Schèmes et modèles : la modélisation comme synthèse computationnelle

Jean Petitot
CAMS-EHESS

Janvier 2023

Abstract

En prenant l'exemple de l'astronomie d'Eudoxe à Einstein et Hilbert, nous suivons brièvement l'évolution historique, tant mathématique que physique et métaphysique, de la notion de modèle comme dialectique entre l'analyse conceptuelle et la synthèse computationnelle des phénomènes empiriques observés.

Table des Matières

1 Introduction

La notion de modèle est multiple (modèle scientifique, modèle réduit, modèle animal en biologie) mais nous nous focaliserons sur un seul aspect, déjà extrêmement diversifié : la notion de modèle ne concernera ici que le traitement de données observables par une "intelligence". L'intelligence peut être celle d'un savant héritier d'une longue tradition scientifique mais elle peut être aussi celle d'un animal ou une intelligence artificielle. L'observation des données peut aller des systèmes sensori-moteurs des organismes vivants jusqu'à des appareils ultra élaborés et dont la construction présuppose déjà elle-même des engagements théoriques énormes[1] comme le télescope spatial James Webb ou le Grand collisionneur de hadrons (LHC) du CERN. Les modèles peuvent être hautement mathématisés comme en relativité générale, en théorie quantique des champs ou en physique statistique (groupe de renormalisation) mais peuvent être aussi des modèles neuronaux internes de la structure de l'environnement d'un organisme (de son "Umwelt" au sens de Jakob von Uexküll). On a donc un extraordinaire éventail de possibilités, du psychisme animal jusqu'aux plus hauts sommets scientifiques.

Souvent le test de l'efficacité d'un modèle est la possibilité d'anticiper le mouvement d'un "quelque chose" de mobile reconnu comme un objet par le système observateur. Un félin poursuivant sa proie, une mouche faisant un vol stationnaire, un chat sautant sur une armoire, un acrobate, un danseur, un joueur de tennis, encodent dans leur système sensori-moteur de façon implicite un ensemble sidérant de lois physiques et de calculs balistiques leur permettant d'anticiper, de contrôler, de finaliser des comportements moteurs. Ils en ont un modèle intérieur *encodé* dans des architectures fonctionnelles de connexions nerveuses qui ne sont pas explicitables en formules et demeurent *implicites*. En revanche les théories physiques construisent des modèles conceptuels et mathématiques *explicites* de l'évolution des systèmes qu'elles théorisent.

Dans les modèles théoriques explicites dont nous avons l'habitude la question centrale est de pouvoir *reconstruire* les données empiriques observées à partir de règles nomologiques de façon à pouvoir *anticiper* d'autres données. Dans ces procédures de reconstruction-anticipation s'intriquent tout un ensemble de niveaux cognitifs et de méthodes tant descriptives qu'explicatives, faisant intervenir inductions, déductions et abductions. Une grande partie de l'épistémologie des modèles et de la philosophie des sciences classiques a été et est toujours consacrée à la clarification de ces questions délicates.

Mais le développement spectaculaire des neurosciences et des méthodes d'imagerie non invasives comme l'EEG (électroencéphalographie), IRMf (imagerie par résonance magnétique fonctionnelle), TEP (tomographie par émission de positons), ont montré que les apprentissages (par exemple de la lecture) se matérialisent par des intra-connectivités et inter-connectivités d'aires cérébrales spécifiques et dédiées. Ces connectivités ont des architectures fonctionnelles extrêmement précises mises en place grâce à la plasticité synaptique à travers des règles comme celles de Hebb :

[1] Ce qu'on appelle la "theory ladenness".

"cells that fire together, wire together".[2]

Ces progrès ont conduit ces dernières années à un développement tout aussi considérable de l'intelligence artificielle bio-inspirée et des méthodes d'apprentissage "profond" (deep learning), ce qui a complètement renouvelé toutes les problématiques de la modélisation et a conduit à en étudier les conditions de possibilité neuro-cognitives en amont. Ces progrès d'ingénierie permettent de prendre conscience de la profondeur et de la complexité de ces conditions préalables à toute modélisation, aussi élémentaire soit elle. On cherche à comprendre ou à construire des réseaux de neurones compliqués, naturels ou artificiels, dotés de facultés de perception et de capacités d'action (cela peut être un animal ou robot, par exemple un insecte ou un drone), qui partent des données brutes qui leurs sont accessibles et qui en dérivent des anticipations en modifiant progressivement leur connectivité interne.

Aujourd'hui, les réseaux de neurones artificiels multicouches complexes peuvent traiter un nombre considérable de données ("big data") et sont purement pilotés par les données ("data-driven"), sans hypothèses préalables ou priors. Ils sont purement *inductifs* et s'auto-entraînent à anticiper l'évolution des données. L'idée générale de leur design est assez simple. On a un système X_t qui évolue dans le temps suivant une loi d'évolution inconnue $X_{t'} = F_{t,t'}(X_t)$ pour $t' > t$. Le réseau apprend de nombreuses associations $F_{t,t'}$ et après l'apprentissage, étant donné un début d'évolution $F_{t,t+dt}(Y_t)$ construit une anticipation ("probabilistic forecasting") $\hat{Y}_{t'}$ qu'il compare au vrai $Y_{t'}$. Les règles d'auto-apprentissage non supervisé lui permettent de réduire progressivement l'écart entre les $\hat{Y}_{t'}$ calculés et les $Y_{t'}$ réels et d'anticiper de mieux en mieux. Il encode ainsi progressivement dans les "poids" de ses connexions les lois inconnues $F_{t,t'}$.

Mais il faut bien voir que cette stratégie générale est impraticable si on veut l'appliquer de façon directe. Supposons que les inputs X_t soient par exemple des images rétiniennes ou des vidéos. Ce sont des éléments d'un espace fonctionnel de dimension considérable, à la limite de dimension infinie. Une image de plusieurs millions P de pixels, chacun étant susceptible de plusieurs millions C de couleurs, est un élément d'un espace fonctionnel de dimension P^C qui est incommensurablement plus grand que le nombre d'atomes de l'univers.

[2]Donald Hebb (1904-1985) joua un rôle décisif dans les théories de l'apprentissage. Sa règle de renforcement des connexions dans les réseaux de neurones auto-associatifs est une règle de "frayage" que l'on peut faire remonter à Sigmund Exner.

Il faut donc des réductions dimensionnelles massives. D'abord on suppose que le système dispose de capacités perceptives lui permettant de structurer les images-inputs avec des algorithmes de détection de bords par ondelettes, d'extractions de contours (y compris virtuels), de reconnaissance de formes, de traitement de couleurs, de textures, d'ombres, etc.[3] Cela est déjà une réduction dimensionnelle considérable. Mais si les phénomènes observés sont compliqués, tourbillons, flammes, nuages, etc., le nombre de paramètres nécessaires pour les décrire reste très grand et les variables d'états pertinentes sont nombreuses et pas du tout évidentes.

Même avec la réduction dimensionnelle perceptive on ne peut résoudre les problèmes de l'anticipation et de la prédiction sans avoir recours à un "design" très structuré du réseau de neurones. Tout un milieu technologique d'ingénierie s'est développé autour de ces questions et, de façon récurrente, on cherche à comparer les capacités de ces intelligences artificielles avec celles de la science classique. Un test standard est de retrouver les lois de Kepler à partir des données de Tycho Brahe.

Parmi la littérature déjà très abondante sur le sujet, évoquons l'article récent (2022) au titre évocateur "Discovering State Variables Hidden in Experimental Data" de Boyuan Chen *et al.* [7]. Citons-en la conclusion

> "The burgeoning field of automated scientific discovery involves the development of machines that infer the underlying governing dynamics of various physical systems from observation data. While the raw modeling capacity of machines clearly exceeds that of humans, the choice of what to model has remained human responsibility. We propose that the choice of state variables themselves may also be assisted or influenced by machines that can observe the system directly with data-rich sensors like cameras."

Les auteurs font apprendre au réseau de neurones des systèmes comme un pendule simple, un double pendule rigide, un double pendule élastique, un ensemble de segments articulés, des patterns de réaction-diffusion, les mouvements d'un gymnaste à la barre fixe, les mouvements convectifs de deux liquides non miscibles, des flammes. Pour les premiers, le réseau retrouve les

[3]Le lecteur intéressé par les algorithmes perceptifs de structuration géométrique des percepts chez les animaux évolués et chez l'homme pourra consulter nos ouvrages *Neurogéométrie de la Vision* (2008, [47]) et *Elements of Neurogeometry* (2017, [52] et 2024, [54]). Il y trouvera beaucoup de données expérimentales et de nombreux modèles.

variables d'état et les variables physiques déjà connues (positions, vitesses, accélérations, moments angulaires) ainsi que leurs dynamiques. Pour les derniers (trop complexes) les variables d'état ne sont pas connues au préalable, elles sont "cachées" dans les phénomènes, et il est très intéressant de voir comment le réseau arrive néanmoins à en construire.

Les auteurs partent d'inputs dans un espace fonctionnel de très grande dimension M et font apprendre au réseau le générateur infinitésimal de l'évolution permettant de construire un $\hat{Y}_{t+dt}$ à partir d'un état initial Y_t et, par itération, de reconstruire la dynamique. Ils le font au moyen d'un encodeur-décodeur passant par un espace intermédiaire de dimension N très inférieure à M mais encore assez grande. Ensuite ils appliquent des méthodes géométriques de réduction dimensionnelle pour calculer la dimension du sous-espace (pas du tout linéaire en général) où se déploient les trajectoires. Cela permet au réseau de calculer une *dimension intrinsèque* du système dynamique X_t. Celle-ci redonne à peu près la dimension connue pour les systèmes pas trop compliqués (par exemple 4, les 2 longueurs et les 2 angles, pour le double pendule) mais donne aussi des dimensions imprévisibles pour les systèmes trop complexes et turbulents (par exemple environ 20 pour les flammes).

Les systèmes neurocognitifs d'intelligence artificielle bio-inspirée que nous venons d'évoquer avec l'apprentissage profond des réseaux de neurones sont purement *inductifs* (même si dans un second temps on les simplifie en général en introduisant des priors) mais surtout *sans concepts*. Ils opèrent de façon pré-judicative et ante-prédicative, non réflexive. Les "concepts" y sont implicites, *non sémantisés*, et réalisés comme des états d'activité neurale et c'est pourquoi ils peuvent concerner des animaux ou des robots. Ils apprennent progressivement un système dynamique et son flot dans l'espace des états obtenu en itérant le générateur infinitésimal. En fait ils apprennent des schèmes neuro-cognitifs qui sont des mixtes de "pré-concepts" non sémantisés et d'algorithmes encapsulés dans les connexions. Ce n'est qu'avec l'intelligence de l'*homo sapiens*[4] que ces schèmes se sont trouvés en quelque

[4]C'est l'évolution au cours de l'hominisation du cortex préfrontal (particulièrement développé chez les primates) et de ses relations avec l'hippocampe qui a permis l'apparition de concepts sémantisés. Les processus d'acquisition, de construction et de généralisation des concepts et de leurs fonctions de catégorisation et de (proto)typification sont particulièrement complexes. Nous nous souvenons d'une conférence au cours de laquelle Jean-Pierre Changeux montrait des images de l'activation spécifique de différentes aires cérébrales lorsque, par exemple, on "voyait" un chien, lorsqu'on entendait le mot "chien",

sorte “décompilés” (ce que l’on appelle la *réflexivité*) et “dé-mixés” en concepts sémantiques et en algorithmes, ce qui ouvrira plus tard, au cours de l’évolution culturelle, à la possibilité de modèles théoriques à la fois conceptuels et mathématiques.

Remarque. Le problème des variables d’état est d’ailleurs fondamental pour une autre raison. Les modèles scientifiques dont nous avons l’habitude sont construits à partir de variables d’état simples (du moins les plus simples possibles). Elles permettent de formuler des équations fondamentales simples (du moins aussi simples que possible) mais dont les solutions peuvent être très compliquées (nous reviendrons plusieurs fois sur ce point essentiel). Or ce n’est certainement pas ce genre d’algorithmes qui sont implémentés chez les animaux et encapsulés (compilés) dans leur connectivité neurale. C’est pour expliquer ce point qu’Alain Berthoz a introduit le terme de *simplexité* (2009, [5]). Les animaux encodent dans leur hardware neuronal et dans la structure même de leurs organes des variables d’état *complexes* de façon à pouvoir réaliser les comportements complexes pour eux vitaux en agissant sur elles de façon *simple*. L’exemple typique est le vol.[5] Nombre de technologies (par exemple les drones) fonctionnent d’ailleurs de façon simplexe avec une console. Citons la quatrième de couverture de l’ouvrage d’Alain Berthoz.

> “La simplexité, telle que je l’entends, est l’ensemble des solutions trouvées par les organismes vivants pour que, malgré la complexité des processus naturels, le cerveau puisse préparer l’acte et en projeter les conséquences. Ces solutions sont des principes simplificateurs qui permettent de traiter des informations ou des situations, en tenant compte de l’expérience passée et en anticipant l’avenir.”

lorsqu’on prononçait le mot “chien”, lorsqu’on écrivait le mot “chien”, lorsqu’on “dessinait” un chien. Et pour chaque activité une même petite zone du cortex préfrontal était activée. Selon Jean-Pierre Changeux elle correspondait au *concept* de “chien”.

[5]Pour le vol chez les animaux, cf. l’ouvrage de Jacques Blondel et Vincent Albouy, 2021, [6].

2 La dialectique du conceptuel et du non conceptuel

Nous allons maintenant nous tourner vers des modèles théoriques scientifiques et "rationnels" où, au contraire des modèles internes neuro-cognitifs non conceptuels que nous avons évoqués, le rôle des concepts est déterminante. Les ressources nécessaires à l'observation, les variables d'état, les dynamiques à anticiper sont toujours présentes mais des concepts y "décompilent" et rendent explicites des algorithmes internes encapsulés, cachés et implicites.

C'est cette dialectique entre concepts et algorithmes que nous nous proposons de préciser en prenant comme exemples les modèles physiques les plus connus, dont l'histoire est la plus longue et la plus riche, ceux dont la référence dans les travaux d'"automated scientific discovery" est la plus courante.

Nous partons donc du très vieux problème des relations entre la diversité des données empiriques (phénomènes observables) et l'unité des concepts théoriques dans un certain domaine de réalité. Chaque discipline va de la première à la seconde en utilisant des ressources cognitives universelles : description, abstraction, catégorisation, taxinomies, inductions, inférences, corrélations, causalité, etc. Il s'agit d'une *analyse conceptuelle* à plusieurs niveaux qui a pour fonction de "subsumer", comme on le disait autrefois, le *divers* des phénomènes empiriques sous l'*unité* des concepts théoriques. Gardons à l'esprit que la conceptualisation scientifique est une faculté cognitive évolutivement récente de très très haut niveau, propre à l'homo sapiens socialisé dans les grandes civilisations urbaines, qui interagit avec des facultés cognitives évolutivement beaucoup plus anciennes que nous héritons phylogénétiquement de notre animalité de primates.

2.1 Analyse conceptuelle

On peut représenter (cf. figure 1) cette montée vers l'abstraction par une "colonne" ascendante d'"analyse conceptuelle" comprenant plusieurs niveaux et menant d'une conceptualité descriptive à une conceptualité de plus en plus théorique.

Relativement à cette situation initiale, les approches les plus connues de la modélisation la pensent dans le cadre de théories formelles générales des langages scientifiques (positivisme logique, Cercle de Vienne, Hans Rei-

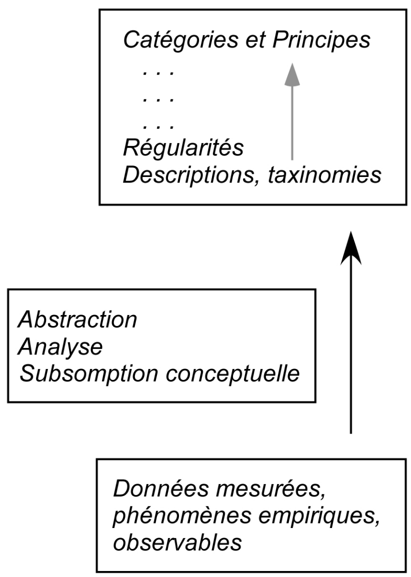

Figure 1: Analyse conceptuelle "ascendante" menant d'une conceptualité descriptive à une conceptualité de plus en plus théorique.

chenbach, Rudolf Carnap, etc.) y compris de celles ayant tenu compte des critiques comme celles de Carl Hempel ou de Willard Quine, ou bien dans un cadre historiciste et relativiste (Thomas Kuhn, Gerald Holton, etc.). Notre approche de la modélisation est assez différente. Elle repose sur *une dialectique entre le conceptuel et le non conceptuel.*

Nous entendons ici par “concept” un contenu sémantique du langage commun au sens lexical du terme. la notion de “mouvement d'une planète” est un contenu conceptuel. En revanche, la liste des positions *continues* d'une planète est un ensemble de données empiriques mesurant les différentes valeurs d'une fonction "position" au cours d'un intervalle de temps par rapport à un certain repère spatial. Certes la “fonction” possède un contenu conceptuel mais son infinité de valeurs numériques sera considérée ici comme non-conceptuelle.

Évidemment, on peut dire que de telles valeurs numériques sont mathématiquement des éléments du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et que la structure algébrique de corps (avec son addition et sa multiplication dont nous apprenons les propriétés à l'école) est un concept mathématique axiomatisé. Mais, là encore, les éléments quelconques du continuum $\mathbb{R}$ ne sont pas conceptuels.[6] En fait la notion même d'abstraction par généralisation est antithétique à la notion d'exactitude numérique dans un continuum.

2.2 Schématisme et construction

De très nombreux débats philosophiques se sont développés autour de cette alternative “conceptuel/non conceptuel” en relation avec la dialectique “discret/continu”. Nous nous inscrivons dans des traditions de pensée qui maintiennent cette alternative. On peut la faire remonter philosophiquement au moins jusqu'à Kant puisque l'opposition entre Esthétique transcendantale (l'espace et le temps comme intuitions pures non conceptuelles) et Analytique transcendantale (Catégories comme “concepts de l'entendement pur”) est fondatrice pour la *Critique de la Raison Pure* et, surtout, pour les *Premiers Principes Métaphysiques d'une Science de la Nature* qui proposent une interprétation transcendantaliste de la Mécanique newtonienne.

Chez Kant cette opposition mène très loin puisque c'est sur elle que repose la différence fondamentale entre la philosophie comme “connaissance ra-

[6]Les petits entiers naturels très fortement discrets sont en revanche conceptuels comme le montre le nombre impressionnant de travaux de psychologie cognitive sur leur apprentissage par les jeunes enfants.

tionnelle par concepts" et la science "proprement dite" comme "connaissance rationnelle par *construction* de concepts", la "construction" étant l'attribution d'un contenu mathématique à un contenu conceptuel au moyen d'une opération fondamentale de *schématisme*.

On pourrait croire cette problématique dépassée mais il n'en est rien. Le développement des sciences cognitives l'a remise au premier plan.[7] Par exemple, en 2014, le prix Nobel de neurosciences cognitives John O'Keefe a donné une conférence "Immanuel Kant: Pioneer neuroscientist" [40] où il affirmait :

> "In his *Critique of Pure Reason*, Kant argued that our concept of space was not derived from sensations arising from our interaction with the physical world but instead represented the a priori basis for our perception of the world in the first place. Extensive work in modern neuroscience has provided strong evidence in support of this position."

En 2012, Stanislas Dehaene (Collège de France et Académie des sciences) a quant à lui proposé un programme de recherche "kantien" [14], *Space, time, and number: a Kantian research program*, dans le cadre du *Human Brain Project*, le plus important programme européen en neurosciences. Dans sa présentation il affirmait

> "In his *Critique of Pure Reason*, Immanuel Kant famously argued that they [space, time and number] provide 'a priori intuitions' that precede and structure how humans experience the environment. [...] The articles in this special issue all support this point of view: from grid cells to number neurons, the richness and variety of mechanisms by which animals and humans, including infants, can represent the dimensions of space, time and number is bewildering and suggests evolutionary processes and neural mechanisms by which Kantian intuitions might universally arise. [. . .] If Immanuel Kant were born today, he would probably be a cognitive neuroscientist!"

[7] D'où d'ailleurs la pertinence de généraliser l'interprétation transcendantale de Newton à l'évolution de la physique mathématique moderne malgré les critiques bien connues contre Kant. Ce que nous nous sommes efforcés de faire dans nos articles cités en bibliographie.

La géométrie intuitive structurant notre rapport à l'espace dans les sensations et perceptions visuelles (optiques), haptiques, auditives, motrices[8] est incroyablement antérieure évolutivement à l'apparition du langage. Penser la connaissance purement en termes conceptuels théoriques socialisés c'est faire comme si notre cerveau était en quelque sorte réduit aux aires du cortex préfrontal. Or nous avons hérité de toutes les aires visuelles, tactiles, auditives, motrices de nos ancêtres animaux et celles-ci constituent autant de structures synthétiques a priori de notre cognition Bien sûr ces structures sont phylogénétiquement a posteriori mais elles sont ontogénétiquement a priori.[9]

Ce n'est donc pas parce que la géométrie intuitive peut être mathématisée et que, comme le disait Kant, des formes de l'intuition peuvent se convertir en intuitions formelles[10], que, comme par magie, le synthétique a priori issu de contraintes phylogénétiques peut devenir analytique, conceptuel et logique. Sa forme (son format, sa formellité) n'est pas celle d'un langage. D'ailleurs, même au niveau le plus théorique, beaucoup d'innovations mathématiques de ces 50 dernières années (comme la théorie des topos de Grothendieck et son utilisation par Lawvere) vont dans le sens d'une dialectique entre géométrie et logique qui subordonne la logique à la géométrie et non l'inverse.

2.3 Généricité et exactitude chez Husserl

Il est intéressant de noter que Husserl a repris à sa façon cette opposition entre conceptuel et non conceptuel en la subordonnant à celle entre deux types d'idéalités, celles obtenues par une subsomption conceptuelle abstractisante leur conférant une propriété de *généricité* et celles obtenues par un passage à la limite leur conférant une propriété d'*exactitude*.[11] Il a en particulier

[8]Il faut souligner le fait que le cadre spatial de ces différentes facultés sensibles est le *même*, ce qui est tout à fait stupéfiant. En effet ces espaces-cadres sont associés à des systèmes spécifiques de coordonnées implémentées dans les organes sensoriels et les aires cérébrales spécialisés. Dire qu'ils sont "le même" (ce qui permet par exemple en tournant la tête d'orienter son regard vers une source sonore) c'est dire que des modules neuronaux dédiés implémentent les changements de coordonnées nécessaires.

[9]La loi de récapitulation d'Ernst Haeckel disant que le développement ontogénétique d'un organisme récapitule sa phylogenèse est fausse à strictement parler mais l'idée que des a posteriori de la phylogenèse sont des a priori de l'ontogenèse reste assez juste.

[10]Note du §26 de la "Déduction transcendantale" dans la *Critique de la Raison Pure*.

[11]Nous avons longuement analysé les thèses de Husserl dans plusieurs de nos articles (cf. par exemple notre hommage à Gilles-Gaston Granger, 1994, [44]).

thématisé le "contraste" entre *mathématiques* (en particulier la géométrie) et *eidétique descriptive* dans les §§71-75 des *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie* (1913, [24]). Pour lui les mathématiques concernent des "essences exactes" et il faut donc

> "Élucider dans leur principe les rapports entre d'une part la '*description*' et ses '*concepts descriptifs*' et d'autre part la 'détermination univoque', 'exacte' et ses 'concepts idéaux' " (p. 235).

Le point crucial pour Husserl est que l'*idéation* qui porte des essences exactes à l'*idéalité* s'oppose à l'*abstraction* qui porte des essences anexactes à la *généricité* du typique. Il y insiste beaucoup

> "les *concepts génériques* [...] qui ont leur champ d'extension dans le fluent[12] ont une *consistance* et une aptitude *aux distinctions pures qui ne doivent pas être confondues avec l'exactitude des concepts idéaux* et des genres qui ont exclusivement des objets idéaux dans leur extension" (p. 237).

2.4 Les modèles qualitatifs de René Thom

Nous n'aborderonspas ici les modèles qualitatifs de René Thom auxquels nous avons consacré une grande partie de notre vie scientifique. Disons simplement qu'ils sont "qualitatifs" au sens où ils étudient des structures de géométrie différentielle, et surtout les *singularités* de telles structures, en travaillant à difféomorphisme près.[13] La notion d'exactitude numérique n'y a donc plus de sens. Ils sont en quelque sorte des modèles *mathématiquement génériques*, des vrais schèmes.

Thom les considérait comme les premiers modèles mathématiques "hylémorphistes". D'où son intérêt profond pour Aristote et sa conscience aigüe de l'innovation qu'ils représentaient puisque l'hylémorphisme est le grand perdant de la révolution galiléenne qui a remplacé une dynamique des formes par une mécanique des forces.

[12] Il s'agit du point essentiel. Les "concreta fluents" sont les phénomènes pouvant varier de façon continue.

[13] Les difféomorphismes sont les isomorphismes de variétés différentiables.

Dans plusieurs travaux, nous avons montré leur proximité avec les *concepts morphologiques génériques* que Husserl considérait comme non mathématisables pour des raisons de principes puisque, pour lui, les idéalités mathématiques étaient nécessairement exactes. Ces modèles mathématiques qualitatifs génériques étant des schèmes de concepts *morphologiques* leur statut est difficile à bien définir sans référence à l'immense tradition philosophique de l'hylémorphisme aristotélicien.

3 La modélisation comme problème inverse de l'abstraction

3.1 Les synthèses computationnelles

Si l'on admet cette dialectique conceptuel/non conceptuel on en arrive tout de suite à une difficulté. Même si une connaissance conceptuelle peut être extrêmement sophistiquée, elle ne peut pas en général reconstruire les données car les concepts sont des significations alors que les données sont des phénomènes possédant en général un format non conceptuel (par exemple celui de mouvements spatio-temporels). Bien sûr, les significations obtenues par subsomption conceptuelle peuvent être *appliquées* aux données, mais elles ne peuvent pas les *reconstruire*.

Une caractéristique des sciences formalisées comme la physique mathématique est de pouvoir *inverser* la subsomption conceptuelle et de résoudre *le problème inverse de l'abstraction*. C'est selon nous le rôle fondamental de la *modélisation*. Elle part de concepts et de principes et, au moyen de ressources mathématiques et algorithmiques hautement *génératives*, elle *reconstruit et simule* des phénomènes *virtuels* qui reproduisent les phénomènes réels. C'est une *synthèse computationnelle* des phénomènes empiriques et non plus une analyse conceptuelle. Elle a pour fonction de rendre *génératif* ce qu'il y a de *nomologique* dans la conceptualisation des phénomènes.

Remarque. Il est essentiel de bien distinguer dans ce contexte les termes "générique" et "génératif" car leurs relations à la dialectique de l'unité et de la diversité sont inverses l'une de l'autre. Le "générique" regroupe le "divers" en classes d'équivalences et étiquette les classes par des labels conceptuels. Il "catégorise".[14] Au contraire le "génératif" engendre (génère) du divers en

[14] La notion de catégorie a un double sens. Le sens cognitif ou linguistique de label dans

itérant des règles, des procédures, des constructions. L'itération augmente progressivement la complexité. Il suffit de penser aux arbres syntaxiques des grammaires génératives ou aux fractals.

L'enjeu de la modélisation est donc de *calculer* une réalité "virtuelle" qui puisse refléter au mieux la réalité empirique donnée. Comme on le dit depuis l'antiquité, il s'agit de "sauver les phénomènes" (*sôzein ta phainomena*), de les expliquer au moyen de constructions mathématiques génératives (très difficiles et souvent même impossibles à trouver) reposant sur des "hypothèses" théoriques.

On peut représenter (cf. figure 2) cette conception de la modélisation en ajoutant à la colonne "ascendante" ("bottom-up" comme on dit souvent dans le jargon cognitiviste anglo-saxon) de l'analyse conceptuelle une colonne "descendante" ("top-down") de synthèse computationnelle. Les deux colonnes se correspondent au niveau phénoménal de base (en bas du diagramme) par un isomorphisme partiel entre les phénomènes empiriquement donnés et les phénomènes computationnellement reconstruits, autrement dit entre une réalité empirique et une réalité virtuelle. Ce "fit" est la finalité de la modélisation.

3.2 Comment rendre les concepts génériques génératifs ?

Le précédent diagramme (figure 2) rend évident que la *condition de possibilité* de la modélisation se situe en haut du diagramme et concerne la conversion de *contenus* conceptuels *génériques* très abstraits unifiant une énorme diversité phénoménale en *algorithmes* très *génératifs* capables au contraire d'engendrer une diversité virtuelle équivalente.

Dans les modèles neuronaux purement inductifs dont nous avons parlé dans notre introduction la question ne se pose pas car, au cours de son apprentissage, le réseau encapsule dans ses connexions les algorithmes lui permettant de calculer des anticipations. Ces algorithmes encapsulés dans le hardware neuronal sont "sans concept", en quelque sorte "cachés" dans les connexions qui les compilent. En revanche, dans les modèles rationnels dont nous parlons désormais, l'induction abstractisante ascendante est conceptuelle et

---

une classification. Et aussi le sens philosophique qui remonte à Aristote et culmine avec Kant.

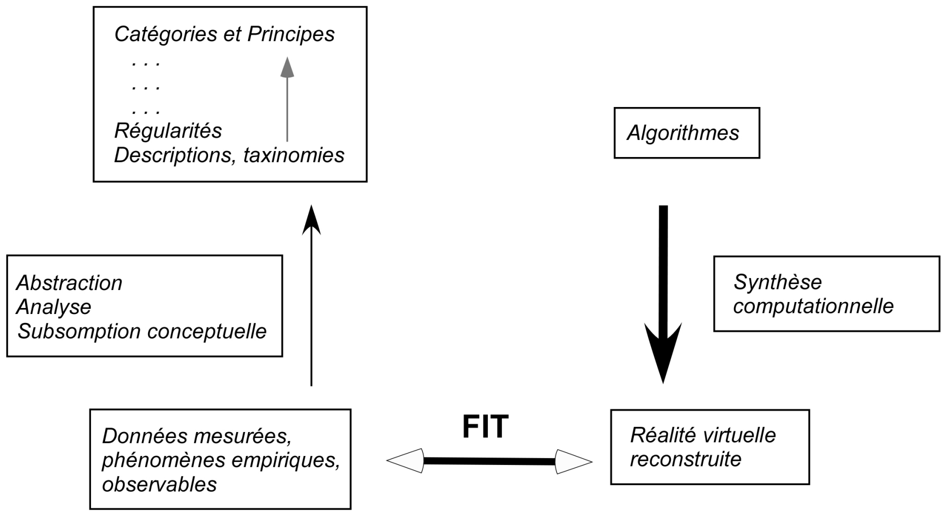

Figure 2: Analyse conceptuelle "ascendante" ("bottom-up") et synthèse computationnelle "descendante" ("top-down").

sa conversion en synthèse computationnelle descendante constitue le problème clé. Les concepts "décompilent" en quelque sorte des algorithmes "cachés dans les profondeurs de l'âme" comme le disait Kant à propos du schématisme.

La problématique est par conséquent tout sauf évidente puisque, répétons-le, l'unification générique conceptuelle et la générativité algorithmique semblent être au prime abord contradictoires. C'est d'ailleurs pourquoi les vraies modélisations sont si rares et ont toujours constitué un triomphe de la science où se sont croisées d'extraordinaires innovations longtemps purement mathématiques et maintenant également informatiques.

3.3 Équations et solutions : l'itération des générateurs infinitésimaux

Les outils de calcul se sont évidemment très diversifiés depuis les équations différentielles omniprésentes en physique classique. Mais ils en gardent une propriété fondamentale. Dans les équations différentielles de la physique, l'*équation* elle-même traduit d'une certaine façon les catégories et les principes de l'analyse conceptuelle. Mais les modèles dérivent de leurs *solutions*. Répétons-le, l'équation n'est que le "générateur infinitésimal" du processus. C'est l'*itération* de ce générateur infinitésimal, c'est-à-dire l'*intégration* de l'équation différentielle, qui effectue la synthèse computationnelle et permet de "redescendre" des catégories et des principes jusqu'à des simulations des phénomènes.

On ne saurait trop insister sur le fait que la modélisation est un *problème inverse*. Le problème "direct" (description, subsomption, abstraction de plus en plus générisante) est toujours soluble et universellement présent dans toutes les disciplines. Mais le problème inverse n'a pu être résolu que dans de très très rares cas (celui des sciences "proprement dites") et toujours au moyen de véritables révolutions dans les outils formels, comme la mise en place du calcul intégro-différentiel chez Newton et Leibniz, du calcul des variations chez Euler et Lagrange, ou encore de la physique statistique chez Boltzmann et Gibbs, puis de la théorie du mouvement brownien chez Norbert Wiener et Paul Lévy, puis du groupe de renormalisation chez Kenneth Wilson, pour ne citer que quelques exemples particulièrement marquants.

4 *Sôzein ta phainomena* : "sauver les phénomènes"

En fait, l'idée de chercher à "reproduire" des données empiriques à partir d'une reconstruction mathématique (un modèle) a une très longue histoire. Rien ne valant mieux qu'un bon exemple, nous allons remonter à la théorie des épicycles dans l'astronomie grecque de l'antiquité.

Remarque liminaire 1. Nos incursions historiques resterons très sommaires au niveau de l'érudition. Toutes les références sont abondamment disponibles (par exemple sur Wikipedia) avec des bibliographies de base. Nous nous bornerons à les utiliser pour mettre en relief certains aspects de la modélisation qui nous interrogent. Nous n'insisterons donc pas sur les notions scolaires d'équateur céleste, d'écliptique, de point vernal, de longitude et latitude géocentriques ou héliocentriques, etc.

Remarque liminaire 2. Nous nous permettrons les facilités de l'histoire récurrente en mettant en résonance des problématiques passées et des problématiques plus modernes. Notre propos n'est pas historique mais épistémologique et les difficultés rencontrées dans l'élaboration d'une bonne modélisation des phénomènes sont les amers d'une épopée de très longue durée qui "roule d'âge en âge" comme l'aurait dit Baudelaire. Elles traversent les siècles, et même les millénaires, et il est légitime de faire dialoguer entre eux les phares qui les éclairent.

4.1 Hypothèses, types idéaux et modèles

Dans la cosmologie antique, les phénomènes observés sont les trajectoires erratiques des planètes que l'on peut suivre sur le fond d'un ciel étoilé (sphère des fixes) tournant régulièrement. Les variables d'état ont été définies très tôt au moyen d'appareils comme des cadrans solaires ou des horloges (horloges hydrauliques et clepsydres) et différentes armilles horizontales ou verticales permettant de mesurer des coordonnées célestes angulaires (azimut et hauteur, de l'horizon au zénith).[15] On s'est ainsi retrouvé avec des trajectoires assez bien définies par rapport à des repères astronomiques terrestres. Or celles observées pour les planètes sont "errantes". L'idée de base s'est donc vite imposée que ces trajectoires erratiques pouvaient être décomposées-recomposées au moyen de mouvements élémentaires. Pour tout un ensemble de raisons géométriques, "harmoniques", physiques, métaphysiques, théologiques, les composants de base qui se sont imposés ont été les mouvements circulaires uniformes.

En dimension 2,[16] un cercle de base (déférent) et un petit cercle (épicycle) dont le centre se déplace sur le déférent engendrent un mouvement composé lorsqu'ils sont parcourus avec des vitesses uniformes. On peut adjoindre un second épicycle ayant pour cercle déférent le premier épicycle puis itérer la construction autant qu'il est nécessaire. On obtient ainsi une méthode d'approximations successives de courbes très irrégulières. Une telle méthode est élémentaire quand on dispose de la trigonométrie et de calculateurs, mais dans l'antiquité elle était d'une difficulté inouïe.

En fait le modèle des épicycles peut être considéré comme le précurseur de *l'analyse harmonique* en tant que méthode générale de décomposition des fonctions en "harmoniques". Le déférent est l'harmonique fondamental et les épicycles sont les harmoniques supérieures.

---

[15]Les armilles sont des cercles gradués avec viseurs qui permettent de viser un astre en mesurant sa longitude et sa latitude dans un certain système de coordonnées.

[16]Cette hypothèse est légitime parce que les mouvements planétaires s'effectuent approximativement dans le plan de l'écliptique.

On trouve ainsi déjà chez les grands astronomes grecs de l'antiquité de nombreuses caractéristiques des modèles en tant que "synthèse computationnelle". Le titre même de l'*Almageste* du génie alexandrin Claude Ptolémée (∼100-168), "Hê Megálê Súntaxis" [57] ("La Grande Composition"), est explicite. Il s'agit d'une "Mathēmatikē súntaxis", d'une "composition mathématique".[17]

On a donc :

1. un modèle idéal (le mouvement circulaire uniforme) à deux paramètres (rayon du cercle et vitesse angulaire) ; ce n'est pas vraiment un modèle mais plutôt un *type idéal* privilégié pour des raisons tant physiques que mathématiques et philosophiques ; on peut le considérer comme un *schème* du *concept*[18] de mouvement, mais pas encore comme un modèle de mouvements empiriques ; c'est un représentant maximalement simple et totalement symétrique, comme le triangle équilatéral pour la classe des triangles ou, plus tard, en mécanique classique, le mouvement inertial rectiligne uniforme ;

2. une procédure *mathématique* de composition (une "syntaxe") de mouvements idéaux ;

3. des méthodes de comparaison avec les données empiriques permettant de raffiner les procédures de composition par approximations successives.[19]

Les types idéaux de (1) sont ce que l'on a appelé dans l'histoire de l'astronomie des "hypothèses". Il ne faut pas les confondre avec les "principes" qui sont hiérarchiquement supérieurs et plus physiques, plus ontologiques alors que les hypothèses sont, quant à elles, plutôt géométriques et mathématiques.

Mais ensuite il faut passer des principes et des hypothèses aux modèles. Pour cela il faut d'abord fixer de nombreux paramètres comme les rayons et les vitesses angulaires uniformes des épicycles puis ensuite composer les mouvements idéaux pour obtenir par construction une simulation du mouvement

[17]Ces astronomes disposaient aussi de modèles-simulateurs. Selon Robert Nadal (1990, [38]), Hipparque faisait sans doute usage d'un modèle de sphère solide avec déjà l'obliquité de l'écliptique, l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre et l'épaisseur de l'armille méridienne.

[18]En fait le "concept" de mouvement est ici une sorte de mixte entre un concept et une intuition. Il est conceptuel dans la mesure où il subsume les mouvements empiriques mais il est intuitif dans la mesure où il inclut analytiquement un espace d'arrière-fond qui est une intuition. Kant n'est pas encore là...

[19]On trouve de nombreux exemples (entre autres chez Archimède) de calculs par séries convergentes ou limites. Par exemple le périmètre du cercle comme limite de celui de polygones réguliers inscrits ou exinscrits lorsque le nombre de côtés tend vers l'infini.

concret empiriquement observé. On voit donc très bien comment intervient du non conceptuel par l'introduction de valeurs numériques, puis de calculs mathématiques, puis de comparaisons avec les données empiriques mesurées.

Comme nous l'avons déjà rappelé il s'agit de "sauver les phénomènes" (*sôzein ta phainomena*)[20], d'expliquer le détail de la diversité que l'on observe et mesure. Seuls les modèles permettent de le faire. Aussi raffinées soit elles les descriptions purement conceptuelles ne le peuvent pas. Elles théorisent les phénomènes mais ne les "sauvent" pas.

L'histoire de l'astronomie grecque fournit des exemples remarquables et étonnants de presque tous les problèmes de modélisation devenus ensuite systématiques à partir de Kepler. Ils ont été abondamment étudiés. Une référence classique reste l'ouvrage célèbre de Pierre Duhem de 1908, [15], *Sôzein ta phainomena : "Sauver les apparences". Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée.*

4.2 Eudoxe

Déjà bien avant Ptolémée (cinq siècles !), pour expliquer les mouvements empiriques très irréguliers des planètes observés depuis longtemps par les prêtres astrologues-astronomes babyloniens (appelés "chaldéens" par les grecs) puis enrichies après eux, Eudoxe (408–355 av. J.C.)[21], proche de Platon et sans doute en fait auteur de plusieurs résultats consignés dans les *Éléments* d'Euclide, avait introduit l'idée qu'une planète était associée à une sphère centrée sur la terre et tournant autour d'un axe dont les extrémités étaient entrainées par le mouvement d'une seconde sphère homocentrique tournant sur un axe différent (un peu comme la nutation d'une toupie), second axe pouvant lui-même être entraîné par une troisième sphère, etc. C'était le début des épicycles. Cela permettait d'expliquer le mouvement *rétrograde* des astres errants et donc de "sauver" une partie des phénomènes. Mais, par construction, les distances des planètes à la terre étaient évidemment constantes ce qui posa très vite des problèmes.

On trouve déjà chez Eudoxe l'idée que, dans la mesure ou, par principe, l'itération des constructions géométriques est potentiellement infinie, on peut introduire autant de paramètres que l'on veut et qu'il faut par conséquent chercher un modèle économe de complexité minimale. Eudoxe se borne à

[20]Expression attribuée par Simplicius à Platon.
[21]Sur Eudoxe, cf. [16].

introduire un épicycle pour la sphère des étoiles fixes, trois épicycles pour le soleil, trois également pour la lune et quatre pour chacune des cinq planètes visibles (évidemment les seules connues à l'époque).

4.3 Hipparque

Deux siècles après Eudoxe, et quelque temps après Apollonius, Hipparque (∼190–120 av. J.C.)[22], sans doute le plus grand astronome de l'antiquité, grand observateur et l'un des premiers à faire un usage systématique de la trigonométrie, développa la théorie des épicycles avec des cercles non concentriques permettant d'expliquer les variations d'éclat des planètes par des variations de leur distance à la terre. Et il effectua des calculs complexes en introduisant une hypothèse alternative "d'excentricité" postulant que le Soleil décrivait un cercle excentrique à la Terre et en montrant que cela était équivalent, sous certaines conditions[23], à l'introduction d'un épicycle. On trouve là un exemple remarquable de deux modèles équivalents qui sont des variantes de mêmes principes généraux et décrivent les mêmes phénomènes.[24]

Cette équivalence formelle entre deux modèles différents était une grande découverte et ouvrit un vaste débat épistémologique. Pierre Duhem cite Théon de Smyrne (p.17) disant que pour Hipparque, le fait que

> "les phénomènes sont expliqués dans l'une et l'autre hypothèse, celle de l'excentrique et celle de l'épicycle"

est "digne de l'attention du mathématicien". En effet une seule hypothèse peut avoir un contenu physique (ontologique) et correspondre à la nature des choses. Mais alors comment définir des critères de choix ? On voit ainsi apparaitre très tôt de façon naturelle l'idée que le processus génératif

[22] Sur Hipparque, cf. [23].

[23] La révolution de la planète P sur son épicycle E dure le même temps que la révolution du centre C de ce dernier sur le cercle déférent D de centre O. La planète P est ainsi fixe sur son épicycle E relativement à son centre C et le mouvement résultant est une simple translation du déférent D par le rayon constant CP de l'épicycle E.

[24] En fait une troisième hypothèse est équivalente et a été aussi abondamment discutée, à savoir que les mouvements des différentes planètes s'effectuent dans l'épaisseur de différentes sphères *homocentriques* centrées sur le centre de l'univers qui n'est ni la Terre ni le Soleil. Elle est très intéressante. Des siècles et des siècles plus tard l'orbite elliptique d'une planète autour du soleil se fera dans l'épaisseur de la couronne limitée par les cercles homocentriques respectivement inscrit et circonscrit.

computationnel qui permet de "sauver les phénomènes" *n'a pas de réalité physico-ontologique.* Il est *mathématique* et l'astronome-mathématicien ne dispose pas de critères intrinsèques suffisants pour sélectionner les bonnes "hypothèses". Seul le peut le physicien car il peut faire appel à des principes ayant un contenu ontologique supérieur. Hipparque penchait plutôt pour les épicycles. Pierre Duhem [15] expose très bien les débats et les controverses ouverts par ces premiers résultats d'Hipparque conduisant à introduire une pluralité de modèles d'orbes célestes avec épicycles et excentriques. Il ne feront que se développer avec les "progrès" de l'astronomie.

4.4 Ptolémée

Environ trois siècles après Hipparque, Ptolémée [57], qui penchait quant à lui plutôt pour les excentriques, introduisit un nouveau raffinement pour expliquer les variations de vitesses sur les épicycles. Son idée du point "equant" était que le mouvement sur l'épicycle est uniforme non par rapport à la Terre mais par rapport à un autre point. Cette idée sera reprise par Kepler dans son modèle héliocentrique elliptique.

Ptolémée insistait sur le fait que sa "syntaxe" des mouvements n'était pas réelle et que seul le mouvement *résultant* observé était physique. La reconstruction mathématique est un calcul, une synthèse computationnelle. Beaucoup de textes antiques en témoignent. Les composants des mouvements réels "ne sont rien dans les cieux" ; ils sont de "pures abstractions", "seulement dans la pensée", "fictifs et idéaux".

4.5 Proclus

Proclus (Próklos, 412-485) dans ses remarquables *Hypotyposes* [56] insistait aussi sur le fait que les composantes d'un mouvement étaient mathématiques et non physiques et qu'un type idéal n'est pas une "essence". Duhem le cite (p.31)

> "Ils [les astronomes] donnent les causes des mouvements naturels au moyen de choses qui n'ont point d'existence dans la nature".

Les hypothèses permettent de rendre "les phénomènes célestes accessibles au calcul" et de construire une "image" de la réalité observée.

On trouve même chez Proclus une théorie de l'*abduction* (au sens que lui donnera Peirce quelques quatorze siècles plus tard) comme une procédure de formation d'hypothèses qui n'est ni une induction si une déduction mais une possibilité d'imaginer à partir des données une hypothèse qui permettrait de les déduire par construction. Duhem le cite (p.32) :

> "[Les astronomes] ne concluent pas les conséquences à partir des hypothèses, comme l'on fait dans les autres sciences ; mais prenant les conclusions pour point de départ, ils s'efforcent de construire des hypothèses desquelles résultent nécessairement des effets conformes à ces conclusions."

En fait, on peut considérer que l'abduction est ici une façon de schématiser les concepts généraux abstraits caractéristiques de la description des mouvements : espace ambiant, appareils de mesure, positions, vitesses.

Ce mouvement abductif a été bien décrit par Albert Einstein (3 ans avant sa mort) dans une lettre à Maurice Solovine du 7 mai 1952. Comme le montre la figure 3, on part de l'expérience $\mathcal{E}$ et l'on imagine des hypothèses axiomatisées $\mathcal{A}$ (flèche abductive ascendante) dont on déduit des énoncés $\mathcal{S}$ mis en correspondance avec les faits empiriques $\mathcal{E}$ (petites flèches descendantes $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{E}$ en pointillés). On a vraiment l'impression de relire Proclus.

4.6 (Dé)compositions extrinsèques et structures intrinsèques

Pour pouvoir raffiner au cours des siècles les calculs permettant de "sauver les phénomènes" il aura fallu de remarquables percées mathématiques. Dans le cas des épicycles il aura fallu inventer la trigonométrie et ses liens avec la géométrie, et, en fait, ce qui donnera deux millénaires plus tard la notion de produit scalaire couplant une structure métrique (mesure des longueurs) à une structure conforme (mesure des angles).

Ainsi l'astronomie de l'antiquité[25] a déjà rencontré nombre de problèmes qui seront récurrents dans les sciences exactes. En particulier une alternative propre à l'impératif de "sauver les phénomènes" en partant d'un type idéal.

1. Soit l'on cherche surtout à reconstruire les données par le calcul et alors des méthodes par approximations successives avec de nombreux paramètres sont suffisantes : on peut décomposer les trajectoires en autant d'épicycles

[25] Qui se continuera avec les astronomes arabes et des philosophes-théologiens comme Nicolas de Cues (1401-1464).

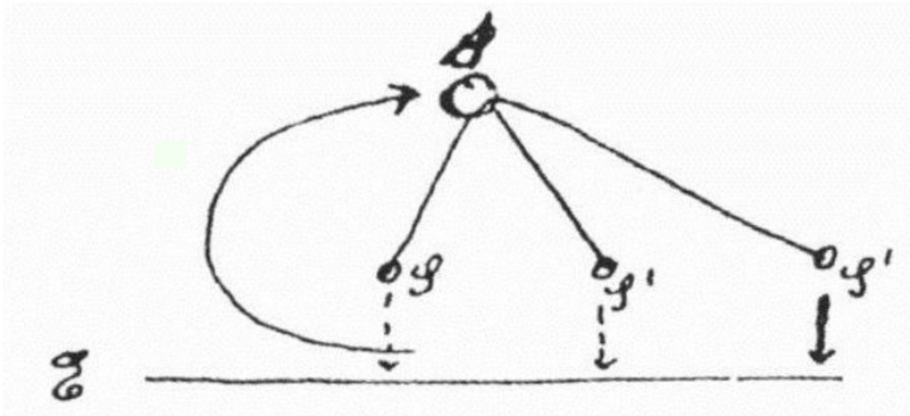

Figure 3: L'abduction selon Albert Einstein (lettre à Maurice Solovine du 7 mai 1952). $\mathcal{E}$ représente l'expérience, $\mathcal{A}$ représente des hypothèses axiomatisées (flèche abductive ascendante), $\mathcal{S}$ représente des énoncés déduits de $\mathcal{A}$ et mis en correspondance avec les faits empiriques $\mathcal{E}$. (flèches descendantes $\mathcal{S} \to \mathcal{E}$ en pointillés)

qu'il est nécessaire. Comme plus tard dans l'analyse de Fourier. Cela correspond à ce qu'Albert Lautman[26] appelait des décompositions "extrinsèques". En termes modernes on considère un espace fonctionnel de dimensions infinie (trajectoires, signaux, etc.), on introduit une "base" universelle d'éléments idéaux (mouvements circulaires uniformes, harmoniques, etc.) et l'on décompose chaque élément de l'espace suivant cette base universelle.

2. Soit l'on cherche en plus à expliquer les phénomènes et alors la reconstruction doit être beaucoup plus profonde. On cherchera ce que Lautman appelait une "structure intrinsèque" de chaque phénomène à partir des principes d'une ontologie physique.

Cette structure de synthèse computationnelle est schématisée à la figure 4.

[26] Cf. Lautman [36] et Petitot [42].

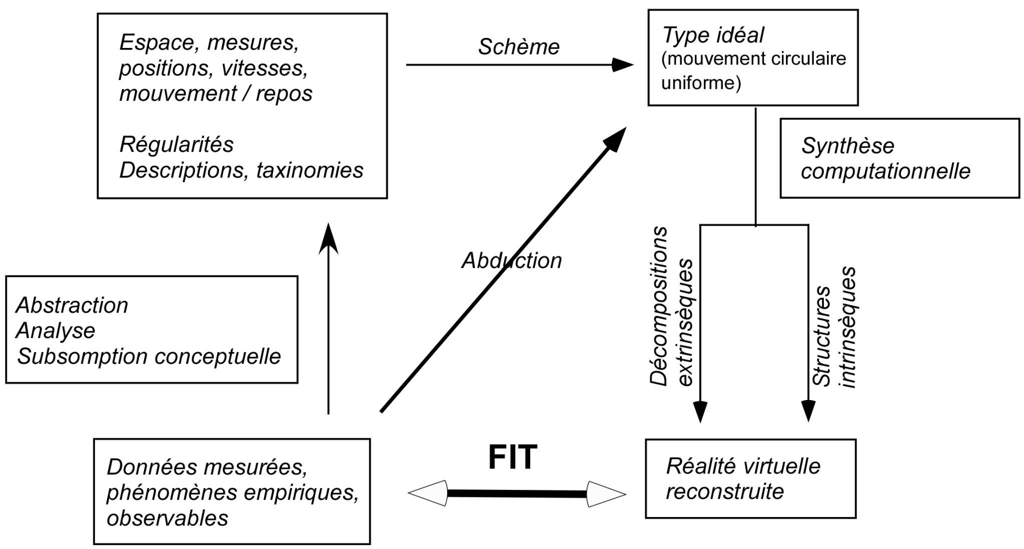

Figure 4: La synthèse computationnelle dans l'astronomie antique (épicycles). Les concepts descriptifs et théoriques de la colonne "ascendante" de gauche (analyse conceptuelle) se spécialisent en faisant intervenir des mixtes conceptuels-intuitifs "régionaux" comme ceux d'espace, de mesure ou de mouvement. Les algorithmes de la colonne "descendante" de droite (synthèse computationnelle) partent de types de mouvements idéaux schématisant les concepts-intuitions régionaux et reconstruisent les phénomènes au moyen de "décompositions extrinsèques" ou de "structures intrinsèques". L'abduction remontant de mouvements empiriques vers des mouvements idéaux typiques y joue un rôle essentiel.

5 Mécanique classique : Kepler

Dans la révolution faisant passer du système de Ptolémée à la théorie de Kepler au moyen de l'héliocentrisme de Copernic, Kepler a beaucoup insisté sur l'opposition entre (dé)compositions extrinsèques et structures intrinsèques. Il critique Ptolémée parce que chez lui il n'y a pas de limite de principe à la prolifération des épicycles et à l'usage d'excentriques ou de points équants. Autrement dit, on a un modèle compositionnel très souple avec autant de paramètres que l'on veut et que l'on peut adapter aux données. Au contraire pour Kepler il faut des modèles très contraints fondés sur des *lois* car la nature doit être simple, ordonnée et harmonique. Cela rend la reconstruction des données beaucoup plus difficile et plus la difficulté est grande, plus la réussite est exceptionnelle et plus la portée explicative du modèle est importante.

5.1 Tycho Brahe

Sautons donc plus de quatorze siècles pour arriver à Tycho Brahe (1546-1601) et Johannes Kepler (1571-1630). Grand observateur danois, comparé à Hipparque, soutenu par le roi Frédéric II puis mathématicien impérial à la cour de l'empereur Rodolphe II à Prague,[27] Tycho Brahe se consacra à recueillir des données précises et fiables au moyen d'appareils d'observation et de mesure sophistiqués et très impressionnants (des quadrants et des sextants de plusieurs mètres atteignant une précision d'une minute d'arc).[28]

Pour lui, un tel recueil était prioritaire et les "hypothèses" n'intervenaient que dans un second temps comme des sortes d'axiomes pour les procédures de reconstruction des données. Ses mesures constituèrent un véritable tour de force qui permit de tester différents modèles et de montrer qu'ils étaient tous inadéquats car ils étaient trop grossiers et conduisaient à des erreurs, par exemple sur la position de Mars, pouvant être de l'ordre de $5°$.

Du côté des modèles, Tycho Brahe s'en tint à un modèle mixte géo-héliocentrique centré sur la Terre mais dans lequel les planètes tournent au-

[27] Issu d'une grande famille protestante Tycho Brahe devint l'une des plus grandes personnalités scientifiques européennes de son temps. Son palais-observatoire d'Uraniborg était un véritable centre de recherche mais fut détruit après qu'il eut quitté le Danemark.

[28] L'*Astronomiæ Instauratæ Mechanica* [63] de 1598 est disponible sur archive.org. Les dessins des divers instruments et les tables sont extraordinaires.

tour du Soleil sur des épicycles dont le déférent est l'orbite du Soleil.[29]

5.2 La révolution copernicienne

Du côté des modèles précisément, le changement principal de point de vue, celui de la "révolution copernicienne", fut le passage à l'héliocentrisme effectué par Nicolas Copernic. L'héliocentrisme est une hypothèse remontant selon Archimède à Aristarque de Samos (environ 310-230 av. J.-C.). Mais les modèles planétaires sont restés géocentriques de Ptolémée à Copernic.

Nicolas Copernic (1473-1543), d'une riche famille de Poméranie, astronome et humaniste (traducteur de textes grecs), passa à l'héliocentrisme en 1514 dans son *De Hypothesibus Motuum Coelestium a se Contitutis Commentariolus* [12] qui ne fut publié qu'au XIXème siècle. Son ouvrage majeur, un véritable nouvel *Almageste*, *De Revolutionibus Orbium Coelestium* [13] fut achevé en 1530 mais fut publié seulement en 1543, l'année même de sa disparition.[30]

L'héliocentrisme simplifiait considérablement les modèles géocentriques à la Ptolémée. Copernic condamnait ces modèles que l'on pouvait réaménager à volonté, qui manquaient de précision et échouaient à révéler un ordre et une harmonie *intrinsèques* des orbes célestes. L'héliocentrisme "expliquait" beaucoup mieux les phénomènes et leurs irrégularités apparaissant lorsqu'ils étaient observés de la Terre. Copernic le considérait bien comme une hypothèse et non comme une réalité physique ayant un contenu ontologique.[31] Mais il se heurtait quand même à de sérieuses difficultés parce que, comme cela deviendra clair après Kepler, il conservait l'hypothèse d'un primat des mouvements circulaires uniformes. Pour "sauver les phénomènes" et "fitter" les variations de vitesse et de distance des planètes, Copernic dût à son tour introduire ces épicycles et autres excentriques qu'il critiquait tellement chez Ptolémée.[32] Certes ceux-ci étaient beaucoup plus petits mais ils étaient in-

[29]Le modèle géo-héliocentrique remonte au carthaginois Martianus Capella (sans doute 360-428) qui fut une référence pendant tout le Moyen-Âge. Il le fait lui-même remonter à Héraclide du Pont.

[30]Sur le *De Revolutionibus*, cf. Gingerich [20]. Sur Copernic voir, parmi une bibliothèque de références, les classiques Koyré [33] et Kuhn [34]. Voir aussi Kerszberg [30]. Sur l'histoire de l'astronomie après Copernic voir, outre toujours Koyré et une myriade de références, l'étonnant Koestler [32] consacré aux "Somnanbules" (les "Sleepwalkers").

[31]Copernic ne fut pas spécialement inquiété par l'Inquisition. C'est plus tard, lors du conflit de l'Église avec Galilée, que son œuvre fut mise à l'index (1616) jusqu'en 1835.

[32]Plus d'une trentaine de cercles interviennent dans le *Commentariolus* pour expliquer

éliminables.

Ce qui est le plus connu chez Copernic est le changement de repère et de coordonnées.[33] C'est un caractère de très nombreux modèles que d'être contextuels. Ils ont pour fonction de reconstruire par le calcul les données mesurées mais comment s'effectuent les mesures ? En fait dans l'idée que le système "terre fixe + soleil mobile" forme un système équivalent au système "terre mobile + soleil fixe" on voit apparaître le concept de relativité du mouvement. Ce n'est pas encore la relativité galiléenne mais c'est déjà de la relativité. Sa bonne compréhension exigera de complètement transformer la notion d'espace cosmologique.

Ce que nous retenons ici pour l'épistémologie des modèles est que la *présentation* des données constitue une condition de possibilité de synthèses computationnelles *explicatives*. En effet on peut en général obtenir des synthèses précises par (dé)compositions extrinsèques si l'on dispose de modèles avec suffisamment de paramètres. Mais pour obtenir des synthèses computationnelles explicatives il ne suffit pas de "sauver les phénomènes" car la notion de phénomène est contextuelle et dépend du contexte d'observation. Il est donc essentiel d'optimiser le contexte.

L'héliocentrisme fait apparaître une très grande *régularité* dans la mesure où les orbes planétaires se révèlent être semblables à des cercles concentriques centrés sur le Soleil. Ces astres ne sont donc plus du tout "errants". Le changement de point de vue de l'observateur rend possible l'idée de lois du mouvement. Le mouvement errant devient nomologique. C'est un tournant absolument capital dans le concept de modèle et le passage radical de (dé)compositions extrinsèques à des structures intrinsèques.

5.3 Le modèle elliptique keplérien

Johannes Kepler (1571-1630), assistant puis successeur de Tycho Brahe comme mathématicien impérial à Prague à la cour de l'empereur Rodolphe II est évidemment celui qui a le plus profondément transformé la cosmologie puisqu'il changea complètement le type idéal des orbes planétaires et permit

la "danse" des planètes.

[33] Il ne s'agit pas d'un simple changement de repère cinématique inertial comme plus tard dans la relativité galiléenne-newtonienne (cf. plus bas) mais d'un changement de repère beaucoup plus profond puisque justement un repère lié à la Terre n'est pas inertial relativement à ce groupe de relativité.

d'accéder à une synthèse computationnelle radicalement explicative. Comme le souligne Steinar Thorvaldsen (2010, [62])

> "He was the first natural philosopher whose analysis reached *laws of nature* in the modern meaning of the word."

Le statut du type idéal elliptique n'est plus seulement celui d'un schème mais celui d'un modèle, modèle dépendant d'une distance de base (ce qu'était le rayon du déférent dans les modèles précédents) et de l'excentricité de l'ellipse. Ce dernier point est particulièrement intéressant."Sauver les phénomènes" exige, même dans l'héliocentrisme de Copernic, de déformer un cercle dont le centre a une position considérée comme naturelle. Une solution est d'excentrer le cercle en gardant donc le primat du schème du cercle mais en lui assignant un centre moins naturel. Une autre solution, celle de Kepler, consiste à tenir compte du fait, connu depuis le géomètre-astronome alexandrin Apollonius de Perga (milieu IIIème-début IIème av. J.-C.), que le cercle appartient à une famille de coniques et se déforme en ellipse, son centre se scindant en deux foyers.

Tout commence donc avec la nouvelle présentation héliocentrique des données de Tycho Brahe, en particulier pour la trajectoire de Mars.[34] L'héliocentrisme fait apparaître la régularité quasi circulaire des orbes mais, comme Copernic le savait déjà, les cercles ne correspondent pas exactement aux données et la grande précision des mesures implique qu'il ne s'agit pas là de possibles marges d'erreur mais bien d'une *non circularité intrinsèque.*

Kepler a réussi à résoudre le problème à partir des informations suivantes.

1. il savait que l'année martienne est de 687 jours et donc que quand Mars revient à sa position initiale au temps $t_1 = t_0 + 687$ la Terre a accompli environ 1,88 révolutions et n'est donc pas au même endroit ;
2. il savait mesurer la longitude héliocentrique de la Terre (l'angle du point vernal et de la Terre à partir du Soleil) et la longitude géocentrique de Mars (l'angle entre le Soleil et Mars à partir de la Terre) ;
3. ces deux *angles* lui permettaient de calculer la *position* de Mars sur son orbite circumsolaire ;
4. il pouvait compter sur 10 mesures (5 couples) et cela lui donnait donc 5 points ;

[34] Mercure et Vénus sont les plus proches du Soleil. Il y a ensuite la Terre, Mars, puis Jupiter et Saturne. Mars peut donc être en opposition au Soleil par rapport à la Terre et se lever (se coucher) quand ce dernier se couche (se lève).

5. il a pu alors constater qu'aucun des cercles construit à partir de trois de ces points ne contenait les deux autres ;

6. enfin, il a pu montrer que les écarts, même très faibles, étaient plus grands que les marges d'erreur (on voit vraiment à quel point la précision des données numériques de Tycho Brahe fut fondamentale).

Sur cette base, Kepler, grand observateur et grand calculateur, fut aussi un théoricien génial. Son travail est un véritable tour de force. Sur le plan géométrique et cinématique il abandonne l'hypothèses de cercles excentriques. Il pense à des ovales puis en arrive aux ellipses. Mais il introduit, au-delà de la géométrie qui explique les variations de distance, des hypothèses proprement physiques qui expliquent les variations de vitesses. Les planètes se meuvent plus ou moins rapidement sur leur trajectoire suivant leur distance au soleil, elles sont plus ou moins "paresseuses" comme si des forces s'exerçaient sur elles.

Grâce à cette présentation adéquate des données recueillies, des régularités sont apparues et Kepler a pu "lire le livre de la Nature" et trouver ses trois lois qui expriment sa simplicité, son unité, son économie, son harmonie.

Dans *Astronomia Nova* de 1609 ([26], dédiée à l'empereur Rodolphe II) les deux premières lois sont expliquées :

1. les orbites planétaires sont elliptiques ;

2. le rayon Soleil-Planète balaye des aires égales pendant des durées égales (loi des aires).

La troisième loi, à savoir que le rapport a^3/T^2 du cube du demi grand axe a de l'ellipse au carré de la période T est une constante indépendante de la planète (un invariant des mouvements planétaires), date de 1618.[35].

Il faut également noter un changement profond de statut de la synthèse computationnelle chez Kepler. Il n'avait plus à utiliser des méthodes de décomposition en mouvements circulaires uniformes donnant des approximations successives. Il disposait désormais de structures intrinsèques (ellipses) exactes. Mais ce n'est pour autant que les calculs (longueurs d'arcs et aires de secteurs d'ellipse) étaient plus directs. Bien au contraire. En effet ils ne pouvaient reposer que sur une trigonométrie "elliptique" qui transcendait complètement la trigonométrie circulaire classique dont disposait Kepler. L'élaboration de cette dernière (intégrales et fonctions elliptiques) sera l'un des apports majeurs de la seconde moitié du XVIIIème siècle et de la première

[35]Cette constante est égale à $M_S G_N$ où M_S est la masse solaire et G_N la constante (plus tard dite newtonienne) de gravitation.

moitié du XIXème siècle et nécessitera tout le génie de géants comme Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Adrien-Marie Legendre (1752-1853), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Niels-Henrik Abel (1802-1829), Karl Gustav Jacobi (1804-1851), Karl Weierstrass (1815-1897), Bernhard Riemann (1826-1866).

Kepler trouve l'équation d'une ellipse en coordonnées polaires centrées sur le foyer solaire. Si le grand axe (joignant le périhélie à l'aphélie de la planète) est de longueur $2a$, si le petit axe est de longueur $2b$ et si la distance entre les deux foyers est $2c$, alors $a^2 = b^2 + c^2$ et l'excentricité est $e = c/a$. Elle est nulle pour un cercle ($a = b$) et égale à 1 pour une ellipse écrasée sur son grand axe ($c = a$ et $b = 0$). Si φ est l'angle que fait le rayon planète-foyer solaire avec le grand axe et si ρ est sa longueur on a $\rho(\varphi) = p/(1 + e.\cos(\varphi))$ où $p = a(1 - e^2)$ est une constante.

Kepler est conduit (dans *Astronomia Nova* [26] puis dans ses *Epitome* [27] de 1618-1621) à résoudre une équation (qui porte son nom depuis) permettant de calculer l'anomalie excentrique inconnue E à partir de l'excentricité connue e et de l'anomalie moyenne M (un nombre compris entre 0 et 2π), également connue. Cette équation est $M = E - e.sin(E)$. Kepler savait qu'elle n'est pas résoluble par une formule simple. Transcendante, elle fit l'objet de nombreuses analyses, de Newton (1686) à Cassini (1710) ou Levi-Civita (1904). Elle est encore aujourd'hui l'objet d'études cherchant à optimiser les méthodes algorithmiques de sa résolution numérique.[36] C'est donc un véritable fait d'armes que Kepler ait réussi à la résoudre correctement avec les méthodes de son temps.

Arrêtons-nous un instant sur cette équation de Kepler. Elle est tout à fait élémentaire mais les calculs pour trouver ses solutions sont tout à fait non triviaux. Il s'agit d'un phénomène général dans les modèles à base d'équations fondamentales : les équations sont simples mais le calcul des solutions est compliqué.

On considère donc (cf. figure 5) une planète de position P au temps t sur l'orbite elliptique autour du foyer F d'une ellipse d'excentricité e. On vient de voir que $a^2 = b^2 + c^2$ et que $e = c/a$. Soit AB le grand axe de l'ellipse, A étant le périhélie. D'après la loi des aires, l'aire du secteur elliptique AFP est proportionnel à $t - t_0$, Aire$(AFP) = k(t - t_0)$, t_0 étant l'instant où la planète passe en A. Le facteur k est facile à définir. Si la planète effectue une révolution de période T, comme l'aire de l'ellipse est

[36] Voir Peter Colwell [11].

πab, on a $\pi ab = kT$ et donc $k = \pi ab/T$ et Aire(AFP)= $\pi ab(t - t_0)/T$. Pour pouvoir calculer la position P, Kepler utilise le cercle circonscrit de centre O et construit le point Q à la "verticale" de P. L'anomalie excentrique E est l'angle AOQ et sa connaissance implique celle de P. L'ellipse étant obtenue à partir du cercle par l'homothétie verticale de rapport b/a, on a Aire(AFP) $= (b/a)$Aire(AFQ). Mais l'aire du secteur AFQ centré sur F est l'aire du secteur circulaire AOQ centré sur O moins l'aire du triangle FOQ. La première aire est évidente : Aire(AOQ) $= (1/2)a^2E$. La seconde conduit à l'équation de Kepler. En effet un côté du triangle est c et la hauteur correspondante est $a.\sin(E)$. Donc l'aire est $(1/2)ca.\sin(E)$ et comme $c = ae$, on obtient Aire(FOQ) $= (1/2)a^2e.\sin(E)$. D'où

$$\text{Aire}(AFQ) = (1/2)a^2(E - e.\sin(E))$$

et

$$\text{Aire}(AFP) = (b/a)(1/2)a^2(E - e.\sin(E)) = \pi ab(t - t_0)/T.$$

En simplifiant par ab on trouve l'équation d'Euler

$$E - e.\sin(E) = (2\pi/T)(t - t_0) = M$$

M étant l'anomalie moyenne et $2\pi/T$ le mouvement moyen.

Kepler résout son équation par une méthode itérative (*regula positionum*) qui deviendra standard à partir de Newton. En termes actuels il s'agit de trouver un point fixe de la fonction $g(E) = M + e.\sin(E)$. Mais la dérivée $g'(E) = e.\cos(E)$ est toujours de module < 1 si $e < 1$. Elle est donc "contractante" et la suite $E_0 = M$, $E_{n+1} = M + e.\sin(En)$ converge (mais lentement, d'où l'intérêt des méthodes algorithmiques permettant d'accélérer la convergence).

On peut chercher des développements en séries en fonction de e qui est petit pour les planètes comme Mars. Mais le problème est en fait compliqué pour des raisons de structure. Pour bien le dominer il faut comprendre le comportement de la fonction $M = E - e.\sin(E)$ dont la dérivée est $1 - e.\cos(E)$ et les dérivées successives alternativement $\pm\sin(E)$ et $\pm\cos(E)$. Kepler se situe *avant* le calcul infinitésimal systématisé par Newton et Leibniz. Il faudra attendre Lagrange et Laplace (1823) pour avoir des développements en séries entières avec rayon de convergence explicite $e_0 < 0,6627...$[37] En fait il

[37]Pour les comètes de très grande excentricité il a donc fallu imaginer d'autres méthodes (cf. Jeremiah Horrocks (1618-1641) par exemple).

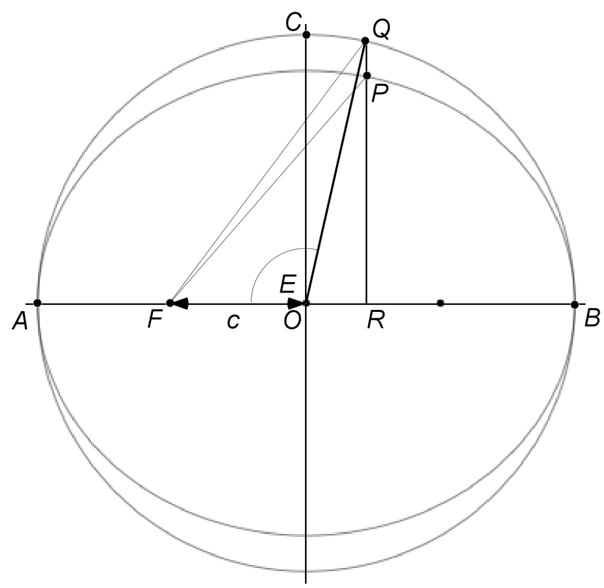

Figure 5: L'équation de Kepler. Pour des raisons de lisibilté de la figure $c = (1/2)a$ et donc l'excentricité est de 0.5 (valeur très grande) et $b = a\sqrt{3}/2$. L'axe des x est orienté de B vers A (de l'aphélie vers le périhélie).

faut regarder le prolongement analytique de la fonction E au plan complexe pour comprendre vraiment la situation.

Dans ses célèbres *Tabulae Rudolphinae* de 1627 [28] Kepler a donné les méthodes[38] pour *anticiper* par le calcul (interpoler) les positions passées et futures des planètes. Il a prédit en particulier en 1629, dans son *De raris mirisque Anni 1631* [29], le transit en 1631 par rapport au soleil de Mercure (7 novembre) et Vénus (un mois plus tard). Mais sa mort en 1630 le priva de la joie de confirmer lui-même sa prédiction. Cependant elle fut effectivement observée par quelques grands astronomes dont Gassendi.

En résume (cf. figure 6), Kepler change complètement la présentation des données et remplace comme schème un type idéal par un modèle structurel paramétré (orbes elliptiques) assujetti à des lois. La synthèse computationnelle exige la résolution d'équations fonctionnelles transcendantes. Elle permet non seulement un fit avec les données mais des *prédictions* à long terme.

6 Mécanique classique : Newton

Avec Newton (1642-1727) et ses magistraux *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687, [39]), la mécanique céleste et la mécanique tout court acquit une structure théorique très précise. C'est tout un "étage supplémentaire" des procédures respectivement ascendantes et descendantes d'analyse conceptuelle et de synthèse computationnelle qui s'ajouta aux modèles kepleriens. On passa des hypothèses aux *principes*, ce qui représenta une profonde transformation non seulement physique mais aussi métaphysique.

6.1 Des Principes aux équations

Rappelons les principes newtoniens.

1. D'abord il y a la *cinématique* formulant le cadre universel des mouvements. Elle est constituée d'un espace affine euclidien tridimensionnel, d'un temps universel, des repères privilégiés que sont les repères inertiaux (mouvements rectilignes uniformes) et du groupe de changements de repères inertiaux qu'est le groupe de Galilée.[39] Ce cadre cinématique s'appelle souvent

[38]Méthodes utilisant les logarithmes introduits par John Napier (1550-1617) que Kepler découvre en 1619.

[39]La notion explicite de groupe n'existait évidemment pas à l'époque, mais la relativité galiléenne était cependant bien comprise. La question principale était de savoir s'il y avait

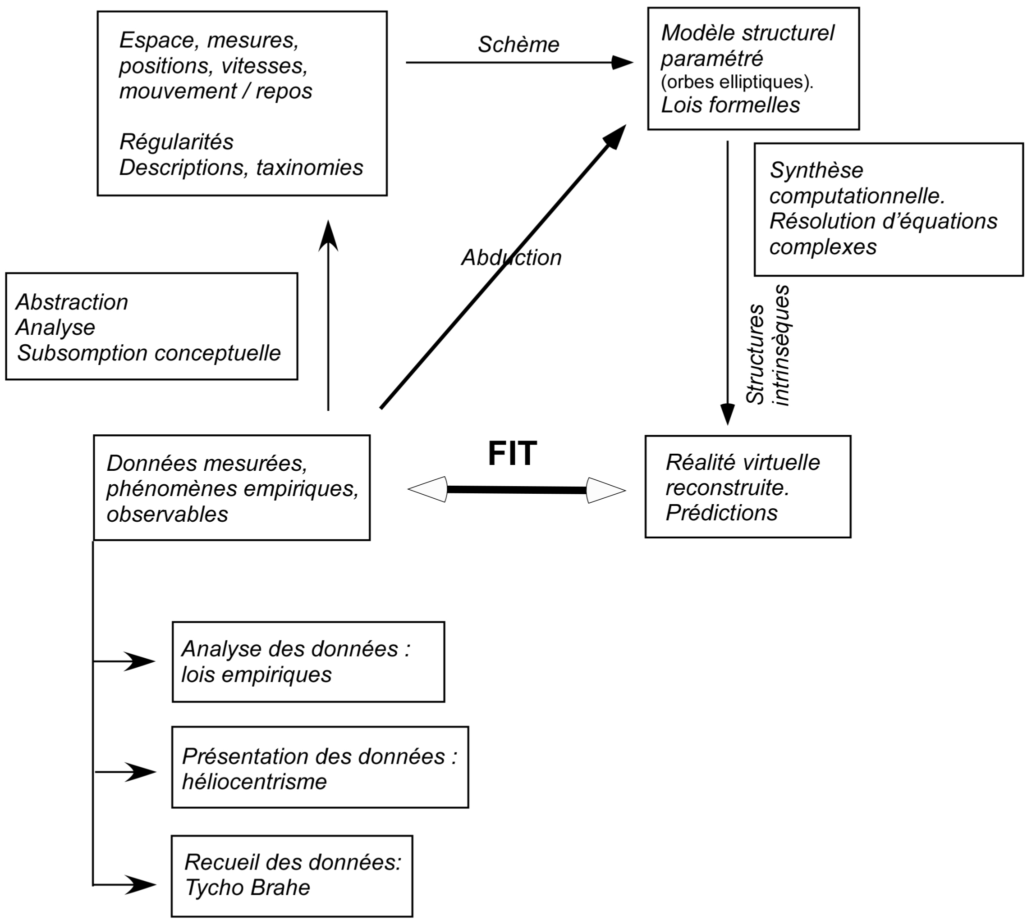

Figure 6: La synthèse computationnelle chez Kepler. Elle précise beaucoup celle présentée à la figure 4. Un apport considérable vient de la différence majeure dans la présentation des données empiriques (Tycho Brahe) obtenue en changeant de repère (passage à l'héliocentrisme). Cela renforce l'apparition de régularités et permet de raffiner, côté synthèse computationnelle, le modèle structural de mouvement fonctionnant comme schème et type idéal pour le "concept intuitif" de mouvement. La synthèse computationnelle peut alors s'effectuer essentiellement au moyen de "structures intrinsèques" paramétrées (orbes elliptiques) et non plus au moyen de "décompositions extrinsèques" (épicycles).

aujourd'hui une structure d'arrière-plan ou "background structure". C'est elle qui correspond aux "a priori" chez Kant dans ses *Premiers Principes Métaphysiques de la Science de la Nature* de 1786.[40]

2. Il y a ensuite la mécanique avec sa loi fondamentale et universelle liant les causes physiques aux mouvements d'un corps matériel de masse m. Elle s'écrit $f = m\gamma$ où f est la résultante des forces exercées sur le corps et γ son accélération. Si l'on introduit le moment $p = mv$ elle s'écrit $p' - f = 0$.[41] Une autre loi universelle est celle de la réciprocité de l'action et de la réaction.

3. Il y a enfin la loi de la gravitation universelle disant que deux corps de masses respectives M et m s'attirent selon une force égale à $G_N Mm/R^2$ où G_N est la constante universelle de gravitation et R la distance entre les deux corps.

Un cas particulièrement simple de cette loi peut se déduire des lois de Kepler. Considérons un mouvement circulaire uniforme positif de période T d'un point P sur un cercle de rayon R (c'est un cas trivial d'orbite keplérienne). En coordonnées polaires, $P = (R\cos(\varphi), R\sin(\varphi))$ et donc, puisque R est constant, la vitesse $v = dP/dt$ est $v = (-R\sin(\varphi)\varphi', R\cos(\varphi)\varphi')$ où φ' est la vitesse angulaire $d\varphi/dt$. Le module de v est donc $R\varphi' = 2\pi R/T$. La dérivée de la vitesse, c'est-à-dire l'accélération, est

$$v' = P'' = (-R\cos(\varphi)(\varphi')^2, -R\sin(\varphi)(\varphi')^2) \ .$$

Elle est portée par le rayon vecteur, centripète et de module $R(\varphi')^2 = R(2\pi/T)^2$. Mais d'après la troisième loi de Kepler R^3/T^2 est une constante et donc l'accélération et la force sont proportionnelles à $R/R^3 = 1/R^2$.

Chez Newton, ce genre de résultat est démontré géométriquement en décomposant les mouvements en mouvements infinitésimaux linéaires. Mais très vite la géométrie disparut au profit d'un calcul intégro-différentiel maîtrisé.

Nous ne nous étendrons pas sur la façon dont les lois de Kepler du problème à deux corps Soleil-Planète avec Soleil fixe peuvent être calculées en intégrant l'équation différentielle $f = m\gamma$. Tous ceux intéressés par les modèles physiques l'ont appris à l'école et nous y reviendrons plus bas avec les équations d'Euler-Lagrange. Nous voudrions plutôt insister sur la percée que furent les *Principia* pour la synthèse computationnelle.

---

un espace cosmologique absolu (un repère inertial global) ou si la relativité du mouvement était radicale. Newton admettait un espace absolu. Kant ne l'admettait pas.

[40] *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, [25].

[41] De façon générale, si $h(t)$ est une fonction, $h'(t)$ est sa dérivée première dh/dt et $h''(t)$ sa dérivée seconde. v est la vitesse.

Le point important est que, en explicitant les forces, on trouve une foule d'équations différentielles pour les mouvements mécaniques les plus variés. Souvent ces équations sont très simples à formuler alors que leurs solutions par intégration sont extrêmement difficiles à trouver. C'est que, comme nous l'avons déjà indiqué, l'équation différentielle est un *générateur infinitésimal* du mouvement et l'intégration est une itération du générateur. C'est l'*itération* qui engendre la complexité.

Considérons par exemple le pendule simple. Soient m la masse du pendule, O son centre de rotation et l sa longueur. Le mouvement s'effectue le long du cercle C de centre O et de rayon l. Le pendule est soumis à l'action de la pesanteur dont l'accélération est g. Soit θ l'angle du pendule P par rapport au demi-axe OA vertical descendant (A est la position du pendule au repos). L'énergie E, qui est une constante du mouvement en l'absence de friction, est la somme de l'énergie cinétique $(1/2)m(d\theta/dt)^2$ et de l'énergie potentielle $mgl(1 - \cos(\theta))$ qui est le travail de mg le long de la différence de hauteur. Pour simplifier, on pose $m = g = l = 1$. En écrivant que la dérivée de E est nulle (constante du mouvement) on obtient la célèbre équation $\theta'' = -\sin(\theta)$. Rien de plus simple. Dans le régime des petites oscillations, $\sin(\theta) \sim \theta$ et l'équation devient celle de l'oscillateur harmonique $\theta'' = -\theta$. Mais pour résoudre exactement l'équation du pendule pour tous les mouvements possibles (grandes oscillations et tours complets) on a dû inventer la théorie des intégrales et des fonctions elliptiques que nous avons évoquée plus haut à propos de l'équation de Kepler.

Newton a ainsi ouvert un immense univers de calculs et d'algorithmes qui est encore, plus de trois siècles plus tard, largement à explorer. On ne compte pas les trouvailles mathématiques de génie que la résolution des équations de la mécanique a suscité.[42]

6.2 Exemples de complexité

Par exemple rien de plus simple à écrire que les équations du problème à N corps. Rien de plus difficile à résoudre.

Lagrange a étudié le système gravitationnel à trois corps composé d'un soleil S, d'une planète P et d'une petite lune. Les mouvements possibles de la lune sont déjà d'une grande complexité comme le montre la figure 7

[42] Sur le rapport de Newton aux mathématiques, cf. l'ouvrage de Niccolò Guicciardini [21].

que nous avons faite avec le logiciel *Gravitation* et où nous avons indiqué les principales phases du mouvement.

1. La lune commence par orbiter autour de S mais de façon excentrée et irrégulière car elle subit aussi l'attraction non négligeable de P.
2. Elle change brutalement de parcours et va orbiter autour de P.
3. Elle décrit alors des épicycles irréguliers autour de la trajectoire de P qui agit comme déférent.[43]
4. Elle rechange de parcours et retourne orbiter autour de S.
5. Elle rechange encore une fois de parcours et décrit à nouveau des épicycles autour de la trajectoire de P.
6. Enfin, elle est capturée gravitationnellement par P.

Ce qui est fascinant dans cette "danse" des mouvements est qu'ils sont des solutions absolument *déterministes* du problème à trois corps et que leur géométrie compliquée est *arithmétiquement encodée* dans les valeurs numériques *exactes* des paramètres. Des variations infimes de ces paramètres peuvent complètement changer les trajectoires. Il s'agit là d'un problème fondamental et particulièrement difficile.

Aujourd'hui on utilise les équations de Kepler-Newton pour mettre au point des trajectoires balistiques compliquées dans le système solaire. Par exemple, le vaisseau spatial Rosetta de 2004 de l'ESA (Agence spatiale européenne) vers sa comète cible 67P/Churyumov–Gerasimenko a effectué pendant une dizaine d'années plusieurs manœuvres de "fronde gravitationnelle" pour accélérer sa vitesse en frôlant des planètes bien choisies (trois fois la Terre et une fois Mars) pour arriver sur l'orbite de Jupiter à environ cinq cents millions de kilomètres du Soleil, avant d'orbiter enfin autour de la comète. Et que penser de systèmes comme les anneaux de Saturne étudiés par la mission Cassini de la NASA. Ils s'étendent sur des centaines de milliers de kilomètres, ils sont extrêmement fins (environ 10 mètres, une feuille de papier par rapport à 1 km), ils sont constitués de milliards de fragments individuels (principalement de la glace) et sont animés par des vagues.

De même le télescope spatial James Webb a été mis en orbite autour du point de Lagrange L_2 du système keplérien à deux corps Soleil-Terre, point situé à environ 1,5 millions de kms de la Terre sur l'axe Soleil-Terre du côté opposé au Soleil (voir figure 8).[44]

---

[43] Il ne s'agit pas d'épicycles qui sont des composantes idéales du mouvement mais d'épicycles réels.

[44] Les points de Lagrange du système Soleil-Terre sont les points où un petit corps de masse négligeable accompagne exactement le mouvement orbital des deux corps autour de

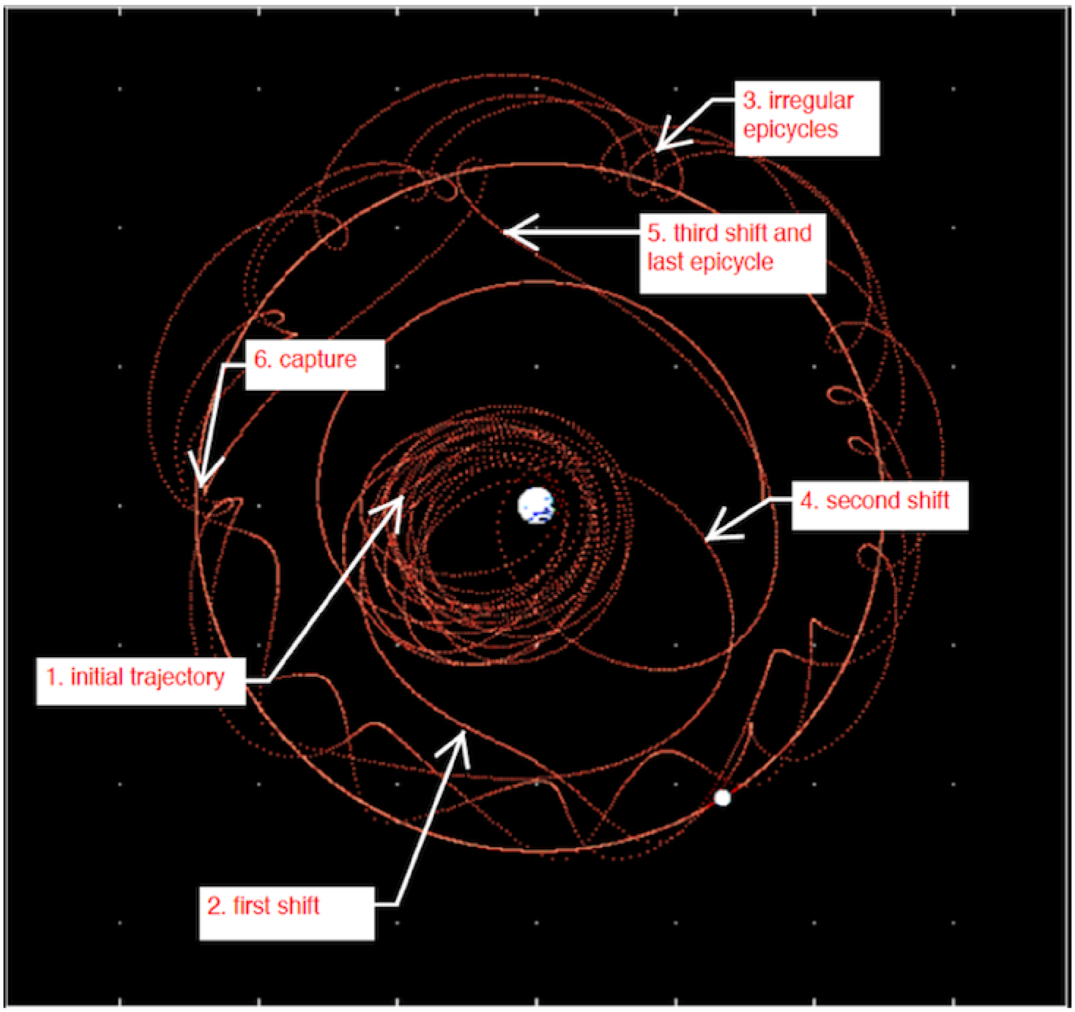

Figure 7: Lagrange : système gravitationnel à trois corps composé d'un soleil S, d'une planète P et d'une petite lune. Les mouvements possibles de la lune sont d'une grande complexité.

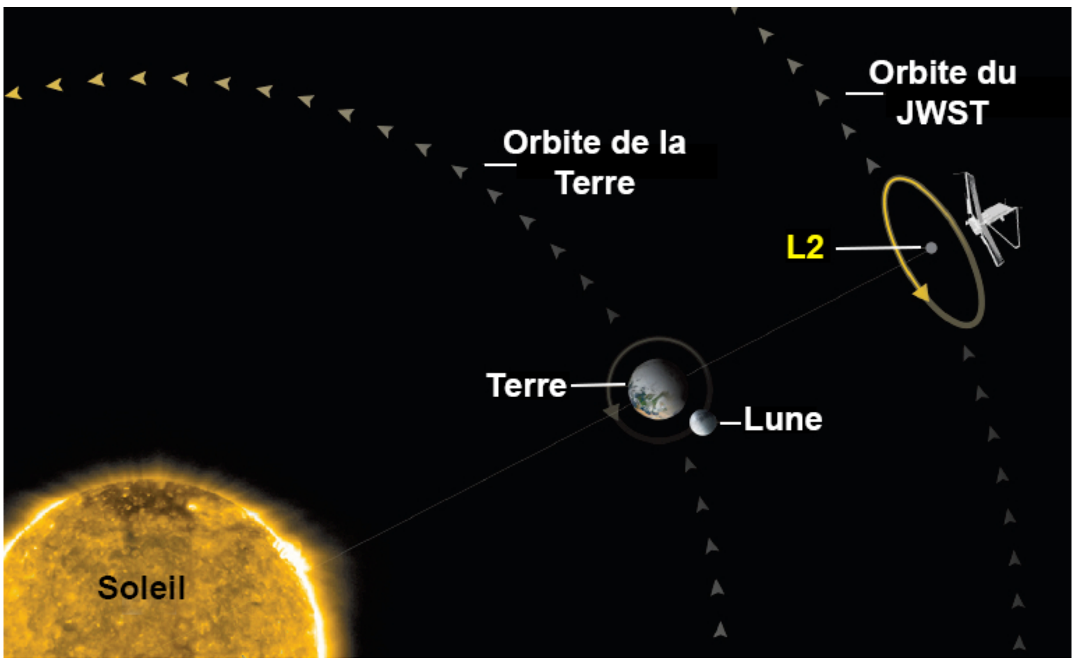

Figure 8: Le télescope spatial James Webb mis en orbite autour du point de Lagrange L_2 du système Soleil-Terre.

De façon générale, pour le problème à N corps, on représente les N positions des corps comme un point d'un espace $\mathcal{C}$ de dimension $3N$ appelé "espace de configurations". Si l'on adjoint les vitesses on obtient le fibré tangent $T\mathcal{C}$ qui est de dimension $6N$ et appelé "espace des phases".[45] L'équation de Newton portant sur les accélérations est une équation différentielle du premier ordre sur les vitesses et la dynamique du système est donc définie par un champ de vecteurs tangents $\mathcal{X}$ sur $T\mathcal{C}$. Si le mouvement était un simple produit d'orbites kepleriennes autour du Soleil fixe il serait un mouvement périodique sur un tore. Mais ce n'est pas du tout le cas.

Poincaré fut celui qui inaugura les nouvelles méthodes de dynamique qualitative dans ses extraordinaires trois volumes sur *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1892–1899, [55]). La complexité du problème à trois corps est telle que seule une approche qualitative devient possible. Nous ne pouvons pas en parler ici car le sujet est beaucoup trop technique mais nous ne saurions trop conseiller au lecteur intéressé de regarder l'article très bien illustré d'Alain Chenciner (2012, [8]) l'un des meilleurs spécialistes mondiaux de ces difficultés. Bornons-nous à le citer (p. 48) :

> "This extraordinary work [...] is the source of a major part of the modern theory of *Dynamical Systems: normal forms, exponents, invariant manifolds, homoclinic and heteroclinic solutions, analytic non-integrability, divergence of the perturbation series and exponentially small splitting of separatrices, variational equations and integral invariants, generating functions, recurrence theorem, surfaces of section and return maps, twisting property*, all of them are part of the present landscape and they paved the way for *bifurcation studies and the theory of singularities, symbolic dynamics, invariant measures and ergodic theory, K.A.M., weak K.A.M. and diffusion, symplectic geometry* ... and also a wealth of computer experiments."[46]

---

leur centre de gravité parce que les forces du champ gravitationnel des deux corps et les forces centrifuges s'équilibrent exactement. En utilisant les lois de Newton et de Kepler on montre qu'ils sont au nombre de 5. (L'article de Wikipedia est très bien fait).

[45]L'espace des phases est en fait le dual de $T\mathcal{C}$, l'espace cotangent $T^*\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$.

[46]K.A.M. sont les initiales de Andreï Kolmogorov, Vladimir Arnold et Jürgen Moser spécialistes des systèmes dynamiques a qui l'on doit un théorème fondamental (1954 et 1963) sur la persistance lors de la perturbation des systèmes hamiltoniens intégrables de certains tores invariants sur lesquels le mouvement est quasi-périodique.

6.3 Le principal problème philosophique : le paradoxe de la Mécanique newtonienne

En plus des extrêmes difficultés calculatoires rencontrées lors de l'intégration des équations différentielles, le progrès accompli par Newton et l'introduction d'un nouvel étage dans la dialectique ascendante-descendante des analyses conceptuelles et des synthèses computationnelles pose un nouveau problème *philosophique* majeur : quels sont les liens structurels *schématiques* "en haut" entre Catégories et Principes côté analyse conceptuelle et Lois fondamentales et équations différentielles côté synthèse computationnelle ?

La solution de Newton dans le *General Scholium* de 1713 (2ème édition des *Principia*) est le fameux "hypotheses non fingo".("je n'imagine pas d'hypothèses").

> "Je n'ai pu encore parvenir à déduire des phénomènes la raison de ces propriétés de la gravité [forces à distance instantanées en $1/R^2$], & je n'imagine point d'hypothèses. Car tout ce qui ne se déduit point des phénomènes est une hypothèse: & les hypothèses, soit métaphysiques, soit physiques, soit mécaniques, soit celles des qualités occultes, ne doivent pas être reçues dans la philosophie expérimentale."[47]

Ce problème de Newton est on ne peut plus critique. Les lois permettent de calculer les mouvements avec une efficacité inouïe. Elle ne reposent plus comme avant, d'Eudoxe à Kepler, sur des "hypothèses" (modèles idéaux) mais sur des principes, le paradoxe étant que des forces à distance instantanées et *globales* dans le vide qui seraient les causes des mouvements dépassent l'entendement conceptuel ! Il faudrait que l'espace-temps qui est la structure d'arrière plan des phénomènes physiques soit lui-même un milieu *physique*, ce qui est contradictoire. Newton était le premier à considérer de telles hypothèses comme "absurdes" et pensait au pis aller d'un improbable "éther' (milieu physique coextensif à l'espace-temps vide) pour les rendre acceptables.

On représente le problème à la figure 9.

On considère souvent cette affirmation de Newton comme le début de l'opérationnalisme en physique. C'est par exemple la thèse de Bernard Cohen dans *The Newtonian Revolution* de 1983 [10].

[47] Traduction de la Marquise du Châtelet.

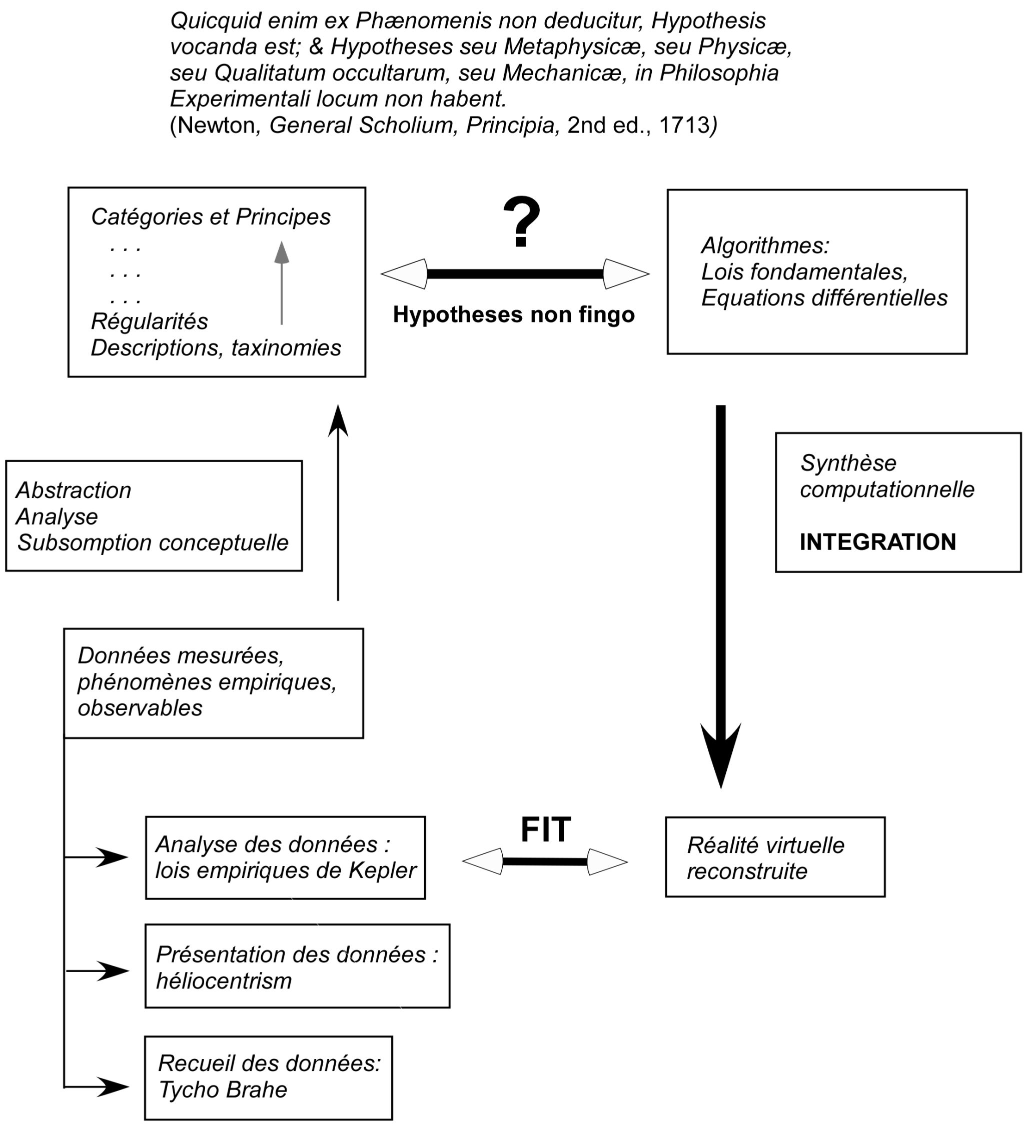

Figure 9: Le problème newtonien de l'"hypotheses non fingo".

En fait l'énigme d'une théorie de la gravitation qui est à la fois computationnellement hyperefficace et conceptuellement paradoxale ne sera résolue que beaucoup plus tard.

1. D'abord par la localisation de la gravitation par l'équation de Poisson. Il fallut attendre le développement au début du XIXème siècle de la notion de champ, nécessaire à l'explication des phénomènes électro-magnétiques, pour que s'impose la notion de champ gravitationnel. Un corps de masse M en O crée le champ gravitationnel central $G(r) = (G_N M/r^2)u_P$ en P où r est la distance PO et u_P le vecteur unitaire porté par PO. Ce champ dérive du potentiel gravitationnel $V = -G_N M/r$ et une masse m en P subit une force $f = mG(r)$. Les équations de Newton sont alors équivalentes à l'équation

$$\text{Rotationnel}(G(r)) = 0$$

qui exprime l'existence de V et à l'équation de Poisson

$$\Delta V = -\text{Divergence}(G(r)) = 4\pi\rho$$

où Δ est l'opérateur laplacien et ρ la densité volumique de la distribution de matière.

2. Mais, ensuite et surtout, le paradoxe de Newton fut résolu par la Relativité Générale d'Einstein à l'aide d'une redéfinition complète de la géométrie sous-jacente de la gravitation (géométrie riemannienne et élimination de la "background structure").

Le chemin fut donc extrêmement long pour combler le fossé entre l'analyse conceptuelle (catégories et principes, compréhension théorique) et la synthèse computationnelle (lois et équations différentielles, explication opérationnelle). Il fut mathématique mais aussi métaphysique et nous pensons que les *Premiers Principes Métaphysiques de la Science de la Nature* [25] de Kant sont le premier texte à avoir explicité les fondements métaphysiques de la Mécanique newtonienne. Nous pensons que c'est en suivant une interprétation transcendantale de la physique post-newtonienne que l'on arrive à "dévisser" son statut paradoxal.

7 Le tournant transcendantal

En 1955 Jules Vuillemin, dans *Physique et métaphysique kantiennes* [64] expliquait qu'en physique le transcendantal signifie simplement relativité et groupes de symétrie. Son analyse admirable des *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (MAN) est à l'origine de notre défense et illustration de la philosophie transcendantale depuis 1970. Les MAN sont en effet selon nous le plus grand texte philosophique sur la mécanique newtonienne. Ils ont fait l'objet d'une analyse non moins admirable que celle de Vuillemin par Michael Friedman dans *Kant's Construction of Nature* [19] en 2013. Nous les avons commentés dans de nombreux articles.[48]

Dans ses MAN Kant a corrélé très précisément la structure de la théorie de Newton avec les quatre classes de Catégories et de Principes mis en place dans la *Critique de la Raison pure* (CRP). L'interprétation du principe de permanence de la substance comme origine des principes physiques de conservation est particulièrement remarquable.

MAN	CRP
Phoronomie	**Phoronomie**
Structure d'arrière-plan : espace et temps.	Catégories de la quantité.
États observables : position et vitesse.	Grandeurs extensives.[49]
Mesure : métrique euclidienne.	Axiomes de l'intuition.
Structure algébrique : composition des vitesses	
Relativité galiléenne et repères inertiaux.	
Dynamique	**Dynamique**
Forces primitives internes à la matière	Catégories de la qualité.
(répulsion, attraction).[50]	Grandeurs intensives.
Réduction de la matière à la masse.	Anticipations de la perception.
Mécanique	**Mécanique**
Lois de conservation. Invariance.	Catégories de la relation.
Loi de Newton : invariance galiléenne. Égalité action-réaction.	Analogies de l'expérience : permanence de la substance, causalité, coexistence.
	Phénoménologie
	Catégories de la modalité.
	Postulats de la pensée empirique.

L'apport de la métaphysique kantienne, en particulier avec l'*Esthétique transcendantale*, est que les concepts ne sont pas la seule condition de possi-

[48]Cf. par exemple [43], [45], [48], [51], [53]. Le lecteur intéressé aux rapports de Kant à Newton pourra aussi consulter Kerszberg [31].

bilité d'une connaissance des objets. Une autre condition de possibilité vient du fait que la donation des phénomènes empiriques possède un format.

Le lien entre les deux est le *schématisme transcendantal* comme "mixte". Albert Lautman considérait les mixtes comme essentiels pour les mathématiques et la physique. Il parlait de

> "mixtes intermédiaires entre des genres d'être différents et dont la considération est souvent nécessaire pour opérer le passage d'un genre de l'être à un autre genre de l'être."[51]

Et Lautman faisait remonter philosophiquement cette problématique à celle, "d'une importance considérable" (p. 106), du schème kantien comme mixte concept/intuition.

Pour les mouvements formalisés par la mécanique newtonienne, l'Esthétique transcendantale est celle de l'espace-temps newtonien avec le groupe de la relativité galiléenne. Cela est admirablement expliqué philosophiquement dans la *Phoronomie.* La démarche kantienne peut être résumée de la façon suivante.

1. Il existe une mathématisation du format de donation des phénomènes c'est-à-dire des "formes de l'intuition". Elles sont alors converties en "intuitions formelles" appartenant à un univers mathématique spécifique (et non à une logique générale). Cet univers mathématique est *constitutivement* associé à la classe de phénomènes considérés.

2. Les catégories doivent dès lors être schématisées en relation avec les mathématiques spécifiques de l'Esthétique transcendantale qui gouverne donc la schématisation dont découlent les Principes.

3. Les principes mathématisés en accord avec la structure des intuitions formelles peuvent être appliqués à la physique.

4. Lorsqu'elles sont appliquées, elles interprètent très précisément les structures théoriques de la Mécanique Newtonienne (Phoronomie, Dynamique, Mécanique, Phénoménologie) : les structures d'arrière plan (background structure), le groupe de relativité les lois et les équations différentielles, l'épistémologie de l'"hypotheses non fingo".

5. La synthèse computationnelle devient ainsi ce que Kant appelle une "construction mathématique" de la Nature.

[51] Lautman 1937-1939 [36], p. 29. Cf. notre étude sur Lautman [42].

La *Phoronomie* kantienne thématise philosophiquement pour la première fois un aspect fondamental de la physique mathématique moderne. La relativité galiléenne signifie que certaines structures mathématiques (repères inertiaux) sont dépourvues de tout contenu physique et que la théorie possède un groupe de *symétries*. Le caractère fondamentalement non conceptuel de ce groupe violant le principe des indiscernables de Leibniz constitue la partie "synthétique à priori" de la Mécanique. Avec l'Esthétique transcendantale dérivée du caractère non conceptuel de la différence des figures symétriques, Kant a formulé *philosophiquement* pour la première fois la relativité. Dans sa *Phoronomie* qui la traduit physiquement, il a thématisé le fait, qu'à cause de la relativité galiléenne, la vitesse ne peut pas être "attachée" à un corps mais seulement à un couple (corps, repère), qu'elle n'est pas une propriété physique intrinsèque des corps (comme la masse et l'accélération) mais une propriété *contextuelle* extrinsèque relative à un repère inertial et que le jugement "le corps A a la vitesse v" est *sans valeur de vérité*. Il a même introduit une classe spécifique de jugements, les jugements *alternatifs* (différents des jugements "disjonctifs" qui, eux, peuvent être vrais ou faux), pour tenir compte de ce paradoxe apparent, traumatisant pour la logique. En fait, il a thématisé philosophiquement ce qui deviendra plus tard la différence entre *covariance* et *invariance*.[52]

Nous représentons à la figure 10 la "construction" kantienne comme synthèse computationnelle.

8 Euler, Lagrange, Noether

Après Newton et les newtoniens, une nouvelle révolution théorique fut celle systématisée par Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) dans sa *Mécanique analytique* de 1788 [35]. Il s'agit d'une approche variationnelle fondée sur un principe de moindre action montrant que l'équation de Newton équivaut à minimiser ce que l'on appelle depuis un lagrangien L, en l'occurence la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Le calcul des variations remonte à Leonhard Euler (1707-1783). C'est dans un texte admirable, le célèbre *Methodus* [17], publié en 1744 (et édité par Constantin Carathéodory) qu'Euler expose et exemplifie de façon éblouissante sa nouvelle *Méthode pour trouver les lignes courbes jouissant de pro-*

[52] Dans [51] et [53], nous formalisons de façon détaillée la *Phoronomie* au moyen de la structure mathématique de groupoïde.

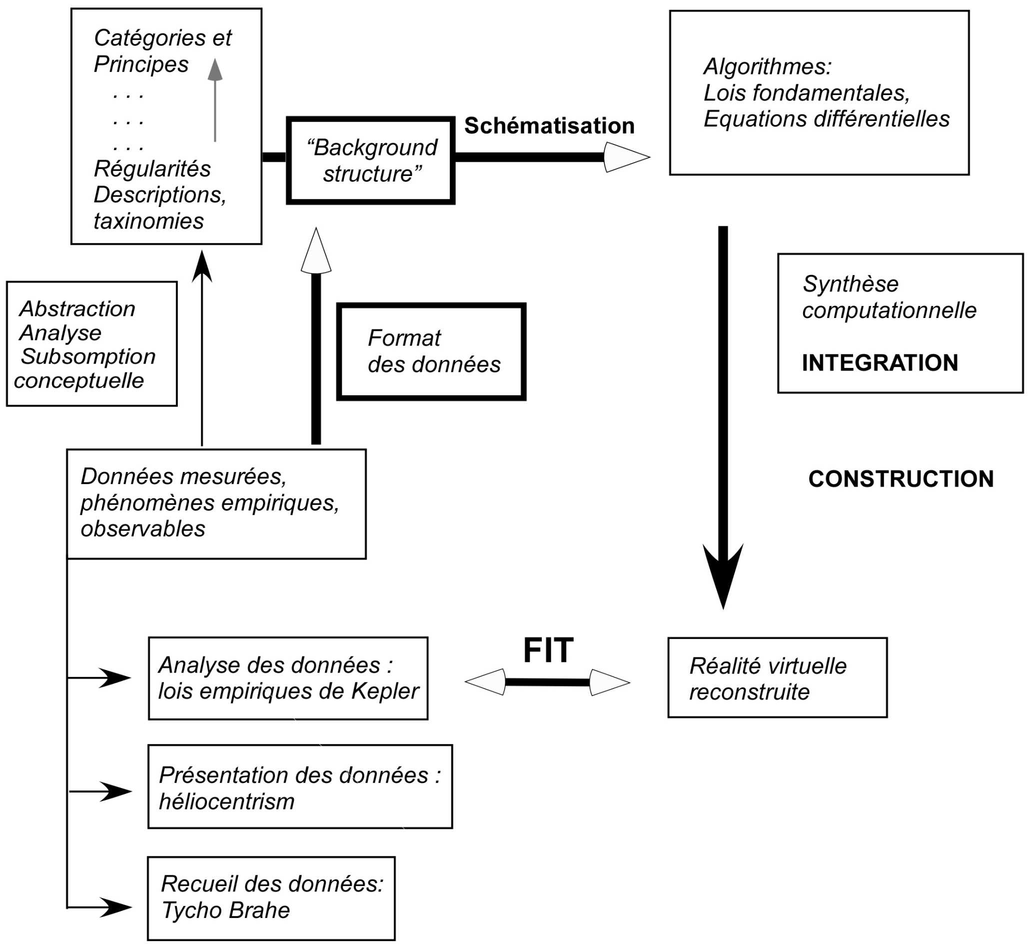

Figure 10: La "construction" mathématique kantienne des catégories comme synthèse computationnelle. Le progrès essentiel par rapport aux représentations précédentes est la décomposition du mixte conceptuel-intuitif de la notion régionale primitive de mouvement entre concepts catégoriaux et intuitions pures. Ces formes de l'intuition constituent une structure d'arrière-fond ("background structure") formatant les données que sont les mouvements empiriques. C'est sur elles que repose la schématisation.

priétés de maximum et de minimum, ou solution de problèmes isopérimétriques au sens le plus large du terme.[53] C'est dans ce texte qu'apparaissent les équations d'Euler qui deviendront plus tard les équations d'Euler-Lagrange, la méthode dite des multiplicateurs de Lagrange et le principe de moindre action comme principe général valide bien au-delà du principe de Fermat en optique.

De façon générale si S est le système mécanique considéré, $\mathcal{C}$ son espace de configurations de fibré tangent $T\mathcal{C}$ (le fibré cotangent $T^*\mathcal{C}$ est l'espace de phases) avec des coordonnées (q, q') et $L : T\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ son lagrangien alors ce que l'on appelle son intégrale d'action est l'intégrale $A(\gamma)$ de L le long de sa trajectoire $\gamma : (q_0, q'_0) \ \to (q_1, q'_1)$ et le principe de moindre action dit que la trajectoire physique *minimise* $A(\gamma)$. Il implique les équations Euler-Lagrange :

$$(d/dt)(\partial L/\partial q') - \partial L/\partial q = 0$$

qui sont exactement les équations de Newton $p' - f = 0$ pour les moments généralisés $p = \partial L/\partial q'$ et les forces généralisées $f = \partial L/\partial q$.

Le formalisme lagrangien permet de reformuler de façon simple et évidente les principes du transcendantalisme.

1. La structure d'arrière-plan (la "background structure", le "synthétique a priori") est tout simplement ce qui n'est pas soumis à variation dans le lagrangien. C'est le cas de la structure euclidienne de l'espace-temps et du groupe de relativité.

2. La relation entre groupe de relativité et lois de conservation s'exprime à travers les *symétries* du lagrangien. C'est ce que formule le théorème fondamental d'Emmy Noether. L'absence de valeurs *absolues* de certaines grandeurs qu'exprime le groupe de relativité signifie que le lagrangien est invariant sous l'action des sous-groupes de relativité associés à ces grandeur et, à chaque sous-groupe se trouve associée une loi de conservation pour une grandeur corrélative. Ce résultat remarquable explicite que les symétries sont *constitutives* de l'objectivité physique et que les théories physiques sont en quelque sorte "galoisiennes" au sens où ce que les symétries interdisent de mesurer de façon absolue détermine les invariants que l'on peut mesurer. On ne saurait trop méditer sur la corrélation qui apparaît ainsi entre translations

[53] Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti.

temporelles et énergie, translations spatiales et moment, rotations et moment angulaire, boosts et centre de masse.

Relativité	**Symétries du lagrangien**	**Lois de conservation**
(entités inobservables)		(quantités mesurables)
Origine du temps	Translations temporelles	Énergie
Origine de l'espace	Translations spatiales	Moment
Direction privilégiée	Rotations spatiales	Moment angulaire
Vitesse privilégiée	Boosts galiléens	Position initiale du
	(repères inertiaux)	centre de masse

Nous avons montré ailleurs que la relation fondamentale entre le formalisme lagrangien et un transcendantalisme modernisé peut être suivi dans toute l'histoire de la physique moderne, jusqu'à la relativité générale, la mécanique quantique et la géométrie non commutative (cf. [43] et [48]).

Nous ne dirons rien ici du passage, pourtant théoriquement crucial, au formalisme hamiltonien qui conduit à la géométrie symplectique. Nous renvoyons à notre étude de 1992 [43]. En revanche nous allons rappeler comment le formalisme newtonien-lagrangien permet très facilement de retrouver les lois de Kepler pour le problème à deux corps avec le Soleil S fixe.

Utilisons les coordonnées polaires (ρ, φ) centrées sur S. La force attractive exercée par S sur la planète P est centrale orientée vers S et donc de composantes $f = (k/\rho^2)(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ $(k < 0)$. Elle dérive du potentiel $V(\rho) = k/\rho$ au sens où $f = -\text{gradient}(V)$. Le lagrangien qui est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est

$$L = (1/2)m((\rho')^2 + (\rho\varphi')^2) - k/\rho$$

et les deux équations d'Euler-Lagrange sont[54]

$$(d/dt)(\partial L/\partial \rho') - \partial L/\partial \rho = m\rho'' - m\rho(\varphi')^2 - k/\rho^2 = 0$$
$$(d/dt)(\partial L/\partial \varphi') - \partial L/\partial \varphi = 0, \text{ donc } (d/dt)(\partial L/\partial \varphi') = 0 \text{ puisque } \partial L/\partial \varphi = 0$$

La deuxième équation $\partial L/\partial \varphi' = \text{constante} = m\rho^2\varphi'$ exprime que le moment angulaire $M = m\rho^2\varphi'$ est conservé.

[54] Rappelons que si $F(x, y)$ est une fonction de plusieurs variables, $\partial F(x, y)/\partial x$ est la dérivée partielle de F par rapport à x.

La vitesse angulaire $\varphi' = d\varphi/dt$ établit le lien entre d/dt et $d/d\varphi$. En passant des dérivées par rapport à t aux dérivées par rapport à φ et en faisant le simple changement de variable $\sigma = 1/\rho$ on obtient l'équation différentielle $d^2\sigma/d\varphi^2 + \sigma = -mk/M^2$. Les solutions sont la constante $-mk/M^2$ et les sinusoïdes et donc

$$\sigma = 1/\rho = -(mk/M^2)(1 + e.\cos(\varphi - \varphi_0))$$

ce qui est la formule de Kepler

$$\rho(\varphi) = \ p/(1 + e.\cos(\varphi)).$$

Cette simple dérivation montre quelle est la nature du nouvel étage de synthèse computationnelle apporté par Newton puis Euler, Lagrange et Hamilton. La générativité de la synthèse est considérablement augmentée et permet de dériver les modèles structurels comme celui de Kepler de "premiers principes" : structures d'arrière-plan synthétiques a priori, groupes de relativité, lois de conservation, équations fondamentales.

Mais en fait, une immense pluralité d'autres modèles structurels peut être déduites des mêmes premiers principes. Cette générativité est représentée à la figure 11.

9 La relativité générale

Pour conclure cette étude nous allons indiquer comment la relativité générale d'Einstein résout le paradoxe de l'"hypotheses non fingo" de Newton.

Presque tous les philosophes des sciences et de nombreux physiciens ont estimé que la relativité générale (RG) marquait la fin définitive de toute approche transcendantale de la physique. L'argument est que la structure d'arrière-plan newtonienne-galiléenne disparaît alors que chez Kant elle est précisément la structure a priori de la Mécanique et devrait donc être immuable. Selon nous, cette thèse, défendue par des philosophes-physiciens aussi profonds et avertis que Hans Reichenbach (cf. [58] 1920, [59] 1924), est fondamentalement erronée et représente l'une des plus graves erreurs de la philosophie des sciences du XXème siècle.[55] Elle suppose que le trans-

[55]Le 15 septembre 1935, Hans Reichenbach ouvrit à la Sorbonne le premier *Congrés International de Philosophie Scientifique*. Il y donna une conférence sur "L'empirisme logistique et la désagrégation de l'a priori" où il expliqua que "le développement de la science peut être considéré comme une décomposition constante des fondements du rationalisme et de l'a priori".

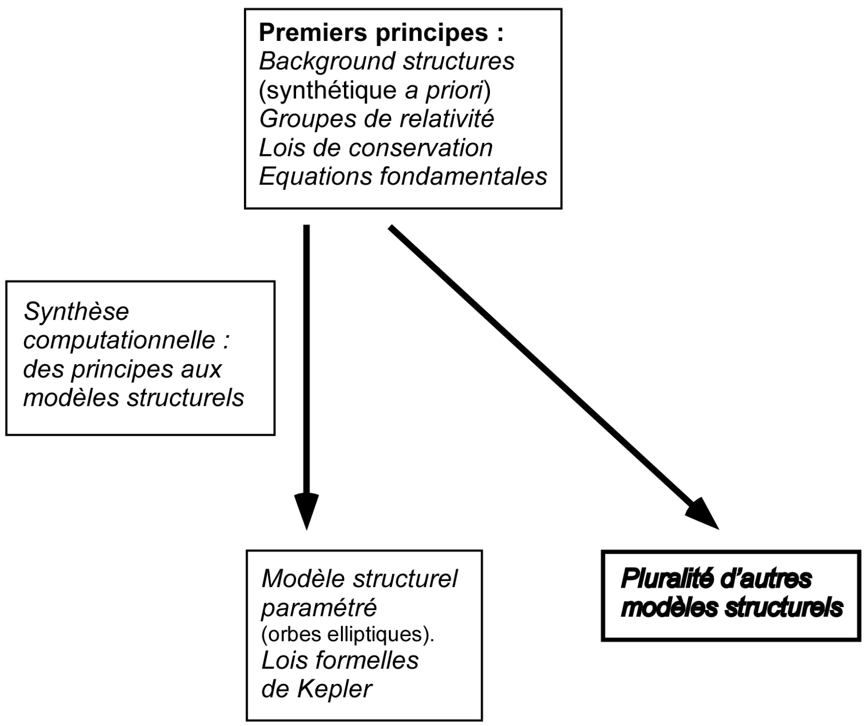

Figure 11: La générativité des premiers principes.

cendantalisme appliqué par Kant à Newton ne peut pas être appliqué à la physique post-newtonienne, ce qui est une absurdité. Comme l'ont affirmés de nombreux kantiens[56], jusqu'à aujourd'hui Michael Friedman[57], la philosophie transcendantale peut être "historicisée" et accompagner l'évolution de la physique.[58] Les moments "synthétiques a priori" d'une théorie physique sont comme des axiomes pour une théorie mathématique. Ils dépendent de cette théorie et peuvent donc changer de contenu avec elle. Le synthétique a priori n'est pas un absolu cognitif et, si l'on en comprend correctement le statut, on est irrésistiblement conduit vers des interprétations transcendantales de la RG comme l'ont été Ernst Cassirer, Oscar Becker ou Hermann Weyl.

En fait, comme nous l'avons montré dans notre étude de 1992 [43], en RG la structure d'arrière-plan cinématique (la "background structure") n'est plus la structure métrique de l'espace-temps mais la structure *différentiable*. La structure métrique[59] devient physique, se déplace de la cinématique vers la mécanique (espace-temps courbe) et doit désormais être déterminée. C'est pourquoi elle "absorbe" les forces dans la géométrie. Son moment transcendantal passe des Catégories de la Quantité et des Axiomes de l'Intuition aux Catégories de la Relation et aux Analogies de l'Expérience.

Réciproquement, tous les mouvements deviennent inertiels, c'est-à-dire que la mécanique est absorbée dans une cinématique générale. Le groupe de relativité devient gigantesque. Ce n'est désormais ni le groupe de Galilée (Newton) ni le groupe de Poincaré (relativité restreinte) mais le groupe des difféomorphismes de l'espace-temps et le principe de covariance devient général. Évidemment un tel changement n'était possible qu'à partir du moment où la notion d'espace métrique avait été profondément modifié par les travaux révolutionnaires de Riemann et Clifford et s'était mis à dépendre de paramètres modifiables.

Le formalisme lagrangien éclaire remarquablement le passage de la métrique d'un statut d'a priori synthétique à un statut physique. En effet comme l'a montré Hilbert (1921, [22]) et comme cela a été beaucoup approfondi après lui (cf. par exemple Arnowitt, Deser, Misner, 1962, [4]), on peut dériver les

[56]Dont nous-mêmes.

[57]Cf. Friedman, *Dynamics of Reason*, [18].

[58]Le lecteur intéressé par l'actualité du transcendantalisme dans la physique moderne pourra consulter *Constituting Objectivity. Transcendental Perspectives in Modern Physics*, (M. Bitbol, P. Kerszberg, J. Petitot, eds.), 2009 [9].

[59]Localement minkowskienne et non plus euclidienne à cause de la relativité restreinte.

coefficients $g_{\mu\nu}$ de la métrique[60] en minimisant l'intégrale d'action

$$S = (c^3/16\pi G_N) \int R\sqrt{|det(g)|}d^4x$$

où R est la courbure scalaire de Ricci et $|det(g)|$ le module du déterminant de la forme quadratique $g_{\mu\nu}$, c la vitesse de la lumière et G_N la constante newtonienne de la gravitation.[61]

Le fait que le groupe des difféomorphismes de la structure différentiable de l'espace-temps soit la nouvelle "background structure" de la RG a permis à l'un des plus grands spécialistes de la RG, John Archibald Wheeler, dans son monumental traité *Gravitation* (1973, [37] avec Charles Misner et Kip Thorne) de proposer une détermination qu'il appelle "*a priori*" des équations d'Einstein. Ces équations doivent être de la forme $H = kT$ où T est le tenseur *physique* d'impulsion-énergie et H un tenseur d'origine *géométrique*. Les lois de conservations imposent une règle d'invariance de T. Il doit en aller de même pour H mais pour des raisons strictement géométriques. Sous certaines conditions techniques, le tenseur d'Einstein $H = G$ est la seule solution[62] et la limite newtonienne impose $k = 8\pi G_N/c^4$. D'où l'équation d'Einstein

$$G = (8\pi G_N/c^4)T \ .$$

En fait, la condition sur H est ce que l'on appelle *l'identité de Bianchi* en géométrie riemannienne et elle est une conséquence de la cohomologie des formes différentielles disant que l'opérateur bord d est de carré nul.[63] On

---

[60]La métrique est une forme quadratique définie sur les espaces tangents de l'espace-temps. Les $g_{\mu\nu}$ sont ses composantes.

[61]Il serait trop technique de rappeler ici l'expression de la courbure riemannienne et de la courbure de Ricci. Elle se trouve facilement sur internet.

[62]Le tenseur d'Einstein G est de composantes $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ où $R_{\mu\nu}$ esr le tenseur de Ricci et R la courbure scalaire.

[63]Nous ne pouvons définir ici les formes différentielles mais donnons un exemple élémentaire. Soit un espace de coordonnées (x, y). Une 0-forme est simplement une fonction différentiable $f(x, y)$. Son (co)bord est la 1-forme

$$df = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy \ .$$

Si $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ est une 1-forme, son (co)bord est la 2-forme

$$d\omega = ((\partial a/\partial y) - (\partial b/\partial x))dx \wedge dy$$

où $dx \wedge dy$ est le "produit extérieur" de dx et de dy. On vérifie alors immédiatement que, voit bien en quoi ce lien entre physique et métrique résout le paradoxe de Newton. Mais cela n'élimine en rien la structure d'arrière-plan synthétique a priori. Au contraire, répétons-le, elle passe au niveau différentiable et *les propriétés cohomologiques universelles des formes différentielles opèrent donc comme a priori.*

Wheeler insiste lyriquement sur ce caractère a priori :

> "Thus simply is all of general relativity tied to the principle that the boundary of a boundary is zero. No one has ever discovered a more compelling foundation for the principle of conservation of momentum and energy. No one has ever seen more deeply into that action of matter on space, and space on matter, which one calls gravitation. In summary, the Einstein theory realizes the conservation of energy-momentum as the identity 'the boundary of a boundary is zero'." ([37], p. 380)

10 Conclusion

En prenant l'exemple de l'astronomie d'Eudoxe à Einstein et Hilbert, nous avons suivi brièvement l'évolution historique, tant mathématique que physique et métaphysique, de la notion de modèle comme dialectique entre l'analyse conceptuelle et la synthèse computationnelle des phénomènes empiriques observés.

Nous aurions pu donner bien d'autres exemples, en particulier celui de la physique statistique de Boltzmann et Gibbs permettant d'expliquer en termes microscopiques (atomes, molécules) les phénomènes thermodynamiques macroscopiques de transitions de phases. Dans le cas des systèmes magnétiques, des expériences précises et des modèles précis comme le modèle d'Ising ont permis de découvrir les lois d'échelle des exposants critiques (qui sont un

à cause des propriétés d'antisymétrie, $d^2 f = 0$. En effet

$$\begin{aligned} d^2 f &= ((\partial(\partial f/\partial x)/\partial y) \; - \; (\partial(\partial f/\partial y)/\partial x))dx \wedge dy \\ &= (\partial^2 f/\partial x \partial y \; - \; \partial^2 f/\partial y \partial x)dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

peu comme les lois de Kepler pour la mécanique newtonienne) et d'arriver à la révolution du groupe de renormalisation.[64]

Nous avons essayé d'expliquer en quoi, en tant que "mixte", le schématisme transcendantal était l'opérateur de dialectisation de la part conceptuelle et de la part computationnelle de cette procession de modèles dont un tournant reste les lois de Kepler. Mais si nous bouclons la boucle et revenons à notre introduction concernant l'apprentissage profond dans les réseaux de neurones de l'intelligence artificielle contemporaine, nous retrouvons la notion de schème, mais cette fois-ci comme schème *empirique*, et même comme schème empirique mixte non encore "dé mixé" de "pré-concepts" non sémantisés et d'intuitions sensori-motrices et perceptives. De l'intelligence animale aux sommets de l'intelligence scientifique, au cours de l'épopée de l'évolution biologique et de l'évolution culturelle se sont développées des architectures schématiques d'abord implicites, puis explicitées, thématisées par réflexivité, sémantisées et formalisées. Kant avait profondément raison en affirmant (nous l'avons déjà partiellement cité) que

> "Le schématisme de l'entendement pur, en vue des phénomènes et de leur simple forme, est un art caché dans les profondeurs de l'âme humaine, et dont nous aurons de la peine à arracher à la nature les secrets du fonctionnement pour les mettre à découvert sous les yeux."

De Kant à Husserl, l'idéalisme transcendantal a concerné toutes ces architectures fonctionnelles[65] neuronales que l'on devait supposer être enfouies "dans la profondeur de l'âme humaine" sans pouvoir pour autant n'en rien dire puisque le cerveau était une "boîte noire". On parlait alors de *synthétique a priori*. La déconstruction du synthétique a priori a consisté à éliminer la référence à la boîte noire d'une subjectivité interne empiriquement inconnaissable pour lui substituer une cognition socialisée "transparente". Mais les neurosciences cognitives contemporaines, surtout grâce aux méthodes révolutionnaires d'imagerie in vivo, ont rendu la boîte noire en partie transparente. D'où ce retour massif de Kant dont nous parlions dans notre introduction. Bref, nous pourrions dire que les structures synthétiques a priori supposées

[64] Cf. notre Introduction aux phénomènes critiques (1982, [41]).

[65] Architectures fonctionnelles correspondant à des structures de connectivité entre neurones dont l'implémentation physico-chimique de bas niveau (canaux ioniques des axones, etc.) n'est pas pertinente ici.

par l'idéalisme transcendantal sont confirmées et relayées par le matérialisme neuronal des architectures fonctionnelles et que notre conception de la modélisation doit désormais en tenir le plus grand compte.

Le passage de l'idéalisme logique symbolique au matérialisme des processeurs est devenu une banalité. Le passage de l'idéalisme transcendantal géometrique aux matérialisme des réseaux de neurones est encore largement incompris mais est en marche.

Bibliographie

[1] Abraham, R., Marsden, J., *Foundations of Mechanics*, Benjamin Cummings, New-York, Reading, 1978.

[2] Applebaum, W., "Keplerian astronomy after Kepler. Researches and problems", *History of Science*, 34/106 (1996) 451–504.

[3] Arnold, V., *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1976.

[4] Arnowitt, R., Deser , S., Misner, C.W., "The Dynamics of General Relativity", *Gravitation: an introduction to current research*, (L. Witten, ed.), Wiley, New York, 1962, 227–264. arXiv:gr-qc/0405109.

[5] Berthoz, A., *La Simplexité*, Éditions Odile Jacob, Paris, 2009.

[6] Blondel, J., Albouy, V., *Le vol chez les animaux*, Éditions Quæ, Versailles, 2021.

[7] Chen,B., Huang, K., Raghupathi, S., Chandratreya, I., Du, Q., Lipson, H., *Discovering State Variables Hidden in Experimental Data*, arXiv:2112.10755, 2021.

[8] Chenciner, A., "Poincaré and the Three-Body Problem", *Séminaire Poincaré*, XVI (2012) 45–133.

[9] CO, *Constituting Objectivity. Transcendental Perspectives in Modern Physics*, (M. Bitbol, P. Kerszberg, J. Petitot, eds.), Springer, Berlin, New York, 2009.

[10] Cohen, B., *The Newtonian Revolution*, Cambridge University Press, 1983.

[11] Colwell, P., *Solving Kepler's Equation over three Centuries*, Willmann–Bell, Richmond, 1993.

[12] Copernic, N., *De Hypothesibus Motuum Coelestium a se Contitutis Commentariolus*, 1514. Édition critique de H. Hugonnard-Roche, E. Rosen, J.-P. Verdet, Librairie Blanchard, Paris, 1975.

[13] Copernic, N., *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, achevé en 1530, publié en 1543. Édition critique de M.-P. Lerner, A.-P. Segonds, J.-P. Verdet. 3 vol., Les Belles Lettres, Paris, 2015.

[14] Dehaene, S., Brannon, E. M., "Space, time, and number: a Kantian research program", *Trends in Cognitive Sciences*, 14/12 (2010) 517-519.

[15] Duhem, P., *Sôzein ta phainomena : 'Sauver les apparences'. Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée*, Hermann, Paris, 1908 & Vrin, Paris, 2003.

[16] Eudoxe, *Eudoxe de Cnide*, fragments traduits dans François Lasserre, Berlin, 1987.

[17] Euler, L., (1744), *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti.* (édité par Constantin Carathéodory), Euler Archive E65, *Opera Omnia*, Series 1, Volume 24, Birkhäuser, Basel, 2023.

[18] Friedman, M., *Dynamics of Reason*, CSLI Publications, Stanford, 1999.

[19] Friedman, M., *Kant's Construction of Nature*, Cambridge University Press, 2013.

[20] Gingerich, O., *The Book Nobody Read: Chasing the Revolutions of Nicolaus Copernicus*, Walker, New York, 2004. *Le livre que nul n'avait jamais lu : à la poursuite du De Revolutionibus de Copernic*, trad. J.-J. Szczeciniarz, Dunod, Paris, 2008.

[21] Guicciardini, N., *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, MIT Press, 2009.

[22] Hilbert, D., 1915. "Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung)", *Nachrichten von der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Mathematisch-physikalische Klasse, 1915, 395–407.

[23] Hipparque, voir l'édition de C. Manitius du *Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena Commentariorum Libri Tres*, B. G. Teubner, Leipzig, 1894.

[24] Husserl, E., *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, Max Niemeyer, Halle, 1913. (Husserliana III-IV). *Idées Directrices pour une Phénoménologie*, (trad. P. Ricoeur), Gallimard, Paris, 1950.

[25] Kant, I., 1786, *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Kants gesammelte Schriften, Band IV, Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Georg Reimer, 1911. *Premiers Principes métaphysiques de la Science de la Nature*, (trad. J. Gibelin), Vrin, Paris, 1971.

[26] Kepler, J., (1609) *Astronomia nova aitiologetos seu Physica coelestis*, Gesammelte Werke, vol. 3, (éd. Max Caspar), C.H. Beck, München 1938. *Astronomie nouvelle*, Librairie Blanchard, Paris, 1979.

[27] Kepler, J., (1615-1621) *Epitome Astronomiae Copernicanae*, Gesammelte Werke, vol. 7, (éd. Max Caspar), C.H. Beck, München, 1953.

[28] Kepler, J., (1627), *Tabulae Rudolphinae*, Gesammelte Werke, vol. 10, (éd. Franz Hammer), C.H. Beck, München, 1969.

[29] Kepler, J., *De raris mirisque Anni 1631*, Leipzig, 1629.

[30] Kerszberg, P., "La cosmologie de Copernic et les origines de la physique mathématique", *Revue d'histoire des sciences*, 34/1 (1981) 3-23.

[31] Kerszberg, P., "On Kant's Transcendental Account of Newtonian Mechanics", *Constituting Objectivity. Transcendental Perspectives in Modern Physics*, (M. Bitbol, P. Kerszberg, J. Petitot, eds.), Springer, Berlin, New York, 2009, 51-72.

[32] Koestler, A., *Les Somnanbules. Essai sur l'histoire des conceptions de l'Univers* (*The Sleepwalkers*), trad. Georges Fradier, Les Belles Lettres, Paris, 2010.

[33] Koyré, A., *La Révolution astronomique : Copernic, Kepler, Borelli*, Hermann, Paris, 1961.

[34] Kuhn, T., *La Révolution copernicienne*, LGF, Paris, 1992.

[35] Lagrange, J.-L., (1788), *Mécanique analytique*, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1989.

[36] Lautman, A., (1937-1939), *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Paris, Union Générale d'Éditions, 1977.

[37] Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A., *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.

[38] Nadal, R., *Analyse des données astronomiques contenues dans le 'Commentaire' d'Hipparque*, Thèse de l'Université de Toulouse 3, 1990.

[39] Newton, I., (1687), *Philosophi Naturalis Principia Mathematica*, Engl. Transl. B. Cohen and A. Whitman, University of California Press, Berkeley, Los Angeles, 1999.

[40] O'Keefe, J., "Immanuel Kant: Pioneer neuroscientist", Public Lecture, *Royal Institution of Great Britain*, London, June 2, 2014.

[41] Petitot, J., *Introduction aux phénomènes critiques*, 1982/2010. http://jeanpetitot.com/ArticlesPDF/Petitot_CritPh.pdf

[42] Petitot, J., " 'Refaire le Timée'. Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman", *Revue d'Histoire des Sciences*, XL/1 (1987) 79-115.

[43] Petitot, J., "Actuality of transcendental aesthetics for modern Physics", *1830-1930 : A Century of Geometry*, (L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis eds), Springer, Berlin, New-York, 1992.

[44] Petitot, J., "Phénoménologie computationnelle et objectivité morphologique", *La connaissance philosophique. Essais sur l'œuvre de Gilles-Gaston Granger*, (J. Proust, E. Schwartz éds.), Presses Universitaires de France, Paris, 1994, 213-248.

[45] Petitot, J., "Objectivité faible et philosophie transcendantale", *Physique et Réalité, débat avec B. d'Espagnat*, (M. Bitbol, S. Laugier, éds.), Diderot éditeur, Paris, 1997, 201-236.

[46] Petitot, J., "Morphological Eidetics for Phenomenology of Perception", *Naturalizing Phenomenology: Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science*, (J. Petitot, F. J. Varela, J.-M. Roy, B. Pachoud, eds.), Stanford University Press, 1999, 330-371.

[47] Petitot, J., *Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles*, Les Éditions de l'Ecole Polytechnique, Distribution Ellipses, Paris, 2008.

[48] Petitot, J., "Noncommutative Geometry and Transcendental Physics", *Constituting Objectivity. Transcendental Perspectives on Modern Physics*, (M. Bitbol, P. Kerszberg, J. Petitot, eds), Springer, 2009, 415-455.

[49] Petitot, J., "La simplexité de la notion géométrique de jet", *Simplexité-Complexité* (A. Berthoz, J-L. Petit éds), Leçons du Collège de France, Paris, OpenEdition Books, 2014.

[50] Petitot, J., "Conceptual Analysis and Computational Synthesis in Mathematical Physics", *Varieties of Scientific Realism*, (E. Agazzi, ed.), Springer, 2016.

[51] Petitot, J., *Weak objectivity and relativity in Kant's Phoronomy. A groupoid and functorial approach.* http://jeanpetitot.com/ArticlesPDF/Petitot_Phoronomy.pdf, 2016.

[52] Petitot, J., *Elements of Neurogeometry I. Functional Architectures of Vision*, Lecture Notes in Morphogenesis, Springer, 2017.

[53] Petitot, J., "The notion of 'alternative judgment' in Kant's Phoronomy", *Académie Internationale de Philosophie des Sciences*, Zadar, 2021.

[54] Petitot, J., *Éléments de Neurogéometry II. Géométrie sous-riemannienne et analyse harmonique non commutative du cortex visuel primaire*, 2024. https://hal.science/hal-04722501

[55] Poincare, H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899.

[56] Proclus (Próklos), *Hypotyposis astronomicarum positionum*, (éd. Carolus Manitius), B. G. Teubner, 1974.

[57] Ptolémée, C., *Almageste, "Hê Megálê Súntaxis"* (*"La Grande Composition"*), édition J. L. Heiberg, 1898-1903. Trad. angl. G. J. Toomer, London 1984.

[58] Reichenbach,H., *Relativitätstheorie und Erkenntnis apriori*, Springer, Berlin, 1920. Trad. angl., *The theory of relativity and a priori knowledge*, University of California Press, 1965.

[59] Reichenbach,H., *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre*, F. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., 1924. Trad . angl., *Axiomatization of the theory of relativity*, University of California Press, 1969.

[60] Ryckman, T., *The Reign of Relativity*, Oxford University Press, 2005.

[61] Szczeciniarz, J.-J., *Copernic et la révolution copernicienne*, Flammarion, Paris, 1998.

[62] Thorvaldsen, S., *Early Numerical Analysis in Kepler's New Astronomy*, Science in Context, Cambridge University Press, 2010.

[63] Tycho Brahe, (1598), *Astronomiæ Instauratæ Mechanica*, Wandsbek, Philipp von Ohrs, Hamburg, 1598.

[64] Vuillemin, J., *Physique et Métaphysique kantiennes*, Presses Universitaires de France, Paris, 1955.

[65] Weyl, H., 1922. *Space−Time−Matter*, Dover, New York.