JEAN PETITOT, *Locale/globale*

Estratto da:
Enciclopedia, VIII: *Labirinto-Memoria*, Einaudi, Torino 1979.

2. *L'opposizione locale/globale e il concetto di spazio.*

Quello che precede mostra l'importanza di sviluppare un'intuizione del passaggio dal locale al globale. Per ottenere tale scopo l'indagine matematica è essenziale. Ad essa è dedicato quest'articolo.

2.1. Dalla rottura euclidea alle geometrie non-euclidee.

L'opposizione locale/globale è costitutiva della nostra rappresentazione dello spazio. È certo che il nostro spazio è localmente euclideo. Il nostro organismo ne offre un'eccellente simulazione. Ciò non implica peraltro che lo spazio «sia» globalmente euclideo. La natura della sua struttura globale sfugge a priori alla simulazione organica e non può quindi essere che l'oggetto di una rappresentazione, la cui storia è lungi dall'essere banale.

Per gli animali, lo spazio è un territorio: anzitutto è l'estensione a domini locali delle grandi regolazioni metaboliche quali la predazione; esso è inoltre un incollamento di tali domini locali mediante indizi significanti, per esempio «semantici», di natura sensoriale (per esempio olfattiva). Dunque non esiste una vera e propria rappresentazione globale dello spazio: la rappresentazione s'identifica ad una memorizzazione del sistema di indizi.

Si può forse avanzare l'ipotesi che la situazione sia analoga per ciò che concerne le società «primitive». Come scrive René Thom in un articolo dedicato alla magia, articolo dal quale si è d'altronde presa a prestito nel § 1 l'immagine di stato «eccitato» d'uno spazio globale flessibile ed individuale, «si può dire che l'atto magico sia caratterizzato in modo essenziale da "un'azione a distanza" che rienze concrete. Tuttavia non esiste evidentemente alcun « controllo », alcuna « regolazione » di questo tipo a livello globale. Euclide ha compreso a fondo tutto questo: la nozione di retta è una nozione primitiva la cui proprietà caratteristica di rettitudine dev'essere oggetto di un « giudizio sintetico a priori », cioè d'un assioma logicamente irriducibile agli altri assiomi della geometria: si tratta del famoso assioma delle parallele. In tal senso la geometria non è una scienza a priori come lo è la logica. Essa esige una « regolazione » capace di controllare la coerenza del passaggio del proprio concetto primitivo dal locale al globale.

È ben noto che l'assioma di Euclide ha fatto scorrere molto inchiostro. Una precisa tradizione, nutrita dal desiderio di fare della geometria una scienza a priori, ha tentato di « dimostrarlo », di dedurlo cioè dagli altri assiomi della geometria. Nel corso dei secoli l'impossibilità di arrivare ad una tale « dimostrazione » sapeva di vero e proprio « scandalo ». Tale scandalo è stato messo definitivamente a tacere all'inizio del XIX secolo allorché Gauss, Bolyai e Lobačevskij dimostrarono che gli altri assiomi della geometria euclidea ammettevano un'interpretazione coerente che violava l'assioma delle parallele. Questa nuova geometria è la geometria iperbolica, caratterizzata da una serie di fenomeni atipici. Essa ha offerto il primo esempio di un fenomeno che è fondamentale per il tema di quest'articolo. Localmente, cioè in ogni dominio d'estensione « infinitesimale », la geometria iperbolica diventa euclidea. In altri termini, uno spazio iperbolico ammette in ogni punto uno spazio euclideo « tangente ». Si può dunque dire che la geometria iperbolica concretizza un altro modo di estendere al globale la struttura euclidea locale dello spazio, diverso da quello dell'estensione diretta.

2.2. Le diverse estensioni del concetto di spazio.

Prima d'indagare in qual modo, nel corso del XIX secolo, l'aspetto operativo dell'opposizione locale/globale ha rivoluzionato il concetto stesso di geometria, verrà ricordato in quale contesto si è sviluppata tale trasformazione.

Fino all'inizio del XIX secolo, la geometria si ridusse essenzialmente allo studio di oggetti geometrici (cfr. l'articolo « Curve e superfici » in questa stessa *Enciclopedia*) immersi in uno spazio ambiente bi- o tridimensionale. I metodi utilizzati sono da una parte quelli sintetici ereditati dalla tradizione euclidea e dall'altra quelli analitici ed algebrici fondati sull'uso di coordinate. Con l'introduzione del calcolo infinitesimale, le coordinate permettono l'analisi delle proprietà differenziali degli oggetti (equazione delle tangenti, delle normali, struttura dei punti singolari, ecc.). Ecco apparire i primi teoremi generali sulle curve algebriche e la « solidarietà » che esiste tra la loro struttura locale e quella globale. Servano da esempio due famosi risultati di Maclaurin (uno dei grandi successori di Newton): una curva piana irriducibile di grado n non può possedere piú di $[(n-1)(n-2)]/2$ punti doppi; su una cubica piana dotata di punti di flesso, la retta che ne congiunge due passa necessariamente per un terzo.

Ma l'approfondimento di tali problemi porterà, durante il XIX secolo, ad una completa ristrutturazione del concetto di spazio ambiente nel quale gli oggetti geometrici si trovano immersi.

Intanto, per poter disporre di teoremi generali (in particolare del teorema di Bézout secondo cui due curve piane di rispettivi gradi r e s s'intersecano esattamente in rs punti contati con la loro molteplicità), si estende sistematicamente la nozione di spazio ambiente agli spazi proiettivi complessi ottenuti aggiungendo i punti all'infinito e i punti immaginari. Con Poncelet, Steiner, Staudt, Plücker, Cayley, ecc. la geometria proiettiva complessa eserciterà una fortissima influenza. Permetterà dapprima di dimostrare tanti risultati sulla struttura generale delle curve e delle superfici algebriche e in particolare sulla solidarietà locale/globale: configurazione dei nove punti di flesso di una cubica piana, situati a tre a tre su dodici rette; configurazione delle ventisette rette della superficie cubica; ecc. D'altra parte la geometria proiettiva condurrà alla considerazione di «spazi» i cui «punti» non sono punti nel senso geometrico del termine. Per esempio lo studio dei complessi di rette dello spazio proiettivo tridimensionale $\mathbf{P}^3$ condurrà Cayley e Plücker alla rappresentazione di una *retta* di $\mathbf{P}^3$ mediante un *punto* di un'ipersuperficie di secondo grado di $\mathbf{P}^5$ (coordinate plückeriane). S'introduce cosí l'idea fondamentale che la geometria di entità complesse immerse in uno spazio ambiente triviale è traducibile nella geometria dei punti di uno spazio di descrizione: *a*) di dimensione eventualmente superiore a tre; *b*) globalmente non triviale.

La geometria proiettiva permetterà altresí a Klein, nel suo programma di Erlangen, di unificare i diversi tipi di geometrie (cioè di struttura degli spazi ambienti tipo) (cfr. l'articolo «Geometria e topologia» in questa stessa *Enciclopedia*).

Parallelamente ai progressi della geometria proiettiva prenderanno corpo le nozioni di spazio vettoriale e di algebra lineare. Questa nuova estensione del concetto di spazio avrà una notevole importanza quando la si prolungherà all'analisi funzionale, quando cioè si tratterà una funzione come un «vettore» decomponibile secondo vettori base (analisi armonica e serie di Fourier) e si estenderà l'analisi spettrale degli operatori lineari agli operatori differenziali.

Le strutture della geometria proiettiva e dell'algebra lineare sono per essenza globali. Con Riemann s'introdurrà un'altra idea chiave, d'importanza capitale, poiché con i suoi effetti domina il presente tema *nel suo insieme*. Si tratta dell'idea di considerare «spazio» a tutti gli effetti ogni spazio ottenuto per incollamento di modelli locali, cioè di pezzi di spazio ambiente tipo. Si tornerà ampiamente su quest'argomento. Si noti semplicemente che quest'idea sovverte totalmente la nostra intuizione di spazio poiché rompe con «l'evidenza» che la struttura globale dello spazio si ottiene per diretta estensione dalla sua struttura locale. Con Riemann il problema del passaggio dal locale al globale si allontana da ogni intuizione e diventa una problematica matematica fondamentale.

3. *L'opposizione locale/globale nella teoria delle funzioni: il caso analitico.*

Riemann è l'iniziatore di due aspetti della dialettica locale/globale. Da un lato l'aspetto delle varietà riemanniane (cfr. § 4) e dall'altro quello delle superfici di Riemann brevemente delineato nel presente paragrafo.

Ciò che precede serviva ad introdurre il rapporto esistente tra l'opposizione locale/globale e il concetto di spazio, piú precisamente di spazio ambiente. Viene ora introdotto il rapporto tra tale opposizione e il concetto di funzione, in quanto la dialettica spazio/funzione è una delle chiavi di volta di tutta la geometria moderna.

3.1. Le diverse classi di funzioni reali.

Si consideri un polinomio a coefficienti reali, per esempio di secondo grado, $P(x)=ax^2+bx+c$. Si tratta di una funzione $P: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ che associa a ogni numero reale x un altro numero reale $P(x)$ (detto valore di P in x), ottenuto mediante l'algoritmo rappresentato dalla sua espressione algebrica. Si supponga P noto per tre valori distinti x_1, x_2 e x_3. I suoi coefficienti saranno allora le soluzioni di un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite:

$$(1)\quad \begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=P(x_1) \\ ax_2^2+bx_2+c=P(x_2) \\ ax_3^2+bx_3+c=P(x_3). \end{cases}$$

È facile vedere che se x_1, x_2 e x_3 sono distinti, il sistema (1) ammette soluzione unica. Se dunque P è noto in tre punti distinti, è noto dappertutto. In generale, un polinomio di grado n è determinato quando siano assegnati i valori che esso assume in $n+1$ punti distinti.

Che un'informazione finita basti a caratterizzare P è un fatto cruciale che può essere localizzato. Se infatti x_1, x_2 e x_3 sono infinitamente vicini, ossia si confondono in un punto x_0, il dato $(P(x_1), P(x_2), P(x_3))$ viene sostituito dal dato $(P(x_0), P'(x_0), P''(x_0))$ ove P' e P'' sono le derivate prima e seconda di P. Il sistema (1) viene allora sostituito con il sistema

$$(2)\quad \begin{cases} ax_0^2+bx_0+c=P(x_0) \\ 2ax_0+b=P'(x_0) \\ 2a=P''(x_0) \end{cases}$$

e si verifica facilmente la formula fondamentale

$$(3)\quad P(x)=P(x_0)+(x-x_0)\,P'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2}P''(x_0).$$

In generale ogni polinomio di grado n soddisfa una importante identità (4) detta formula di Taylor che permette di esprimerlo in funzione del suo valore e di quelli delle sue derivate successive in un punto qualsiasi x_0:

$$(4)\quad P(x)=P(x_0)+(x-x_0)\,P'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}P^{(n)}(x_0).$$

Ora la nozione di derivata è per sua natura locale. La formula di Taylor esprime dunque il seguente fatto molto importante: per i polinomi, la determinazione locale implica quella globale. Per i polinomi, e piú in generale per gli insiemi algebrici definiti da polinomi, esiste una solidarietà essenziale tra locale e globale. Si potrebbe dire che i polinomi manifestano un principio translocale «d'azione a distanza»: non si può perturbare un polinomio in un punto senza modificarlo dappertutto.

Ciò è in netto contrasto con quanto avviene nel caso delle funzioni che sono semplicemente differenziabili. Infatti, per questo le perturbazioni locali non si «propagano»: due funzioni differenziabili possono coincidere localmente senza coincidere dappertutto (fig. 1).

Ecco dunque delinearsi due domini estremi entro l'insieme delle applicazioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Ad una estremità vi è il dominio caratterizzato da una proprietà di consistenza. Esso si estende dalle funzioni insiemistiche qualsiasi non aventi alcuna coesione neppure locale, fino alle funzioni indefinitamente differenziabili (di classe $\mathcal{C}^\infty$), passando dalle funzioni continue (che possono essere molto «patologiche») e dalle funzioni differenziabili fino all'ordine r (di classe $\mathcal{C}^r$) per $r = 1, 2, ...$ In tale dominio, *a*) non vi è alcuna solidarietà tra il locale e il globale; *b*) non esiste un'espressione, mediante simboli, delle funzioni. All'altra estremità vi è il dominio dei polinomi ove *c*) vi è solidarietà tra il locale ed il globale; *d*) esiste un'espressione delle funzioni, mediante simboli, che rende i polinomi degli algoritmi. (Cfr. fig. 2).

Il problema consiste allora nel sapere come si raccordano questi due domini; in altri termini, come si può, partendo dalla differenziabilità, raggiungere un'espressione simbolica e una solidarietà tra locale e globale.

Partendo dai polinomi, la mediazione verso le funzioni differenziabili s'effettua per estensione dal finito al numerabile. Si ottengono cosí le serie formali $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ...$ che sono in un certo senso polinomi di grado infinito. Ma passando cosí dal finito al numerabile nulla piú garantisce che $P(x)$ rappresenti un numero. Volendo delle serie che rappresentino funzioni, bisogna limitarsi a considerare serie convergenti. Se una serie è convergente per un valore x_0, lo è per ogni altro valore x tale che $|x| \leq |x_0|$. Essa lo è dunque in un intervallo $|x| < R$. R si chiama il suo raggio di convergenza.

Partendo ora dalle funzioni $\mathcal{C}^\infty$, la mediazione verso i polinomi s'effettua tramite il concetto di serie di Taylor. Se f è $\mathcal{C}^\infty$, le si può associare, per ogni valore x_0, la serie formale $T_{x_0} f$, detta sua serie di Taylor in x_0:

$$(5) \qquad T_{x_0} f = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + ...$$

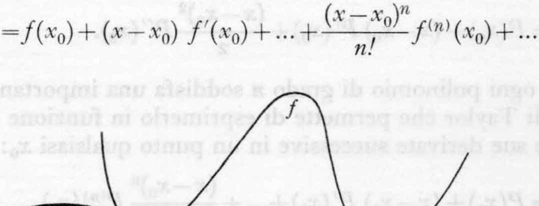


Figura 1.
f e *g* sono localmente identiche senza esserlo globalmente.

che generalizza l'approssimazione lineare di f in x_0 mediante la tangente di equazione $y=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$. La serie di Taylor di f in x_0 è d'importanza fondamentale poiché esprime il miglior modo d'approssimare f mediante polinomi. Per definizione si tratta di un'entità locale. Quando x_0 varia, essa definisce dunque un'applicazione Tf di $\mathbf{R}$ nell'algebra delle serie formali detta campo tayloriano di f e che «meglio» esprime come la consistenza differenziabile può «raggiungere» un'espressione simbolica.

La nozione di serie di Taylor permette di «misurare» lo scarto tra funzioni differenziabili e polinomi. È possibile constatare che tale scarto è irriducibile. Infatti:

a) La serie formale $T_{x_0}f$ può essere divergente e pertanto non rappresentare alcuna funzione. Tale fenomeno di divergenza è ineliminabile, secondo un teorema di Borel per cui *ogni* serie formale può essere ottenuta come serie di Taylor.

b) Anche se la serie $T_{x_0}f$ è convergente, può rappresentare nell'intorno di x_0 un'altra funzione, diversa da f. Per esempio le funzioni dette piatte del tipo e^{-1/x^2} la cui serie di Taylor in 0 è identicamente nulla e rappresenta dunque nell'intorno di 0 la funzione 0 e non la funzione stessa.

Il passaggio tra i polinomi e le funzioni $\mathcal{C}^\infty$ s'effettua dunque in questo modo:

a) «Vicinissimo» ai polinomi si trovano le funzioni $\mathcal{C}^\infty$ esprimibili simbolicamente, le quali manifestano una notevole solidarietà tra il locale e il globale, cioè quelle per cui una determinazione locale implica la determinazione globale. Si tratta delle funzioni *ovunque* rappresentate dalla loro serie di Taylor in *un* punto qualunque. Tali funzioni diconsi *intere*. Esempio tipico ne è l'esponenziale e^x che è ovunque uguale alla somma della sua serie di Taylor in 0:

$$T_0e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

b) Si trovano poi le funzioni localmente rappresentate in ogni punto dalla loro serie di Taylor. Esse diconsi analitiche.

c) Si trovano infine le funzioni semplicemente $\mathcal{C}^\infty$.

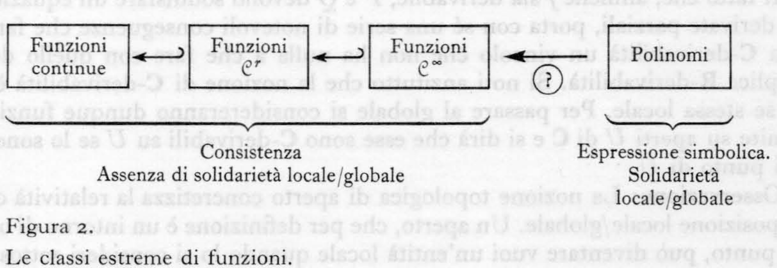


Figura 2.

Le classi estreme di funzioni.

Generalizzando tali risultati alle funzioni di piú variabili, $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, poi alle funzioni complesse, $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^p$, poi, per localizzazione ai germi di funzioni, ed ancora, per incollamento, alle funzioni definite su varietà qualunque, si possono cosí definire livelli di struttura geometrica: il livello insiemistico, il livello topologico, il livello differenziabile, il livello formale (detto anche algebroide), il livello analitico ed infine quello algebrico corrispondente ai polinomi. Gran parte della geometria moderna è consacrata allo studio locale e/o globale di tali livelli, ai tipi di dialettica locale/globale che sono loro specifici, all'analisi dei vincoli che un livello inferiore esercita sui livelli superiori. Perché tali analisi andassero in porto è stato necessario elaborare strumenti generali la cui portata concettuale s'è rivelata considerevole.

3.2. Prolungamento analitico e superfici di Riemann.

L'analiticità acquista tutto il suo significato quando si passa dal reale al complesso e si considerano funzioni $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ d'una variabile complessa, a valori complessi. Sia f una tale funzione. La si può considerare una $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che al punto $z = x + iy$ di $\mathbf{R}^2$ associa il punto $P(x, y) + iQ(x, y)$ di $\mathbf{R}^2$, ove P e Q sono due funzioni reali di due variabili reali. Se si tenta allora di definire per f il vincolo di $\mathbf{C}$-derivabilità in z_0, si constata subito che esso è totalmente diverso dalla $\mathbf{R}$-derivabilità. Dire infatti che f è $\mathbf{C}$-derivabile in z_0 significa non solo che il rapporto $[f(z) - f(z_0)]/(z - z_0)$ tende a un limite quando z tende a z_0, ma anche che tale limite è indipendente dal modo con cui z tende a z_0. È facile vedere che per soddisfare tale vincolo occorre e basta che le funzioni P e Q ammettano derivate parziali e soddisfino alle cosiddette condizioni di Cauchy-Riemann:

$$(5) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Se si suppone che P e Q siano due volte $\mathbf{R}$-differenziabili, tali condizioni implicano che P e Q soddisfino l'equazione di Laplace:

$$(6) \qquad \Delta P = 0 \qquad \Delta Q = 0$$

ove Δ è l'operatore laplaciano $(\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)$.

Una funzione $F(x, y)$ che soddisfa l'equazione di Laplace dicesi armonica; P e Q diconsi funzioni armoniche coniugate.

Il fatto che, affinché f sia derivabile, P e Q devono soddisfare un'equazione alle derivate parziali, porta con sé una serie di notevoli conseguenze che fanno della $\mathbf{C}$-derivabilità un vincolo che non ha nulla a che fare con quello della semplice $\mathbf{R}$-derivabilità. Si noti anzitutto che la nozione di $\mathbf{C}$-derivabilità è di per se stessa locale. Per passare al globale si considereranno dunque funzioni definite su aperti U di $\mathbf{C}$ e si dirà che esse sono $\mathbf{C}$-derivabili su U se lo sono in ogni punto di U.

Osservazione: La nozione topologica di aperto concretizza la relatività dell'opposizione locale/globale. Un aperto, che per definizione è un intorno di ogni suo punto, può diventare vuoi un'entità locale quando lo si consideri sottospazio di uno spazio globale, vuoi un'entità globale quando lo si consideri unione degli aperti in esso contenuti.

Sia dunque $f: U \to \mathbf{C}$ una funzione complessa definita su un aperto U di $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}$-derivabile.

a) Tutti i valori di f sono solidali. Tale solidarietà è espressa dalla formula integrale di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}$$

la quale afferma che il valore di f in $z_0 \in U$ è la media dei valori di f su ogni circuito γ di U orientato positivamente, che circondi z_0 e che sia contraibile a un punto entro U. (Si dice in tal caso che il circuito γ è omotopo a zero). Una conseguenza fondamentale di ciò è il «principio di massimo» secondo cui se f non è costante, il suo modulo $|f(z)|$ non può possedere né massimo né minimo.

b) Se g è un'altra funzione $\mathbf{C}$-derivabile definita su U, f e g non possono essere localmente identiche senza esserlo globalmente. Per le funzioni $\mathbf{C}$-derivabili una determinazione locale implica la determinazione globale.

c) f è necessariamente indefinitamente $\mathbf{C}$-derivabile.

d) f è di piú $\mathbf{C}$-analitica.

e) f è di piú $\mathbf{C}$-intera.

Cosicché nel campo complesso la semplice derivabilità basta ad implicare il piú potente vincolo di solidarietà tra locale e globale. Le funzioni $\mathbf{C}$-derivabili, e quindi $\mathbf{C}$-analitiche per *d*), diconsi anche olomorfe. L'olomorfia è una nozione intrinsecamente locale ma che «passa» automaticamente al globale. È dunque naturale cercarne una caratterizzazione globale (teorema di Runge).

La piú notevole conseguenza della solidarietà locale/globale che caratterizza le funzioni $\mathbf{C}$-analitiche è che la determinazione locale implica non solo la determinazione globale ma anche la determinazione dello stesso dominio di definizione. Se f è localmente un polinomio, lo è dappertutto ed è definita su $\mathbf{C}$. Ma nel caso generale il suo dominio naturale può essere molto diverso da $\mathbf{C}$. Si è di fronte ad un totale capovolgimento di punto di vista poiché la nozione di «spazio substrato», di spazio soggiacente a una funzione, cioè in definitiva di spazio ove naturalmente la variabile indipendente z «sta di casa», non ha piú senso che localmente, dato che la funzione stessa determina, a livello globale, il proprio spazio substrato.

Per precisare questo punto fondamentale, viene ora illustrata una descrizione data da Weierstrass e poi chiarita in modo definitivo da Hermann Weyl [1955].

Sia f una funzione olomorfa su un aperto U di $\mathbf{C}$. f si rappresenta in ogni punto col suo sviluppo di Taylor $T_{z_0}f$ in un punto $z_0 \in U$. Per cogliere le proprietà di passaggio dal locale al globale è dunque naturale partire da $T_{z_0}f$, cioè da una serie convergente $\mathcal{A}(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots$ Si chiama elemento analitico (nel senso di Weierstrass) centrato in z_0, e lo si denota $(\mathcal{A}(z), z_0)$, un tale dato. Questo elemento definisce localmente una funzione olomorfa f il cui valore in z_0 è il termine costante a_0 della serie $\mathcal{A}(z)$.

Sia dunque $\mathcal{A} = (\mathcal{A}(z), z_0)$ un elemento analitico centrato in z_0. Sia Δ il disco di centro z_0 e di raggio R che è il disco di convergenza di $\mathcal{A}(z)$. Esistono dei punti singolari z_s del bordo di Δ nei quali la serie $\mathcal{A}(z)$ diventa divergente e che impediscono dunque l'estensione di f a un disco piú grande di Δ con centro in z_0. Il fatto però che esistano tali ostruzioni non implica che non si possa prolungare f ad un disco con centro in un punto z, distinto da z_0 che «fuoruscirebbe» da Δ evitando i punti singolari z_s della sua frontiera. Infatti in un intorno di z_1 appartenente a Δ, f si può rappresentare mediante un elemento analitico $(\mathcal{B}(z), z_1)$ centrato in z_1. Tale elemento possiede un disco di convergenza Δ' centrato in z_1 e limitato da certe singolarità z'_s. Nulla impone che Δ' sia contenuto in Δ. Inoltre il fatto che una funzione **C**-analitica sia globalmente determinata dalla sua struttura locale implica che le somme delle serie $\mathcal{A}(z)$ e $\mathcal{B}(z)$ sono identiche su $\Delta \cap \Delta'$. La funzione uguale alla somma di $\mathcal{A}(z)$ su Δ e alla somma di $\mathcal{B}(z)$ su Δ' è dunque ben definita e olomorfa su $\Delta \cap \Delta'$. È questo il principio del prolungamento analitico (fig. 3): il prolungamento analitico è definito in modo unico.

Per prolungamento analitico si estende cosí l'elemento analitico di partenza $(\mathcal{A}(z), z_0)$ in una funzione olomorfa globale f. Si potrebbe credere che il dominio di definizione di f sia semplicemente il piano complesso privato dei punti singolari. Ma ciò non avviene in generale. Può succedere infatti che prolungando $\mathcal{A}$ lungo una catena chiusa Δ, Δ', ... ecc. si torni all'intorno di z_0 mediante un elemento analitico il cui valore in z_0 sia diverso da quello di $\mathcal{A}(z)$. Considerata come definita su **C**, la funzione globale f sarebbe dunque multiforme. Ora, f, per costruzione, è uniforme. La chiave di questo apparente «paradosso» risiede semplicemente nel fatto che, com'è stato già detto, $\mathcal{A}(z)$ determina per prolungamento non solo f ma anche il suo spazio substrato. Tale spazio substrato non deve piú essere considerato in sé come uno spazio «esterno» sul quale f sarebbe definita, ma come uno spazio intrinsecamente attaccato ad f. Lo si denoterà con Σ.

Si può poi completare la costruzione tenendo conto dei punti singolari e dei

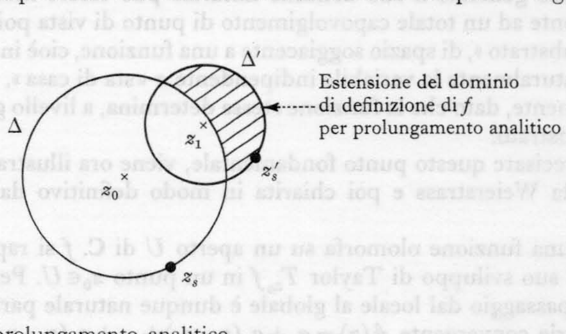


Figura 3.
Principio del prolungamento analitico.

punti in cui Σ si ramifica. I punti singolari sono sia poli, sia punti singolari essenziali. I punti di diramazione sono i punti z_0 tali che f possiede n determinazioni nell'intorno di z_0 ma *meno* di n determinazioni in z_0. Il caso tipico viene fornito dalla funzione $\sqrt{z}$ che per ogni valore di $z \neq 0$ possiede due determinazioni $\pm\sqrt{z}$, ma un sol valore (0) in 0. Se allora si completa Σ mediante i poli e i punti di diramazione e la base $\mathbf{C}$ di Σ mediante l'aggiunta di un punto all'infinito per tener conto dei poli e dei punti di diramazione all'infinito (cosa che fornisce la sfera di Riemann $\overline{\mathbf{C}}$), Σ diventa un rivestimento ramificato di $\overline{\mathbf{C}}$ privato dei punti essenziali; esso dicesi superficie di Riemann dell'elemento analitico $(\mathcal{A}(z), z_0)$ e della funzione globale f ch'esso determina per prolungamento analitico.

La superficie di Riemann Σ di f è canonicamente munita d'una proiezione $z : \Sigma \to \overline{\mathbf{C}}$ che associa ad ogni elemento analitico di Σ il suo centro. Essa è anche evidentemente il dominio di f. Si ottiene dunque in definitiva lo schema

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbf{C}} \\ {\scriptstyle z}\downarrow & & \\ \overline{\mathbf{C}} & & \end{array}$$

che evidenzia bene il radicale spostamento introdotto. Σ è lo spazio globale ove naturalmente «sta di casa» la variabile indipendente z. Soltanto localmente la z continua ad essere una variabile. Globalmente essa diventa la proiezione canonica della superficie di Riemann di f. Come nota Weyl: «Prima di iniziare lo studio di una classe di funzioni si deve definire la superficie che è il dominio della variabile indipendente; si deve poi stabilire cosa significa funzione analitica su tale superficie che diventa cosí una superficie di Riemann. Solo a questo punto ci si può occupare delle funzioni stesse» [1955, p. 43].

Osservazione: Il fatto che z diventi una funzione e non piú una variabile pone il problema, detto dell'uniformizzazione globale, di sapere se il suo statuto di variabile può essere «recuperato» in uno spazio differente (cfr. oltre).

3.3. Richiamo dei lavori di Riemann sulle curve algebriche.

La nozione di superficie di Riemann acquista tutto il suo significato nel caso in cui z ed f sono legate da una relazione algebrica, cioè annullano un polinomio in due variabili $P(z, f) = 0$. In tal caso essa fornisce uno straordinario strumento atto allo studio delle funzioni analitiche; la grande idea di Riemann è infatti che la superficie di Riemann Σ d'un elemento analitico – esattamente come lo è $\mathbf{C}$ – deve essere considerata come spazio substrato naturale per delle funzioni analitiche.

1) Sia C una curva algebrica di $\mathbf{C}^2$, cioè l'insieme dei punti (z, w) di $\mathbf{C}^2$ che annullano un polinomio irriducibile, $P(z, w)$. C è una superficie di $\mathbf{R}^4$. L'analisi locale di C si divide in due parti.

La prima è quella della struttura di C nell'intorno d'un punto regolare, cioè d'un punto (z, w) in cui le due derivate parziali $\partial P/\partial z$ e $\partial P/\partial w$ non sono entrambe nulle. Il teorema fondamentale al riguardo è il seguente:

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE. *Se* $(z, w) \in \mathbf{C}^2$ *è tale che* $\partial P/\partial w \neq 0$, C *è, localmente, in* (z, w) *il grafico d'una funzione analitica* $w = w(z)$.

Osservazione: Poiché in un punto regolare si ha $(\partial P/\partial w) \neq 0$, oppure $(\partial P/\partial z) \neq 0$, se $(\partial P/\partial w) = 0$, z sarà localmente esprimibile come funzione analitica $z(w)$ di w.

Il teorema delle funzioni implicite è fondamentale poiché mostra che, in un certo senso, l'analitico permette di localizzare l'algebrico. Pertanto, partendo dall'espressione analitica locale $w = w(z)$ si riottiene C per passaggio al globale, grazie al principio del prolungamento analitico. Quello ch'è in gioco non è tanto la solidarietà locale/globale comune all'algebrico e all'analitico, quanto la forma dell'equazione che definisce la curva C. Dire che il polinomio $P(z, w)$ di cui C è il luogo degli zeri è irriducibile, significa che non può essere ridotto alla forma di base $w = w(z)$: $P(z, w) = 0$ è un'equazione algebrica globale non riducibile a una funzione $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. Le equazioni analitiche locali invece, di cui il teorema delle funzioni implicite afferma l'esistenza, sono proprio della forma di base $w = w(z)$. Ma non sono equazioni globali. Esse variano al variare del punto (regolare) scelto.

L'interpretazione geometrica del teorema delle funzioni implicite è semplice (fig. 4). Si consideri la proiezione canonica $\pi : (z, w) \rightarrow z$. Il teorema afferma essenzialmente che, laddove tale curva è trasversa alle fibre di π, essa è localmente una sezione di π, se si chiama sezione di π un'applicazione analitica $w: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^2$ tale che $\pi \circ w = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$.

Lo studio locale di C nell'intorno dei suoi punti singolari (necessariamente isolati) ove $(\partial P/\partial z) = (\partial P/\partial w) = 0$ è piú complicato. Si fa vedere che C si decompone in rami (in corrispondenza alle diverse tangenti) analiticamente irriducibili (teoria degli sviluppi di Puiseux).

Infine l'analisi della struttura globale di C conduce nuovamente alla nozione di superficie di Riemann. Si scriva infatti il polinomio $P(z,w)$ nella forma

$$P_z(w) = a_0(z) + a_1(z)w + \ldots + a_n(z)w^n$$

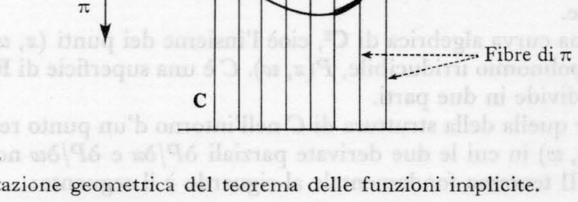


Figura 4.

Interpretazione geometrica del teorema delle funzioni implicite.

con i coefficienti $a_i(z)$ polinomiali, e si associno ad ogni valore di z le n radici di $P_z(w)$; si ottiene allora una presentazione della curva C, completata dei suoi punti all'infinito, sotto forma di un rivestimento ramificato di $\bar{\mathbf{C}}$.

Ancora piú significativa è la proprietà reciproca:

TEOREMA. *Se la superficie di Riemann Σ di una funzione analitica f è compatta, allora f verifica un'equazione algebrica $P(z, f) = 0$. In altre parole, Σ si identifica con una curva algebrica proiettiva C.*

È impossibile sottovalutare l'importanza della rottura epistemologica introdotta da Riemann nel porre la dialettica locale/globale al centro dello studio delle funzioni analitiche e delle curve algebriche. Questo nuovo punto di vista, che è un punto di vista sintetico, è infatti all'origine di tutta la geometria algebrica moderna. Cosí scrive Dieudonné: «Il periodo... senza dubbio piú importante di tutta la storia della Geometria Algebrica... è interamente marcato dall'opera d'un solo uomo, Bernhard Riemann, uno dei piú grandi matematici che siano mai esistiti, uno di quelli che hanno piú profondamente sentito (o divinato) *l'unità* essenziale della matematica» [1947, p. 42]. Utilizzando il linguaggio analogico del § 1, si potrebbe dire che l'opera di Riemann costituisce il primo esempio d'uno stato «eccitato» globale dell'universo matematico.

2) Una superficie di Riemann compatta, cioè, per quanto visto, una curva algebrica proiettiva (piana), possiede quattro livelli di struttura. Il livello soggiacente è quello topologico. Il livello intermedio è quello differenziabile. I livelli superiori sono l'analitico e l'algebrico i quali, come s'è visto, coincidono. Una delle grandi idee introdotte e sviluppate da Riemann è che il livello topologico vincola i livelli superiori. Tipico al riguardo è il concetto di genere. Esiste infatti una classificazione topologica delle superfici connesse, compatte ed orientabili: ogni superficie connessa, compatta ed orientabile è omeomorfa a una sfera con g manici o anche a un toro con g buchi. Il numero g dicesi genere della superficie (fig. 5).

La superficie di Riemann Σ di una curva algebrica proiettiva essendo una superficie connessa, compatta ed orientabile possiede genere ben definito. Tale invariante topologico è fondamentale per comprendere i fenomeni di periodicità posseduti dagli integrali abeliani. Lo si può calcolare a partire da una qualunque presentazione di Σ come rivestimento ramificato di $\bar{\mathbf{C}}$.

L'introduzione del genere pone subito il difficile problema di classificare le

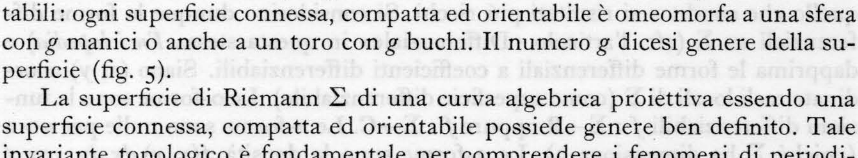


Figura 5.
Genere di una superficie.

superfici di Riemann compatte che hanno ugual genere (problema dei moduli).

3) Una superficie di Riemann compatta Σ è, come s'è detto, un substrato geometrico-topologico naturale quanto $\mathbf{C}$. È dunque logico sviluppare la teoria delle funzioni analitiche (con singolarità) su Σ. Poiché Σ è compatta, le sole funzioni che siano ovunque olomorfe su Σ sono le costanti. Quanto alle funzioni meromorfe, esse sono necessariamente razionali cioè funzioni razionali di z e di w per ogni coppia (z, w) che definisce Σ come curva algebrica. Ciò significa che il corpo K delle funzioni meromorfe su Σ è il corpo $\mathbf{C}(z, w)$ generato su $\mathbf{C}$ da z e w. Ma poiché w è funzione algebrica di z, K è un'estensione algebrica di grado finito del corpo $\mathbf{C}(z)$ avente grado di trascendenza 1 su $\mathbf{C}$. Reciprocamente, dato un tale corpo K, esso è il corpo delle funzioni meromorfe sulla superficie di Riemann della curva algebrica d'equazione $P(z, w)=0$ ove w è un generatore di K su $\mathbf{C}(z)$ e P il suo polinomio irriducibile. Si possono dunque considerare equivalenti due curve algebriche i cui corpi di funzioni meromorfe sono isomorfi. Tale è il punto di partenza della geometria birazionale. A meno di equivalenza birazionale la teoria delle curve algebriche s'identifica dunque con quella delle estensioni algebriche finite del corpo di base $\mathbf{C}(z)$. Si tratta di un punto decisivo poiché, come è stato mostrato da Dedekind e Weber, questa teoria è essenzialmente analoga a quella delle estensioni algebriche finite del corpo primo $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali, cioè alla teoria dei numeri algebrici. Appare cosí un profondo nesso tra geometria ed aritmetica e nasce una teoria geometrico-aritmetica dei corpi globali (estensioni algebriche finite di $\mathbf{Q}$ o di $\mathbf{C}(z)$) che piú tardi sarà collegata ad una teoria dei corpi locali. Lo sviluppo di tale sintesi è la base della geometria algebrica astratta.

4) Poiché una superficie di Riemann Σ è un substrato geometrico-topologico naturale, vi si può sviluppare una teoria dell'integrazione. È tale punto di vista quello che conduce ai risultati piú ricchi. Si considerino dunque le forme differenziali su Σ (cfr. l'articolo «Differenziale» in questa stessa *Enciclopedia*) e dapprima le forme differenziali a coefficienti differenziabili. Siano (x, y) coordinate reali locali di Σ (come superficie differenziabile). Le 0-forme sono le funzioni differenziabili $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ oppure $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}$. Le n-forme sono nulle per $n > 2$ (poiché Σ ha dimensione 2). Le 2-forme sono le densità $f(x, y)\, dx\, dy$, ove f è una funzione differenziabile, e quanto alle 1-forme (le piú interessanti) esse sono del tipo $\omega = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$ ove $a(x, y)$ e $b(x, y)$ sono funzioni differenziabili. Tra le 1-forme a valori complessi, vi sono le 1-forme olomorfe (rispettivamente meromorfe) del tipo $\omega = a(z)\, dz$, ove $a(z)$ è una funzione olo-

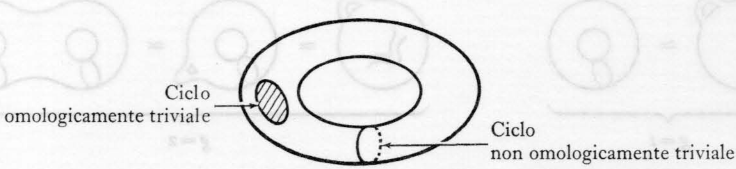


Figura 6.
Non trivialità dell'omologia del toro ($g = 1$).

morfa (rispettivamente meromorfa) su Σ. Esse formano ovviamente uno spazio vettoriale su **C**.

Uno dei primi grandi risultati di Riemann è che, se le funzioni olomorfe su Σ sono costanti (si suppone naturalmente che Σ sia compatta), non altrettanto accade per le 1-forme olomorfe (dette di prima specie) e questo per ragioni dovute al vincolo esercitato dal livello topologico sul livello analitico-algebrico.

Piú precisamente, sia Σ di genere $g \neq 0$. La sua omotopia e la sua omologia sono allora non triviali. Esistono su Σ dei cappi omotopicamente non triviali che non si possono contrarre a un punto entro Σ, ovvero esistono dei cicli omologicamente non triviali (fig. 6) che non sono bordo di alcun disco di Σ. Σ dicesi non semplicemente connessa.

Bisogna notare che tale difetto di connessione semplice non dipende qui da cause locali (come ad esempio nel caso del piano bucato) ma da cause globali.

È facile vedere che, poiché Σ è di genere g, esistono $2g$ cicli omologicamente non triviali «indipendenti» (cioè tali che ogni ciclo omologicamente non triviale possa scriversi in modo unico come una loro combinazione) e che possono essere scelti come g coppie disgiunte $(\gamma_1, \delta_1)\ldots(\gamma_g, \delta_g)$ di cicli «coniugati» (fig. 7) che generalizzano le nozioni di «paralleli» e «meridiani» del toro.

Tagliando Σ lungo una tale base di cicli si ottiene una superficie (con bordo) semplicemente connessa.

Si può allora far vedere che ad ogni coppia (γ_i, δ_i) d'una tale base di cicli si può associare una 1-forma olomorfa ω_i in modo da soddisfare il seguente

TEOREMA (Riemann). *Le 1-forme olomorfe $\omega_1, \ldots, \omega_g$ formano una base del* **C**-*spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe (cioè di prima specie).*

5) Le 1-forme sono fatte per essere integrate lungo cammini di Σ e definiscono per integrazione delle primitive. Il problema è di sapere se tali primitive sono uniformi su Σ. Sia o un punto base di Σ. Sia ω una 1-forma olomorfa o meromorfa. Per definire il valore in un punto a della primitiva F di ω, si considera un cammino γ che va da o ad a e si pone $F(a) = \int_\gamma \omega$. Perché F sia uniforme in a, occorre e basta che l'integrale $\int_\gamma \omega$ *non dipenda* dal cammino γ scelto tra o ed a. Se γ_1 e γ_2 sono due tali cammini e γ il ciclo $\gamma_1 - \gamma_2$, la condizione necessaria e sufficiente d'uniformità in a è pertanto $\int_\gamma \omega = 0$ e la condizione necessaria e sufficiente d'uniformità globale è $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni ciclo γ.

Si può dedurre da tale condizione che esistono essenzialmente due tipi di

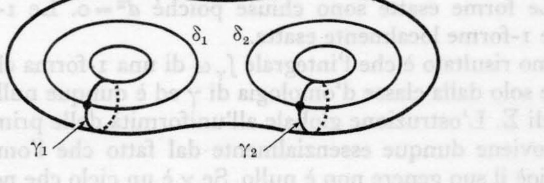


Figura 7.
Base di cicli coniugati del doppio toro ($g = 2$).

ostruzione all'uniformità delle primitive, l'uno locale e l'altro globale. Si consideri dapprima quello locale. Sia $\omega = a(z)\,dz$ e $\sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ lo sviluppo di Laurent (che generalizza lo sviluppo di Taylor) nell'intorno di un polo z_0 di ω. Nell'intorno di z_0, F si ottiene integrando la serie di Laurent termine a termine. Se $n \neq -1$, l'integrazione di $(z-z_0)^n$ dà $(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$ che è uniforme. Se però $n = -1$, l'integrazione di $(z-z_0)^{-1}$ dà $\log(z-z_0)$ che è una funzione multiforme. Infatti il logaritmo d'un numero complesso $z = \rho e^{i\vartheta}$ è dato dalla formula

$$(9) \qquad \log z = \log \rho + i(\vartheta + 2K\pi),$$

ove $K \in \mathbf{Z}$. Tale ostruzione locale all'uniformità s'esprime attraverso la nozione intrinseca di residuo. Il residuo di ω in uno dei suoi poli z_0 è il coefficiente a_{-1} che ha un significato indipendente dalla scelta della coordinata locale z ed è dato dalla formula

$$(10) \qquad a_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \omega,$$

ove γ è un «piccolo» ciclo (orientato positivamente) attorno a z_0 («piccolo» significa che γ è contenuto in un intorno semplicemente connesso di z_0). Se ω ammette residui non nulli v'è ostruzione locale all'uniformità della sua primitiva F, poiché F presenterà singolarità logaritmiche.

Si noti a questo proposito uno degli aspetti cruciali della solidarietà locale/globale.

TEOREMA DEI RESIDUI. *La somma dei residui di una 1-forma meromorfa su di una superficie di Riemann compatta Σ è sempre nulla.*

Applicando tale teorema alla 1-forma $[f'(z)\,dz]/[f(z)-c]$ si mostra facilmente che una funzione f meromorfa su Σ prende esattamente lo stesso numero di volte ogni valore $c \in \bar{\mathbf{C}}$. In particolare il numero di poli di f (contati con la loro molteplicità) è uguale al numero dei suoi zeri (contati con la loro molteplicità).

Venendo ora al problema dell'ostruzione globale all'uniformità, si eliminano dapprima le ostruzioni locali considerando soltanto le 1-forme meromorfe prive di residui. Si dimostra che questa condizione locale dipende dal livello differenziabile e si esprime affermando che il differenziale $d\omega$ di ω è la 2-forma nulla. Tali 1-forme diconsi chiuse e si chiamano esatte le 1-forme chiuse particolari che sono i differenziali $\omega = df$ di 0-forme (cioè la cui primitiva è uniforme). Le forme esatte sono chiuse poiché $d^2 = 0$. Le 1-forme chiuse sono dunque le 1-forme localmente esatte.

Il primo risultato è che l'integrale $\int_\gamma \omega$ di una 1-forma chiusa ω su un ciclo γ dipende solo dalla classe d'omologia di γ ed è dunque nullo se γ è il bordo di un disco di Σ. L'ostruzione globale all'uniformità delle primitive delle 1-forme chiuse proviene dunque essenzialmente dal fatto che l'omologia di Σ è non triviale, cioè il suo genere non è nullo. Se γ è un ciclo che non è un bordo, l'integrale $\int_\gamma \omega$ si chiama un periodo di ω. Si ha il seguente teorema:

TEOREMA. *Una* 1*-forma chiusa* ω *è esatta se e solo se* $\int_\gamma \omega = 0$ *per ogni ciclo* γ*, cioè se e solo se tutti i suoi periodi sono nulli.*

In generale si possono considerare i funzionali lineari I che associano a un ciclo γ un numero complesso $I(\gamma)$ che dipende linearmente da γ. Diconsi chiusi i funzionali che si annullano sui bordi. Questi sono le forme lineari sullo spazio vettoriale H_1 quoziente dello spazio dei cicli per lo spazio dei bordi. Il loro spazio H^1 è dunque il duale di H_1 (cfr. l'articolo «Dualità» in questa stessa *Enciclopedia*). Di qui il nome di spazio di coomologia attribuito ad H^1.

La teoria coomologica delle 1-forme permette di risolvere concettualmente il problema degli *integrali abeliani* ed in particolare ellittici (si tratta del problema inizialmente considerato da Riemann. Cfr. gli articoli «Invariante», § 12, e «Funzioni», § 7, in questa stessa *Enciclopedia*).

6) Come si è già notato, le primitive delle 1-forme su una superficie di Riemann Σ possono essere multiformi. Si possono però rendere uniformi sul *rivestimento universale* $\tilde{\Sigma}$ di Σ. Tale nozione di rivestimento è al centro della topologia algebrica. Data una superficie astratta Σ (connessa) si chiama rivestimento (non ramificato) di Σ una superficie Σ' munita di una proiezione $\pi : \Sigma' \to \Sigma$ che è un omeomorfismo locale di fibra discreta. Ciò significa che l'immagine inversa mediante π di un aperto abbastanza piccolo Δ di Σ è una «pila» di aperti di Σ' omeomorfi a Δ. Il caso banale è quello in cui Σ' è globalmente una «pila» di esemplari di Σ, cioè il prodotto diretto di Σ per una fibra discreta. Σ' è allora non connessa. Il caso non banale è quello in cui Σ' è connessa. Per esempio identificando le coppie di punti antipodali di una sfera S^2 si fa di S^2 un rivestimento connesso a due fogli del piano proiettivo reale.

La teoria dei rivestimenti fornisce un ottimo esempio di unità della matematica, cioè d'isomorfismo tra teorie i cui domini di oggetti sono molto diversi. Essa è infatti formalmente identica alla teoria di Galois delle estensioni algebriche dei corpi.

Riprendendo in esame le superfici di Riemann, esse possiedono rivestimenti che sono ancora superfici di Riemann. Peraltro esiste un teorema di classificazione delle superfici di Riemann semplicemente connesse.

TEOREMA (Koebe). *Ogni superficie di Riemann semplicemente connessa è analiticamente isomorfa alla sfera di Riemann* $\bar{\mathbf{C}}$ *(cioè alla retta proiettiva complessa* $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$*), oppure al piano complesso* $\mathbf{C}$*, oppure all'interno* Δ *del disco unità di* $\mathbf{C}$.

Osservazione: La struttura analitica di Δ ne fa un modello del piano iperbolico (cfr. § 2.1). A ciò è dovuto il fatto che la geometria iperbolica è rientrata nell'universo standard di ogni matematico.

Perciò ogni superficie di Riemann si ottiene come quoziente di $\bar{\mathbf{C}}$, $\mathbf{C}$ oppure Δ rispetto a un gruppo di automorfismi della loro struttura analitica. In particolare è questo il caso per le superfici di Riemann compatte. Il genere 0 corrisponde a $\bar{\mathbf{C}}$, il genere 1 (curve ellittiche) ai quozienti di $\mathbf{C}$ rispetto a dei reticoli, i generi $g > 1$ a quozienti di Δ rispetto a gruppi (discreti) di automorfismi della sua struttura iperbolica (gruppi fuchsiani). Se allora si considera una 1-forma

ω su una superficie di Riemann compatta Σ, e se si suppone che sia chiusa, cioè che l'ostruzione all'uniformità della sua primitiva F sia globale e provenga dall'omologia non triviale di Σ, tale ostruzione scompare allorché si risale a $\tilde{\Sigma}$. Calcolata in $\tilde{\Sigma}$, la primitiva $\tilde{F}$ di ω diventa globalmente uniforme. Dire che F è già uniforme su Σ è quanto dire che i suoi periodi sono nulli.

Osservazione: Si è visto che nella concezione riemanniana z poteva essere considerata solo localmente come una variabile indipendente e che globalmente z era in effetti la proiezione d'un rivestimento ramificato $z : \Sigma \to \bar{\mathbf{C}}$. Si può dire ora che $\tilde{\Sigma}$ è il luogo ove z ritorna ad essere globalmente una variabile indipendente.

Per concludere la rapida rassegna dello straordinario rimescolamento di idee e di risultati generati dall'introduzione (da parte di Riemann) della dialettica locale/globale nella teoria delle funzioni analitiche, andrebbe ancora ricordato il celeberrimo teorema di Riemann-Roch per il quale si rimanda agli articoli «Geometria e topologia» e «Invariante» in questa stessa *Enciclopedia*.

La generalizzazione di tale sintesi in dimensione superiore si è rivelata irta di difficoltà (teoria delle superfici algebriche prima, degli insiemi algebrici poi) e ha rappresentato la punta avanzata di tutta la geometria algebrica contemporanea.

Può allora sembrare che l'assenza di solidarietà locale/globale nel caso differenziabile tolga ogni speranza di stabilire in tal caso una sintesi di cosí vasta portata teorica e concettuale. Ma si vedrà che ciò è completamente falso e che la topologia differenziale moderna conduce a una nuova dialettica del locale e del globale che, pur essendo molto diversa da quella cui è stato fin qui accennato, non è meno armoniosa ed elegante.

4. *L'opposizione locale/globale nella teoria delle funzioni: il caso differenziabile.*

4.1. Il paradigma catastrofista.

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$ di una variabile reale a valori reali. Si è visto al § 3.1 che se essa non è analitica non sussiste alcuna solidarietà globale delle sue determinazioni locali. In modo intuitivo si può dire che la sua consistenza «non si traduce in formule»: non esiste espressione simbolica (algoritmo) che permetta di calcolare f. Naturalmente i metodi del tipo sviluppo di f in serie di Fourier permettono di approssimare f. Ma ciò non scioglie il nodo «filosofico» consistente nel fatto che l'identità di f è ideale (non costruibile). Si può dunque subito ipotizzare che il principio d'identità concreto proprio di f sia qualitativo, cioè strettamente piú debole del principio d'identità classico e deve dunque essere definito come una relazione d'equivalenza (che verrà indicata con $\sim$) sullo spazio $\mathcal{F}$ delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Bisogna perciò concettualizzare quest'equivalenza che deve essere naturale.

Si consideri il grafico di f. Si tratta di una curva C_f del piano $\mathbf{R}^2$. Si vuole che le funzioni f e g rappresentate nella figura 8 siano equivalenti. Cosa c'è di comune tra f e g? Qual è il dato qualitativamente invariante che determina fenomenologicamente l'equivalenza $f \sim g$?

Il lettore intuirà facilmente che tale dato si riduce all'informazione finita e locale che costituisce la «configurazione critica» di f, cioè:

a) il numero dei punti critici di f (ossia dei punti a tangente orizzontale di C_f) e il loro tipo (massimo o minimo). Nell'esempio considerato, due minimi m_1 e m_2 e un massimo M_1;
b) l'ordine $m_1 < M_1 < m_2$ di questi punti critici;
c) l'ordine $f(m_1) < f(m_2) < f(M_1)$ dei valori critici corrispondenti.

In base a una tale configurazione critica esiste un solo modo di ricostruire f a meno di equivalenze: la configurazione critica di f determina il suo tipo qualitativo globale (fig. 9).

Certo, questa intuizione di cui il lettore dovrebbe fidarsi s'imbatte subito – come del resto ogni intuizione – in notevoli difficoltà. I punti critici di f possono infatti essere piú complicati che non dei semplici massimi o minimi (possono essere degeneri: cfr. oltre). Nonostante tutto, tale intuizione radicata nella fenomenologia della percezione è originaria per un nuovo tipo di dialettica tra locale e globale, il quale è matematizzabile e spalanca un vero e proprio universo.

Verrà dapprima mostrato che la nozione di tipo qualitativo introdotta in modo intuitivo corrisponde infatti esattamente al principio naturale d'identità, che tiene conto dei seguenti fatti: *a*) f è un'applicazione tra uno spazio sorgente e uno spazio bersaglio; *b*) il livello di struttura che si considera è quello differenziabile.

Il punto *a*) può essere abbordato in un contesto generale (in qualche misura è universale). Sia C la categoria (cfr. l'articolo «Applicazioni» in questa stessa *Enciclopedia*) degli insiemi muniti di un certo tipo di struttura. Sia $\mathrm{Hom}(M, N)$ l'insieme dei morfismi $f : M \to N$ tra due oggetti M ed N di C, ossia l'insieme delle trasformazioni che rispettano la loro struttura. Quale sarà l'identità strutturale, cioè il grado di discernibilità di un elemento $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$? Essa deve

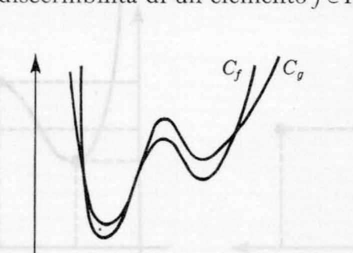


Figura 8.

Equivalenza qualitativa di due funzioni.

«corrispondere» al grado di discernibilità degli elementi della sorgente (M) e del bersaglio (N) di f. Orbene, l'indiscernibilità degli elementi di un oggetto X di C è misurata dalle «simmetrie interne» di X, ossia dal gruppo degli automorfismi di X, o in altri termini dal gruppo delle permutazioni di X che lasciano invariato l'insieme delle interrelazioni strutturali tra gli elementi di X. Si arriva dunque in modo naturale alla seguente definizione. Sia G_M (rispettivamente G_N) il gruppo degli automorfismi di M (rispettivamente di N). Il prodotto diretto $G = G_M \times G_N$ opera in $\mathrm{Hom}(M, N)$ e definisce in esso delle classi d'equivalenza.

DEFINIZIONE. *Siano f e g due elementi di $\mathrm{Hom}(M, N)$. f e g sono equivalenti ($f \sim g$) se esistono un automorfismo $\varphi \in G_N$ e un automorfismo $\psi \in G_M$ tali che il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

sia commutativo, cioè tale che $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Passando allora al punto *b*), poiché il livello di struttura considerato è quello differenziabile, si devono considerare il gruppo Diff **R** dei diffeomorfismi di **R** (cioè degli automorfismi della struttura differenziabile di **R**) e l'azione di $G = \mathrm{Diff}\,\mathbf{R} \times \mathrm{Diff}\,\mathbf{R}$ sullo spazio $\mathcal{F}$ delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ di **R** in **R**: $f, g \in \mathcal{F}$ saranno equivalenti se esistono $\varphi, \psi \in \mathrm{Diff}\,\mathbf{R}$ tali che $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Orbene, è facile vedere che ciò che è comune a una classe d'equivalenza, o in altre parole ciò che è invariante rispetto all'azione di G, è esattamente la configurazione critica delle funzioni. Piú precisamente, se x_0 è un punto critico di f, la serie di Taylor $T_{x_0}f$ di f in x_0 inizia (a parte il termine costante $f(x_0)$) con un termine $(x-x_0)^n[f^n(x_0)/n!]$. L'intero n dicesi ordine del punto critico. I diffeomorfismi mantengono l'ordine dei punti critici e il segno di $f^n(x_0)$ (cioè la qualità di minimo, di massimo o di punto di flesso anche degenere) come anche l'ordine rispettivo dei punti critici e dei valori critici.

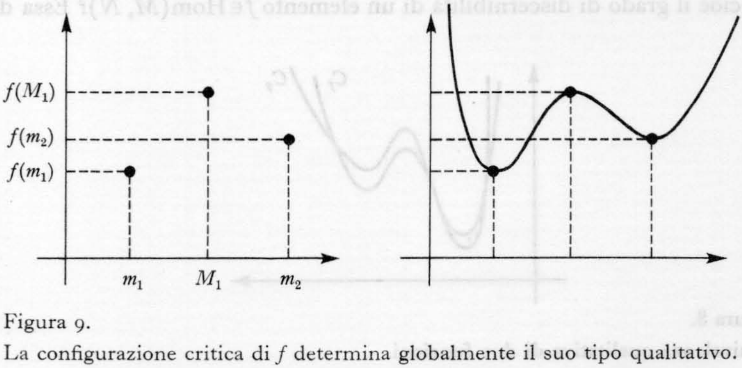


Figura 9.
La configurazione critica di f determina globalmente il suo tipo qualitativo.

Osservazione: Ciò che s'è detto vale solo per quei diffeomorfismi di **R** che si ottengono per deformazione dell'applicazione identica di **R**. Se si accettano i diffeomorfismi di **R** ottenuti per deformazione della simmetria $x \to -x$, viene globalmente invertito sia l'ordine dei punti critici, sia quello dei valori critici, sia entrambi. L'essenziale è però che un diffeomorfismo non può invertire tali ordini parzialmente e passare per esempio dall'ordine $m_1 < M_1 < m_2 < M_2$ all'ordine $m_1 < M_2 < m_2 < M_1$.

Ciò ch'è stato dunque battezzato il tipo qualitativo di f è semplicemente il suo tipo differenziabile. Questa nozione cruciale chiarisce e riduce in maniera sostanziale lo scarto, di cui al § 3.1, tra la struttura locale di una funzione differenziabile e il suo sviluppo di Taylor. Sia $f \in \mathfrak{F}$. I troncamenti successivi di $T_{x_0}f$ che esprimono la migliore successione di approssimazioni locali di f mediante polinomi diconsi *getti* di f in x_0. Sebbene $T_{x_0}f$ non rappresenti f in x_0, può ragionevolmente avvenire che f sia localmente equivalente ad uno dei suoi getti. In tal caso si afferma che f è di determinazione finita in x_0. Se per esempio $f'(x_0) \neq 0$, si può dimostrare che f è determinata dell'ordine 1 in x_0: mediante un cambiamento differenziabile di coordinate, f si scrive in un intorno di x_0 nella forma $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$. Analogamente, se x_0 è un punto critico d'ordine 2 (punto critico non degenere), f è determinata dell'ordine 2 in x_0: mediante un cambiamento differenziabile di coordinate f si scrive in un intorno di x_0 nella forma $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^2 [f''(x_0)/2]$.

La nozione di determinazione finita, che può essere generalizzata, è programmatica. Nel caso differenziabile si cerca di «trasferire» nei cambiamenti di coordinate lo scarto tra il differenziabile e l'analitico-algebrico e si analizza «ciò che resta» dopo tale passaggio. Nei casi favorevoli, ciò che resta è algebrico e permette dunque il calcolo. Ecco uno dei tanti esempi. Sia X un campo di vettori $\mathcal{C}^\infty$ su una varietà differenziabile M. Ciò significa che ad ogni punto x di M si associa un vettore $X(x)$ tangente ad M in x e che varia in modo differenziabile al variare di x. Dato un punto O di M, si vuol sapere se, a meno di equivalenze, X è localmente di forma semplice in O. Se $X(O) \neq 0$, il classico teorema d'esistenza delle soluzioni di un'equazione differenziale del prim'ordine afferma che X è equivalente nell'intorno di O ad un campo costante. Se $X(O) = 0$, cioè se O è un punto singolare del campo X, si tratta di sapere sotto quali condizioni X è localmente determinato dal proprio getto d'ordine 1 ossia equivalente al campo lineare $\tilde{X}$ di coordinate

$$\tilde{X}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(O)\, x_j$$

(ove $(x_1, ..., x_n)$ sono coordinate locali di M in O ed X_i le coordinate di X). In tal caso si dirà che X è linearizzabile (in O). Sia A la matrice $n \times n$

$$A = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(O)\right).$$

È facile dimostrare che i suoi autovalori $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono degli invarianti del tipo differenziabile di X. Si ha allora il seguente risultato:

TEOREMA DI POINCARÉ-STERNBERG. *Se per ogni n-pla* $(i_1, ..., i_n)$ *d'interi tali che* $i_1+...+i_n \geq 2$, *e se per ogni* $j \in (1, ..., n)$ *si ha* $\lambda_j - \sum_{k=1}^{n} i_k \lambda_k \neq 0$, *allora* X *è linearizzabile (in* O*).*

[Per la dimostrazione di tale teorema e delle sue conseguenze ci si può riferire a Roussarie 1975].

Ma si può andare ben piú lontano. Lo spazio $\mathcal{F}$ è infatti munito d'una topologia, detta topologia $\mathcal{C}^\infty$, adattata al livello differenziabile, ossia la topologia della convergenza uniforme di f e di tutte le sue derivate sui compatti di $\mathbf{R}$. Orbene dal momento in cui si dispone su un insieme di una topologia e di una relazione d'equivalenza è possibile definirvi una nozione di stabilità strutturale.

DEFINIZIONE. *Si dice che* $f \in \mathcal{F}$ *è strutturalmente stabile se esiste un intorno di* f *per la topologia di* $\mathcal{F}$, *tutti gli elementi del quale sono equivalenti ad* f.

In altri termini, f è strutturalmente stabile se il suo tipo qualitativo «resiste» a piccole deformazioni.

Sia allora K l'insieme degli elementi di $\mathcal{F}$ strutturalmente instabili. K dicesi l'insieme di biforcazione (o l'insieme catastrofico) globale di $\mathcal{F}$. Qui s'introduce una núova idea chiave: K è un sottospazio discriminante che classifica i tipi qualitativi stabili degli elementi di $\mathcal{F}$. È in effetti intuitivo che se si vuole passare da un tipo stabile a un altro, il principio di continuità esige a priori che si passi per un tipo instabile intermedio, cioè che si attraversi K: K decompone $\mathcal{F} \setminus K$ in «cellule» aventi per bordo K ed associate ai tipi stabili. Almeno nei casi semplici, K avrà una geometria relativamente tipica. Il problema sarà dunque di vedere in qual misura la decomposizione di $\mathcal{F}$ in orbite di G (cioè in classi d'equivalenza) può «leggersi» sulla geometria di K (che è evidentemente G-invariante). Cosí nasce un nuovo paradigma, il paradigma catastrofista, che da una parte riposa sullo stato globale «eccitato» (nel senso del § 1) dell'universo matematico costituito dalla topologia differenziale moderna e dalla teoria delle singolarità, dall'altra dà adito a una fusione totalmente nuova dei principî della filosofia naturale (cfr. l'articolo «Catastrofi» in questa stessa *Enciclopedia*). La forza di tale paradigma proviene dal fatto che offre la prima interpretazione matematica globale e coerente di un fenomeno universale che la scienza classica ha sempre tentato di rifiutare e che la filosofia, al contrario, ha sempre fatto di tutto per conservare, cioè quello della trasformazione delle forme.

Se ne indicherà ora qualche aspetto.

4.2. Stabilità e trasversalità.

Un primo problema è quello di trovare dei criteri intrinseci e geometrici che caratterizzino la stabilità strutturale definita per ora in modo puramente «esterno» rispetto a uno spazio globale $\mathcal{F}$. Si riprenderà il caso in cui $\mathcal{F}$ è uno spazio di funzioni differenziabili $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ di una varietà differenziabile M nella retta reale (teoria di Morse). Si accennerà invece qui a un problema risolto da Whitney che dà origine al «programma di Thom-Smale» sullo studio delle singolarità delle applicazioni differenziabili (per i legami con la struttura di M cfr. oltre, p. 472).

Si analizzino ora dal punto di vista «fenomenologico», ossia qualitativo, le applicazioni differenziabili $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ del piano in sé. Una tale f associa a un punto $x = (x_1, x_2)$ di $\mathbf{R}^2$ un punto $f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ di $\mathbf{R}^2$. Localmente due casi sono possibili: f è un diffeomorfismo oppure f non lo è. Nel primo caso la jacobiana $\mathcal{J}(x)$ di f in x, cioè la matrice 2×2: $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ $(i, j = 1, 2)$, matrice dell'applicazione tangente $D_x f: T_x \mathbf{R}^2 \rightarrow T_{f(x)} \mathbf{R}^2$ di f in x (cfr. l'articolo «Differenziale» in questa stessa *Enciclopedia*), è invertibile, cioè a determinante non nullo. Si dice allora che x è un punto regolare di f. Se x è regolare, f è localmente equivalente all'applicazione identica $\mathrm{Id}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ed è dunque in un certo senso localmente banale. L'«informazione» che caratterizza fenomenologicamente f non può dunque provenire che dai punti in cui f non è un diffeomorfismo locale, cioè dai punti in cui la jacobiana *non è* invertibile. Tali punti diconsi punti singolari o punti critici di f. Si ritrova dunque, in un piú largo contesto, l'idea di «configurazione critica». Ma la struttura singolare di f può essere estremamente complicata e può percorrere tutti gli stadi che vanno dalle applicazioni massimamente singolari quali le funzioni costanti alle applicazioni ovunque regolari quali i diffeomorfismi globali del piano. La grande idea dovuta a Whitney è

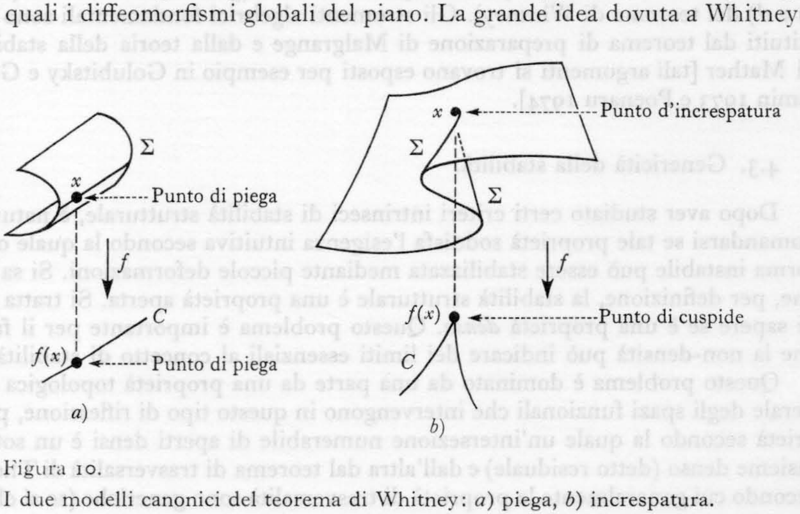


Figura 10.

I due modelli canonici del teorema di Whitney: *a*) piega, *b*) increspatura.

allora quella di limitarsi alle applicazioni strutturalmente stabili e di dimostrare che il vincolo di stabilità è abbastanza forte per classificare le possibili singolarità di f.

TEOREMA DI WHITNEY. *Se f è un'applicazione differenziabile strutturalmente stabile del piano nel piano:*

a) il luogo critico di f (cioè l'insieme dei punti critici di f) è una curva regolare Σ (eventualmente vuota) di $\mathbf{R}^2$;
b) l'immagine di Σ mediante f è una curva C di $\mathbf{R}^2$ che ammette come sole singolarità possibili punti di regresso isolati γ_i;
c) se x è un punto di Σ la cui immagine $f(x)$ appartiene a $C-\{\gamma_i\}$, f è localmente equivalente in x al modello canonico $(x_1, x_2)\to(x_1, x_2^2)$;
d) se x è un punto di Σ la cui immagine è uno dei γ_i, f è localmente equivalente in x al modello canonico $(x_1, x_2)\to(x_1, -x_1x_2+x_2^3)$.

È abbastanza facile visualizzare i modelli canonici *c*) e *d*) di tale teorema. Basta «storcere» la sorgente $\mathbf{R}^2$ (supposta immersa in $\mathbf{R}^3$) in modo che f diventi una proiezione. Nel primo caso si ottiene una catastrofe detta catastrofe piega e nel secondo una catastrofe detta catastrofe cuspide o catastrofe increspatura (fig. 10).

Il contenuto e il valore del teorema di Whitney si chiariscono nell'ambito dei getti (cfr. l'articolo «Geometria e topologia», p. 684, in questa stessa *Enciclopedia*). L'idea fondamentale è allora che la stabilità di f s'esprime mediante proprietà di trasversalità (*ibid.*, p. 683) delle immagini $j^kf(\mathbf{R}^2)$ rispetto a certi sottospazi degli spazi di getti $\mathcal{J}^k(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$.

Ciò che può essere battezzato «programma di Thom» consiste nel generalizzare l'analisi fin qui vista alle applicazioni differenziabili tra varietà arbitrarie e nel cercare modelli canonici per le singolarità stabili (generalizzazione dei punti *c*) e *d*) del teorema di Whitney). Gli strumenti algebrici fondamentali sono costituiti dal teorema di preparazione di Malgrange e dalla teoria della stabilità di Mather [tali argomenti si trovano esposti per esempio in Golubitsky e Guillemin 1973 e Poenaru 1974].

4.3. Genericità della stabilità.

Dopo aver studiato certi criteri intrinseci di stabilità strutturale, è naturale domandarsi se tale proprietà soddisfa l'esigenza intuitiva secondo la quale ogni forma instabile può essere stabilizzata mediante piccole deformazioni. Si sa già che, per definizione, la stabilità strutturale è una proprietà aperta. Si tratta ora di sapere se è una proprietà *densa*. Questo problema è importante per il fatto che la non-densità può indicare dei limiti essenziali al concetto di stabilità.

Questo problema è dominato da una parte da una proprietà topologica generale degli spazi funzionali che intervengono in questo tipo di riflessione, proprietà secondo la quale un'intersezione numerabile di aperti densi è un sottoinsieme denso (detto residuale) e dall'altra dal teorema di trasversalità di Thom, secondo cui generalmente le proprietà di trasversalità sono generiche (se si chiama generica una proprietà soddisfatta su un insieme residuale) (cfr. il citato articolo «Geometria e topologia», p. 685).

Ecco due estreme conseguenze di questo fondamentale teorema. Si consideri dapprima il caso di applicazioni differenziabili $f : M \to \mathbf{R}$. Sia n la dimensione di M e $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un sistema di coordinate locali in $x \in M$. Sia x un punto critico, cioè $\partial f / \partial x_1 = ... = \partial f / \partial x_n = 0$ in x (tale proprietà è intrinseca, ossia non dipende dal sistema di coordinate scelto). Si consideri la matrice simmetrica delle derivate seconde di f in x, detta hessiana di f in x,

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) \right).$$

Si dice che x è un punto critico non degenere di f se $H(x)$ ha rango massimo n.

TEOREMA. *Genericamente i punti critici di un'applicazione $f : M \to \mathbf{R}$ sono non degeneri ed isolati.*

Dimostrazione: Localmente $\mathcal{J}^1(M, \mathbf{R})$ ha coordinate $(x_1, ..., x_n)$ per M, y per $\mathbf{R}$ e $(\xi_1, ..., \xi_n)$ per la fibra. Sia S_1 il sottospazio di $\mathcal{J}^1(M, \mathbf{R})$ degli 1-getti $(x_1, ..., x_n, y, 0, ..., 0)$, x è punto critico se e solo se $j^1 f(x) \in S_1$.

LEMMA. *x è non degenere se e solo se $j^1 f$ è trasverso in x ad S_1.*

Dimostrazione: $j^1 f$ è l'applicazione (differenziabile) che associa al punto $(x_1, ..., x_n)$ di M il punto

$$\left(x_1, ..., x_n, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

di $\mathcal{J}^1(M, \mathbf{R})$. La sua jacobiana in x è dunque la matrice a $2n+1$ righe ed n colonne:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \dots & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \, \partial x_1} & \dots & \dots & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Se $u = (u_1, ..., u_n)$ è un vettore tangente ad M in x, la sua immagine mediante l'applicazione tangente a $j^1 f$ è dunque il vettore di coordinate:

$$\left(u_1, ..., u_n, \frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} u_n, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} u_1 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} u_n, ..., \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} u_1 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} u_n\right) =$$

$$= \left(u, \frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} u_n, Hu\right).$$

Se x è critico, dire che $j^1 f$ è trasverso in x ad S_1 significa che si possono ottenere in tal modo tutti i vettori $(u, 0, w)$. Ma ciò significa precisamente che l'equazione $Hu = w$ è risolubile per ogni vettore w e dunque che H è invertibile, ossia di rango massimo in x.

Dato questo lemma, la prima parte del teorema è una conseguenza diretta del teorema di trasversalità. Quanto alla seconda, essa discende dal fatto che poiché S_1 ha codimensione n, se $j^1 f$ è trasversa ad S^1, $j^1 f^{-1}(S_1)$ è anche di codimensione n e dunque di dimensione 0.

Osservazione: Se x è un punto critico di f, $f(x)$ dicesi valore critico di f. Si fa vedere con metodi analoghi che genericamente i valori critici sono distinti.

Si consideri ora il caso delle applicazioni differenziabili $f : M \to N$ ove N, invece di essere di dimensione piccola come $\mathbf{R}$, è di dimensione «grande» rispetto a quella di M. Si può sperare che esisteranno sufficienti gradi di libertà affinché: *a*) f diventi genericamente un'immersione, ossia che in ogni punto di M l'applicazione tangente di f sia iniettiva (questa è una nozione locale); *b*) f diventi un'immersione iniettiva, od anche un'immersione regolare (*embedding*) (questa è una nozione globale).

Tale è ad esempio il contenuto del seguente teorema di Whitney che può essere ottenuto come corollario del teorema di trasversalità:

TEOREMA DI IMMERSIONE (Whitney). *Se* $\dim N \geq 2 \dim M$, *le applicazioni differenziabili di* M *in* N *sono genericamente delle immersioni.*

Analogamente si dimostra che se $\dim N \geq 2 \dim M + 1$ le applicazioni differenziabili $f : M \to N$ sono genericamente immersioni iniettive. Ciò non vuol dire tuttavia che f sia un'immersione regolare poiché l'immagine $f(M)$ di M mediante f può essere talmente «ripiegata» su se stessa in N che la topologia indotta su $f(M)$ da quella di N può non essere omeomorfa a quella di M. Si può però dimostrare che se f è un'immersione iniettiva *propria* (cioè se l'immagine inversa mediante f di ogni compatto di N è un compatto di M), allora f è necessariamente un'immersione regolare. Se esistono dunque delle applicazioni proprie di M in N, il teorema di Whitney garantisce l'esistenza di immersioni regolari di M in N.

Ecco infine il risultato, completo e notevole, sulla densità delle applicazioni stabili.

TEOREMA DI MATHER. *Le applicazioni strutturalmente stabili di una varietà di dimensione n in una varietà di dimensione p sono dense se e solo se*

a) $p \geq n+4$ e $p<7(p-n)+8$
b) $0 \leq p-n \leq 3$ e $p<7(p-n)+9$
c) $p=n-1$ e $p<8$
d) $p=n-2$ e $p<6$
e) $p \leq n-3$ e $p<7$.

In particolare per $p=1$ (caso $f: M \rightarrow \mathbf{R}$), $n=2$ e $p=2$ (caso $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$), $p \geq 2n$ (caso delle immersioni) le applicazioni strutturalmente stabili sono dense.

Osservazione: Se s'indebolisce il tipo differenziabile nel tipo topologico, allora la stabilità strutturale è sempre una proprietà generica.

4.4. Geometria discriminante e catastrofi elementari.

Si vedrà ora in che modo viene affrontato, nel quadro del paradigma catastrofista, il problema dell'instabilità. S'è visto che l'insieme di biforcazione globale K dello spazio $\mathcal{F}$ «geometrizza» la tassonomia delle forme stabili. Il problema è dunque di analizzare, almeno localmente e se possibile globalmente, tali geometrie discriminanti.

Sia dunque $f \in K$ una forma instabile. Bisogna descrivere la geometria di K nell'intorno di f. La situazione «ideale» sarebbe la seguente:

a) La classe d'equivalenza $G(f)$ di f è una «sottovarietà» (in generale di dimensione infinita) di $\mathcal{F}$ di codimensione finita (detta codimensione di f).
b) Esistono localmente dei supplementari W di $G(f)$, ossia delle sottovarietà di dimensione uguale alla codimensione di f e trasverse a $G(f)$ in f (si avrà dunque $G(f) \cap W = \{f\}$). Tali supplementari si diranno sezioni trasverse.
c) La geometria della traccia di K su W, cioè la geometria della coppia $(W, K_W = W \cap K)$ resta invariante allorché W varia nell'insieme delle sezioni trasverse. (W, K_W) si dirà modello trasverso di centro organizzatore f.
d) Localmente K è il prodotto diretto dell'orbita $G(f)$ e di K_W (fig. 11).

In generale la situazione è molto piú complicata e la sua analisi si rivela grandemente difficile. Ma nel caso delle applicazioni $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ di codimensione piccola si sono potuti dimostrare i punti *a*)-*d*). La cosa piú difficile è dimostrare il punto *c*), nella misura in cui ci si pone nel campo reale ove a priori potrebbe succedere che, quando W varia, certe parti di K_W diventino immaginarie. Il teorema di preparazione di Malgrange già citato è essenziale per la dimostrazione.

I modelli trasversi di funzioni reali di codimensione inferiore o uguale a 4 sono stati chiamati da Thom catastrofi elementari (cfr. l'articolo «Catastrofi» in questa stessa *Enciclopedia*). Eccone un esempio.

Sia $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione instabile. Si può mostrare che esistono due cau-

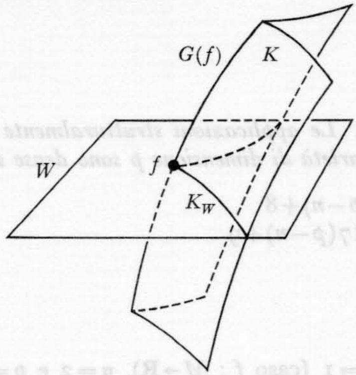


Figura 11.
Struttura locale ideale di K nell'intorno d'una forma instabile di codimensione finita.

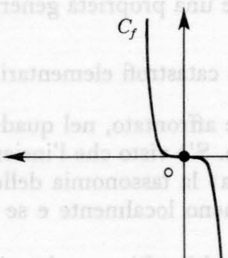


Figura 12.
Grafico di $f(x)=x^5$.

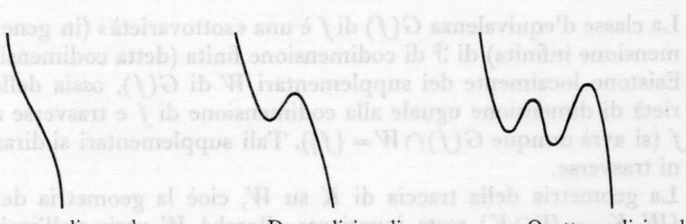


Figura 13.
Tipi fondamentali di funzioni stabilizzate di $f(x)=x^5$.

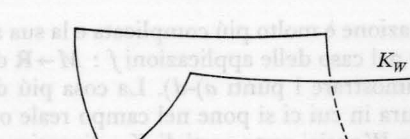


Figura 14.
Modello trasverso della singolarità x^5, detta coda di rondine.

se essenziali d'instabilità per le funzioni: 1) alcuni punti critici sono degeneri; 2) alcuni valori critici sono uguali.

È allora possibile rendere f stabile mediante piccole deformazioni: *a*) facendo «esplodere» i suoi punti critici degeneri in tanti punti critici non degeneri che li rigenerano per «collasso» o per «implosione»; *b*) separando i valori critici.

Si ottiene cosí un insieme finito di stabilizzazioni distinte di f utilizzando funzioni instabili intermedie. Tali successivi gradi di stabilizzazione possono essere «letti» direttamente sulla geometria di un modello trasverso di K in f, sotto forma di una stratificazione.

Si consideri per esempio l'applicazione instabile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da $f(x) = x^5$. Essa ammette l'origine come unico punto critico degenere. Il suo grafico C_f è una curva di $\mathbf{R}^2$ che ammette nell'origine un punto di flesso «appiattito» (fig. 12). La derivata di f vale $5x^4$ e diventa, per piccole perturbazioni, un'equazione generale di quarto grado che può genericamente possedere quattro radici complesse a due a due coniugate, due radici complesse coniugate e due radici reali distinte, oppure ancora quattro radici reali distinte. Questi tre casi corrispondono ai tre tipi fondamentali di funzioni stabilizzate di f presentati nella figura 13.

Poiché f non può piú diventare singolare per piccole deformazioni (infatti la proprietà di stabilità è una proprietà aperta e per questo il processo di stabilizzazione è irreversibile), è ovvio che ogni intorno sufficientemente piccolo di f è costituito da funzioni stabilizzate e da funzioni di transizione parzialmente stabilizzate (tab. 1) ove gli m_i (rispettivamente gli M_i) indicano i minimi (rispettivamente i massimi) non degeneri.

Fin qui si tratta soltanto di tassonomia (lista di casi). Bisogna ora vedere come la morfologia discriminante K permette di geometrizzare tale tassonomia. La singolarità x^5 è una catastrofe elementare; perciò i punti *a*) e *d*) (p. 463) sono validi e basta dunque considerare un modello trasverso (W, K_W) (fig. 14). Si può dimostrare che x^5 è una singolarità di codimensione 3.

La sezione trasversa W ha dunque dimensione 3. K_W geometrizza la tassonomia nella misura in cui:

a) K_W è una superficie che decompone W in sette cellule aperte disgiunte corrispondenti ai sette tipi di funzioni stabilizzate di f;

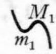
b) i gradi d'instabilità intermedi possono essere «letti» sulla stratificazione di K_W che rende fenomenologica la decomposizione di K_W in orbite sotto l'azione di G. Piú precisamente K_W si compone di strati di dimensione 2 (ossia di codimensione 1) in corrispondenza alle instabilità di codimensione 1 che garantiscono le transizioni 1-2_1, 1-2_2, 2_1-3, 2_2-3, 3-4, 4-5, 4-6, 5-2, 6-2, 5-7, 6-7, 7-2. Questi strati si incollano lungo strati di dimensione 1 (cioè di codimensione 2) corrispondenti alle instabilità di codimensione 2 che garantiscono le transizioni 1-2_1-2_2-3, 2_1-3-4-5, 2_2-3-4-6, 4-5-6-7, 2-5-7, 2-6-7. Infine tali strati si incollano nel punto f, centro organizzatore della morfologia;

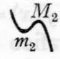
c) la morfologia K_W è invariante quando si contrae W. Dal punto di vista topologico si tratta di una morfologia tipo «cono» di vertice f.

Tabella 1.
Funzioni stabilizzate e parzialmente stabilizzate di transizione.

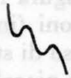
1.  Nessun punto critico.

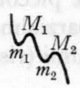
2.  Un massimo e un minimo. Vi sono due possibilità:

2_1. 

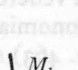
2_2. 

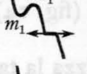
1-2.  Flesso semplice. Transizione tra 1 e 2. Vi sono due possibilità (1-2, e 1-2_2) a seconda che collassi la coppia m_1, M_1, oppure la m_2, M_2.

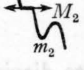
3.  Due minimi e due massimi. Tale caso, di complessità massimale, è unico. Si supporrà ch'esso corrisponda all'ordine:

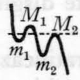


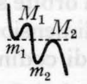
3-2. Transizione tra 3 e 2. Vi sono due possibilità:

3-2_1.  Per collasso di m_2 ed M_2.

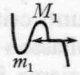
3-2_2.  Per collasso di m_1 ed M_1.

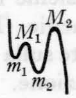
4.  $m_2 < m_1 < M_2 < M_1$.

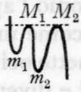
3-4.  $m_2 < m_1 = M_2 < M_1$.

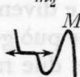
5.  $m_1 < m_2 < M_2 < M_1$.

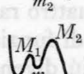
4-5.  $m_1 = m_2 < M_2 < M_1$.

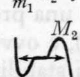
5-2_1.  Per collasso di m_2 ed M_2.

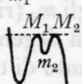
6.  $m_2 < m_1 < M_1 < M_2$.

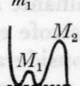
6-4.  $m_2 < m_1 < M_1 < M_2$.

6-2_2.  Per collasso di m_1 ed M_1.

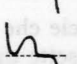
7.  $m_1 < m_2 < M_1 < M_2$.

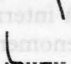
7-2.  Per collasso di m_2 ed M_2.

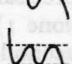
7-5.  $m_1 < m_2 < M_1 = M_2$.

7-6.  $m_1 = m_2 < M_1 < M_2$.

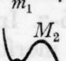
1-2_1-2_2-3.  Due punti di flesso.

2_1-3-4-5.  Un punto di flesso all'altezza di m_1 (becco).

2_2-3-4-6.  Un punto di flesso all'altezza di M_2.

4-5-6-7.  $m_1 = m_2 < M_1 = M_2$.

2-5-7.  Collasso di M_1, m_2 e M_2 (cuspide duale).

2-6-7.  Collasso di m_1, M_1 ed m_2 (cuspide).

Osservazione: È chiaro in che cosa la stratificazione di K – che, si ricordi, coincide in questo caso con la decomposizione di K in G-orbite – è fenomenologica: per disegnare K_W «occorre e basta» disegnare la sua stratificazione, le linee di autointersezione e i suoi spigoli di regresso. Benché in apparenza anodina, questa osservazione ha una grossa portata filosofica poiché mette in luce il fatto che le morfologie discriminanti che geometrizzano le tassonomie evidenziano un'intuizione originaria. Inoltre, per l'ipotesi ontologica della teoria delle catastrofi questa intuizione originaria viene ad essere donatrice di significato.

Il modo con cui K_W geometrizza la tassonomia dei successivi stabilizzati di f è rappresentato nella figura 15, che va attentamente esaminata.

4.5. Dispiegamento universale.

In ciò che precede W è una sezione trasversa, in $\mathfrak{F}$, dell'orbita $G(f)$ di f. D'altronde, poiché W è una sottovarietà di $\mathfrak{F}$ di dimensione $n = \operatorname{codim} f$, essa è diffeomorfa ad un intorno U dell'origine di $\mathbf{R}^n$, grazie ad un diffeomorfismo $\varphi : U \to W$. Siano allora $u = (u_1, ..., u_n)$ le coordinate di U e $(g_1, ..., g_n)$ le immagini mediante φ dei vettori unitari di U (si può supporre che U contenga la sfera unitaria di $\mathbf{R}^n$). Ogni funzione g di W si scrive $g = f + u_1 g_1 + ... + u_n g_n = f_u$. W si può dunque interpretare come una famiglia f_u di funzioni parametrizzate da U. In generale si chiama dispiegamento di f ogni famiglia f_t parametrizzata da uno spazio di controllo $(T, 0)$ tale che $f_0 = f$. Il dispiegamento ora considerato e che «esternalizza» in qualche modo la struttura di $\mathfrak{F}$ nell'intorno di f è in una certa misura il «miglior» dispiegamento di f, poiché permette di ricostruire tutti gli altri.

TEOREMA. *Ogni dispiegamento f_t di f si può ottenere come immagine reciproca di f_u mediante un'applicazione $\psi : T \to U$ unica al prim'ordine.*

f_u prende il nome di dispiegamento universale di f, proprio perché risolve il precedente problema universale.

Un problema tecnico e difficile è allora quello di trovare un modello canonico di dispiegamento universale sul quale sia possibile far calcoli. Nel caso della singolarità x^5 si dimostra che un modello canonico è $f_u = x^5 + u_1 x^3 + u_2 x^2 + u_3 x$. Ciò permette di costruire K_W con facilità.

L'esistenza di dispiegamenti universali permette d'altra parte di mostrare che la teoria della stabilità delle applicazioni $f : M \to \mathbf{R}$ è indissociabile da quella delle applicazioni $f : M \to N$. Dire infatti che f_u è un dispiegamento universale di f equivale a dire che l'applicazione $F : M \times U \to \mathbf{R} \times U$, che porta (x, u) in $(f_u(x), u)$, è la piú semplice applicazione di questo tipo che sia strutturalmente stabile.

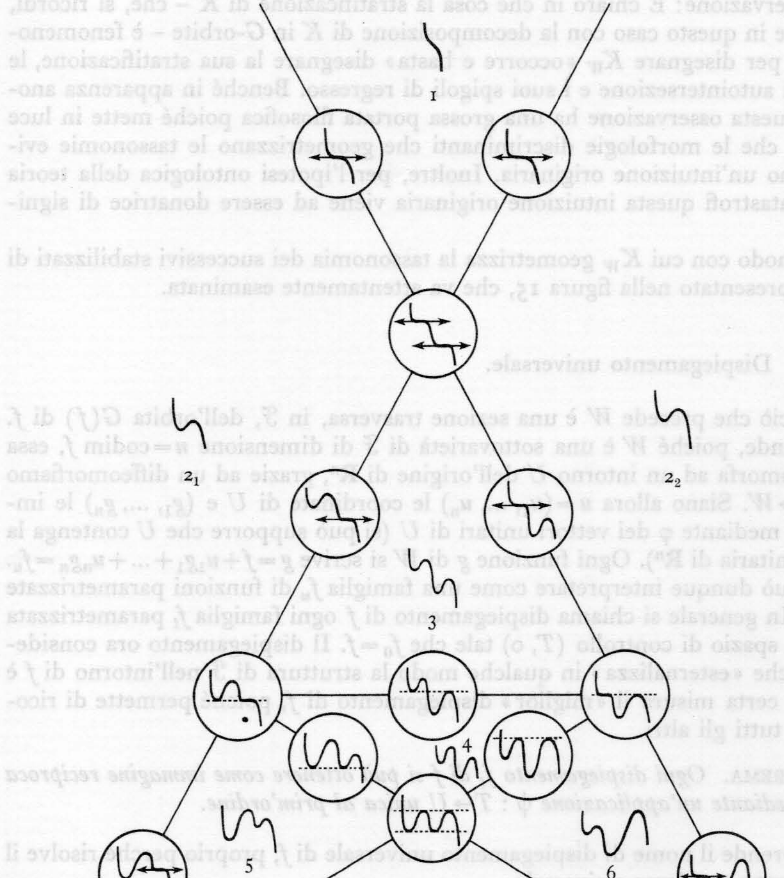


Figura 15.
Geometrizzazione della tassonomia delle successive funzioni stabilizzate di $f(x)=x^5$.

4.6. La dialettica locale/globale nei dispiegamenti.

I dispiegamenti delle singolarità forniscono un nuovo paradigma di dialettica tra il locale e il globale. La nozione di stabilizzazione (parziale o totale) introduce una relazione di preordine o di incidenza tra singolarità. L'asimmetria di questa relazione, esprimente in qualche modo l'irreversibilità dei processi di stabilizzazione, può sembrare un po' paradossale. Essa discende dal fatto che la proprietà di stabilità è aperta. Se dunque per «esplosione» di un punto critico o per separazione di valori critici di f si stabilizza f in f_s per deformazione infinitesimale, non si può «tornare» da f_s ad f che per deformazione finita. Mediante deformazioni infinitesimali si può soltanto, una volta raggiunta f_s, ottenere di nuovo f_s, poiché f_s è stabile.

La dialettica locale/globale inerente al concetto di dispiegamento si esprime allora col fatto che un modello trasverso ad una singolarità contiene modelli trasversi di tutte le singolarità incidenti a questa. Si consideri per esempio un punto di transizione g del tipo 2-7:  nel caso $f(x)=x^5$. g possiede come sola instabilità un punto di piega, ossia un punto di flesso semplice. Orbene, un punto di flesso semplice ammette come modello trasverso il modello unidimensionale della figura 16. Ma una qualunque sezione trasversa a K_W in g (cioè ogni arco trasverso in g allo strato di g) fornisce un tale modello (fig. 17).

Si consideri analogamente un punto h del tipo 2-6-7. h possiede come unica instabilità una cuspide; essa ammette come modello trasverso il modello bidimensionale della figura 18. Ma un tale modello è fornito da una qualsiasi sezione trasversa a K_W in h (cioè una qualsiasi sezione piana trasversa in h allo strato unidimensionale di h) (fig. 19).

Un modello trasverso (W, K_W) di f s'interpreta dunque come un incollamento di modelli trasversi delle singolarità incidenti ad f. Come dispiegamento del centro organizzatore f, (W, K_W) è una entità locale. Come incollamento di dispiegamenti piú semplici, (W, K_W) è invece un'entità globale. Se tale modello venisse rappresentato, secondo quanto proposto da Zeeman, come una «parola» (globale) composta di «lettere» (locale), si concluderebbe che in tale curioso alfabeto ciò che è «parola» composta è indistinguibilmente «lettera» irriducibile. La dialettica locale/globale, associata al concetto di dispiegamento,

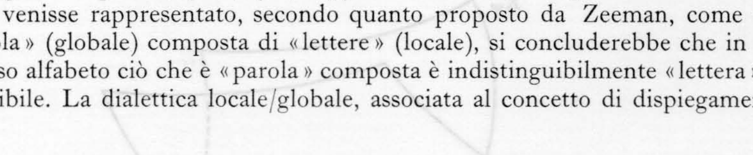


Figura 16.
Dispiegamento universale d'un punto di flesso semplice.

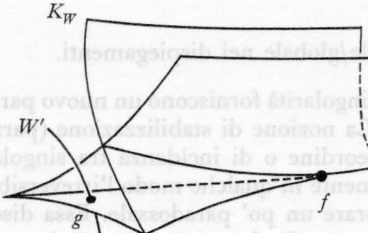


Figura 17.
Ogni sezione trasversa di K_W in g è un modello trasverso di g.

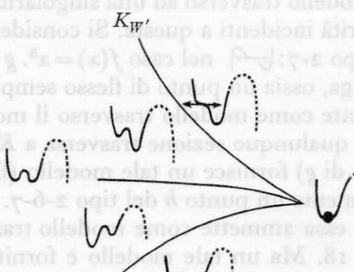


Figura 18.
Dispiegamento universale di una cuspide.

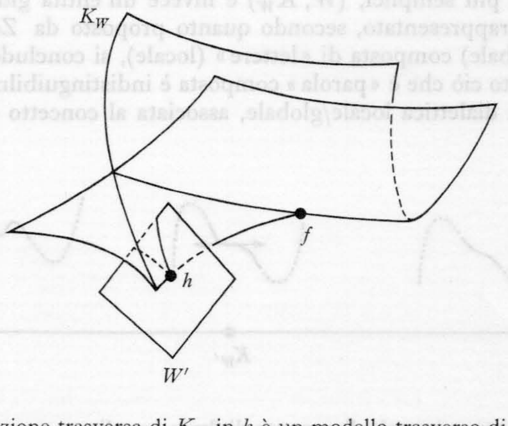


Figura 19.
Una qualsiasi sezione trasversa di K_W in h è un modello trasverso di h.

fornisce dunque un paradigma in cui la nozione classica di livelli gerarchici e le opposizioni presunte universali semplice/complesso, composto/irriducibile, locale/globale, atomo/ammasso, componente/sistema, ecc. diventano non pertinenti. Infatti questo paradigma geometrizza in una certa misura quello della monadologia leibniziana.

5. *La teoria di Morse come passaggio dal locale al globale.*

Dopo aver indicato alcuni aspetti del paradigma catastrofista, si riprende ora la sua idea centrale, ossia che, nel caso differenziabile, il vincolo di stabilità strutturale permette di ripassare dal locale al globale, ma con modalità tutta diversa da quella del prolungamento analitico. Il caso piú chiaro e piú tipico a tal riguardo è fornito dalla teoria di Morse e dalle sue applicazioni.

5.1. Funzioni di Morse e presentazioni per anse.

Si è visto che le applicazioni differenziabili $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ sono genericamente quelle *a*) che ammettono solo punti critici non degeneri isolati; *b*) che possiedono valori critici tutti distinti. Tali funzioni si chiamano funzioni di Morse (su M). Se ci si limita a considerare varietà M compatte al fine di evitare le instabilità dovute all'eventuale accumularsi dei punti critici all'infinito, si può dimostrare che le proprietà *a*) e *b*) sono caratteristiche della stabilità strutturale.

TEOREMA. *Sia M una varietà compatta. $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ è strutturalmente stabile se e solo se è una funzione di Morse. Essa ammette allora un numero finito di punti critici non degeneri aventi valori critici tutti distinti.*

Su di una varietà compatta esistono dunque due sole cause d'instabilità per le funzioni: il degenerare di punti critici e il coincidere di valori critici. La prima dà origine per dispiegamento alle catastrofi dette di biforcazione e la seconda alle catastrofi dette di conflitto.

Si vedrà ora che le funzioni di Morse sono intimamente legate alla struttura globale della varietà M. Siano f una funzione di Morse su M (di dimensione n) ed $x \in M$ un punto critico di f. Poiché x per definizione è non degenere, lo sviluppo di Taylor $T_x(f)$ di f in x inizia (dopo il termine costante $f(x)$) con la forma bilineare non degenere e simmetrica

$$h^t Hh = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) h_i h_j$$

ove $h = (h_1, \ldots, h_n)$ è un incremento di x e H l'hessiana di f in x. Per un risultato classico di algebra lineare una forma bilineare simmetrica non degenere è diagonalizzabile. Mediante un cambiamento lineare di coordinate si può dunque scrivere $T_x(f)$ sotto la forma $T_x(f) = f(x) - (h_1^2 + \ldots + h_k^2) + h_{k+1}^2 + \ldots + h_n^2 +$ termini del terzo ordine. Il numero k di quadrati preceduti dal segno $-$ non dipende dal sistema di coordinate scelto e si chiama indice del punto critico.

Ma si può invero andare molto piú lontano nell'analisi della struttura locale di f nell'intorno di un punto critico non degenere. Un famoso teorema di Morse afferma infatti che i punti critici non degeneri sono determinati dell'ordine 2.

TEOREMA (Morse). *Sia* $x \in M$ *un punto critico non degenere d'indice* k *di* $f: M \rightarrow \mathbf{R}$. *Esistono in* M *coordinate locali tali che* f *si può scrivere nell'intorno di* x *nella forma canonica:* $f(x+h)=f(x)-(h_1^2+\ldots+h_k^2)+h_{k+1}^2+\ldots+h_n^2$.

Sono dunque disponibili modelli locali canonici per i punti critici di una funzione di Morse. Si tratta di vertici (indice n), oppure di bacini (indice 0), oppure di colli. Inoltre M può essere rappresentata nella forma di un «incollamento» di tali modelli. Uno degli aspetti piú manifesti del nuovo tipo di solidarietà tra locale e globale già definito è che se $n(k)$ è il numero di punti critici d'indice k di f, la somma alternata $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k n(k)$ è uguale alla caratteristica d'Eulero-Poincaré $\chi(M)$ di M (cfr. l'articolo citato «Geometria e topologia»). Orbene, $\chi(M)$, che è l'invariante globale fondamentale di M, non dipende da f. Ancora una volta si constata che l'omologia del substrato influisce sulle entità derivate di tale substrato (in questo caso, sulle funzioni differenziabili a condizione che queste siano strutturalmente stabili).

Uno degli aspetti piú interessanti della solidarietà locale/globale caratteristica delle funzioni di Morse è nella possibilità di ricostruire topologicamente la varietà substrato M per successivi incollamenti di anse associate ai punti critici della funzione. L'analisi di tali presentazioni mediante anse e delle loro deformazioni è quindi equivalente a quella dei cammini nello spazio $\mathcal{F}$ delle applicazioni differenziabili $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ decomposto in cellule dall'insieme catastrofico globale K (il cui complementare $\mathcal{F}_0$ è proprio l'insieme delle funzioni di Morse). Genericamente, tali cammini attraversano trasversalmente gli strati K_1 di codimensione 1 in un numero finito di punti e genericamente deformando tali cammini si attraversano al piú gli strati K_2 di codimensione 2 di K. Lo studio dettagliato di tali attraversamenti è all'origine di alcuni fra i piú significativi ed interessanti risultati della topologia differenziale moderna: ad esempio il teorema di h-cobordismo di Smale e il teorema di pseudo-isotopia di Cerf (e le loro estensioni dovute a Laudenbach e Chanciner [cfr. Hatcher e Wagoner 1973]) che costituiscono delle tappe decisive per la dimostrazione della congettura di Poincaré (cfr. il § 13 dell'articolo «Invariante» in questa stessa *Enciclopedia*).

6. *Strutture localmente triviali.*

Nelle tre sezioni precedenti si è fornito uno schema dei due casi tipici ed eterogenei di passaggio dal locale al globale riguardanti le funzioni. Nei due casi si è constatato che la dialettica locale/globale era indissociabile dal modo in cui il substrato delle applicazioni era esso stesso definito come incollamento di modelli locali. In questa sezione verrà un poco approfondita la nozione di incollamento ed introdotto il «linguaggio» della transizione dal locale al globale costituito dal linguaggio coomologico. Nella misura in cui le entità globali prese in esame saranno localmente equivalenti ad entità locali standard, esse saranno dette localmente triviali.

6.1. Varietà differenziabili e livelli di struttura.

Fin da quando fu intuitivamente introdotta da Riemann, la nozione di varietà conteneva due idee chiave che sovvertirono totalmente l'intuizione spaziale classica:

1) si possono localizzare le geometrie standard di $\mathbf{R}^n$ e di $\mathbf{C}^n$ e riglobalizzarle in modo non standard;
2) si possono trattare come «punti» entità che non sono punti geometrici. A tal fine basta che queste entità ammettano gradi di libertà interni che possano variare come punti geometrici.

Tali idee rese esplicite da Hermann Weyl nel caso delle superfici di Riemann (varietà olomorfe di dimensione 1) sono alla base del concetto di varietà, già presentato negli articoli «Applicazioni», «Curve e superfici», «Geometria e topologia» di questa stessa *Enciclopedia*.

Per tener conto dell'idea chiave 2) si parte da uno spazio topologico M localmente omeomorfo ad uno spazio standard $\mathbf{R}^n$. Tale spazio dicesi varietà topologica di dimensione n. Per definire strutture piú «rigide» su M (differenziabili, analitiche, algebriche) si osserva che M, essendo localmente omeomorfa ad $\mathbf{R}^n$, si ottiene incollando degli aperti U_i, detti carte locali, omeomorfi ad aperti U'_i di $\mathbf{R}^n$, tramite omeomorfismi di incollamento (o di transizione), tutti tra loro coerenti, detti cambiamenti di carte locali. L'idea è allora d'imporre condizioni supplementari a tali omeomorfismi di transizione. Cosí, rafforzando successivamente le condizioni imposte ai cambiamenti di carte locali, ne deriva una gerarchia di livelli di struttura il cui livello base è quello topologico. Questo semplice punto di vista orienta la teoria verso una serie di importantissimi problemi il cui studio ha costituito uno dei principali motori della matematica di questo secolo.

Il primo problema è quello della classificazione delle varietà. Si tratta di «misurare» quello che separa globalmente una varietà da uno spazio standard. L'esistenza di una gerarchia di livelli conduce a domandarsi dapprima quale sia il livello zero (classificazione topologica delle varietà: cfr. l'articolo «Geometria e topologia», pp. 660-72).

Una volta chiariti certi strumenti che permettono di abbordare la struttura del livello topologico, il problema della classificazione sbocca naturalmente nella seguente strategia: data una varietà munita d'una struttura d'un certo livello, si cerca di capire in che modo tale struttura vincoli i livelli superiori. Si può ad esempio partire da una varietà topologica M e cercare di classificare le strutture differenziabili su M che inducono la sua topologia. Questo difficile problema ha assunto una notevole importanza a partire dai lavori di Kervaire e Milnor sulla struttura differenziabile delle sfere (teoria delle sfere esotiche): su certe sfere topologiche esistono strutture differenziabili diverse dalla struttura standard. Inoltre, il problema della classificazione di tali strutture è in gran parte algebrizzabile.

Si può anche partire da una varietà differenziabile di dimensione pari e cercare di classificare le strutture olomorfe compatibili con la sua struttura differenziabile. Ad esempio s'è visto che le curve ellittiche (superfici di Riemann compatte di genere 1) sono tori, ossia quozienti di $\mathbf{R}^2$ mediante reticoli. Tutti i tori sono diffeomorfi, ma le curve ellittiche sono classificate mediante un invariante unidimensionale detto invariante modulare per cui si rimanda al citato articolo «Curve e superfici».

Un altro tipo di problema indotto dalla definizione stessa di varietà è quello di sapere in che misura un oggetto ottenuto per incollamento di modelli locali è identificabile a un sotto-oggetto d'un oggetto standard globale. Si tratta del problema delle immersioni regolari e piú in generale delle immersioni. In tale ambito particolarmente importanti sono i teoremi di tipo Whitney visti al § 4.3, i problemi della teoria dei nodi (immersioni regolari di $M = S^1$ in $\mathbf{R}^3$) e quello del rovesciamento della sfera S^2 in $\mathbf{R}^3$.

6.2. Fibrazioni localmente triviali.

Il caso forse piú importante di strutture localmente triviali è costituito dalle fibrazioni localmente triviali la cui nozione è stata sviluppata negli anni '30 nei lavori pionieristici di Whitney, Hopf e Stiefel. Molto spesso, per risolvere un problema o anche soltanto per porlo, si è condotti, data una varietà di base di tipo τ (differenziabile, analitica, algebrica, ecc.), ad associare ad ogni punto $x \in M$ un'entità F_x che varia in modo τ in funzione di x. Si dice allora che F_x è la fibra al di sopra di x e che l'insieme E delle fibre F_x costituisce una fibrazione (di base M), $\pi : E \rightarrow M$, di fibra $\pi^{-1}(x) = F_x$.

Molto frequentemente la variazione di F_x in funzione di x è tale che in un intorno abbastanza piccolo U di x, E ristretto ad U possiede la struttura di un prodotto diretto $U \times F$ di U per una fibra tipo F, ove la fibrazione s'identifica localmente alla fibrazione, detta triviale, $\pi : U \times F \rightarrow U$ essendo π la proiezione canonica. Si dice in tal caso che la fibrazione $\pi : E \rightarrow M$ è localmente triviale (l.t.). π si ottiene dunque per incollamento di modelli locali $U \times F$. Se M è connessa, tutte le fibre F_x sono τ-isomorfe alla fibra tipo F e ciò che caratterizza π è dunque il modo con cui essa si discosta dalla fibrazione globalmente triviale $M \times F \rightarrow M$. Ecco allora che si tratterà di elaborare un linguaggio generale atto a «misurare» questo scarto.

Per fare ciò verranno ora introdotte due idee intuitive. Sia $\gamma : a \rightarrow b$ un cammino sulla base M. Si parte dalla fibra F_a e si segue la sua τ-variazione lungo γ fino alla fibra F_b. Se γ è un cappio ($a = b$) si ritorna su F_a. Intuitivamente la fibrazione ristretta al «cerchio» γ non è triviale in quanto F_a tornerà su se stessa, ma «ruotata»: F_a torna globalmente in sé, in generale però non vi torna localmente. Essa vi ritorna tramite uno dei suoi automorfismi. Per analizzare le fibrazioni di fibra tipo F bisogna dunque anzitutto definire il gruppo G degli automorfismi ammissibili di F. D'altra parte se γ è un cappio omotopicamente od omologicamente triviale, sembra intuitivo che la fibrazione ristretta a γ deve potersi deformare nella fibrazione triviale $F_a \to \{a\}$ e dovrà dunque essere globalmente triviale. Ci si aspetta perciò che la non-trivialità di $\pi : E \to M$ provenga da un delicato collegamento tra la struttura del gruppo G e l'omotopia o l'omologia di M. In tal senso le fibrazioni l.t. integrano l'essenziale delle applicazioni della topologia algebrica allo studio delle proprietà globali delle varietà. Questa integrazione può del resto essere interpretata come una generalizzazione dell'analisi delle applicazioni di una varietà in un'altra. Sia infatti $f : M \to N$ una tale applicazione. Il suo grafico C_f è una sezione della fibrazione triviale $\pi : M \times N \to M$, vale a dire un'applicazione $C_f : M \to M \times N$ che manda x in $(x, f(x))$, tale che $\pi \circ C_f = \mathrm{Id}_M$. Le sezioni globali di una qualsiasi fibrazione l.t. $\pi : E \to M$, ossia le applicazioni $\sigma : M \to E$ tali che $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$, possono dunque essere interpretate come applicazioni generalizzate. Uno dei problemi fondamentali della teoria delle fibrazioni l.t. concerne la costruzione di sezioni globali (quelle locali esistono per definizione).

Si consideri per esempio una varietà differenziabile M di dimensione n. Lo spazio tangente T_x di M in x varia differenziabilmente con x e definisce una fibrazione l.t. $\pi : T_M \to M$ detta fibrato tangente a M. Una sezione di π è semplicemente un campo di vettori differenziabile su M. Se T_M fosse un fibrato triviale si potrebbero costruire dei campi «costanti» su M. Ma ciò non avviene in generale. Si sa infatti che esistono varietà come la sfera S^2 sulle quali ogni campo di vettori s'annulla necessariamente in certi punti (detti punti singolari). Ciò significa che ogni sezione di T_M interseca la sezione nulla e che T_M non è perciò globalmente triviale. Questa è una conseguenza di un teorema di solidarietà locale/globale analogo a quello visto in teoria di Morse. Ad ogni punto singolare isolato di un campo X su M si può associare un numero chiamato il suo indice. Il teorema dice che se M è compatta e se tutti i punti singolari di X sono isolati (allora sono in numero finito), la somma degl'indici è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincaré di M.

Allorché il fibrato tangente T_M d'una varietà M è globalmente triviale, si dice che M è parallelizzabile. Ciò significa che si possono trovare n sezioni $X_1, ..., X_n$ di T_M globalmente linearmente indipendenti, cioè tali che $(X_1(x), ..., X_n(x))$ sia una base di T_x per ogni $x \in M$. In altri termini si può spostare differenziabilmente un riferimento di T_x. La ricerca di criteri che assicurino che M sia parallelizzabile è un problema difficile, interamente risolto nel caso delle sfere da Frank Adams [1962].

TEOREMA. *Le sole sfere parallelizzabili sono* S^1, S^3 *ed* S^7.

Tale risultato profondo e notevole è intimamente legato all'esistenza delle fibrazioni di Hopf delle sfere mediante sfere. Il suo corrispondente algebrico è il risultato che afferma che esiste struttura di corpo su $\mathbf{R}^n$ solo quando $n=2$ (numeri complessi), $n=4$ (quaternioni) e $n=8$ (numeri di Cayley). Le sfere parallelizzabili sono le sfere unità di tali corpi.

Per precisare il concetto di fibrazione l.t. (differenziabile), si considerino uno spazio di base M che è una varietà differenziabile, uno spazio totale E, una proiezione $\pi : E \to M$, una fibra tipo F e un gruppo G di diffeomorfismi di F. Sia $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un sistema di carte locali di M che localmente trivializzano $\pi : E \to M$. Ciò significa, in primo luogo, che sono assegnati dei diffeomorfismi di trivializzazione φ_i sugli U_i che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{tikzcd} U_i \times F \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr] & & \pi^{-1}(U_i) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

Per ogni $x \in U_i$, φ_i definisce pertanto un diffeomorfismo di cambiamento di fibra $\varphi_{i,x} : F \xrightarrow{\sim} F_x = \pi^{-1}(x)$.

In secondo luogo, significa che i $\varphi_{i,x}$ soddisfano alla condizione d'incollamento «Se $i, j \in I$ sono tali che $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, allora per ogni $x \in U_i \cap U_j$, $\vartheta_{ij}(x) = \varphi_{i,x}^{-1} \circ \varphi_{j,x} : F \to F$ è un elemento di G» (che varia in modo differenziabile con x se G è un gruppo differenziabile).

È allora banale verificare che se $i, j, k \in I$ sono tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, ϑ_{ij}, ϑ_{jk}, e ϑ_{ik} sono legati dalla relazione fondamentale $\vartheta_{ij}\vartheta_{jk}\vartheta_{ki} = 1$ (si noti che $\vartheta_{ki} = \vartheta_{ik}^{-1}$).

Questa relazione permette di esprimere quanto precede in modo piú concettuale, in termini che condurranno alla coomologia di Čech. Il ricoprimento aperto $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ di M induce una struttura combinatoria K detta simpliciale sull'insieme I degl'indici. Gli 0-simplessi sono gli elementi di I. Gli 1-simplessi le coppie (i, j) tali che $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. I 2-simplessi le terne (i, j, k) tali che $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, ecc. Si possono poi addizionare formalmente i simplessi. Il complesso simpliciale K viene detto scheletro del ricoprimento $\mathfrak{U}$. Esso esprime il modo con cui per M si pone il problema dell'incollamento: se M fosse uno spazio standard, $\mathfrak{U}$ potrebbe ridursi a un unico elemento e K sarebbe allora triviale. L'altro dato del problema è il gruppo strutturale G. Per ogni aperto U di M si indichi con $\Gamma(U)$ l'insieme delle applicazioni (differenziabili se G lo è) $\vartheta : U \to G$. Se $\vartheta \in \Gamma(U)$ e $V \subset U$, ϑ induce per restrizione a V un elemento $\vartheta|_V$ di $\Gamma(V)$. Dicesi prefascio su M a valori in G un tale dato. Si tornerà su questo concetto al § 7.1. Se s è un simplesso di K, ad esso si associa il gruppo $\Gamma_s = \Gamma(\bigcap_s \mathfrak{U})$ ove $\bigcap_s \mathfrak{U}$ è l'intersezione (non vuota) degli aperti di $\mathfrak{U}$ il cui indice appartiene ad s. Si definisce cosí quello che si chiama sistema di coefficienti che permette allora di definire naturalmente la nozione di cocatena.

DEFINIZIONE. *Una p-cocatena associa ad ogni p-simplesso s un elemento del gruppo Γ_s.*

Una 0-cocatena associa dunque ad ogni 0-simplesso $i \in I$ un'applicazione $\varphi_i : U_i \to G$. Una 1-cocatena associa ad ogni 1-simplesso (i, j) di K un'applicazione $\vartheta_{ij} : U_i \cap U_j \to G$. Una 2-cocatena associa ad ogni 2-simplesso (i, j, k)

di K un'applicazione $\psi_{i,j,k} : U_i \cap U_j \cap U_k \to G$, ecc. Il maggiore interesse di tale costruzione è di mettere in evidenza l'operatore cobordo che associa a una p-catena una $(p+1)$-cocatena detta il suo cobordo. Se ad esempio $\varphi = (\varphi_i)_{i \in I}$ è una 0-cocatena, il suo cobordo $\partial\varphi$ è la 1-cocatena ϑ che associa ad ogni 1-simplesso (i, j) di K l'applicazione $\vartheta_{ij} = \varphi_i^{-1}\varphi_j$ (G essendo un gruppo, si possono comporre le applicazioni a valori in G). Analogamente, se $\vartheta = (\vartheta_{ij})$ è una 1-cocatena, il suo cobordo $\partial\vartheta$ è la 2-cocatena ψ che associa ad ogni 2-simplesso (i, j, k) di K l'applicazione $\psi_{ijk} = \vartheta_{ki}\vartheta_{ij}\vartheta_{jk}$. Se ϑ è anch'esso un cobordo, $\vartheta = \partial\varphi$, allora $\partial\vartheta = \varphi_k^{-1}\varphi_i\varphi_i^{-1}\varphi_j\varphi_j^{-1}\varphi_k = 1$. Si ha dunque $\partial^2 = 1$.

Osservazione: Affinché ciò che precede sia naturale bisogna che il gruppo G sia commutativo. Si usa allora una notazione additiva e si ottiene $\vartheta_{ij} = -\vartheta_{ji}$, $\vartheta_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$, $\psi_{ijk} = \vartheta_{ij} + \vartheta_{jk} + \vartheta_{ki}$, e $\partial^2 = 0$.

La relazione fondamentale $\partial^2 = 0$, analoga a quella incontrata a proposito dell'omologia (cfr. il § 4.3 dell'articolo citato «Geometria e topologia»), permette di definire i gruppi di coomologia $H^p(\mathcal{U}, G)$ del ricoprimento $\mathcal{U}$ a coefficienti in G. $H^p(\mathcal{U}, G)$ è il quoziente del gruppo delle p-cocatene a cobordo nullo (dette p-cocicli) rispetto al sottogruppo delle p-cocatene che sono cobordi [per maggiori dettagli si veda il classico Godement 1964].

A parte le difficoltà dovute alla non-commutatività, si può affermare che dare una fibrazione l.t. è essenzialmente equivalente ad assegnare un 1-cociclo a coefficienti in G. Si ha in effetti il teorema:

TEOREMA. *Se $\vartheta = (\vartheta_{ij})$ è un 1-cociclo a coefficienti in G, esiste, a meno di equivalenze, uno ed un solo fibrato l.t., di fibra F e di gruppo G, le cui ϑ_{ij} sono le applicazioni d'incollamento.*

In tale descrizione la proprietà di trivialità globale si rivela essere d'ordine essenzialmente coomologico.

TEOREMA. *La fibrazione E è triviale se e solo se l'1-cociclo è un cobordo, cioè se e solo se esistono delle $\varphi_i : U_i \to G$ tali che $\vartheta_{ij} = \varphi_i^{-1}\varphi_j$.*

Osservazione: L'1-cociclo ϑ che definisce E ha sempre l'aspetto di un cobordo poiché, per definizione, le ϑ_{ij} sono della forma $\varphi_i^{-1}\varphi_j$. Le φ_i non sono però applicazioni di U_i in G. Per $x \in U_i$, $\varphi_i(x)$ non è un automorfismo di F ma un isomorfismo tra F ed F_x; esattamente in ciò consiste tutta la differenza.

La teoria delle fibrazioni l.t. si semplifica notevolmente quando ci si limita ai fibrati detti principali, ossia ai fibrati di fibra G e di gruppo strutturale G operante su se stesso per traslazioni. Ad ogni fibrato l.t. si associa un fibrato principale definito dal medesimo 1-cociclo; inoltre, per quello che precede, un fibrato l.t. è caratterizzato, a meno di equivalenze, dal suo fibrato principale associato e dall'azione del suo gruppo strutturale sulla fibra tipo.

Se la teoria dei fibrati principali è relativamente semplice ciò è dovuto al fatto che esiste un criterio semplice di trivialità.

TEOREMA. *Un fibrato principale è triviale se e solo se ammette una sezione.*

Tale risultato permette di capire il nesso tra il fatto che le sfere S^1, S^3 ed S^7 siano parallelizzabili e il fatto che esistano strutture di corpo su $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^4$ ed $\mathbf{R}^8$.

Si tratterà ora del linguaggio coomologico che è per eccellenza il linguaggio di transizione dal locale al globale nella misura in cui permette di misurarne l'ostruzione.

Inizialmente si consideri il caso semplice in cui il gruppo strutturale G è discreto. Tal è in particolare il caso delle fibrazioni l.t. elementari che sono rivestimenti non ramificati. Si supponga che la base M sia connessa per archi e sia $\gamma : x_0 \to x_1$ un cammino $\gamma(t) = x_t$, $t \in I$ di M. «Risalendo» nello spazio totale, si può seguire la fibra sopra γ attraverso una famiglia d'isomorfismi $h_t : F_{x_0} \simeq F_{x_t}$. Se G è discreto, il principio del rilevamento delle omotopie garantisce che tale «traslazione» della fibra è unica e dipende soltanto dalla classe d'omotopia di γ. Se in particolare γ è un cappio, $h_1 : F_{x_0} \to F_{x_0}$ è un elemento di G. Si definisce cosí un morfismo $\chi_E : \pi_1(M) \to G$ che dicesi la classe caratteristica di E. χ è «caratteristica» nel senso seguente:

TEOREMA. 1) *Due fibrati aventi lo stesso gruppo discreto sono associati, ossia di ugual fibrato principale, se e solo se le loro classi caratteristiche sono uguali.* 2) *Per ogni morfismo $\chi : \pi_1(M) \to G$ esiste un fibrato principale E di gruppo G tale che $\chi_E = \chi$.*

In tal caso la classificazione dei fibrati è ricondotta allo studio puramente algebrico dei morfismi χ.

COROLLARIO. Se M è semplicemente connessa, ogni fibrato di gruppo G è triviale.

Osservazione: Ciò mostra che l'ipotesi G discreto è essenziale. S^2 è semplicemente connessa ma il suo fibrato tangente (avente gruppo strutturale il gruppo lineare non discreto $GL(2)$) è non triviale.

Nel caso dei fibrati principali di gruppo qualsiasi, le classi caratteristiche si deducono in dimensione > 1 dalla successione esatta di omotopia.

La nozione di classe caratteristica è l'inizio della teoria coomologica dei fibrati l.t., la quale misura l'ostruzione al passaggio dal locale al globale e in particolare l'ostruzione alla costruzione di una sezione globale. Si supponga che la base M di dimensione n sia assegnata sotto la forma di un complesso cellulare K, cioè triangolata da un numero finito di poliedri convessi pieni, di dimensione n. Per costruire una sezione globale di un fibrato l.t. $\pi : E \to M$ l'idea sarà di supporla data sulle p-facce di K e di cercare di prolungarla alle $(p+1)$-facce. Si tratterà poi di misurare l'ostruzione ad una tale estensione. L'ostruzione all'estensione ad *una* cellula è descritta da un opportuno cociclo della fibra. La difficoltà proviene dal fatto che la coomologia della fibra, anche se sempre isomorfa a quella della fibra tipo F, *varia* con la fibra. Si deve quindi considerare il fibrato l.t. che esprime tale variazione ed estendervi la teoria della coomologia (coomologia a valori in un fibrato di coefficienti). L'ostruzione alla costruzione di una sezione globale di π viene allora misurata da una classe di coomologia in questo nuovo senso; si tratta di una classe che dipende solo da π e viene detta classe caratteristica di coomologia di E [cfr. Steenrod 1951].

A partire dagli anni '50 il concetto di classe caratteristica è stato oggetto di sviluppi considerevoli e si è rivelato uno strumento essenziale alla comprensione della dialettica locale/globale.

6.3. Linguaggio categoriale dell'incollamento.

Per concludere questo paragrafo sulle strutture localmente triviali si noti che la nozione di incollamento può tradursi in termini puramente categoriali. Una tale traduzione è interessante poiché permette di trasportare la nozione di incollamento a situazioni in cui l'intuizione geometrica viene meno.

Come s'è visto, una varietà topologica è uno spazio topologico M munito di un ricoprimento aperto $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ i cui aperti U_i sono omeomorfi ad aperti di $\mathbf{R}^n$. Per definire poi le strutture di livello superiore su M s'impongono certi vincoli supplementari agli omeomorfismi di transizione. Dal punto di vista categoriale, ciò equivale a considerare la categoria Top degli spazi topologici e la categoria piccola $\mathcal{M}$ dei modelli locali i cui oggetti sono gli aperti di $\mathbf{R}^n$ (o di $\mathbf{C}^n$) e i morfismi sono gli isomorfismi locali differenziabili (o analitici).

In generale, data una categoria $\mathcal{C}$, una categoria (piccola) di modelli locali $\mathcal{M}$ e un funtore inclusione $I : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$, si tratta di definire gli oggetti globali di $\mathcal{C}$ ottenuti per incollamento di modelli locali. Tale costruzione [per una esposizione dettagliata della quale si veda Appelgate e Tierney 1966-67], oltre ad avere grande generalità, riconduce i problemi di incollamento all'analisi di strutture *puramente categoriche* associate all'esistenza di coppie di funtori aggiunti.

7. *Fasci e coomologia dei fasci.*

Nel paragrafo precedente ci si è occupati del passaggio dal locale al globale ottenuto per incollamento di spazi substrati. Ciò ha condotto al concetto di fibrato localmente triviale e di sezione come anche al problema di prolungare le sezioni. Prima ci si era interessati al passaggio dal locale al globale ottenuto per incollamento di funzioni. Esiste un intimo legame tra i due punti di vista. Si è visto, ad esempio, nel caso analitico, che il prolungamento analitico di una funzione olomorfa data localmente determinava il proprio spazio substrato. È dunque augurabile disporre d'un linguaggio unitario e generale che sintetizzi i due punti di vista. Tale è il fine della teoria dei fasci di cui si daranno le definizioni di base.

7.1. Fasci e spazi *étalé*.

Nella teoria dei fasci il concetto primitivo è quello di «sezione». L'idea è di definire in modo generale gli assiomi cui devono soddisfare certe entità affinché esse meritino il nome di sezioni; poi di costruire uno spazio «fibrato» (che non sarà in generale un fibrato l.t.) le cui sezioni si identifichino con le sezioni date.

Per poter parlare di sezioni, bisogna dapprima disporre di uno spazio di base M che sia uno spazio topologico. Ad ogni aperto U di M si associa un insieme di sezioni su U che verrà denotato $\Gamma(U)$. Il primo vincolo è allora che sia definita la nozione di restrizione di una sezione. In altre parole se $V \subset U$ è un sottoaperto di U, bisogna poter associare ad ogni elemento $f \in \Gamma(U)$ un elemento $f|_V \in \Gamma(V)$ e ciò in modo che *a)* $f|_V = f$, *b)* se $W \subset V \subset U$, $(f|_V)|_W = f|_W$ (transitività della restrizione). Questo vincolo si esprime molto facilmente in termini di categorie. Sia $\mathfrak{M}$ la categoria piccola i cui oggetti sono gli aperti di M ed i morfismi le inclusioni di aperti. Affinché la nozione di restrizione sia definita, occorre e basta che i $\Gamma(U)$ costituiscano un funtore della categoria $\mathfrak{M}^*$ duale di $\mathfrak{M}$ nella categoria $\mathfrak{E}$ degli insiemi (cfr. il § 2 dell'articolo «Dualità» in questa stessa *Enciclopedia*). Da cui la seguente definizione:

DEFINIZIONE. *Si chiama prefascio su M un funtore controvariante di $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{E}$.*

È chiaro che i prefasci formano una categoria, precisamente la categoria $(\mathfrak{M}^*, \mathfrak{E})$ dei funtori di $\mathfrak{M}^*$ in $\mathfrak{E}$.

Sia dunque Γ un prefascio su M. È chiaro che se Γ è il prefascio delle sezioni di M in uno spazio totale E, esso soddisfa alle due seguenti proprietà:

(F_1) Sia $(U_i)_{i \in I}$ una famiglia di aperti di M la cui unione è U e siano $f, f' \in \Gamma(U)$. Se le restrizioni di f ed f' agli U_i sono uguali, allora f ed f' sono uguali (se $f = f'$ localmente, allora $f = f'$ globalmente).

(F_2) Per ogni $i \in I$ sia $f_i \in \Gamma(U_i)$. Se le f_i sono compatibili, cioè coincidono sulle intersezioni $U_i \cap U_j$ che sono non-vuote, allora esiste una sezione $f \in \Gamma(U)$ tale che $f|_{U_i} = f_i$ per ogni $i \in I$.

DEFINIZIONE. *Un prefascio su M è un fascio se esso soddisfa gli assiomi (F_1) ed (F_2).*

Ora che si dispone d'una definizione assiomatica dei fasci, si tratta di sapere se ogni fascio astratto è rappresentabile come il fascio delle sezioni d'un «fibrato» $\pi : E \to M$.

Sia $\mathcal{C}_M$ la categoria degli spazi topologici «al di sopra» di M, ossia la categoria i cui oggetti sono le applicazioni continue $\pi : E \to M$ ed i morfismi i diagrammi commutativi

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \arrow[dl, "\rho"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Le inclusioni $U \subset M$ definiscono banalmente una inclusione $I : \mathfrak{M} \to \mathcal{C}_M$. Si noterà che si riottiene così la situazione del § 6.3.

Per soddisfare (F_1) si effettua un passaggio al limite atto ad assicurare che due sezioni uguali in un intorno di $x \in M$ sono *effettivamente* localmente uguali.

Sia $\mathfrak{U}_x$ il filtro degli intorni di x. Poiché la categoria degli insiemi ammette limiti induttivi, si può costruire il limite induttivo

$$E_x = \varinjlim_{i\,:\,V \hookrightarrow U \in \mathfrak{U}_x} (\Gamma(U), \Gamma(i)).$$

E_x è la fibra in x dello spazio E_Γ che si cerca. Sia E_Γ la somma insiemistica degli E_x per $x \in M$. E_Γ è per definizione dotato d'una proiezione $\pi_\Gamma : E_\Gamma \to M$. Sia $f \in \Gamma(U)$ una sezione del prefascio Γ su U. f possiede un'immagine $f(x)$ in E_x per ogni $x \in U$, immagine detta valore di f in x. Si viene cosí ad associare a f una sezione (nel senso insiemistico) $\tilde{f}$ di E_Γ sopra U. Si definisce allora la topologia di E_Γ come la piú fine topologia che rende tutte le $\tilde{f}$ continue.

TEOREMA. *Per la topologia di E_Γ or ora definita la proiezione $\pi_\Gamma : E_\Gamma \to M$ diventa un omeomorfismo locale.*

DEFINIZIONE. *Viene chiamato spazio «étalé» su M ogni proiezione continua $\pi : E \to M$ che sia un omeomorfismo locale.*

Si è dunque costruito uno spazio *étalé* E_Γ che rappresenta Γ, il cui fascio delle sezioni $\tilde{\Gamma}$ dicesi fascio associato a Γ.

TEOREMA. *Se il prefascio Γ è un fascio, allora $\tilde{\Gamma} = \Gamma$.*

Nella maggior parte dei casi i fasci che intervengono in geometria sono naturalmente muniti d'una struttura algebrica, i $\Gamma(U)$ essendo gruppi, anelli, moduli, ecc. e le applicazioni di restrizione essendo dei morfismi per tali strutture. Un caso fondamentale è evidentemente quello dei fasci di funzioni sulle varietà. Se ad esempio M è una varietà differenziabile (rispettivamente olomorfa), il fascio delle applicazioni differenziabili (rispettivamente olomorfe) $f : U \to \mathbf{R}$ (rispettivamente $f : U \to \mathbf{C}$) ove U è un aperto di M, è un fascio di anelli detto il fascio strutturale di M e denotato $\mathcal{O}_M$. Molte proprietà globali di M si possono «leggere» su $\mathcal{O}_M$.

Se i fasci hanno assunto una cosí grande importanza, ciò dipende dal fatto che offrono un'interpretazione funzionale del passaggio dal locale al globale alla quale si possono trasferire «fibra a fibra» le nozioni fondamentali dell'algebra (cfr. il § 6.2 del citato articolo «Geometria e topologia»).

7.2. Coomologia dei fasci.

Come si è visto a proposito delle fibrazioni localmente triviali, la coomologia a valori in un fibrato di coefficienti è lo strumento fondamentale per misurare le ostruzioni al passaggio dal locale al globale. È dunque naturale cercare di prolungarne la definizione ai fasci; esistono essenzialmente due modi per introdurre la coomologia a valori in un fascio. Uno, detto coomologia di Čech, privilegia il modo in cui la base X è ottenuta per incollamento, mentre l'altro privilegia l'aspetto algebrico del problema. Si tratta poi di confrontarli e di cercare condizioni necessarie e sufficienti (sia relative allo spazio di base sia ai fasci considerati) affinché essi coincidano (teoria delle successioni spettrali) [tali argomenti delicati sono esposti in dettaglio in Godement 1964; si veda anche l'articolo «Invariante» in questa stessa *Enciclopedia*].

La coomologia dei fasci offre uno strumento notevolmente comodo e potente per l'analisi delle proprietà globali degli oggetti geometrici.

8. *L'opposizione locale/globale in aritmetica.*

Dopo aver esposto schematicamente certi aspetti della dialettica locale/globale in geometria, si vedrà perché e come tale dialettica può operare anche in aritmetica ed in modo non metaforico. Questo è chiaramente d'importanza capitale. Infatti a partire dal momento in cui la dialettica locale/globale si rivela immanente ai «substrati» ideali costituiti da un lato dallo spazio e dall'altro dai numeri, tutto fa credere che i metalinguaggi (categoriali) di incollamento sono in certa misura universali e devono perciò avere a che fare con un'immanenza logica. Su questo argomento si tornerà nella conclusione.

8.1. Divisibilità, congruenze e numeri p-adici.

Alcuni tra i problemi piú fondamentali e difficili dell'aritmetica sono i problemi diofantei, consistenti, data un'equazione algebrica $f(x_1, ..., x_n)=0$ a coefficienti interi o razionali, nel trovarne una soluzione intera o razionale. Il piú famoso di tali problemi è senza dubbio la congettura di Fermat, il quale afferma che per $n \geq 3$ l'equazione diofantea $x^n+y^n=z^n$ è priva di soluzioni intere non banali. Il piú importante metodo di risoluzione delle equazioni diofantee consiste in approssimazioni successive basate sulla nozione di congruenza.

Sia p un numero primo. È noto (si veda il § 5 dell'articolo «Divisibilità» in questa stessa *Enciclopedia*) che l'anello quoziente $\mathbf{F}_p=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ è un corpo finito di caratteristica p, canonicamente incluso in ogni corpo di caratteristica p. Lavorare in $\mathbf{F}_p$ significa lavorare «modulo p». Se $f(x_1, ..., x_n)=0$ è un'equazione diofantea a coefficienti interi, ad essa verrà associata la sua riduzione modulo p $f_p(x_1, ..., x_n)=0$ ottenuta sostituendo i coefficienti di f con le loro immagini in $\mathbf{F}_p$ e se ne cercheranno le soluzioni in $\mathbf{F}_p$. Si cercherà dunque dapprima di risolvere la congruenza $f(x_1, ..., x_n)\equiv 0 \pmod p$ che è molto piú semplice del problema iniziale.

Ma la congruenza $f\equiv 0 \pmod p$ è un'approssimazione estremamente grossolana dell'equazione diofantea $f=0$. Si è dunque portati a rendere piú fine tale approssimazione da una parte facendo variare p nell'insieme $\mathcal{P}$ dei numeri primi, dall'altra cercando soluzioni modulo le potenze successive p^s di p. Il problema diventa ovviamente quello di dominare il «passaggio al limite», quando s diventa infinito, di tali approssimazioni sempre piú fini.

Se $(a_1, ..., a_n)\in\mathbf{Z}^n$ è una soluzione intera di $f=0$, è chiaro che si avrà $f(a_1, ..., a_n)\equiv 0 \pmod{p^s}$ per ogni numero primo $p\in\mathcal{P}$ ed ogni $s>0$. Si tratta di sapere sotto quali condizioni esiste una reciproca. Tale problema è altamente non banale nella misura in cui le soluzioni possibili di $f \equiv 0 \pmod{p^s}$ (supponendo ch'esistano per ogni $p \in \mathcal{P}$ ed ogni $s > 0$) non hanno a priori alcuna ragione di essere tra loro compatibili.

Uno dei primi grandi risultati in tal campo è il teorema di Minkowski sulle forme quadratiche.

TEOREMA (Minkowski). *Sia* $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$ *una forma quadratica a coefficienti razionali. Se la congruenza* $f \equiv 0 \pmod{p^s}$ *ammette una soluzione non banale (ossia diversa da* $(0, \dots, 0)$*) per ogni* $p \in \mathcal{P}$ *e ogni* $s > 0$, *e se l'equazione* $f = 0$ *ammette una soluzione reale non banale, allora l'equazione diofantea* $f = 0$ *ammette una soluzione razionale non banale.*

Si vedrà ora perché tale teorema è paradigmatico del passaggio dal locale al globale in aritmetica. Per questo è utile ricordare la nozione di numero p-adico dovuta a Hensel: si tratta di numeri rappresentati sotto la forma di serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ a coefficienti a_n nel corpo finito $\mathbf{F}_p$ (cfr. il citato articolo «Divisibilità»). Hensel doveva lavorare modulo p^s facendo tendere s all'infinito e doveva dunque riuscire a controllare il «passaggio al limite» delle congruenze modulo p^s. Di qui l'idea di trasportare all'aritmetica il paradigma di approssimazioni successive costituito dallo sviluppo di Taylor, cioè di rappresentarsi la successione delle congruenze modulo p come la successione dei troncamenti successivi d'uno sviluppo infinito. Orbene, se si tiene presente tale analogia non tanto da un semplice punto di vista tecnico quanto da un punto di vista concettuale, si constata subito ch'essa conduce all'idea notevole che un numero intero n sia in certo qual modo una «funzione» sull'«insieme dei punti» costituito dai numeri primi, funzione il cui valore in p è l'immagine di n in $\mathbf{F}_p$ e che la serie di Taylor, la quale esprime la sua struttura «locale» nell'«intorno» di p, sia lo sviluppo p-adico di n.

Dalla pubblicazione dei lavori pionieristici di Hensel questa immissione di un paradigma geometrico nell'aritmetica si è notevolmente chiarificata. Si consideri la successione di quozienti $\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}$. Essa costituisce un sistema proiettivo $\dots \to \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^{s-1}\mathbf{Z} \to \dots \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = \mathbf{F}_p \to 0$.

DEFINIZIONE. *L'anello* $\mathbf{Z}_p$ *degli interi* p*-adici è il limite proiettivo di questo sistema.*

Questa definizione equivale alla seguente: se n è un intero, ogni numero primo p interviene con un certo esponente (in generale nullo) nella decomposizione di n in fattori primi. Quest'esponente dicesi valutazione di n in p e si denota $v_p(n)$. Se $v_p(n) = 0$, n è primo con p. Se si pone per convenzione $v_p(0) = +\infty$, è facile verificare che la valutazione p-adica v_p soddisfa le due proprietà fondamentali:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y) & \\
 & & (x, y) \in \mathbf{Z} \\
(2) & v_p(x+y) \geq \mathrm{Inf}(v_p(x), v_p(y)) &
\end{array}
$$

Ciò implica che l'applicazione che ad $n \in \mathbf{Z}$ associa il numero $|n|_p = \exp(-v_p(n))$ è una norma su $\mathbf{Z}$, detta norma p-adica soddisfacente a una disuguaglianza piú stretta della disuguaglianza triangolare, la disuguaglianza ultrametrica

(3) $$|x+y|_p \leq \operatorname{Max}(|x|_p, |y|_p).$$

Osservazione: La proprietà d'ultrametricità non è affatto intuitiva, giacché essa non è archimedea. Per la norma p-adica i multipli di un numero n sono di norma inferiore a quella di n, mentre per la norma standard (valore assoluto) sono di norma superiore.

TEOREMA. *L'anello $\mathbf{Z}_p$ degli interi p-adici è il completamento di $\mathbf{Z}$ per la norma p-adica.*

Se si passa ora da $\mathbf{Z}$ a $\mathbf{Q}$ è facile estendere la valutazione p-adica ponendo $v_p(n/m) = v_p(n) - v_p(m)$. Ciò definisce la norma p-adica $|\ |_p$ di $\mathbf{Q}$ e il completamento di $\mathbf{Q}$ per $|\ |_p$ dicesi corpo $\mathbf{Q}_p$ dei numeri p-adici. $\mathbf{Z}$ s'identifica con un sottoanello denso di $\mathbf{Z}_p$ e $\mathbf{Q}$ con un sottocorpo denso di $\mathbf{Q}_p$ (che ha dunque caratteristica 0).

Questa descrizione dei numeri p-adici in termini di valutazioni e di norme è capitale poiché si può dimostrare che le *sole* norme su $\mathbf{Q}$ sono la norma standard (valore assoluto) e le norme p-adiche. Ciò permette di precisare in che senso i numeri primi sono i «punti» di uno «spazio substrato» sul quale i numeri diventano «funzioni». Questo spazio substrato ideale E, proprio dell'aritmetica di $\mathbf{Q}$, è costituito dai punti – chiamati anche *posti* di $\mathbf{Q}$ – che sono le valutazioni ultrametriche v_p per $p \in \mathcal{P}$ (posti finiti) e il valore assoluto (posto «all'infinito»). $\mathbf{Q}$ è un'entità globale associata a questo spazio substrato E. Ciò permette di capire in che senso il teorema di Minkowski è in definitiva un teorema di passaggio dal locale al globale.

TEOREMA (Minkowski). *Sia f una forma quadratica su $\mathbf{Q}$. Se $f=0$ ammette una soluzione non banale su $\mathbf{R}$, e se, per ogni $p \in \mathcal{P}$, $f=0$ ammette una soluzione non banale su $\mathbf{Q}_p$, allora $f=0$ ammette una soluzione non banale su $\mathbf{Q}$. In altri termini, se $f=0$ ammette in ogni posto di $\mathbf{Q}$ una soluzione locale essa ammette una soluzione globale.*

8.2. Legge di reciprocità, adeli, ideli.

Per estendere il teorema di Minkowski al caso di un corpo di numeri algebrici qualunque, Hilbert ha riformulato la legge di reciprocità quadratica di Légendre-Gauss (discussa alla p. 129 del citato articolo «Dualità») come teorema di passaggio dal locale al globale; per dimostrare tale teorema egli ha ritrovato il problema dei corpi di classe posto da Weber: si tratta di un esempio particolarmente luminoso di ciò che Jean Dieudonné chiama l'unità della matematica moderna.

Rimandando al § 1.3 del citato articolo «Dualità» e al § 5 di «Divisibilità» per ulteriori dettagli, si ricordi solo che è proprio la localizzazione dei corpi di classe alla base della introduzione delle nozioni di ideli ed adeli. L'importanza dell'introduzione dei gruppi di ideli e di adeli proviene dal fatto che essi sono naturalmente muniti d'una struttura di gruppo topologico localmente compatto. Si possono dunque applicare loro i risultati dell'analisi armonica e generalizzare cosí in un quadro unitario le tecniche analitiche introdotte da Dirichlet e Riemann in aritmetica (teoria delle funzioni zeta e delle funzioni L).

9. *La sintesi della geometria algebrica.*

La geometria algebrica moderna è la sintesi di molti punti di vista. Anzitutto essa continua le ricerche (dovute essenzialmente alla scuola italiana) per generalizzare i risultati di Riemann in dimensione superiore (cfr. l'articolo «Curve e superfici»). Inoltre essa cerca di trasportare a livello algebrico le tecniche e i concetti propri del livello analitico e ciò in modo astratto, valido per ogni corpo di base, cioè non limitandosi ad utilizzare il fatto che nel caso della geometria algebrica su $\mathbf{C}$, il livello analitico è sempre soggiacente al livello algebrico. Infine essa cerca, soprattutto dopo i lavori di André Weil, di prolungare il punto di vista di Dedekind-Weber integrando le questioni aritmetiche.

I suoi strumenti essenziali sono da un lato l'algebra commutativa che traduce in termini algebrici i concetti fondamentali della geometria e permette di controllarli con il calcolo (punto di vista introdotto da Hilbert e sviluppato soprattutto da Noether e Zariski) e d'altro lato (soprattutto dopo i lavori di Grothendieck) il linguaggio categoriale della coomologia dei fasci.

La sintesi effettuata in geometria algebrica è straordinaria sia per la diversità delle tecniche sia per l'unità dei metodi. Si può dire che per sua stessa natura la geometria algebrica si situa al crocevia della matematica contemporanea. Sarebbe completamente utopico pensare di presentarne gli elementi in qualche pagina, anche solo quelli che si riferiscono all'algebrizzazione della dialettica locale/globale e del concetto d'incollamento. Ecco perché per un panorama di tali risultati si rinvia da un lato agli articoli specifici di questa stessa *Enciclopedia* via via indicati e dall'altro al trattato ormai classico di Dieudonné [1974].

10. *Conclusione.*

Per concludere questa incursione nel campo dei diversi aspetti dialettici dell'opposizione locale/globale si ritorna ora sul problema del linguaggio, della sua sintassi e della sua semantica. Uno degli apporti epistemologici piú significativi dell'approfondimento matematico delle molteplici connessioni fra le operazioni di localizzazione e di globalizzazione pare, a chi scrive, essere la possibilità di riformulare il problema teorico della lingua. Se si tiene conto del fatto che il problema posto dall'implicazione reciproca fra la lingua e l'intuizione spaziale è uno dei piú antichi problemi filosofici, appare di estremo interesse capire perché e come le «geometrie» associate all'opposizione locale/globale possano sfociare in problemi di semantica e di grammatica.

Poiché si tratta di problematiche in larga parte inesplorate, ci si limiterà solo ad alcune considerazioni di carattere generale. Si vuole unicamente sottolineare come esistano attualmente *due* approcci che paiono promettenti. Uno di essi – dovuto essenzialmente a Lawvere e Tierney – fa sfociare nella logica i metalinguaggi dell'incollamento introdotti da Grothendieck nella teoria degli schemi. L'altro – quello della teoria delle catastrofi – fa sfociare nella schematizzazione delle strutture sintattiche elementari (sia grammaticali sia semantiche) la teoria delle singolarità differenziabili e dei loro dispiegamenti. Risulta dunque che tutti e due i punti culminanti della dialettica locale/globale – quello della sintesi fra il punto di vista di Riemann e l'aritmetica, e quello del «programma di Thom-Smale» – «riconducono» la geometria alla sintassi, allacciandosi in modo specifico ad uno dei due aspetti fondamentali del problema, il primo sugli automatismi logico-sintattici di iterazione, il secondo sugli archetipi morfologici ai quali tali automatismi si applicano. Per ora si tratta solo di una constatazione un po' enigmatica. Tuttavia l'autore del presente articolo ritiene che forse dietro di essa si profila una revisione profonda del nostro modo classico di concepire i rapporti tra linguaggio e realtà.

10.1. Logica e teoria dei topoi.

Come si è visto, un prefascio su uno spazio topologico X è un funtore controvariante della categoria piccola $\mathfrak{M}$ degli aperti di X nella categoria degli insiemi. Si può dunque generalizzare tale nozione a una categoria $\mathfrak{M}$ qualunque. Per poter allora parlare di fascio e cioè di prefascio che soddisfa le condizioni di incollamento (F_1) e (F_2), basta disporre in $\mathfrak{M}$ di una nozione di ricoprimento aperto. Per questo non è affatto necessario che $\mathfrak{M}$ sia la categoria degli aperti di uno spazio topologico; infatti i ricoprimenti aperti $\mathcal{R}(U)$ degli aperti U di uno spazio topologico X sono caratterizzati dalle proprietà fondamentali:

a) $1_U : U \to U \in \mathcal{R}(U)$.

b) Se $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}(U)$ e $(U_{ij})_{j\in \mathcal{J}_i} \in \mathcal{R}(U_i)$ per ogni $i \in I$, allora $(U_{ij})_{i\in I,\, j\in \mathcal{J}_i} \in \mathcal{R}(U)$.

c) Se $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}(U)$ e se $V \hookrightarrow U$, allora $(U_i \cap V)_{i\in I} \in \mathcal{R}(V)$.

Nella categoria $\mathfrak{M}$ degli aperti di X, l'intersezione di due aperti U_i e V di U è semplicemente il prodotto fibrato $U_i \underset{U}{\times} V$ e la nozione di prodotto fibrato è puramente categoriale. Se $\mathfrak{M}$ è una qualunque categoria che ammette prodotti fibrati, si può allora definire una topologia su $\mathfrak{M}$ (detta topologia di Grothendieck) associando ad ogni oggetto U di $\mathfrak{M}$ un insieme $\mathcal{R}(U)$ di famiglie di morfismi $(U_i \to U)_{i\in I}$ dette famiglie ricoprenti che verificano la traduzione categoriale degli assiomi *a*), *b*) e *c*). Una categoria munita di una topologia di Grothendieck è detta sito. I siti sono, per definizione, i «substrati» dei fasci e ciò permette di generalizzare in modo notevole le tecniche coomologiche della teoria dei fasci.

DEFINIZIONE. *La categoria dei fasci su un sito è detta topos.*

La possibilità di applicare questo concetto generale dei fasci a situazioni astratte deriva da un teorema di Jean Giraud che caratterizza categorialmente i topoi fra le categorie.

I due esempi essenziali di topoi sono forniti da un lato dalla categoria $\mathcal{E}$ degli insiemi e, dall'altro, dalla categoria dei fasci $\mathcal{F}_T$ su uno spazio topologico T. Si tratta naturalmente di topoi molto diversi. L'osservazione fondamentale di Lawvere è che la logica dei predicati della teoria degli insiemi può essere completamente riformulata in termini categoriali a partire dalla struttura di topos di $\mathcal{E}$. Di qui l'idea veramente profonda di considerare ogni topos come l'ambito naturale di una «logica interna» ad esso canonicamente associata. Passando dalla categoria degli insiemi $\mathcal{E}$ alle categorie dei fasci su spazi topologici, si può estendere in modo cospicuo la nozione di linguaggio logico. Si può cosí formulare quello che vi è di troppo «rigido» nella teoria classica degli insiemi. Come osserva Lawvere [1972, pp. 3, 4], «il topos piú "astratto" è la usuale categoria degli insiemi $\mathcal{E}$ e delle applicazioni nella quale, per cosí dire, lo sviluppo [degli insiemi] è stato congelato in modo che i morfismi $X \rightarrow Y$ siano interamente determinati da come operano sugli elementi "globali" od "eterni" di X... Non essendovi qui alcuno sviluppo negli oggetti di $\mathcal{E}$, non vi è alcun impedimento all'esistenza di funzioni di scelta, ed anzi in un certo senso l'assioma di scelta caratterizza i modelli della teoria degli insiemi fra i topoi». Per contro, se si considerano i topoi che sono categorie di fasci su uno spazio topologico oppure categorie di prefasci su quelle categorie particolari che sono gli insiemi preordinati, si può ad esempio localizzare la quantificazione («è localmente vero che») oppure far variare la nozione di verità in funzione degli «stadi del sapere» (semantica intuizionista dei mondi possibili). Come osserva ancora Lawvere [*ibid.*, p. 3], «si può dire in conclusione che la nozione di topos sintetizza in forma oggettiva categoriale l'essenza "delle logiche di ordine superiore"... senza assioma di estensionalità. Tale fatto conduce ad una naturale e utile generalizzazione della teoria degli insiemi consistente negli "insiemi che si sviluppano internamente". In un fondamentale esempio della geometria algebrica lo sviluppo può pensarsi avvenire lungo un parametro che varia sugli "anelli di definizione"; in un fondamentale esempio della logica intuizionista, il parametro è interpretato come variante negli "stadi del sapere"».

10.2. Teoria delle catastrofi e ipotesi localista.

Alcune ricerche recenti fanno presumere che la teoria dei topoi offra un ambito naturale per comprendere gli automatismi sintattici delle lingue naturali. Tuttavia il fenomeno linguistico non si riduce al livello della generatività grammaticale. Esso include almeno due altri livelli: 1) quello semantico; 2) quello delle morfologie sintattiche elementari di base che servono di ingresso agli automi generativisti.

Il problema della semantica è troppo vasto per essere affrontato in questa sede. Passando allora al punto 2), il problema posto dall'esistenza di un nucleo di morfologie sintattiche archetipe che servano di ingresso alle trasformazioni sintattiche è apparentemente molto semplice ma incappa in notevoli difficoltà di *modellizzazione*. In breve si tratta del seguente problema. Tutto porta a credere che esistano, a livello delle strutture linguistiche profonde, degli schemi elementari di interazioni attanziali aventi carattere universale. La manifestazione linguistica superficiale di questi schemi è l'esistenza di casi (nominativo, accusativo, dativo, ecc.) caratterizzati da desinenze, come in latino, oppure da preposizioni, come nella maggior parte delle lingue europee. Appare dunque naturale supporre che, al di là della diversità degli indicatori dei casi, specifici di ogni lingua, esista un nucleo di casi profondi e universali. Che cosa è un caso profondo? A priori si deve asserire che si tratta di un *posto* in uno schema d'interazione di posti. Per esempio il verbo 'dare' lessicalizza in italiano uno schema d'interazione fra tre posti: quello del destinatore (nominativo), quello del destinatario (dativo) e quello dell'oggetto trasmesso (accusativo). Numerosi lavori hanno mostrato che esistono ben pochi schemi elementari universali d'interazione e che *a*) tali schemi paiono aver fornito le «matrici» della struttura casuale di tutti i verbi; *b*) tali schemi sembra operino sia a livello strettamente grammaticale sia a livello (semantico) delle cosiddette strutture narrative.

Il problema diviene allora quello di modellizzare, o meglio di dedurre da principî generali, schemi d'interazione casuali astratti, corrispondenti al nucleo evidenziato dagli approcci casuali (Tesnière, Fillmore, Anderson, ecc.). Si tratta di una questione assai delicata, giacché non si può assimilare una relazione casuale a una relazione nel senso logico del termine e partire da relazioni binarie di base per costruire, mediante combinazioni, relazioni piú complesse. La nozione di relazione casuale è una nozione per la quale l'opposizione semplice/complesso è non pertinente. Certamente fenomeni linguistici quali l'esistenza degli incoativi mostrano come alcune interazioni casuali possano ridursi ad interazioni piú semplici. Ciò non toglie però che a un altro livello ogni interazione casuale elementare (cioè lessicalizzabile con un unico verbo) sia irriducibile. D'altro lato se si trasformassero le relazioni casuali in relazioni logiche, nulla impedirebbe di renderle a mano a mano piú complicate. È tuttavia un fatto di ovvia esperienza (e linguisticamente universale) che la «valenza» dei verbi (secondo la metafora chimica usata da Tesnière per immaginare il numero di posti casuali articolati da un nodo verbale) è fortemente limitata (circa 4).

In conclusione si può dire che il problema posto dall'esistenza di un nucleo di schemi astratti di interazioni casuali ha quattro aspetti:

1) capire come tali interazioni possano essere congiuntamente riducibili ed irriducibili;
2) capire a cosa è dovuta la loro pregnanza (universalità);
3) capire perché la loro complessità è fortemente limitata;
4) capire come esse hanno potuto servire da «matrici» e «catturare» tutte le morfologie sintattiche elementari.

Fin dall'epoca dei grammatici della scuola di Bisanzio si è sovente ipotizzato che per risolvere tale quadruplice problema si doveva assolutamente tenere conto delle possibili interazioni spaziali tra attanti concreti. Tale ipotesi, detta ipotesi localista, significa che ogni caso è passibile di una doppia interpretazione: una propriamente grammaticale e l'altra locale, cioè spaziale. Fino ad ora però tale ipotesi – la cui storia è splendidamente narrata nel classico *La catégorie des cas* di Hjelmslev [1935-37] – non ha mai potuto essere convalidata formalmente e con ciò stesso fondata. In effetti l'ipotesi localista cerca di dare un senso rigoroso alla nozione di colocalizzazione dei posti articolati da un centro organizzatore (nodo verbale). Ciò presuppone però che si sappia formalizzare il conflitto fra posti, ossia il processo dialettico di unione e di differenziazione dei posti in uno schema d'interazione. È chiaro infatti che «l'identità» dei posti non può provenire dai posti stessi ma solo dal loro rapporto dialettico.

A questo punto interviene il paradigma catastrofista. La teoria delle catastrofi è la prima teoria adattata a problemi del tipo di quelli posti dall'ipotesi localista, giacché essa fornisce i primi modelli di conflitto dialettico e classifica le interazioni elementari archetipe fra attanti spaziali. Esiste una interpretazione sintattica delle catastrofi elementari [descritta alla fine di Thom 1972 ed utilizzata a scopi semantici in Petitot 1977] la quale fornisce una deduzione a priori (si potrebbe anzi dire trascendentale) degli universali casuali. La teoria delle singolarità s'innesta cosí, in modo imprevisto, sulla linguistica, fornendo una risposta profonda e coerente ai punti 1)-4).

A partire da alcune osservazioni generiche sulla semantica, si è attraversato l'universo dei vari aspetti matematici dell'opposizione locale/globale per concludere sulle difficoltà inerenti alla schematizzazione delle forme linguistiche. La possibilità di percorsi epistemologici di questo tipo è la premessa di un nuovo tipo di implicazione fenomenologica della matematica che, forse, permetterà di trasformare in modo profondo il nostro rapporto con la scienza. Qualunque ne sia lo sviluppo, è però evidente che l'opposizione locale/globale deve d'ora in poi essere considerata come una delle categorie fondamentali della ragion pura. [J. P.].

Adams, F.
1962 *Vector fields on spheres*, in «Annals of Mathematics», LXXV, pp. 603-32.

Appelgate, H., e Tierney, M.
[1966-67] *Categories with Models*, in *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, Springer, Berlin - New York 1969, pp. 156-244.

Dieudonné, J.
1974 *Cours de géométrie algébrique*, Presses Universitaires de France, Paris.
1977 *Panorama des mathématiques pures. Le choix bourbachique*, Gauthier-Villars, Paris.

Eco, U.
1975 *Trattato di semiotica generale*, Bompiani, Milano.

Godement, R.
1964 *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris.

Golubitsky, M., e Guillemin, V.
1973 *Stable Mappings and their Singularities*, Springer, Berlin - New York.

Hatcher, A., e Wagoner, J.
1973 *Pseudo-Isotopies of Compact Manifolds*, in «Astérisques», n. 6.

Hjelmslev, L.
1935-37 *La catégorie des cas. Etude de grammaire générale*, in «Acta Jutlandica», VII, 1, e IX, 2.

Lawvere, F. W.
1972 (a cura di) *Toposes, Algebraic Geometry and Logic*, Springer, Berlin - New York.

Petitot, J.
1977 *Topologie du Carré sémiotique*, in «Etudes littéraires», X, pp. 347-428.

Poenaru, V.
1974 *Analyse différentielle*, Springer, Berlin - New York.

Roussarie, R.
1975 *Modèles locaux de champs et de formes*, in «Astérisques», n. 30.

Steenrod, N.
1951 *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton N.J.

Thom, R.
1972 *Stabilité structurelle et morphogénèse. Essai d'une théorie générale des modèles*, Benjamin, Reading Mass.
1978 *Morphogénèse et imaginaire*, in «Circé. Cahiers de recherche sur l'imaginaire», n. 8-9, pp. 7-90.

Weyl, H.
1955 *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Stuttgart.

Comparsa all'interno delle **matematiche** (cfr. anche **catastrofi**, **differenziale**, **funzioni**, **geometria e topologia**, **invariante**, **spettro**), l'opposizione locale/globale (cfr. **opposizione/contraddizione**) ha assunto una portata generale nell'ambito della filosofia (cfr. **filosofia/filosofie**) e della **scienza**. Nella filosofia essa permette di enunciare in modo nuovo e di proporre soluzioni originali a numerosi problemi (cfr. **coppie filosofiche**), come quello del tutto e delle parti (cfr. **totalità**, **dialettica**), degli **universali/particolari**, dell'unità e molteplicità (cfr. **uno/molti**). Nelle teorie (cfr. **teoria/modello**) della **conoscenza**, l'opposizione locale/globale è presente in modo particolare in quanto problema dell'**induzione/deduzione**; essa si può reperire anche nella **semantica** e in generale ovunque si ponga il problema del **significato** (cfr. **senso/significato**). Nella scienza ci s'imbatte in questa opposizione non appena si affronti il problema delle leggi (cfr. **legge**) scientifiche e quello del determinismo (cfr. **determinato/indeterminato**); essa inoltre è al centro della cosmologia contemporanea (cfr. **cosmologie**, **universo**, **spazio/tempo**; e ancora: **astrologia**, **astronomia**, **mondo**, **natura**, **caos/cosmo**, **ordine/disordine**).