablement suivant la façon dont on définit la réponse d'un neurone visuel. Les réponses impulsionnelles par des émissions de trains de potentiels d'action (spikes) définissent un concept classique étroit de RF (dit champ minimal de décharge). Mais dans la mesure où le déclenchement d'un spike exige le franchissement d'un seuil (les neurones sont des sortes d'automates à seuil), il peut y avoir de nombreuses réponses *sous-liminaires* d'un neurone. Comme l'a montré l'équipe d'Yves Frégnac, cela permet de raffiner considérablement le concept classique de RF.[1]

Des méthodes très sophistiquées d'électrophysiologie ont permis de mesurer les *lignes de niveau* des RPs de différents neurones visuels.[2] Il s'agit là d'un véritable tour de force expérimental et les résultats en sont tout à fait remarquables. On trouve dans le système visuel des RPs qui sont en forme de *dérivées partielles de gaussiennes*, *DG* jusqu'à l'ordre (au moins) 3, et en fait jusqu'à l'ordre (au moins) 4 si l'on tient compte des évolutions temporelles des RPs (dues à la plasticité synaptique rapide et à l'adaptabilité aux stimuli). Par exemple, les RPs des CGs de la rétine sont en laplacien de gaussienne ΔG, ce qui se manifeste qualitativement par un antagonisme entre le centre et la périphérie du RF: si le centre est ON la périphérie est OFF et vice-versa. Les cellules simples d'orientation de l'aire $V1$ du cortex visuel primaire ont un RP en $\partial^3 G/\partial x^3$, etc.

De nombreux neurophysiologistes traitent ces RPs comme des patches de Gabor (des fonctions trigonométriques modulées par une gaussienne). Qualitativement c'est effectivement la même chose. Nous préférons toutefois de beaucoup la version "dérivées partielles de gaussiennes" pour la raison suivante. Soit $I(x, y)$ l'intensité du signal optique défini sur le domaine W de la rétine. Soit $\varphi(x, y)$ le RP d'un RF centré sur 0 (le centre de W) d'un certain type de neurone visuel. Si le RF est centré en (x_0, y_0), le RP est donc $\varphi(x - x_0, y - y_0)$. Un neurone visuel agissant comme un filtre linéaire sur le signal, sa réponse a donc pour valeur :

$$I_\varphi(x_0, y_0) = \int_W I(x', y')\varphi(x' - x_0, y' - y_0)dx'dy' \ .$$

C'est la mesure du signal I en (x_0, y_0) par le RF φ centré en (x_0, y_0). Si un *champ* de RFs de même profil φ recouvre W, alors la réponse est la *convolution de I par φ* :

$$I_\varphi(x, y) = (I * \varphi)(x, y) = \int_W I(x', y')\varphi(x' - x, y' - y)dx'dy' \ .$$

Comme l'a proposé Luc Florack,[3] une bonne façon de voir les choses est de traiter le signal I (qui est une "mauvaise" fonction, très bruitée) comme une *distribution*, c'est-à-dire une fonctionnelle

[1] Frégnac et al. [1996]. Cf. aussi plus bas §3.1.
[2] Cf. par exemple De Angelis et al. [1995].
[3] Florack [1993].

linéaire continue sur un espace de fonctions test (fonctions C^∞ à support compact, ou à décroissance rapide pour les distributions tempérées) et de traiter les RPs $\varphi(x, y)$ — qui sont des fonctions bien régulières et bien localisées — comme des *classes de fonctions test cablées* dans le système visuel. La mesure du signal I par une neurone de RP φ en fournit alors la représentation $\langle I|\, \varphi\rangle$ au sens des distributions.

Or l'on sait que la distribution de Dirac δ constitue l'opérateur de base pour le calcul différentiel des distributions puisque pour toute distribution T :

$$\delta * T = T,\ \delta' * T = T', \delta^{(m)} * T = T^{(m)}$$

et plus généralement:

$$D\delta * T = DT$$

pour tout opérateur différentiel D à coefficients constants.

Il suffit donc de savoir ce que devient δ d'un point de vue multi-échelle pour donner un sens au concept de *scale-space* (d'espace-échelle). Dans les théories de scale-space standard on prend *les gaussiennes* :

$$G_\sigma = G(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

le produit de convolution satisfaisant $G_\sigma * G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$. Ce noyau gaussien est la version multi-échelle *de l'identité*. Il exprime ce que devient *un point*. Mais la gaussienne étant le noyau de la chaleur, on est ainsi naturellement conduit à considérer que le point de vue multi-échelle consiste à prendre le signal I comme condition initiale d'une solution de *l'équation de la chaleur*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\Delta\right) I = 0\ (2s = \sigma^2)\ .$$

Cette *équation de diffusion* relie la "géométrie pure" à sa contrepartie "physique" (l'aspect multi-échelle). Elle exprime la contrainte opérationnelle de transformer le signal en observable géométrique. Elle remplace l'infinitésimal par du local multi-échelle, la géométrie différentielle classique correspondant au cas idéal d'une échelle = 0 (résolution infinie).

Dans la mesure où si D est un opérateur différentiel d'ordre p on a par définition

$$\langle DI|\, \varphi\rangle = (-1)^p \langle I|\, D\varphi\rangle$$

on voit que les RPs en dérivées partielles de gaussiennes ont pour principale fonction *de dériver le signal au sens des distributions* . Plus précisément, comme une gaussienne G définit une *échelle* par sa largeur, un RP en forme de DG a pour fonction d'appliquer l'opérateur différentiel D à une certaine échelle. C'est donc de la *géométrie différentielle multi-échelle* qui se trouve neuralement implémentée.

À la fin des années 70, David Marr a été le premier à comprendre la fonctionnalité d'un tel produit de l'évolution biologique. D'après la formule classique $I * DG = D(I * G)$, la convolution du signal I avec un profil DG revient à appliquer D au *lissage* $I * G$ du signal I à l'échelle définie par G. À l'échelle 0 on retrouve $DI = D(I * \delta) = I * D\delta$. Par exemple, les cellules ganglionnaires en laplacien de gaussienne ΔG calculent le laplacien du signal à l'échelle définie par G. Comme le savent depuis longtemps les neurophysiologistes qui disent que les CGs sont des "détecteurs de contrastes spatiaux", la fonction d'une telle représentation du signal est *d'extraire les discontinuités qualitatives qui y sont encodées.* Le critère est par exemple celui dit du *zero crossing* de David Marr : une discontinuité correspond à une traversée de 0 par DI encadrée par 2 pics respectivement positif et négatif très aigus.

Avec ce genre de méthodes on peut facilement construire des détecteurs de *traits géométriques* (plus compliqués que de simples discontinuités). Par exemple, un détecteur de coins détectera

de fortes courbures sur des bords. Les bords sont détectés par la norme du gradient $|\nabla G|$. La courbure d'un isophote (ligne de niveau de I) étant donnée par la divergence du gradient normalisé

$$\kappa = div\left(\frac{\nabla I}{|\nabla I|}\right) = \frac{1}{|\nabla I|}\left(\Delta I - \frac{H(\nabla I, \nabla I)}{|\nabla I|^2}\right)$$

(où H est le hessien de I), un bon détecteur de coins est l'invariant $\kappa\,|\nabla I|^3$. Quand on l'implémente de façon multi-échelle, on obtient des RPs qui ne répondent *qu'aux endroits précis* où le signal (lissé par G) présente une ligne de discontinuité qualitative avec une discontinuité de la direction tangente.

Joseph Atick et Jean-Pierre Nadal ont montré que ces profils récepteurs, basiques pour le neural computing, peuvent être retrouvés à partir d'hypothèses générales simples de théorie de l'information. Cela permet de mieux comprendre comment l'évolution a pu les sélectionner. Ils correspondent à une "stratégie informationnelle" et à des "design principles" qui optimisent l'efficience de la représentation d'information:[4]

> "Efficiency of information representation in the nervous sytem potentially has evolutionary advantages". (p. 213)

Les représentations efficientes permettent de comprendre le "vocabulaire visuel" (les traits géométriques) permettant de décrire l'environnement de façon compacte. L'exemple le plus simple est de supposer qu'il existe un filtrage linéaire (convolution par un profil récepteur) qui effectue une compression du signal en *décorrélant* son autocorrélation spatiale $R(x_1, x_2) = \langle I(x_1)I(x_2)\rangle$. A cause de l'homogénéité et de l'isotropie, l'autocorrélation ne dépend en fait que de $x = x_1 - x_2$, i.e. $R(x_1, x_2) = R(x_1 - x_2) = R(x)$. La transformée de Fourier de $R(x)$ est le *spectre de puissance* du signal:

$$\widehat{R}(\omega) = \int R(x)\exp(-i\omega x)dx\ .$$

Or la statistique des images *naturelles* montre que celles-ci ont un spectre en $\frac{1}{\omega^2}$ (loi de Field). Si l'on veut décorréler correctement le signal, *y compris en présence de bruit*, alors on obtient des profils récepteurs en ΔG de type cellules ganglionnaires.

2. Geometrie de la perception et "Scale space analysis"

Dans cette section nous indiquons comment un certain nombre de méthodes mathématiques relativement sophistiquées s'introduisent naturellement dans les théories de la vision artificielle. Nous donnons trois exemples: l'analyse en ondelettes, l'utilisation d'EDP de diffusion non linéaires et les modèles variationnels de segmentation.

2.1. Analyse en ondelettes et geometrie. L'interprétation mathématique des algorithmes de type Marr est désormais fournie par l'algorithme des ondelettes. Explicitons-en l'idée en dimension 1. Partons de la transformée de Fourier classique. Soit $L^2(\mathbb{R})$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. L'analyse harmonique fournit une décomposition de chaque élément $f \in L^2(\mathbb{R})$ sur la base orthonormale des fonctions trigonométriques. La décomposition de $f(x)$ s'exprime par la transformée de Fourier (FT) :

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\omega x}dx = \left\langle f(x)\right| e^{i\omega x}\rangle\ .$$

On montre que $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(x)$ i.e.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \left\langle \widehat{f}(\omega)\right| e^{-i\omega x}\rangle$$

[4] Atick [1992].

et que les normes $\|f(x)\|$ et $\left\|\widehat{f}(\omega)\right\|$ sont égales. Autrement dit, la FT est une isométrie des espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R})_x$ et $L^2(\mathbb{R})_\omega$ (où les indices x et ω indiquent les coordonnées respectives des espaces $\mathbb{R}$ des positions et des fréquences).

Le problème posé par la FT est que l'information qu'elle fournit est délocalisée : elle est déterminée dans l'espace des fréquences et indéterminée dans l'espace des positions. Pour la localiser, Gabor introduisit dans les années 40 la transformée de Fourier avec fenêtrage (GT) :

$$Gf(\omega, u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x-u) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \tilde{g}_{\omega,u} = \langle f(x) \,|g_{\omega,u}(x)\rangle$$

où g est une fenêtre spatiale que l'on translate le long de l'axe x, $g_{\omega,u}(x) = e^{i\omega x} g(x-u)$ et $\tilde{g}(x) = g(-x)$.

La GT ne dépend pas seulement de la fréquence ω mais aussi de la position u. Sa transformée inverse est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} Gf(\omega, u) g(x-u) e^{i\omega x} d\omega du \ .$$

On montre que $\|f\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|Gf\|$, autrement dit que la GT est (à un coefficient de proportionnalité près) une isométrie des espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R})_x$ et $L^2(\mathbb{R})_{\omega,u}$.

Le problème avec la GT est que, même si elle localise l'information, elle n'opère toutefois qu'à un seul niveau de résolution. Elle ne permet donc pas de localiser des discontinuités si celles-ci sont à une échelle trop petite. En particulier, si le signal est une donnée multi-échelle (par exemple fractale) on ne peut pas l'analyser correctement.

D'où la nécessité d'une FT non seulement localisée mais aussi, comme pour la rétine, multi-échelle. C'est ce que réalise le concept d'ondelette. Il s'agit de trouver une décomposition de $L^2(\mathbb{R})$ en n'utilisant qu'une fonction $\psi(x)$ (la "mère" des ondelettes) ainsi que ses transformées par translation $\psi(x-u)$ et par changement d'échelle $\psi_s(x) = \sqrt{s}\psi(sx)$ ou $\psi_s(x) = \frac{1}{s}\psi\left(\frac{x}{s}\right)$.

On obtient alors une transformée par ondelettes WT :

$$Wf(s, u) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_s(x-u) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \tilde{\psi}_s(u) = \langle f(x) \,|\psi_s(x)\rangle \ .$$

Elle est bien définie si une condition d'admissibilité sur la FT de l'ondelette mère $\widehat{\psi}(\omega)$ est satisfaite:

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

(cette condition exprime que la FT de ψ est non seulement nulle mais suffisamment plate à l'origine).

Un exemple typique d'ondelette est précisément l'ondelette de Marr ΔG.

Un théorème de J. Morlet et A. Grossmann dit que, à un coefficient près, W est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})_x$ sur $L^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})_{s,u}$. La transformée inverse est donnée par la formule:

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} Wf(s, u) \psi_s(x-u) ds du \ .$$

L'amplitude de la WT fournit un indicateur privilégié des discontinuités (des singularités) encodées dans le signal. Comme l'a noté Stéphane Mallat :

> "the ability of the WT to characterize the type of local singularities is a major motivation for its application to detect the signal sharper variations".[5]

[5] Mallat-Zhong [1989], p. 9. Cf. aussi Mallat [1998].

Il existe en général une forte redondance de la WT (lorsque la redondance est nulle on parle d'ondelettes orthogonales). Elle s'exprime au moyen du noyau reproduisant:

$$K(s,s',u,u') = \frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}} \psi_s(x-u)\psi_{s'}(x-u')dx$$

par la formule :

$$Wf(s',u') = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}} Wf(s,u)K(s,s',u,u')dsdu \ .$$

Pour l'ondelette de Marr $\psi = \Delta G$, la redondance s'exprime par l'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial W_s f}{\partial t} = \Delta W_s f \text{ avec } (t = s^2) \ .$$

Dans certains de ses derniers travaux, Stéphane Mallat a introduit une redondance maximale. Il considère la famille à 3 paramètres "d'atomes temps-fréquence" :

$$D = g_\gamma(x) = g_{s,u,\omega}(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{x-u}{s}\right) e^{i\omega x}$$

où u = position, s = échelle, ω = fréquence. On itère alors l'algorithme adaptatif consistant à chercher le g_γ qui approxime le mieux f :

$$\begin{cases} f = \langle f \,|g_{\gamma_0}\rangle\, g_{\gamma_0} + Rf \ (\text{avec } Rf \perp g_{\gamma_0}) \\ R^n f = \langle R^n f \,|g_{\gamma_n}\rangle\, g_{\gamma_n} + R^{n+1} \ f \ . \end{cases}$$

Avec de tels algorithmes, il devient possible de compresser une image sur la base de sa géométrie intrinsèque en éliminant l'information encodée dans les échelles suffisamment petites. La reconstruction demeure fidèle parcequ'elle repose sur la structure morphologique de l'image. Ce sont essentiellement les détails fins — en particulier les textures — qui se trouvent lissés.

On peut raffiner la méthode en introduisant des paquets d'ondelettes. On utilise plusieurs ondelettes en parallèle de façon à adapter au mieux le choix d'une base de décomposition à la structure intrinsèque du signal. Le critère de fit est alors la minimisation de l'entropie d'information.[6]

2.2. "Scale space analysis" et equations de di usion non lineaires. L'analyse multi-échelle domine désormais les théories de l'analyse géométrique des images en vision computationnelle. A côté de la filière Marr→Ondelettes que nous venons d'évoquer, elle remonte à Witkin (1983) et à Koenderink (1984, 1986). Elle est celle de la "scale space analysis". L'idée directrice en est de plonger l'image dans une famille $I_s(x,y)$ de façon à ce que :

(i) $I_0 = I$,

(ii) I_1 soit une image indifférenciée, et

(iii) *Principe de causalité*: lorsque s croît, l'évolution de I_0 à I_1 "simplifie" strictement l'image (cette contrainte de "causalité" interdit l'apparition *ex nihilo* de nouveaux détails lorsque l'échelle croît). L'évolution avec s des lignes de niveau de I_s, i.e. la suite d'événements de bifurcation qu'elles subissent en se simplifiant progressivement, fournit une méthode puissante pour analyser la structure morphologique de l'image, sa (dé)composition en éléments constituants simples, bref sa "constituance".

[6] Cf. par exemple Wickerhauser [1991].

On montre que, sous des contraintes générales de linéarité, d'invariance par translation, d'isotropie et d'invariance d'échelle, la façon la plus simple d'obtenir un tel résultat est de prendre pour I_s une solution de *l'équation de diffusion* typique qu'est l'équation de la chaleur $\partial I_s/\partial s = \Delta I_s$. Dans la mesure où le noyau de la chaleur est gaussien, on est à nouveau conduit à l'idée d'un lissage multi-échelle ($s =$ échelle) de l'image.

A partir de là, tout un nouveau champ s'ouvre, qui consiste à reprendre dans ce nouveau cadre certaines parties fondamentales de la géométrie différentielle, en particulier la théorie des *jets* et la théorie des *singularités*. Cela permet de définir de façon multi-échelle des invariants permettant de détecter des traits (features) géométriques. D'où l'élaboration d'un "receptive field calculus" qui permet de comprendre comment une analyse du signal peut être une analyse géométrique.

Le problème est évidemment que l'équation de la chaleur *n'est pas morphologique*. Le lissage qu'elle produit est isotrope et donc en fait indifférent à la géométrie de l'image. En particulier, les contours sont lissés, déplacés, voire même fusionnés. D'où l'idée qui s'est progressivement imposée au cours des années 80. Pour pouvoir effectuer une bonne analyse morphologique de l'image, il faut concilier deux exigences apparemment antagonistes, celle de l'*homogénéisation* et de la régularité, mais aussi celle de la *séparation* et de la segmentation. Autrement dit, il faut que le *même* algorithme d'analyse géométrique puisse :

(i) *régulariser* le signal de façon multi-échelle par diffusion;

(ii) *engendrer* la géométrie de l'image, c'est-à-dire définir les discontinuités d'éléments différentiels possédant une signification géométrique intrinsèque.

Pour ce faire, il faut adapter l'équation de diffusion à la préservation de ces éléments différentiels construits à partir des jets successifs de la fonction $I_s(x, y)$.

Le cas le plus simple est celui des bords qui délimitent les domaines homogènes d'une image et sont essentiels à la définition de ses constituants. Un bord est idéalement une discontinuité du gradient $\nabla I_s(x, y)$ de I_s. Pour qu'une diffusion préserve le caractère discontinu des bords tout en les simplifiant progressivement, il faut qu'elle soit anisotrope, en fait inhibée dans la direction du gradient.

Plusieurs solutions ont été envisagées (il s'agit d'un débat mathématique technique). La première idée (Malik et Perona, 1990) a été de modifier les possibilités de diffusion au voisinage des bords. Cela a conduit à des équations non-linéaires du type :

$$\partial_s I_s = \operatorname{div}\left(g(\nabla I_s).\nabla I_s\right)$$

où ∂_s est une notation abrégée pour $\frac{\partial}{\partial s}$, g est une fonction > 0 décroissante t.q. $g(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

De telles EDP paraboliques non linéaires sont difficiles à intégrer numériquement car elles comportent des phénomènes de diffusion inverse et de déconvolution qui les rendent instables.

Si l'on veut éviter toute diffusion des bords, on peut considérer avec P-L. Lions, J-M. Morel et L. Alvarez, l'équation de diffusion:

$$\partial_s I_s = \partial^2_{\xi^2} I_s$$

où ξ est une coordonnée normale au gradient, i.e. tangente à la ligne de niveau au point considéré. Cette équation s'écrit:

$$\partial_s I_s = |\nabla I_s| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla I_s}{|\nabla I_s|}\right) = \Delta I_s - \frac{H(\nabla I_s, \nabla I_s)}{|\nabla I_s|^2}$$

où H est le Hessien de I_s. Elle est uniformément parabolique le long des courbes de niveau mais totalement dégénérée dans la direction du gradient. Elle fait évoluer les lignes de niveau — et donc en particulier les bords — comme des fronts avec une vitesse normale égale à leur courbure.

En considérant les lignes de niveau des fonctions $I_s(x, y)$ on obtient des évolutions de courbes planes C_s qui se propagent comme des fronts conformément à une loi du type $\partial_s P = F(K)N$ où P est un point de C_s, N la normale (externe) en P à C_s et K la courbure de C_s en P . Les cas les plus étudiés sont:

(i) celui de la propagation à vitesse constante:

$$\partial_s P = N,\ \partial_s K = -K^2$$

(modèles de propagation d'ondes de type "grassfire" engendrant le cut-locus de la courbe), et

(ii) celui de la propagation à une vitesse proportionnelle à la courbure (τ est l'abscisse curviligne de la courbe):

$$\partial_s P = -KN,\ \partial_s K = \partial^2_{\tau^2} K + K^3\ .$$

Stanley Osher et James Sethian (1988) ont également étudié les cas intermédiaires où $F(K) = 1 - \varepsilon K$. La courbure K satisfait alors une équation de réaction-diffusion du type:

$$\partial_s K = \varepsilon \partial^2_{\tau^2} K + \varepsilon K^3 - K^2\ .$$

Sous les titres de "curve shortening", "flow by curvature" ou "heat flow on isometric immersions", le cas (ii) a été particulièrement investigué par des géomètres comme M. Gage, R. Hamilton (1986), M. Grayson (1987), S. Osher (1988), J. Sethian (1990), L.C. Evans et J. Spruck (1991).[7] Si $j_s : S^1 \to \mathbb{R}^2$ est l'immersion isométrique définissant C_s, comme on a $\Delta j_s = -KN$, l'équation de diffusion $\partial_s j_s = -KN$ est en fait l'équation de la chaleur (pour les immersions) $\partial_s j_s = \Delta j_s$. Dans l'espace fonctionnel $\mathcal{J}$ des immersions $j : S^1 \to \mathbb{R}^2$, cette équation définit le champ de gradient de la fonction de Morse donnant la longueur de la courbe image $C = j(S^1)$.

Un théorème fondamental de "curve shortening" dû à M. Gage et R. Hamilton (1985) et généralisé par Matthew Grayson (1987) dit que si C_0 est une courbe plongée (même très sinueuse), alors l'équation de la chaleur la contracte sur un point, C_s devenant asymptotiquement un cercle (convergence pour la norme C^∞). En particulier C_s devient convexe *avant* de pouvoir développer des singularités.

Jean-Michel Morel et ses collègues (Alvarez *et al.* 1992) ont introduit un lissage gaussien supplémentaire dans ces EDP de façon à contrôler la vitesse de diffusion en la couplant à la géométrie de l'image. L'équation de base devient alors:

$$\partial_s I_s = g\,(G * \nabla I_s)\,|\nabla I_s|\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla I_s}{|\nabla I_s|}\right)$$

où G est un noyau gaussien et $g(x)$ une fonction décroissante telle que $g(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ils ont également montré que si l'on impose une contrainte d'invariance affine (au lieu de l'invariance euclidienne), l'EDP devient du type :

$$\partial_s I_s = |\nabla I_s|\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla I_s}{|\nabla I_s|}\right)^{1/3}\ .$$

On peut généraliser ces équations dans les espaces de jets de façon à améliorer l'analyse morphologique de l'image. Par exemple les "crêtes" d'une forme — qui fournissent une "squelétisation" essentielle à son analyse morphologique — peuvent être extraites du signal en tant que des discontinuités de la *direction* du gradient qui sont préservées de la diffusion. La squelétisation d'une forme est très importante pour son analyse automatique en constituants. On l'obtient plus naturellement en utilisant d'autres EDP linéaires qui sont des équations *hyperboliques* de propagation de fronts d'ondes : théorie du *cut locus* comme lieu singulier de la propagation. Le cut locus est une 1-variété possédant comme singularités génériques des points triples et des points d'arrêt et ces singularités typiques *localement* détectables fournissent une décomposition automatique immédiate de la forme en parties.

[7] En fait, la théorie vient de Richard Hamilton qui cherchait à résoudre des problèmes de Relativité générale. En utilisant l'équation de la chaleur, il a montré que si X est une 3-variété riemannienne compacte avec courbure de Ricci $R_{ij} > 0$, alors X admet une métrique riemannienne à courbure > 0 *constante*. Or, ces dernières sont classifiées. Il cherchait également à engendrer des *géodésiques fermées* à partir de courbes fermées quelconques. (Cf. Bourguignon [1985]).

2.3. Modeles variationnels de segmentation. Une autre façon de voir les problèmes d'analyse géométrique de bas niveau des images est de chercher directement des modèles de segmentation partitionnant l'image $I(x)$ définie sur un domaine W en domaines homogènes délimités par des bords nets K (discontinuités qualitatives).

Plus d'un millier d'algorithmes de segmentation ont déjà été proposés par les spécialistes. Le problème principal est que les régions 2D et les bords 1D sont des entités géométriques de dimensions différentes qui sont en compétition et intéragissent très subtilement. En fait, derrière cette prolifération de modèles il y a une grande unité. D'une façon ou d'une autre, comme l'a noté Jean-Michel Morel, ils minimisent tous une "*énergie*" de segmentation. Le plus connu de ces modèles variationnels est celui dit de *Mumford-Shah* (David Mumford est une Médaille Fields en Géométrie algébrique qui est devenu un spécialiste de la vision).

Dans un article de synthèse "*Bayesian rationale for the variational formulation*",[8] Mumford explique que

> "one of the primary goals of low-level vision is to segment the domain W of an image I into the parts W_i on which distinct surface patches, belonging to distinct objects in the scene, are visible"

et que l'approche mathématique de base à ce problème de segmentation consiste à utiliser les différentes sources d'information de bas niveau

> "for *splitting* and *merging* different parts of the domain W"

de façon optimale. Il propose comme approche variationnelle la minimisation d'une fonctionnelle "énergie" $E(u, K)$ où K est une segmentation de W partitionnant W en domaines ouverts W_i (les composantes connexes de $W - K$) et u une approximation de I qui est régulière sur les W_i tout en pouvant présenter des discontinuités le long de K. Ce modèle peut être interprété comme un modèle probabiliste à partir de l'équivalence $E(u, K) = -\log(p(u, K))$, p étant une probabilité définie sur l'espace des segmentations (u, K) possibles.

On impose a priori que u approxime correctement I, varie le moins possible dans les zones homogènes W_i et que le bord K ne soit pas trop compliqué et irrégulier. On obtient ainsi le modèle :[9]

$$E(u, K) = \int_{W-K} |\nabla u|^2 \, dx + \int_W (u - I)^2 + \int_K d\sigma \ .$$

En fait comme on ne doit pas faire d'hypothèses a priori sur la régularité des bords K, le 3ème terme est donné par $H^1(K)$ où H^1 est la mesure de K au sens de Hausdorff. On peut le rendre multi-échelle en introduisant différents poids pour les différents termes et en particulier un coefficient λ pour le 3ème terme. Si λ est petit on obtient une segmentation "fine grained" et si λ est grand une segmentation au contraire "coarse grained".

La minimisation de E est un compromis entre :

(i) l'homogénéité des composantes connexes de $W - K$: si $u =$ constante alors $\nabla u = 0$ et $\int_{W-K} |\nabla u|^2 \, dx = 0$; la minimisation du premier terme force donc u à être la plus constante possible sur les domaines W_i;

(ii) l'approximation de I par u : si $u = I$ alors $\int_W (u - I)^2 dx = 0$; la minimisation du deuxième terme force donc u à rester proche de I;

(iii) la parsimonie et la régularité des bords : ils sont mesurés par la longueur globale L de K, $L = \int_K d\sigma$; la minimisation du troisième terme force donc les bords à être peu nombreux et le plus réguliers possible.

[8] Mumford [1994].
[9] Mumford, Shah [1989].

Un tel algorithme optimise la façon dont on peut fusionner des pixels voisins en domaines homogènes séparés par des discontinuités qualitatives. Il fournit donc une approche variationnelle du problème de la segmentation. Il est extrêmement difficile à résoudre et de nombreux travaux lui sont actuellement consacrés par l'école de De Giorgi (Ambrosio, Del Maso, Solimini), Jean-Michel Morel, Alexis Bonnet et Guy David.[10]

Dans le cas le plus simple où les approximantes u sont localement constantes ($\nabla u = 0$) u est alors entièrement déterminée par K car sur les composantes W_i de $W - K$, u est tout simplement égale à la moyenne de I. Comme $\nabla u = 0$, la fonctionnelle de Mumford-Shah devient ($\bar{I}_i =$ moyenne de I sur W_i) :

$$E(u, K) = \sum_i \int_{W_i} (\bar{I}_i - I)^2 dx + \lambda H^1(K) \ .$$

Dans ce cas, Mumford a donné lui-même la réponse : les minima de $E(u, K)$ existent et sont atteint pour un K qui est C^1 par morceaux, dont la courbure est bornée par $8osc(I)^2$ et possède comme uniques points singuliers des points triples à 120° et des points bord à 90° sur ∂W. Cela est facile à voir. Supposons que l'on ait démontré qu'un morceau de K est régulier et paramétrons-le par $x = x(s)$ où s est la longueur d'arc. Comme la longueur de l'arc $A = \overline{x(-s)x(s)}$ est $2s$, on a évidemment $|x(s) - x(-s)| = 2(s - \varepsilon) \leq 2s$ avec égalité pour le segment de droite S . Si on remplace l'arc A par le segment S on obtient une variation d'énergie

$$\Delta E = -\lambda\varepsilon + \Delta \int (u - I)^2 dx \ .$$

Mais si $\mathrm{osc}(I) = \mathrm{Max}\, I - \min I$ est l'oscillation de I dans le rectangle centré sur $x(0)$ de longueur $2s$ et de largeur $2\sqrt{s^2 - (s - \varepsilon)^2}$, on a :

$$\left| \Delta \int (u - I)^2 dx \right| \leq \left(2s\sqrt{2s\varepsilon} \right) \mathrm{osc}(I)^2 \ .$$

Mais comme la segmentation par K est supposée optimale, on doit avoir $\Delta E \geq 0$. D'où l'inégalité $\varepsilon \leq 8s^3 \frac{\mathrm{osc}(I)^4}{\lambda^2}$ qui implique celle sur la coubure.

La conjecture de Mumford est que dans le cas général il en va de même mais qu'il peut exister aussi des singularités de type "end point" (appelées cracktips ou extrémités de faille en référence à des modèles physiques) qui sont des points de terminaison avec un modèle local en coordonnées polaires

$$u(r, \theta) = \left(\frac{2r}{\pi} \right) \sin \frac{\theta}{2} + C \ .$$

Pour la démonstration dans le cas de la fonctionnelle générale $E(u, K)$, la situation est beaucoup plus compliquée. Le problème principal est celui de la régularité des bords et de la nature de leurs composantes connexes. Donnons à titre d'exemple quelques précisions.

On a d'abord démontré que K est fermé et régulier au sens de Ahlfors : il existe des constantes c et C indépendante de $x \in K$ telles que pour tout $x \in K$ et tout disque $B(x, r)$ de centre x et de rayon r, on ait $cr \leq H^1 (K \cap B(x, r)) \leq Cr$. K ne peut donc pas être fractal.

Ensuite David et Semmes ont montré une propriété de rectifiabilité uniforme : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que K soit inclus dans une courbe régulière γ à ε près (i.e. $H^1 (\gamma - K) \leq \varepsilon H^1 (\gamma)$) telle que $H^1(\gamma) \geq \alpha r$. David a montré que *presque tous* les points de K sont *réguliers* au sens où, localement dans un disque $B(x, r)$ assez petit, K est une courbe C^1 traversant $B(x, r)$.

Ensuite Alexis Bonnet a démontré la conjecture de Mumford pour les composantes connexes isolées de K. La méthode utilisée est une méthode de "blow-up" ou de zoom qui consiste, si (u, K)

[10] Pour une synthèse, cf. Morel, Solimini [1995].

est un minimum de E et $x \in K$ à zoomer sur x et à considérer la situation en quelque sorte "tangente" définie par la fonctionnelle :

$$J = \int_{\mathbb{R}^2 - K} |\nabla u|^2 \, dx + H^1(K) \ .$$

Comme on zoome sur x pour étudier la régularité de K, on considère des disques $B(x,r)$ avec $r \to 0$. Mais le terme de surface $\int_B (u-I)^2 dx$ est en r^2 et le terme de longueur en r. Quant au terme de gradient $\int_B |\nabla u|^2 \, dx$, s'il décroit plus vite que r alors K est régulier en x et le problème est résolu. On peut donc considérer que l'on est dans le cas où le terme de surface $\int_B (u-I)^2 dx$ est négligeable.

En fait, pour que les résultats aient un sens il faut *localiser* la fonctionnelle J à des disques $B_R = B(0,R)$ et à des (u,K) tels que $J_R(u,K) < \infty$ pour tout $R > 0$. On se restreint alors à des compétiteurs (v,G) qui ont la propriété que $(v,G) = (u,K)$ à l'extérieur de B_R et que si x, y sont séparés par K à l'extérieur de B_R alors ils sont aussi séparés par G. On définit ainsi le concept de *minimiseur global*.

Bonnet a montré que si (u,K) est un minimiseur pour la fonctionnelle de Mumford-Shah alors toutes ses limites par blow-up sont des minimiseurs globaux de J en ce sens. Le théorème de Bonnet dit alors que si K est *connexe* et si l'on se restreint aux perturbations préservant cette connexité, et si (u,K) est un minimiseur global de J alors il y a quatre cas possibles :

(i) K est vide et u est constante ;

(ii) K est une droite et u est constante de part et d'autre de K ;

(iii) K est un point triple symétrique (à angles de 120°) et u est constante dans chaque secteur ;

(iv) K est une demi-droite et u est un cracktip.

Récemment Alexis Bonnet et Guy David ont montré que les cracktips sont des minimiseurs globaux.[11] Ils raisonnent par l'absurde. Soit (u_0, K_0) un cracktip et (v,G) un compétiteur voisin de (u_0,K_0) améliorant la fonctionnelle J. G ne peut pas être connexe car sinon, d'après le théorème de Bonnet, ce serait un cracktip. Comme v minimise $\int |\nabla v|^2 \, dx$ localement, v est *harmonique* dans $\mathbb{R}^2 \backslash G$ et satisfait la condition de von Neumann $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ sur G. v possède un conjugué harmonique w tel que la fonction d'une variable complexe $Z = v + iw$ soit holomorphe dans $\mathbb{R}^2 \backslash G$ (où $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$).

On montre ensuite que w a une extension *continue* à $\mathbb{R}^2$ qui est constante sur chaque composante connexe de G (car là où G est C^1, la dérivée tangentielle s'annule puisque $\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$). Comme on montre facilement qu'en tout point régulier z_0 de G le saut de v en z_0 est $\neq 0$ on en conclut aussitôt que $\mathbb{R}^2 \backslash G$ est *connexe* et qu'il n'existe donc pas de composante bornée, car sinon il suffirait d'ajouter une constante bien choisie à v sur cette composante pour annuler l'un des sauts (ce qui ne change rien au fait que (v,G) soit un minimiseur global).

On étudie alors les lignes de niveau Γ_m de w (on suppose $w(z) = 0$ sur la composante non bornée de G). Γ_m est non vide pour $m > 0$ et est une courbe de Jordan rectifiable allant à l'infini pour presque tout $m < 0$. v est strictement monotone sur ces courbes de Jordan. Si G n'a qu'un nombre dénombrable de composantes connexes on montre que les Γ_m ne rencontrant pas G sont les lignes de niveau de w comme fonction harmonique sur $\mathbb{R}^2/G$. Γ_m est composé d'un ensemble fini d'arcs analytiques connectant des points critiques de w (qui sont des zéros de Z' et sont donc isolés). Comme Γ_m n'a pas de lacets, c'est donc un ensemble d'arbres. Comme (v,G) est voisin de (u_0,K_0) à l'infini, il ne peut y avoir qu'au plus 2 branches allant à l'infini. Cela implique que si Γ_m est non vide, Γ_m est une courbe de Jordan allant à l'infini. v est strictement monotone sur Γ_m car il n'y a pas de point critique sur Γ_m et $\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\partial w}{\partial n}$ ne peut pas changer de signe sur Γ_m.

[11] Bonnet, David [2000]. Les paragraphes suivants en sont un simple résumé.

La difficulté de la démonstration générale vient du fait que G peut contenir un ensemble non dénombrable G' de points x de G tels que $\{x\}$ soit la composante de x dans G. A priori G' pourrait rencontrer de nombreux Γ_m.

Cette étude des lignes de niveau Γ_m de w permet de montrer que lorsque l'on tourne autour d'une composante connexe bornée G_0 de G alors (aux points réguliers) v croît strictement puis décroît strictement. Soit alors m_0 la limite inf de w sur G et soit $\Omega_0 = \left\{z \in \mathbb{R}^2 \,|w(z) < m_0\right\}$. On montre que Ω_0 et $\partial\Omega_0$ sont connexes. On montre ensuite que les points de $\partial\Omega_0 \cap G$ sont soit réguliers, soit des points triples. Soit alors $x_0 \in \partial\Omega_0 \cap G$. Comme G n'est pas connexe, on peut choisir x_0 dans une composante connexe G_0 qui n'est pas la composante non bornée G_I. G_0 n'est pas réduite à un point puisque x_0 est soit un point régulier soit un point triple. Soit $z : S^1 \to G_0$ un tour de G_0. S^1 se décompose en 2 intervalles I_1 et I_2 où les valeurs de v sont respectivement croissantes et décroissantes. On a $z\,(I_1) \subset \partial\Omega_0$ sur I_1 car $\frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial \tau} < 0$. Donc $z(I_1)$ n'est constitué que de points réguliers ou de points triples (en nombre fini car ils sont isolés et G_0 est compacte). Donc $z(I_1)$ est composé d'un nombre fini d'arcs C^1 reliant des points triples. Si $z \in z(I_1)$, il n'y a qu'un des secteurs d'accés à z qui est dans Ω_0 . Soit $v(z)$ la valeur limite de v en z à partir de Ω_0 et $v^*(z)$ celle correspondant à l'autre accès si z est un point régulier (et on note alors z^* le point z considéré en tant que point de $z(I_2)$) et v_+^*, v_-^* celles correspondant aux deux autres accès si z est un point triple.

On obtient alors une contradiction en analysant le comportement de v et de v^*. Soit z_0 l'extrémité initiale de $z(I_1)$. Comme v croît sur $z(I_1)$ et décroît sur $z(I_2)$, $v(z_0)$ est l'inf de v sur G_0. Donc $v(z_0) < v^*(z_0)$. Soit z_1 le premier point triple de $z(I_1)$ alors $v\,(z_1) < v_-^*\,(z_1)$. Mais $v\,(z_1) < v_+^*\,(z_1)$. En continuant ce raisonnement on montre que $v < v^*$ sur $z(I_1)$. Mais c'est impossible car $v\,(z_\infty) > v^*\,(z_\infty)$ à l'extrémité finale de $z(I_1)$.

2.4. Liens entre les modeles variationnels et les modeles de di usion. Il existe un lien fondamental entre ces modèles variationnels de segmentation et les EDP de diffusion. On sait que l'équation de la chaleur est la descente de gradient associée à l'énergie :

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_W |\nabla u|^2\, dx$$

autrement dit au premier terme du modèle de Mumford. En effet on calcule facilement à l'aide du théorème de Stokes la dérivée fonctionnelle $\nabla E = \frac{\delta E}{\delta u}$ définie par

$$E(u+g) = E(u) + \int_W \frac{\delta E}{\delta u}(u) g(x) dx \ .$$

On trouve :

$$\nabla E = \frac{\delta E}{\delta u} = -\Delta u \ .$$

Comme la descente de gradient associée à E est donnée par l'EDP $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta E}{\delta u}$, on retrouve bien l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$. L'équation de diffusion non linéaire de Malik et Perona $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(g(|\nabla u|).\nabla u\right)$ est la descente de gradient associée à l'énergie $E(u) = \frac{1}{2}\int_W \tilde{G}\left(|\nabla u|^2\right) dx$ avec $\tilde{g}(s) = g\left(\sqrt{s}\right)$ et $\tilde{G}(t) = \int_0^t \tilde{g}(s) ds$. Le cas particulier $g(s) = \frac{1}{s}$ correspond à l'EDP $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$ qui est aussi un cas particulier de l'équation généralisée de Morel. C'est la descente de gradient associée à l'énergie :

$$E(u) = \int_W |\nabla u|\, dx \ .$$

Le modèle de Mumford-Shah correspond aussi à une descente de gradient mais avec des discontinuités des approximantes u le long de K. On a $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ (partie diffusive) sur $W - K$ avec $u = I$ pour $t = 0$, mais on a aussi

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \kappa - \left(\nabla u^+\right)^2 - \left(\nabla u^-\right)^2$$

où κ est la courbure de K (si K est suffisamment régulière) et où ∇u^+ et ∇u^- correspondent aux valeurs de ∇u des deux côtés de K (en fait il faut considérer le gradient de u au sens des distributions).

3. Hypercolonnes corticales d'orientation, champ d'association, integration des contours et structures de contact

Passons maintenant des modèles de bas niveau à des modèles corticaux permettant de comprendre des opérations de plus haut niveau, mais qui restent encore très loin de modèles cognitifs symboliques et inférentiels.

3.1. La structure hypercolomnaire de l'aire V1. Nous prendrons comme exemple la façon dont les contours sont intégrés dans la première aire du cortex visuel primaire, l'aire $V1$. Les études neurophysiologiques ont permis de distinguer trois types de structures de $V1$, respectivement laminaire, rétinotopique et (hyper)columnaire.

(i) La structure laminaire (d'épaisseur environ $1,8$ mm) est constituée de 6 couches "horizontales" (i.e. parallèles à la surface du cortex), la plus importante pour notre propos étant la couche 4.

(ii) La rétinotopie signifie qu'il existe des mappings de la rétine sur des couches corticales, applications préservant la topographie rétinienne. Un exemple typique en est la représentation conforme logarithmique existant entre la rétine et la sous-couche $4C$ (sous-couche de la couche 4 où se projettent majoritairement les fibres issues du corps genouillé latéral).

(iii) La structure colomnaire et hypercolomnaire est la grande découverte des prix Nobel Hubel et Wiesel au début des années 60. Il existe dans l'aire $V1$ des neurones sensibles à l'orientation, à la dominance occulaire et à la couleur. Ce sont les premiers (dont le RP est en dérivée troisième de gaussienne $\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}$) qui nous intéressent ici. Ils détectent des couples (a, p) d'une position rétinienne a et d'une orientation p en a. Par des méthodes d'enregistrement de réponse à des stimuli appropriés (barres orientées traversant le RF des neurones), on a pu montrer que, perpendiculairement à la surface du cortex, la position rétinienne a et l'orientation préférentielle p restent à peu près constantes. Cette redondance "verticale" définit les *colonnes d'orientation*. En revanche, parallèlement à la surface du cortex, l'orientation préférentielle p varie de $0°$ à $180°$ par pas d'environ $10°$ tous les $50-100$ μ. Ce regroupement "horizontal" de colonnes définit une *hypercolonne d'orientation* qui est un module neuronal d'environ 500 μ-1 mm.

À travers cette architecture fonctionnelle, à chaque position rétinienne a se trouve associé de façon rétinotopique un exemplaire (discrétisé) de l'espace des directions p du plan, i. e. de la droite projective $\mathbb{P}^1$. Il existe par conséquent une implémentation neuronale de la g-fibration (triviale): $\pi : W \times \mathbb{P}^1 \to W$ ayant pour base l'espace rétinien W et pour g-fibre $\mathbb{P}^1$.[12] L'ensemble des "projections" (au sens neurophysiologique) ascendantes (*feed forward*) des voies rétino-géniculo-corticales implémente la g-projection π. Cette fibration est attestée par un nombre considérable de résultats depuis les travaux pionniers de Hubel, Wiesel et Mountcastle, entre autres par ceux de Charles Gilbert.[13] Mais une telle structure purement "verticale" ne suffit pas. Pour qu'il y ait cohérence globale, il faut pouvoir *comparer* entre elles des g-fibres rétinotopiquement voisines. Cela se trouve réalisé à travers ce que les neurophysiologistes appellent les connexions "horizontales" cortico-corticales.

[12] Dans la modélisation géométrique des architectures fonctionnelles, on se heurte à un conflit de lexiques dans la mesure où certains termes comme "fibre", "projection", "connexion", etc. sont employés dans des sens très différents par les mathématiciens et les neurophysiologistes. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté nous faisons précéder les termes pris dans leur sens géométrique du préfixe g.

[13] Voir par exemple Gilbert [1992], Gilbert, Wiesel [1989].

Ces connexions sont à *longue portée* (jusqu'à 6-8 mm) et relient des cellules de *même* orientation dans des hypercolonnes éloignées. Pour les détecter,

(i) on mesure les corrélations entre cellules appartenant à des hypercolonnes différentes;

(ii) on compare les orientations des cellules rencontrées lors d'une pénétration corticale avec celle d'une même cellule de référence;

(iii) en établissant des cross-corrélogrammes, on constate alors que les cellules d'orientations voisines sont fortement corrélées (existence d'un pic dans le corrélogramme) et seulement elles.[14]

On trouve souvent affirmé dans la littérature neurophysiologique que les connexions horizontales cortico-corticales "violent la rétinotopie". Mais en fait elles la confirment. En effet, elles garantissent sa cohérence à grande échelle. Au-delà de deux hypercolonnes (environ 1.5 mm) les champs récepteurs deviennent disjoints. Or les connexions horizontales peuvent mesurer jusqu'à 6-8 mm. Sans elles, des hypercolonnes voisines deviendraient indépendantes ce qui ferait perdre tout sens à la rétinotopie car elle n'existerait plus que pour l'observateur externe et n'aurait plus aucune réalité *pour le système lui-même*.

Les connexions horizontales cortico-corticales ainsi que les projections descendantes (top down) de $V1$ vers le CGL (corps genouillé latéral) participent grandement à rendre l'architecture fonctionnelle des RFs de $V1$ flexible et plastique. Les RFs sont *adaptatifs*, leurs réponses étant modulées par le stimuli. Yves Frégnac et Jean Lorenceau[15] ont montré que les RFs sont des champs dynamiques d'intégration plus compliqués que le champ de décharge minimal. Ce sont des

> "actives filters which may continuously adapt and be updated as a function of global context and past experience".

On remarquera que la g-fibration $\pi : W \times \mathbb{P}^1 \to W$ est intrinsèquement de dimension 3 alors que les couches corticales sont intrinsèquement de dimension 2. Il y a donc un problème "d'écrasement" dimensionnel. Le système visuel le résout à travers une fascinante structure en "pinwheels", étudiée entre autres par Blasdel et Grinvald.[16] Dans la sous-couche $4C$ il existe un réseau rétinotopique discrétisé. À chaque point de ce réseau est associée, dans d'autres sous-couches de la couche 4, une "roue" dont les rayons implémentent la droite projective $\mathbb{P}^1$. Les "centres" de ces roues (i.e. les points du réseau rétinotopique de $4C$) fonctionnent comme des *points singuliers*. En injectant une substance fluorescente appropriée qui s'accumule dans les neurones actifs, en stimulant la rétine par des stimuli (a, p), puis en dépliant et en étalant ensuite les couches on peut faire apparaître les lignes d'iso-orientation. On remarque alors que ces lignes joignent entre eux des points singuliers. Deux points singuliers sont reliés par un faisceau de lignes d'iso-orientation correspondant à un écart angulaire Δp. Il existe donc des angles critiques pour lesquels les lignes d'iso-orientation issues d'un point singulier source bifurquent d'un point singulier but à un autre. L'orientation locale (a, p) se trouve connectée par les connexions horizontales cortico-corticales aux points a' voisins de a tels que la direction $\overline{aa'}$ soit voisine de p. Autrement dit, les connexions horizontales joignent des couples (a_1, p_1), (a_2, p_2) tels que $p_1 \| p_2 \| \operatorname{dir}(a_1, a_2)$.[17] Comme nous allons le voir, cela signifie que la *structure de contact* naturelle de la g-fibration $\pi : W \times \mathbb{P}^1 \to W$ est neuralement implémentée.

3.2. Le concept de champ d'association et l'integration des contours. Venons en maintenant au champ d'association qui constitue, selon nous, l'une des grandes avancées récentes dans la compréhension des mécanismes corticaux d'intégration des contours. Les psychophysiciens David

[14] Cf. par ex. Ts'o, Gilbert, Wiesel [1986].
[15] Frégnac et al. [1996].
[16] Cf. par exemple Bonhoeffer, Grinvald [1991].
[17] La notation $p_1 \| p_2$ symbolise la relation de parallélisme.

Field, Anthony Hayes et Robert Hess (1993) ont mis au point un protocole expérimental original.Il consiste à présenter brièvement (pendant environ une seconde) à des sujets une grille composée de 256 éléments orientés (a, p).

Dans certains cas, la grille contient des éléments dont les centres a sont alignés le long d'un chemin lisse γ, les autres éléments étant orientés aléatoirement. Dans d'autres cas, tous les éléments sont orientés au hasard. La tâche consiste pour le sujet à déterminer s'il détecte ou non l'alignement γ dans la grille présentée (méthode du choix forcé entre deux alternatives). Les résultats obtenus révèlent que les sujets perçoivent bien l'alignement si les éléments sont alignés *tangentiellement* à γ et si la variation de la pente (autrement dit la courbure) entre deux éléments consécutifs n'est pas trop grande. Il s'agit là d'un phénomène de *pop-out* (de saillance perceptive) tout à fait caractéristique.

Un point essentiel est que les éléments de la grille sont trop éloignés les uns des autres pour appartenir à un même champ récepteur dans $V1$. Or, spontanément, les sujets effectuent pourtant leur regroupement. Un mécanisme automatique mettant en relation plusieurs champs récepteurs doit par conséquent opérer. Il s'agit d'une *intégration de bas niveau*. Comme l'expliquent les auteurs :

> "The points along the length of a curved edge can be linked together according to a set of local rules that allow the edge to be seen as a whole, even though different components of the edge are detected by independent mechanisms." (p. 174)

Le fait que ce phénomène de grouping soit local et non pas global est tout à fait essentiel :

> "In our stimuli, there does not exist any "global" feature that allows the path to be segregated from the background. It is not possible to segregate the path by filtering along any particular dimension. Our results imply that the path segregation is based on local processes wich group features locally." (p. 191)

La mesure des variations du taux de détection en fonction des positions spatiales et des orientations relatives des éléments formant le contour a permis à Field, Hayes et Hess de conclure que la tendance des éléments à être perçus comme alignés découle de l'existence, autour de chaque élément, d'une région dans laquelle d'autres éléments tendent à être perçus comme groupés. Cette région, baptisée *champ d'association* est définie *par des conditions conjointes de position et d'orientation*. Les éléments sont des couples (a, p) = (position, direction). Deux éléments (a_1, p_1) et (a_2, p_2) sont connectables si on peut interpoler entre les positions a_1 et a_2 une courbe γ régulière et de faible courbure tangente en a_1 et a_2 à p_1 et p_2. Sinon les deux éléments ne sont pas connectables.

Field, Hayes et Hess ont remarquablement interprété la nature géométrique profonde du champ d'association. D'abord, l'association n'est pas simplement

> "a general spread of activation, linking together all types of features within the field." (p. 185)

Elle manifeste une corrélation entre position et orientation :

> "Elements are associated according to *joint constraints of position and orientation*." (p. 187, nous soulignons)

Il s'agit là du point essentiel. Le phénomène de pop-out perceptif résulte du fait que les éléments sont alignés *de facon à être tangents à la courbe décrite par leurs centres* :

> "There is a *unique link* between the relative positions of the elements and their relative orientations. (...) *The orientation of the elements is locked to the orientation of the path*; a *smooth curve* passing through the long axis can be drawn between any two successive elements." (p. 181)

3.3. L'implementation neuronale de la structure de contact. Ces expériences de psychophysique montrent que la *structure de contact* canoniquement associée à la g-fibration $\pi : W \times \mathbb{P}^1 \to W$ se trouve neuralement implémentée. En géométrie symplectique les couples (a, p) s'appellent les *éléments de contact* de la fibration. π est en fait intimement liée à l'espace des 1-jets J^1W. Si γ est une courbe de W d'équation locale $y = f(x)$, le jet d'ordre 1 de f au point $a = (x, y)$, noté $j^1 f(a)$, est caractérisé par la donnée de l'abscisse x du point a considéré, de la valeur de la fonction f en ce point $y = f(x)$, et de la valeur de sa dérivée $p = f'(x)$. Ce dernier nombre est la pente de la droite tangente au graphe de f en $a = (x, f(x))$. Cette droite est un élément de contact de W en a. Inversement, à tout élément de contact (a, p) de W en un point a, on peut associer l'ensemble des fonctions dont le graphe est tangent à l'élément en ce point, c'est-à-dire un 1-jet.

Les espaces de jets sont fondamentaux car ils ramènent des calculs locaux (infinitésimaux) à des calculs ponctuels. La contrepartie de ce bénéfice est l'augmentation de la dimension (i.e. du nombre des variables) : au lieu de considérer le plan W muni de coordonnées (x, y), et de calculer $y' = dy/dx$, on se place dans l'espace à *trois* dimensions de coordonnées (locales) (x, y, p) sur lequel on impose la relation $y' = p$ (l'idée remonte en fait à Hamilton, le fondateur de la géométrie symplectique).

La structure de contact de J^1W est définie de la façon suivante. Soit γ une courbe C^∞ tracée dans W. Considérons l'application $j^1\gamma : \gamma \to J^1W$ qui associe à tout point a de γ le 1-jet $j^1\gamma(a)$ de γ en ce point. L'image, que nous noterons encore $j^1\gamma$, de cette application est une courbe gauche de J^1W. Elle est la "relevée" — dite *legendrienne* — de γ dans J^1W. γ se déduit de $j^1\gamma$ par la projection structurale π de J^1W sur W. On retrouve ainsi la courbe γ à partir de l'ensemble de ses 1-jets, c'est-à-dire comme *enveloppe de ses tangentes*.

Dans l'espace J^1W, la courbe γ est représentée par $j^1\gamma$, de telle sorte que la direction de la tangente à la courbe, information locale dans M, devient dans l'espace des jets une information *ponctuelle*.

Etant donnée cette architecture fonctionnelle modélisée par la g-fibration $\pi : J^1W \to W$, il devient nécessaire de pouvoir distinguer, parmi toutes les courbes gauches tracées dans l'espace 3-dimensionnel J^1W, celles, legendriennes, qui relèvent des courbes dans la base W, de celles qui ne sont pas de tels relèvements. En effet, toutes les sous-variétés de dimension 1 de J^1W ne sont évidemment pas, même localement, de la forme $j^1\gamma$: une courbe de J^1W localement définie par des équations $y = f(x)$, $p = g(x)$ ne sera de la forme $j^1\gamma$ *que si* $g(x) = f'(x)$. Cette contrainte s'appelle une *contrainte d'intégrabilité*. Elle peut s'exprimer techniquement de la façon suivante.

Dans le fibré tangent TJ^1W à l'espace des 1-jets J^1W (fibré qui est une variété de dimension 6), les coordonnées d'un vecteur tangent V en $X = (x, y, p)$ sont $V = (x, y, p; 1, y', p')$. Mais si $y' = p$, on a alors $V = (x, y, p; 1, p, p')$. On constate (c'est la remarque fondamentale) que la forme très particulière de ce vecteur V fait qu'il annule la 1 -forme différentielle $\omega = dy - pdx$ sur J^1W. V appartient donc à un plan C_X tangent en X à J^1W, le noyau de la 1 -forme ω.

Bref, les tangentes aux courbes de J^1W qui sont des relevées legendriennes (i.e. de la forme $j^1\gamma$) appartiennent au champ de plans $C : X \mapsto C_X$. Les plans C_X sont appelés *plans de contact*. Leur champ est appelé *structure de contact* sur J^1W et la 1-forme différentielle ω dont il est le noyau est appelée *forme de contact*. Puisque les courbes de la forme $j^1\gamma$ sont tangentes en tout point à ce champ de plans, on dit que ce sont *des courbes intégrales* de la structure de contact.

3.4. Structures de contact et vision. Jusqu'à présent pratiquement aucun spécialiste de la vision n'a évoqué les liens frappants existant entre les hypercolonnes d'orientation du cortex visuel et les notions géométriques de fibration, d'espace de jets et de structure de contact. Signalons toutefois deux exceptions notables, celles de Jan Koenderink et de William Hoffman.

Jan Koenderink (Koenderink, Van Doorn 1987) a beaucoup insisté sur l'importance du concept de jet pour les théories de la vision. Sans jets, il est très difficile de comprendre comment le système visuel pourrait extraire des traits géométriques comme la courbure d'une courbe. En effet,

> "geometrical features [are] *multilocal* objects, i.e. in order to compute boundary curvature the [visual] processor would have to look at different positions simultaneously,

> whereas in the case of [...] jets it could establish a format that provides the information by addressing a *single location*. Routines accessing a single location may aptly be called *points processors*, those accessing multiple locations *array processors*. The difference is crucial in the sense that point processors need no geometrical expertise at all, whereas array processors do (e.g. they have to know the environment or neighbours of a given location)". (p. 370)

C'est bien le point central. Les neurones sont des processus ponctuels (à l'échelle définie par la taille de leurs RFs) et ne peuvent que mesurer une grandeur en un point. Pour faire de la géométrie différentielle avec des processeurs ponctuels et non pas locaux, il faut ajouter des variables supplémentaires évaluant des dérivées partielles de degré approprié.

Koenderink insiste sur le fait que les (hyper)colonnes implémentent neurobiologiquement des espaces de jets :

> "The modules (like "cortical columns" in the physiological domain) of the sensorium are local approximations (*Nth order jets*) of the retinal illuminance that can be adressed as a *single datum* by the point processors." (p. 374)

William Hoffman a quant à lui été l'un des pionniers de l'application de la géométrie différentielle et de la théorie des groupes de Lie à la vision. En particulier dans son important article de 1989 "The visual cortex is a contact bundle" il formule explicitement l'idée que les contours sont des relèvements de discontinuités du stimulus rétinien dans un fibré de contact rétinotopique implémenté dans les hypercolonnes corticales. Selon lui, ce que les neurobiologistes appellent des "projections" rétine→cortex sont en fait de tels "path liftings":

> "A path on one manifold [the retina] is "lifted" via a fibering to another manifold [the cortex] in a coherent fashion." (p. 145)

Dans un autre travail Hoffman (1985) évoque aussi le concept de fibration et conclut :

> "Fibrations (...) are certainly present and operative in the posterior perceptual system if one takes account of the presence of "orientation" micro-response fields and the columnar arrangement of cortex." (p. 645)

Nous avons montré dans Petitot-Tondut (1999) que le champ d'association peut être interprété comme une discrétisation de la structure de contact sur le fibré des éléments de contact.

D'abord ce que Field, Hayes et Hess appellent les "joints constraints" ou le "unique link" entre les positions relatives a et les orientations relatives p des éléments (a, p) correspond très précisément à la contrainte de relèvement $p = f'(x)$ (où $y = f(x)$ est une équation locale du lieu γ des centres a des éléments (position) et p est l'orientation des éléments).

Ensuite la condition sur l'angle de variation de la pente entre deux éléments consécutifs correspond à la discrétisation de cette contrainte. Soient Δs le pas de discrétisation pour les positions et Δp le pas de discrétisétion pour les orientations. Si A et B sont les positions de deux éléments consécutifs, p_A et p_B leurs orientations respectives et θ la pente du segment AB, la version discrétisée (et symétrisée) de la contrainte $p = f'(x)$ réalisant le "locking" position-orientation est :

$$|p_A - tg\theta| + |p_B - tg\theta| \leq 2\Delta p.$$

On voit que lorsqu'on discrétise à une échelle donnée l'équation définissant la structure de contact, il en résulte tout naturellement une contrainte sur la *courbure* locale admissible. En conséquence, deux éléments consécutifs le long d'un chemin discrétisé devront avoir des orientations proches. Cela explique l'expérience de Field, Hayes et Hess. Il est aussi très facile d'expliquer au moyen de la structure de contact les autres expériences. Elles correspondent à des situations où la condition d'intégrabilité $p = f'$ *n'est pas* satisfaite, par exemple parce que p est constant alors que

f' ne l'est pas, ou parce que p "tourne" plus vite que f'. Dans tous ces cas, le fait que la courbe ne soit pas une relevée legendrienne se manifeste psychophysiquement par l'absence de pop-out perceptif des chemins.

Jean Lorenceau a donné une confirmation tout à fait spectaculaire du lien entre les manifestations psychophysiques du champ d'association et les connexions cortico-corticales qui les implémentent neurophysiologiquement. Il a utilisé pour ce faire une technique de mouvement apparent de séquences rapides d'éléments orientés. Cette vitesse apparente est plus rapide (surestimée) lorsque les éléments sont alignés et satisfont la condition d'intégrabilité, i.e. lorsque se sont mis en phase le flux des stimuli rétiniens et le flux des activités corticales. Elle est en revanche plus lente (sous estimée) lorsque le mouvement apparent se fait dans une direction orthogonale à celle des éléments. Qui plus est, dans le premier cas, l'augmentation de vitesse mesurée par des méthodes *psychophysiques* est la même que la vitesse de propagation de l'activation horizontale dans les connexions cortico-corticales mesurée *électrophysiologiquement* (de l'ordre de 0.2 m/s). Ce résultat remarquable montre qu'il existe bien un effet de facilitation et de pré-activation de certains neurones à travers les connexions horizontales.

3.5. Contours illusoires et structure de contact. La géométrie de contact de l'aire $V1$ peut être utilisée pour élaborer des modèles *variationnels* des contours "illusoires" de type Kanizsa, contours dits modaux qui sont l'une des manifestations les plus spectaculaires des propriétés gestaltistes de complétion de données sensorielles lacunaires.

Considérons deux données $X_1 = (a_1, p_1)$ et $X_2 = (a_2, p_2)$ et traitons-les comme des conditions aux limites pour la construction d'un arc γ reliant a_1 à a_2 en étant tangent respectivement à p_1 et p_2 en ces deux extrémités. Un tel arc consiste à trouver dans $W \times \mathbb{P}^1$ une courbe "optimale" reliant X_1 à X_2 et qui soit une intégrale de la structure de contact. D'où l'idée de modèles variationnels. On trouvera dans Petitot-Tondut 1999 plusieurs modèles, dont celui des elastica proposé par D. Mumford ainsi qu'un modèle plus "géodésique".

3.6. Coherence et binding. En fait les phénomènes de pop-out sont des phénomènes de *liage* (de binding) au sens que nous définirons plus bas. Nous arrivons ainsi à la conclusion que la condition d'intégrabilité est *la condition de possibilité géométrique* d'un liage neuralement réalisé à travers l'architecture fonctionnelle du cortex visuel primaire.

4. Reseaux de neurones, categorisation et apprentissage

Avant que d'en venir à ces problèmes de liage disons quelques mots des réseaux de neurones.

Sous sa forme la plus simple, un réseau de neurones formels consiste en la donnée de N unités u_i dont l'état d'activation y_i varie dans un certain espace d'états S. Les cas les plus utilisés sont $S = \{0, 1\}, \{-1, 1\}, [0, 1]$. Un état global instantané du réseau est donc décrit par le vecteur $y = (y_i)_{i=1,\ldots,N}$ de l'espace de configurations $M = S^N$. Les unités u_i sont connectées entre elles par des connexions de poids synaptique w_{ij}. Les w_{ij} déterminent le programme de calcul du réseau. Les $w_{ij} > 0$ correspondent à des connexions excitatrices et les $w_{ij} < 0$ à des connexions inhibitrices. On a en général $w_{ii} = 0$.

Le réseau "calcule" de la façon suivante. Chaque neurone u_i reçoit des signaux afférents venant de ses neurones présynaptiques, "calcule" (i.e. change d'état interne en fonction d'une loi de transition) et envoie un signal efférent à ses neurones postsynaptiques.

On définit en général l'input de l'unité u_i comme la somme pondérée des signaux afférents :

$$h_i = \sum_{j=1}^{j=N} w_{ij} y_j, \text{ i.e. } h = wy \ .$$

Les neurones u_i sont traités comme des automates à seuil dont l'état interne est régi par une loi de transition locale du type :

$$y_i(t+1) = g\left(h_i(t) - T_i\right), \text{ i.e. } y(t+1) = g\left(h(t) - T\right)$$

où T_i est un seuil et g une fonction gain. On a typiquement :

- g = fonction de Heaviside si $S = \{0, 1\}$,
- g = fonction signe si $S = \{-1, 1\}$,
- g = sigmoïde = $1/(1 + e^x)$ si $S = [0, 1]$.

Les w_{ij} et les T_i parcourent un espace de contrôle W. La dynamique globale du réseau s'obtient en agrégeant les lois de transition locales et en les itérant.

Dans la limite d'un temps continu, on obtient un grand système d'équations différentielles du type :

$$\dot{y} = -y + g(wy - T) \ .$$

Dans la limite d'un continuum spatial de neurones on obtient des équations aux dérivées partielles (sur des densités) du type :

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -y(x,t) + g\left(\int (w(x,z)y(z,t) - T(x))\, dz\right) \ .$$

Sous l'hypothèse d'un feed-back complet (bouclage des entrées sur les sorties) ce sont les états asymtotiques du système — et en particulier ses attracteurs — qui sont significatifs.[18] Les attracteurs définissent les états internes du réseau. Le phénomène dynamique de base est la capture asymptotique d'un état global instantané y_0 du réseau par un attracteur A. Les réseaux neuromimétiques calculent donc d'une façon radicalement différente de celle d'une machine de Turing-von Neumann. Ce sont des calculateurs dynamiques bifurquant d'attracteurs en attracteurs.

Les dynamiques que l'on peut obtenir ainsi sont en général d'une redoutable complexité. Par exemple, dans le cas (totalement irréaliste sur le plan neurobiologique) où les connexions sont *symétriques*, Hopfield a remarqué que, pour $S = \{-1, +1\}$ et g = fonction signe, les équations du réseau sont celles d'un système de spins en interaction. L' énergie minimisée par la dynamique est alors donnée par :

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i \neq j} w_{ij} y_i y_j + \sum_i T_i y_i \ .$$

Dans la mesure où les poids synaptiques w_{ij} fonctionnent comme l'analogue des constantes de couplage et où ils sont, de façon très intriquée, à la fois > 0 et < 0, ces systèmes — qui exemplifient le cas *le plus simple* de réseaux de neurones formels — correspondent au cas *le plus complexe* de systèmes de spins, celui des verres de spins.[19] Leur énergie présente un nombre considérable de minima relatifs locaux et pour accéder aux minima absolus globaux les méthodes classiques du genre descente de gradient sont inopérantes. Il faut utiliser des algorithmes sophistiqués de physique statistique comme celui du *recuit simulé* (simulated annealing).[20] On introduit un bruit dans le système, i.e. une "température computationnelle" T. On part d'une configuration initiale y_0 à haute température (de façon à avoir accès à tous les bassins). On tire au hasard une configuration voisine y_1. Si $\Delta E < 0$ on effectue la transition. Si $\Delta E > 0$, on effectue la transition avec la probabilité

$$\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\Delta E}{T}\right)}$$

(cela permet de remonter les seuils). On itère jusqu'à un minimum local. On baisse alors T et on recommence le processus en suivant une suite T_n. On peut montrer que si T_n décroît suffisamment lentement (par exemple si $\lim_{n\to\infty} T_n \operatorname{Log} n = c \geq D$ où D est la profondeur maximale des minima locaux non globaux) alors ce processus stochastique converge vers un minimum absolu lorsque $T \to 0$. Les minima absolus sont les configurations y sur lesquelles se concentre, lorsque $T \to 0$, la distribution de Gibbs :

$$G_T(y) = \frac{1}{Z_T} \exp\left(-\frac{E(y)}{T}\right)$$

[18] Cf. Amit [1989].
[19] Cf. par exemple Mézard et al. [1987].
[20] Cf. Azencott [1988].

où Z_T est la fonction de partition :

$$Z_T = \sum_{y \in M} \exp\left(-\frac{E(y)}{T}\right) .$$

Lorsque les poids synaptiques deviennent *asymétriques*, il n'existe plus de fonction énergie et la dynamique peut devenir d'une grande complexité. Steve Renals et Richard Rohwer ont considéré des systèmes :

$$y_i(t+1) = g\left(r \sum_{j=1}^{j=N} w_{ij} y_j(t)\right)$$

où r est la pente de la sigmoïde. Ils en ont analysé les spectres (les transformées de Fourier) :

$$P_i(k) = \frac{1}{T}\left[\sum_{t=0}^{t=T-1} y_i(t) \exp\left(-\frac{2i\pi kt}{T}\right)\right]^2 , \; k = 0, 1, \ldots, T/2$$

et ont étudié les bifurcations présentées par le comportement des états d'activité y_i lorsque r varie. Ils ont retrouvé ainsi de nombreux scénarios classiques de route vers le chaos et en particulier, pour $r \in [12, 14]$, la route par doublement de période, i.e. la cascade sous-harmonique de Coullet-Feigenbaum-Tresser.[21] Ils ont trouvé pour valeur de la constante universelle δ de Feigenbaum intervenant dans la récurrence

$$r_n = r_\infty - \text{cste} \times \delta^{-n} \text{ (i.e. } \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = \delta)$$

la valeur $\delta = 4.67 \mp 0.04$, ce qui est en excellent accord avec la valeur standard

$$\delta = 4,6692016091029909.$$

H. Sompolinsky, M. Samuelides et B. Tirozzi ont aussi étudié de tels systèmes lorsque N devient très grand et lorsque les poids synaptiques w_{ij} (asymétriques) sont des variables aléatoires (par exemple gaussiennes) de moyenne nulle et de variance w^2/N.[22] Pour la valeur critique $rw = 1$, ils présentent une transition de phase d'un régime convergent vers un régime chaotique. Samuelides a en particulier étudié les routes vers le chaos dans le cas où les systèmes sont dilués (presque tous les $w_{ij} = 0$), où il existe des seuils T_i et où les variables aléatoires w_{ij} ne sont plus centrées.

De très nombreux résultats de cet ordre montrent qu'il est devenu désormais possible de donner un statut rigoureux à *la thèse selon laquelle les contenus mentaux sont des attracteurs de systèmes dynamiques implémentés dans des réseaux de neurones* et que, par conséquent, les fonctions cognitives peuvent naturellement être conçues en termes de physique statistique neuronale.

Donnons deux exemples désormais standard. Les phénomènes de *catégorisation* peuvent être pensés comme résultant de la partition de l'espace de configurations M en bassins d'attraction d'attracteurs qui fonctionnent comme autant de *prototypes*. Ce que les psychologues appellent les "gradients de typicalité" s'interprètent alors comme des fonctions de Liapounov sur ces bassins. Quant à l'opposition typique/non typique (i.e. générique/spécial), elle se trouve géométrisée à travers la stratification de M par les variétés stables de la dynamique interne. Ces phénomènes dynamiques de catégorisation permettent aux réseaux de neurones de fonctionner comme des mémoires associatives (des mémoires accessibles par le contenu, ce qui les distingue des RAM des ordinateurs classiques).

Le second exemple est celui de *l'apprentissage*. Il peut se concevoir comme *le problème inverse* de celui qui, étant donnée la matrice w des poids synaptiques, consiste à trouver les attracteurs

[21] Cf. Renals, Rohwer [1990].

[22] Cf. Sompolinsky, Crisanti, Sommers [1988], Doyon, Cessac, Quoy, Samuelides [1993] et Tirozzi, Tsodkys [1991].

de la dynamique Y_w. Il s'agit de se donner a priori des attracteurs et de trouver une matrice w. Certains algorithmes ont été développés à cette fin, en particulier celui dit de *rétropropagation* qui consiste à partir d'une matrice initiale w_0, à calculer l'écart entre les attracteurs de Y_{w_0} et les attracteurs désirés et à rétropropager l'erreur en ajustant w_0. De tels algorithmes définissent des dynamiques *lentes* dans les espaces de contrôle W de poids synaptiques.

Dans de tels systèmes lents/rapides il existe dans W *une stratification catégorisant* les Y_w en différents types qualitatifs. Cette stratification est une partition de W par un fermé catastrophique K (un système de frontières). Les algorithmes comme la rétropropagation fournissent des dynamiques lentes dans W qui ne sont définies que dans les strates ouvertes (les composantes connexes de $W - K$). Mais le propre d'un apprentissage est en général de complètement transformer le type qualitatif de Y_w. Il faut donc comprendre comment les dynamiques de rétropropagation définies sur les différentes strates ouvertes se recollent le long de K. Ce problème est encore totalement ouvert.

5. Le probleme du liage et les reseaux d'oscillateurs

5.1. Codage neuronal de la cohesion. Revenons au problème du binding évoqué plus haut à la fin de la section III. Il s'agit d'un problème cognitif central, celui de la "constituance" et de la "compositionalité" des représentations mentales, par exemple des scènes perceptives. C'est le problème classique du tout et des parties, le problème dit *méréologique* des structures. Il est central pour tous les traitements cognitifs de haut niveau car ceux-ci sont causalement sensibles à la structure en constituants des représentations mentales (cela est particulièrement évident dans le cas du langage). Il est facile à comprendre. Au niveau neuronal, les représentations mentales sont implémentées de façon *distribuée* sur un très grand nombre d'unités élémentaires. Comment éviter la "catastrophe" dissolvant les parties dans le tout? Comment arriver à extraire des constituants et des relations entre ces constituants? Comment coder les liens relationnels? Si on l'approfondit, ce problème renvoie à un problème encore plus fondamental, celui du *codage neuronal de la cohésion spatiale*. Comment les caractéristiques de l'espace peuvent-elles être codées dans un système neuronal où il n'y a que des signaux qui circulent, et par conséquent que des corrélations temporelles?

L'une des hypothèses actuellement les plus discutées — qui remonte à des travaux de Christoph von der Malsburg (1981) — repose sur le *codage temporel fin* des processus mentaux. Elle est que la cohérence structurale — l'unité — des constituants d'une représentation mentale se trouve encodée dans la *dynamique* de l'activité neuronale sous-jacente, dans ses corrélations temporelles et, plus précisément, dans la *synchronisation* (accrochage de fréquence et de phase) de réponses neuronales oscillatoires. L'idée est donc que la cohérence temporelle rapide (de l'ordre de la ms) code la cohérence structurale. La phase commune des oscillateurs synchronisés implémentant un constituant peut alors servir de label pour ce constituant dans des processus de traitement ultérieurs. D'où aussi le nom de "labeling hypothesis". Elle s'oppose aux conceptions hierarchiques antérieures où les structures sont supposées être codées par une convergence de l'activité neuronale sur des neurones "grand-mère", i.e. par des détecteurs de constituants et de relations spécialisés et hiérarchiquement organisés.

Il existe de nombreuses confirmations expérimentales d'oscillations synchronisées (dans la bande de fréquence des 40 Hz) des colonnes et hypercolonnes corticales, la synchronisation étant sensible à la constituance des stimuli et à la cohérence de leurs constituants (travaux de Eckhorn, Gray, Singer, König, Engel, 1992).

Ces résultats ont été fort débattus et sont en partie controversés. Certains pensent même qu'ils sont partiellement épiphénoménaux. Il faut dire qu'ils sont fort délicats à obtenir et que de nombreux paramètres y interfèrent. Certaines conditions expérimentales spécifiques renforcent peut-être les oscillations. Qui plus est, ils concernent plus l'individuation des constituants que la structure de leurs assemblages. Mais il valident néanmoins une idée directrice. Même si on

simplifie et idéalise celle-ci outrancièrement, elle conduit, comme cela a été le cas avec les réseaux de neurones formels, à des problèmes mathématiques d'une grande difficulté.

5.2. Le modele general. En ce qui concerne la modélisation, on montre d'abord que des colonnes corticales peuvent effectivement fonctionner comme des oscillateurs élémentaires. Elles sont constituées d'un grand nombre de neurones excitateurs et inhibiteurs. En moyennant sur ces deux groupes les équations standard des réseaux de neurones, on obtient un système de deux équations (équations de Wilson-Cowan). On montre alors que l'état d'équilibre subit une bifurcation de Hopf lorsque l'intensité du stimulus dépasse un certain seuil.

Ceci dit, le choix des types d'oscillateurs pose lui même un problème. complexe. Il existe en effet au moins 3 types différents d'oscillateurs.

1. les oscillateurs harmoniques et leurs variantes (cycles limites uniformes);
2. les cycles d'hystérésis apparaissant dans les systèmes lents/rapides dont la variété lente a une forme normale cubique (cycles de Van der Pol);
3. les cycles limites avec saut discontinu de type firing (décharge).

D'autre part, le choix des formes de couplage présente également des alternatives. A côté des couplages de type sinus des différences de phases, il y a des modèles (Mirollo, Strogatz, Kuramoto, 1991) où l'on couple les oscillateurs par des pulses. D'autres modèles de synchronisation ont été proposés, comme les "synfire chains" d'Abeles et Bienenstock (ondes de synchronisation le long de chaînes séquentielles).

Quoi qu'il en soit, la simplification maximale conduit à étudier des réseaux constitués d'un grand nombre N d'oscillateurs F_i dont la fréquence propre ω_i dépend de l'intensité du stimulus à la position i. Soient θ_i leurs phases et $\varphi_{i,j} = \theta_i - \theta_j$ leurs différences de phases. Les équations du système sont du type :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - H\left(\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,N}\right) \ .$$

Les systèmes les plus courants sont du type :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} \sin\left(\theta_i - \theta_j\right)$$

où les K_{ij} sont des constantes de couplage. Ce sont des systèmes typiquement complexes que l'on peut étudier avec des méthodes de physique statistique (travaux de Kuramoto, Daido, etc.) et de dynamique qualitative (travaux d'Ermentrout et Kopell, etc.).

5.3. La synchronisation comme transition de phase. Dans le cas d'une seule constante de couplage et d'une totale connectivité, Y. Kuramoto (1987) a analysé en détail le système :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{j=N} \sin\left(\theta_i - \theta_j\right) \ .$$

Pour ce faire, il a introduit le *paramètre d'ordre* qu'est la phase moyenne :

$$Z(t) = |Z(t)|\, e^{i\theta_0(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{j=N} e^{i\theta_j(t)}$$

et a étudié le système équivalent :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - K\,|Z| \sin\left(\theta_i - \theta_0\right) \ .$$

Si les fréquences ω_i sont tirées au hasard suivant une loi $g(\omega)$ représentant les régularités statistiques de l'environnement (en prenant un repère tournant on peut supposer g centrée sur 0), la synchronisation globale est une transition de phase s'effectuant pour la valeur critique $K_c = 2/\pi g(0)$ de la constante de couplage.

Pour le montrer, Kuramoto cherche d'abord des solutions $Z =$ constante. Après avoir classé les oscillateurs en deux groupes

(i) le S-groupe des oscillateurs pouvant se synchroniser i.e. satisfaisant

$$\dot{\theta}_i = 0 \text{ et donc } \left|\frac{\omega_i}{KZ}\right| \leq 1$$

(ii) le D-groupe des oscillateurs ne le pouvant pas parce que

$$\left|\frac{\omega_i}{KZ}\right| > 1$$

il montre que seul le S-groupe intervient dans la synchronisation. En écrivant que

$$Z = \int_0^{2\pi} n_0(\theta, t) e^{i\theta} d\theta$$

où $n_0(\theta, t)$ est la distribution des phases à l'équilibre au temps t et en écrivant que

$$n_0(\theta, t) d\theta = g(\omega) d\omega \text{ avec } \omega = K\,|Z| \sin(\theta - \theta_0)$$

il obtient une équation d'auto-consistance $Z = S(Z)$ qu'il développe au voisinage de $Z = 0$. D'où l'équation (qui est une forme normale) :

$$\varepsilon Z - \beta\,|Z|^2\, Z = 0$$

avec $\varepsilon = \frac{K - K_c}{K_c}$ et $\beta = -\frac{\pi}{16} K_c^3 g''(0)$. L'analyse de la stabilité des solutions montre que la solution $Z = 0$, qui est stable pour $K \simeq 0$ (oscillateurs découplés), devient instable à la traversée de $Z = Z_c$.

Kuramoto établit ensuite, sous une hypothèse de quasi-adiabaticité, l'évolution (lente) du paramètre d'ordre Z. Elle est régie par une équation du type :

$$\xi \frac{dZ}{dt}\,|KZ|^{-1} = \varepsilon Z - \beta\,|Z|^2\, Z\ .$$

Il étudie ensuite les *fluctuations*, en particulier au voisinage du point critique lorsqu'elles deviennent géantes et entraînent la transition de phase. Ces résultats montrent que la synchronisation est un phénomène typique d'organisation collective émergente.

5.4. Le groupe de renormalisation. H. Daido (1990) a étudié quant à lui les systèmes :

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - K \sum_{j \in V_i} \sin(\theta_i - \theta_j)$$

où V_i est l'ensemble des plus proches voisins de l'oscillateur de rang i sur un réseau cubique de dimension d. Par des méthodes du groupe de renormalisation, il a montré que, si la loi $g(\omega)$ est asymptotiquement une loi de puissance

$$g(\omega) \simeq |\omega|^{-\alpha-1}\ ,\ \alpha \in]0, 2]$$

alors le système est équivalent à un système découplé (et donc non synchronisable) pour

$$\beta = 1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{d} < 0\ .$$

De façon plus précise, si l'on décompose le réseau en $M = L^d$ blocs de taille L (l'unité de longueur étant la maille du réseau initial) et si l'on moyenne les fréquences ω_i et les phases θ_i sur les blocs B_k (ce qui donne des fréquences Ω_k et des phases φ_k), on obtient les équations suivantes :

$$\dot{\varphi}_k = \Omega_k \frac{K}{M} \sum_{\substack{i \in B_k \\ j \in B_l \\ B_l \text{ voisin de } B_k}} \sin\left(\varphi_l - \varphi_k + \psi_{l,i} - \psi_{k,j}\right)$$

avec $\theta_j = \varphi_m + \psi_{m,j}$ si $j \in B_m$.

L'opération de renormalisation est alors donnée par :

$$\begin{cases} \tau & = & tM^{(1-\alpha)/\alpha} \\ \varphi_k^* & = & \varphi_k - (\gamma_M/M)\, t \end{cases}$$

où γ_M est défini par le fait que la fréquence

$$\omega_n^* = \frac{\left(\sum_{i=1}^{i=n} \omega_i - \gamma_n\right)}{n^{1/\alpha}}$$

obéit à une loi de distribution stable de fonction caractéristique

$$\langle \exp\left(iz\omega^*\right)\rangle = \exp\left(-\left|z\right|^\alpha\right) \ .$$

Rappelons que si X est une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x) = p(X > x)$, sa fonction caractéristique est la transformée de Fourier

$$G(z) = \langle \exp\left(izx\right)\rangle = \int \exp(izx) dF(x) \ .$$

Les lois *stables* sont des lois indéfiniment divisibles (c'est-à-dire qui peuvent être considérées comme des sommes de variables aléatoires infiniments petites indépendantes : toutes les $(G(z))^\alpha$ pour $\alpha > 0$ sont des fonctions caractéristiques) dont la classe est stable par combinaisons linéaires. On montre que leur fonction caractéristique est alors du type

$$G(z) = \exp\left(\left(-c_0 + \frac{iz}{|z|} c_1\right) |z|^\alpha\right)$$

avec $\alpha \in]0, 2[$, $c_0 \geq 0$ et $\left|c_1 \cos \frac{\pi}{2}\alpha\right| < \left|c_0 \sin \frac{\pi}{2}\alpha\right|$. On a ici $c_0 = 1$ et $c_1 = 0$.

Daido obtient ainsi les équations renormalisées :

$$\frac{d\varphi_k^*}{d\tau} = \omega_{M,k}^* - KM^\beta \sum_{l \in J_k} \sin_{lk}^* \left(\varphi_l^* - \varphi_k^*\right)$$

avec $\beta = 1 - 1/\alpha - 1/d$, $J_k = \{\text{blocs } B_l \text{ voisins du bloc } B_k\}$, le couplage effectif étant donné par :

$$\sin_{lk}^* (\varphi) = M^{(1-d)/d} \sum_{\substack{(i,j) \\ i \in B_l, j \in B_k}} \sin\left(\varphi + \psi_{l,i} - \psi_{k,j}\right)$$

où pour $j \in B_m$, $\psi_{m,j}$ est l'écart de la phase θ_j à la phase moyenne φ_m sur B_m : $\theta_j = \varphi_m + \psi_{m,j}$ (cf. plus haut).

Le fait de base est que pour $\beta < 0$, le système est attiré par *le point fixe trivial*

$$\frac{d\varphi_k^*}{d\tau} = \omega_k^*$$

(où $\omega_k^* = \lim_{M \to \infty} \omega_{M,k}^*$) du groupe de renormalisation. Les interactions tendent vers 0 et il ne peut y avoir de synchronisation. Cela n'empêche évidemment pas un phénomène de clustering. Au fur et à mesure que le couplage K augmente, des oscillateurs de plus en plus nombreux se synchronisent. Mais il ne s'agit plus d'une transition de phase.

5.5. Distances ultrametriques et synchronisation par palliers. Quant à Erik Lumer, il a étudié à la suite d'Huberman des systèmes

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \sum_{j=1}^{j=N} K_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)$$

où $K_{ij} = Kd(l_{ij})$, l_{ij} étant la distance ultramétrique sur un arbre exprimant une hiérarchie de constantes de couplage. Si b est le degré de branchement de l'arbre et L sa hauteur, on impose la condition:

$$\sum_{l=1}^{l=L} (b-1) b^{l-1} d(l) \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

($(b-1)b^{l-1}$ étant le nombre des oscillateurs à distance exactement l d'un oscillateur donné). On peut prendre par exemple $d(l) = \frac{1}{(b-1)b^{l-1}} \cdot \frac{a-1}{a^l}$. On montre alors, toujours au moyen des méthodes du groupe de renormalisation, qu'il n'existe de synchronisation par transition de phase que si $b \geq a^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ ($\alpha \in]1,2]$). Sinon il existe une synchronisation progressive, par paliers.

Une fois mieux comprises les propriétés de synchronisation de tels systèmes d'oscillateurs, on peut construire, sur la base de la "labeling hypothesis", des modèles de fonctions cognitives de haut niveau. Par exemple Erik Lumer (1992) a proposé une théorie du processus d'*attention* permettant de se focaliser sur un constituant d'une scène perceptive. Elle consiste à extraire la phase d'un groupe synchronisé au moyen d'un "phase tracker" et à l'utiliser comme label.

Notons d'ailleurs à propos de ces modèles qu'un exemple particulièrement intéressant de systèmes complexes pouvant présenter des patterns spatiaux hautement structurés morphologiquement est précisément fourni par les réseaux d'oscillateurs couplés. En passant à la limite d'un continuum d'oscillateurs dont le paramètre d'ordre (la phase moyenne) Z dépend de la position spatiale, on obtient des équations du type :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \lambda Z - \mu |Z|^2 Z + \gamma_n \overline{Z}^{n-1} + \nu \Delta Z$$

où λ, μ et ν sont des paramètres complexes et γ_n un paramètre réel.

Pierre Coullet (1992) a montré que les solutions de telles équations permettent de modéliser une très riche variété de patterns spatiaux : turbulence développée, défauts, ondes spirales, cellules hexagonales, réseaux de bandes, etc.

Conclusion

Il nous semble que la principale conclusion qui se dégage des différents modèles que nous avons évoqués est qu'il commence à exister désormais ce que l'on pourrait appeler une *physique cognitive*, comportant des transferts de modèles physiques non triviaux de systèmes complexes auxquels on adresse des questions cognitives originales.

Bibliographie

ALVAREZ, L., LIONS, P.L., MOREL, J.M., 1992. "Image selective smoothing and edge detection by non linear diffusion", *SIAM J. Numer. Anal.*, 29 : 845-866.

AMIT, D., 1989. *Modeling Brain Function*, Cambridge University Press.

ATICK, J., 1992. "Could Information theory provide an ecological theory of sensory processing ?", *Network,* 3 : 213-251.

ATIYA, A., BALDI, P., 1989. "Oscillations and Synchronisation in Neural Networks : an Exploration of the Labeling Hypothesis", *International Journal of Neural Systems*, 1, 2 : 103-124.

AZENCOTT, R., 1988. "Simulated Annealing", *Séminaire Bourbaki*, 697, Astérisque 161-162, Paris.

BONHOEFFER, T., GRINVALD, A., 1991. "Iso-orientation domains in cat visual cortex are arranged in pinwheel-like patterns", *Nature*, 353 : 429-431.

BONNET, A., DAVIS, G., 2000. *Cracktip is a global Mumford-Shah minimizer*, Prépublications du Dpt de Mathématiques d'Orsay.

BOURGUIGNON, J.-P., 1985. "L'équation de la chaleur associée à la courbure de Ricci", *Séminaire Bourbaki*, 653, Astérisque.

BUSER, P., IMBERT, M., 1987. *Vision*, Hermann.

COULLET, P., EMILSSON, K., 1992. "Strong resonances of spatially distributed oscillators : a laboratory to study patterns and defects", *Physica D*, 61 : 119-131.

DAIDO, H., 1990. "Intrinsic Fluctuations and a Phase Transition in a Class of Large Populations of Interacting Oscillators", *Journal of Statistical Physics*, 60, 5/6 : 753-800.

DAMON, J., 1988. *Local Morse Theory for Solutions to the Heat Equation and Gaussian Blurring*, Technical Report, University of North Carolina.

DAS, A., GILBERT, C.D., 1995. "Long range horizontal connections and their role in cortical reorganization revealed by optical recording of cat primary visual cortex", *Nature*, 375 : 780-784.

DAS, A., GILBERT, C.D., 1997. "Distorsions of visuotopic map match orientation singularities in primary visual cortex", *Nature*, 387 : 594-598.

DE ANGELIS, G., OHZAWA, I., FREEMAN, R., 1995. "Receptive field dynamics in the central visual pathways", *Trends in Neuroscience*, 18 : 451-458.

DOYON, B., CESSAC, B., QUOY, M., SAMUELIDES, M., 1993. "Chaos in Neural Networks with Random Connectivity", *International Journal of Bifurcation and Chaos*.

DRESP, B., BONNET, C., 1995. "Subthreshold summation with illusory contours", *Vision Research*, 35 : 1071-1078.

ENGEL, A., KÖNIG, P., GRAY, C., SINGER, W., 1992. "Temporal Coding by Coherent Oscillations as a Potential Solution to the Binding Problem: Physiological Evidence", *Non Linear Dynamics and Neural Networks* (H. Schuster ed.), Berlin : Springer.

FIELD, D.J., 1987. "Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells", *Journal of the Optical Society of America*, A, 4, 12 : 2379-2394.

FIELD, D.J., HAYES, A., HESS, R.F., 1993. "Contour integration by the human visual system : evidence for a local 'association field' ", *Vision Research*, 33, 2 : 173-193.

FLORACK, L.M.J., TER HAAR ROMENY, B.M., KOENDERINK, J.J., VIERGEVER, M.A., 1992. "Scale and the differential structure of images", *Image and Vision Computing*, 10, 6 : 376-388.

FLORACK, L., 1993. *The Syntactical Structure of Scalar Images*, Thèse, Université d'Utrecht.

FREGNAC, Y., BRINGUIER, V., CHAVANE, F., GLAESER, L., LORENCEAU, J., 1996. "An intracellular study of space and time representation in primary visual cortical receptive fields", *Journal of Physiology*, 90 : 189-197.

GAGE, M., HAMILTON, R. S., 1986. "The Heat equation shrinking convex plane curves", *J. Differential Geometry*, 25 : 69-96.

GILBERT, C.D., 1992. "Horizontal integration and cortical dynamics", *Neuron*, 9 : 1-13.

GILBERT, C.D., WIESEL, T.N., 1989. "Columnar specificity of intrinsic horizontal and cortico-cortical connections in cat visual cortex", *Journal of Neuroscience*, 9, 7 : 2432-2442.

GRAYSON, M., 1987. "The Heat Equation Shrinks Embedded Plane Curves to Round Points", *J. Differential Geometry*, 26 : 285-314.

HOFFMAN, W.C., 1989. "The visual cortex is a contact bundle", *Applied Mathematics and Computation*, 32 : 137-167.

HUBEL, D.H., 1988. *Eye, Brain and Vision*, Scientific American Library.

KOENDERINK, J.J., 1988. "Operational significance of receptive field assemblies", *Biological Cybernetics*, 58 : 163-171.

KOENDERINK, J.J., 1990. "The brain as a geometry engine", *Psychological Research*, 52 : 122-127.

KOPELL, N., ERMENTROUT, G., B., 1990. "Phase Transitions and Other Phenomena in Chains of Coupled Oscillators", *SIAM J. Appl. Math.*, 50, 4 : 1014-1052.

KURAMOTO, Y., NISHIKAWA, I., 1987. "Statistical Macrodynamics of Large Dynamical Systems. Case of a Phase Transition in Oscillator Communities", *Journal of Statistical Physics*, 49, 3/4 : 569-605.

LUMER, E. D., HUBERMAN, B. A., 1992. "Binding Hierarchies: A Basis for Dynamic Perceptual Grouping", *Neural Computation*, 4 : 341-355.

MALLAT, S., 1998. *A Wavelet Tour of Signal Processing*, New York, Academic Press.

MALLAT, S.G., ZHONG, S., 1989. "Complete Signal Representation with Multiscale Edges", *Technical Report n° 483*, Department of Computer Sciences, New-York University.

MARR, D., 1982. *Vision*. San Francisco : Freeman.

MEYER, Y., 1989. "Ondelettes, filtres miroirs en quadrature et traitement numérique de l'image", *Gazette des Mathématiciens*, 40 : 31-42.

MEZARD, M., PARISI, G. VIRASORO, M.A., 1987. *Spin glass theory and Beyond*, Lecture Notes in Physics, vol. 9, Singapore : World Scientific.

MOREL, J-M., SOLIMINI, S., 1995. *Variational Methods in Image Segmentation*, Berlin : Birkhäuser.

MUMFORD, D., 1994. "Bayesian rationale for the variational formulation", *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*, Dordrecht : Kluwer.

MUMFORD, D., SHAH, J., 1988. "Boundary Detection by Minimizing Functionals", *Proceedings IEEE Computer Vision and Pattern Recognition Conference*, Ann Arbor, Michigan.

PETITOT, J., TONDUT, Y., 1999. *Vers une Neurogéométrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux*, Numéro spécial de *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, 145, 5-101, EHESS, Paris.

PETITOT, J., (ed.), 1999. *Naturalizing Phenomenology : Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science*, (J. Petitot, F. J. Varela, J.-M. Roy, B. Pachoud, eds.), Stanford University Press.

RENALS, S., ROHWER, R., 1990. "A Study of Network Dynamics", *Journal of Statistical Physics*, 58, 5/6 : 825-848.

SOMPOLINSKY, H., CRISANTI, A., SOMMERS, H.-J., 1988. "Chaos in Random Neural Networks", *Phys. Rev. Lett.*, 61 : 259-262.

TIROZZI, B., TSODKYS, M., 1991. "Chaos in Highly Diluted Neural Networks", *Europhy. Lett.*, 14, 727-732.

TS'O, D., GILBERT, C.D., WIESEL, T.N., 1986. "Relationships between horizontal interactions and functional architecture in cat striate cortex as revealed by cross-correlation analysis", *Journal of Neuroscience*, 6, 4 : 1160-1170.

WICKERHAUSER, M. V., 1991. *Lectures on Wavelet Packet Algorithms*, Technical Report, Department of Mathematics, Washington University.

WILLIAMS, L.R., JACOBS, D.W., 1995. "Stochastic completion fields : a neural model of illusory contour shape and salience", *Proc. Intern. Conf. Comp. Vis.*, 5 : 408-415.

WITKIN, A., 1983. "Scale-Space Filtering", *Proc. Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence* : 1019-1021. Karlsruhe.