Locale/globale

Differenziale, Funzioni, Infinitesimale, Locale/globale, Sistemi di riferimento, Stabilità/instabilità, Variazione

L'opposizione ◆locale/globale◆ è una di quelle opposizioni fondamentali che, come quelle tra il discreto e il continuo o tra il finito e l'infinito, sono proteiformi e intervengono a tutti i livelli della riflessione e della pratica matematica. È una opposizione portante, organizzatrice e distributrice il cui contenuto è sia concettuale sia tecnico. Si può dire che è un'opposizione dotata di un eminente *valore categoriale*.

Questa opposizione fa parte della lingua naturale ed è spontaneamente utilizzata per indicare situazioni certamente diverse ma la cui intuizione è relativamente unitaria. Se ne darà qualche esempio scelto a caso fra i molti.

Si è iniziato l'articolo «Locale/globale» di questa *Enciclopedia* con alcune riflessioni informali sulla struttura semantica di un lessico. Si tratta di un esempio tipico. In questo caso si utilizza il termine 'locale' per parlare di campi semantici ristretti e ben articolati come il campo semantico dei colori, o degli utensili di cucina, o di sottodiscipline di una certa scienza, ecc. In particolare, gli articoli di questa *Enciclopedia* sono, relativamente al tutto che essa costituisce, delle organizzazioni locali. Si vede che l'accezione del termine 'locale' ricopre qui due problemi. In primo luogo quello delle *classificazioni*, dato che ogni campo semantico consiste nella classificazione secondo una regola di una certa varietà. E inoltre quello del *livello di osservazione* scelto per operare la classificazione. Per precisare un poco questa accezione tassonomica, si consideri l'esempio del sistema fonologico di una lingua. Questo sistema può essere considerato in un primo momento come l'*insieme* degli «atomi» fonetici. Questo insieme, che si suppone ben definito su basi fisico-audioacustiche, svolge il ruolo di una totalità di elementi considerati analoghi, omogenei rispetto alla loro natura, anche se non equivalenti l'uno all'altro. Si tratta in qualche modo di un *quadro globale di riferimento*. Si potrebbe allora credere che, detto $\mathcal{P}$ questo insieme, se p è un «atomo» fonetico, vale a dire un suono fonetico elementare come una consonante o una vocale, l'approccio formale della tassonomia associata a $\mathcal{P}$ si riduca allo studio della relazione di appartenenza insiemistica $p \in \mathcal{P}$. Ma non è affatto vero. Un tale approccio sarebbe di una povertà estrema. Infatti i suoni fonetici elementari sono *forme* audioacustiche che possono variare in modo *continuo* e che sono dunque deformabili. Ciò significa che lo spazio $\mathcal{P}$ è naturalmente munito di una *topologia* (cfr. l'articolo «Geometria e topologia») che definisce una relazione di vicinanza tra i suoni fonetici elementari. E per di piú la percezione non è sensibile a tutte le proprietà di questi suoni fonetici elementari. Come hanno mostrato numerose esperienze effettuate in questi ultimi quindici anni, la percezione fonetica è *categoriale*. Ciò significa quanto segue. Si consideri una sequenza di N stimoli (una dozzina) $(s_1, ..., s_N)$ che conduca in modo progressivo per esempio dalla sillaba [*pa*] alla sillaba [*ba*] in una lingua in cui la differenza sordo/sonoro [*p*]/[*b*] sia pertinente. Si sottopongano allora dei soggetti a test di identificazione e di discriminazione. I primi test consistono nel domandare ai soggetti, ai quali si presenta una serie aleatoria di occorrenze degli s_i, di riconoscere ogni occorrenza come [*pa*] o [*ba*]. I secondi test consistono nel domandare ai soggetti, ai quali si presenta una serie aleatoria di coppie (s_i, s_{i+1}) di stimoli successivi, se distinguono i due stimoli proposti. Mediante una statistica delle risposte, i test di identificazione conducono a risultati scontati a priori. Si ottiene una risposta di 100 per cento di [*pa*] e di 0 per cento di [*ba*] per i primi stimoli $s_1 ... s_k$, una risposta di 100 per cento di [*ba*] e di 0 per cento di [*pa*] per gli ultimi stimoli $s_l ... s_N$, e la percentuale delle risposte [*pa*] crolla catastroficamente per essere rimpiazzata dalla risposta [*ba*] nella zona intermedia. Si ottiene cosí un'*interfaccia* (una frontiera) K che separa la categoria [*pa*] dalla categoria [*ba*]. In compenso i risultati dei test di discriminazione conducono a risultati che hanno molto sorpreso i fonetisti. Se si considera una percezione continua (non categoriale) come quella dei colori, è un fatto chiaro e appartenente all'esperienza usuale come si possano altrettanto bene distinguere due sfumature di rosso o di arancione vicine quanto una tinta rosso-arancione da una tinta arancione-rosso. La scomposizione del campo dei colori in categorie etichettate da nomi è di natura *linguistica* e praticamente non influisce affatto sulle capacità percettive di discriminazione. Ma non succede la stessa cosa nel caso della percezione fonetica. I test di discriminazione mostrano che *non esiste discriminazione intracategoriale*. Si possono discriminare soltanto stimoli vicini separati da K, vale a dire riconosciuti come differenti. È in questo senso che la percezione è categoriale. Essa è subordinata all'identificazione. Come dicono i fonetisti, si effettua su basi *assolute*. La percezione categoriale è un fenomeno percettivo di primaria importanza. Essa spiega come un flusso acustico *continuo* può essere percettivamente *discretizzato* e diventare per ciò stesso il supporto di un *codice*. Si vede che la percezione fonetica manifesta essenzialmente la *categorizzazione* dello spazio topologico $\mathcal{P}$ dei suoni fonetici elementari con un sistema K di *discontinuità* (cfr. l'articolo «Continuo/discreto») che vi definiscono una sorta di «geografia» (domini separati da frontiere). I domini di $\mathcal{P}$ delimitati da K sono i fonemi del sistema. Questi fonemi sono classi di equivalenza di suoni fonetici elementari chiamati anche allofoni.

Si capisce molto bene con questo esempio l'importanza dei concetti *strutturalisti* introdotti da Saussure e sviluppati da Jakobson e Hjelmslev (cfr. l'articolo «Struttura»). Come classe di equivalenza di allofoni, un fonema non può avere una definizione puramente audioacustica. Esso è definito dal suo *valore*, vale a dire dall'estensione del suo dominio in $\mathcal{P}$. Ora, dato che questa estensione è determinata dal sistema globale di interfaccia K, un fonema non ha un'esistenza isolata. Esso non esiste se non in modo relazionale per mezzo delle sue relazioni con gli altri elementi del sistema. Se si associa ad ogni dominio una «capitale», cioè un allofono *prototipico* che occupa approssimativamente il baricentro del dominio stesso, si può dire che i prototipi costituiscono gli *elementi* del sistema, cioè il suo aspetto locale, ma che, quanto al valore, il sistema globale è implicitamente presente in ciascuno degli elementi.

Ci si trova in questo caso in presenza di una esemplificazione del paradigma strutturalista. L'approccio strutturalista consiste essenzialmente nell'interpretare le tassonomie in termini di categorizzazione come sistemi di rapporto, vale a dire in termini di sistemi di discontinuità che scompongono in domini (in classi di equivalenza) un certo spazio topologico. Ciò è valido in particolare per i campi semantici. In quest'ottica il locale si riferisce agli elementi del sistema e il globale al sistema stesso. E il postulato strutturalista del primato del criterio relazionale dell'identità sul criterio sostanziale (del primato della differenza sull'identità, cfr. l'articolo «Identità/differenza») ribadisce che, quanto al valore, è il globale che *determina* il locale. Questo punto di vista si oppone risolutamente al punto di vista riduzionista e «atomista» secondo cui gli elementi del sistema hanno un'esistenza autonoma e si aggregano per interazione in un sistema globale a partire dalle loro proprietà intrinseche.

Per ritornare alla struttura dei lessici e delle enciclopedie, si vede che il problema è quello dell'estensione, del prolungamento, dei campi semantici e quello dei loro incollamenti. Il campo semantico che, in ciò che precede, funzionava come un quadro di riferimento globale inducente una categorizzazione, funziona ora come un campo locale suscettibile di estendersi e di intersecarsi con altri campi locali. Si entra in questo caso in una problematica completamente diversa in cui si tratta di aggregare dei domini locali. Ognuno di noi ha sperimentato come le carte geografiche possono essere incollate in modo da formare una carta globale. Questa esperienza elementare rende manifesta l'eminente *relatività* della dialettica del locale e del globale. Essa rende anche manifesta l'importanza del *livello di osservazione* scelto. Semplificando i dati, per esempio usando l'*astrazione* nel caso semantico, è possibile ridurre un sistema globale a una situazione locale.

Nel suo sviluppo, la matematica ha incontrato problemi analoghi, ma dato che gli oggetti matematici sono oggetti costruiti, ha potuto dare un contenuto *tecnico e operatoriale* ai diversi aspetti della dialettica del locale e del globale. Essa ha potuto, in numerosi casi, rispondere in modo specifico, esplicito e profondo a problemi come i seguenti: in quale misura delle condizioni locali impongono proprietà o comportamenti globali? In quale misura la struttura globale impone reciprocamente delle condizioni locali? In quale misura c'è equivalenza tra determinazione locale e determinazione globale? Quali sono i metodi di passaggio dal locale al globale? Come si può localizzare una situazione? ecc.

Questi diversi problemi sono di una complessità cosí proliferante che non è possibile, in un articolo di sintesi come questo, neppure enumerarne semplicemente i diversi aspetti. Ci si limiterà dunque, in modo estremamente rudimentale e, purtroppo, tecnicamente molto vago, a ripercorrere alcuni problemi sviluppati in modo piú preciso negli articoli ✦Differenziale✦, ✦Funzioni✦, ✦Infinitesimale✦, ✦Locale/globale✦, ✦Sistemi di riferimento✦, ✦Stabilità/instabilità✦ e ✦Variazione✦.

1. *La geometria dello spazio fisico.*

Ogni nostra esperienza pratica conferma che lo spazio fisico è localmente euclideo. Il primo esempio storico di passaggio dal locale al globale è fornito dall'estrapolazione di Euclide che postula che, globalmente, lo spazio è ancora euclideo. Questa estrapolazione si esprime assiomaticamente con il famoso assioma delle parallele che è un giudizio sintetico a priori caratteristico della geometria e che la rende irriducibile alla logica. Con la comparsa delle geometrie non euclidee (iperboliche ed ellittiche), si è preso coscienza del fatto che esistono molti spazi globali che 1) sono omogenei, cioè possiedono ovunque la stessa struttura, e 2) sono localmente euclidei. Questi spazi omogenei sono caratterizzati dalla loro curvatura (positiva per gli spazi ellittici e negativa per gli spazi iperbolici) e la loro omogeneità è descritta con il gruppo di invarianza. Di qui l'idea fondamentale, dovuta a Felix Klein, di caratterizzare una geometria con il suo gruppo di invarianza e con le proprietà invarianti sotto l'azione di questo gruppo (cfr. gli articoli «Geometria e topologia», «Invariante»).

Se si abbandona la condizione di omogeneità, si arriva a una situazione piú generale che Riemann è stato il primo a immaginare chiaramente. Si tratta di spazi la cui metrica varia, vale a dire la cui struttura euclidea tangente *cambia* con il punto considerato. Ciò implica che non c'è piú gruppo di invarianza nel senso precedente, in altre parole che gli «osservatori» locali non possono piú «comunicare». Per ristabilire la «comunicazione», occorre fare la sintesi del punto di vista di Klein e del punto di vista di Riemann. Questa sintesi è essenzialmente dovuta a Cartan. Essa è fondamentale per la relatività generale.

2. *I livelli di struttura e la dialettica locale/globale.*

Ciò che caratterizza la geometria moderna è l'estrema estensione del concetto di spazio e la ricchezza delle procedure di costruzione di spazi. Questa diversificazione proliferante del «genere» spazio in «spazi» pone dei problemi di *classificazione* che sono stati e sono tuttora uno dei fattori determinanti del progresso concettuale della geometria.

Si citerà ora una procedura di costruzione che è fondamentale pur essendo elementare. Essa consiste nel partire da pezzi di spazi standard (in generale gli spazi $\mathbf{R}^n$) e nell'incollarli. Se U e V sono due pezzi, l'incollamento consisterà nell'identificare un sottopezzo U' di U con un sottopezzo V' di V. Questa identificazione significa che si considera un isomorfismo tra U' e V'. Ma la nozione di isomorfismo è una nozione fondamentalmente *relativa*. Essa dipende dal *livello di struttura* considerato. Ora gli spazi standard $\mathbf{R}^n$ sono naturalmente muniti di strutture sempre piú «rigide», sempre piú vincolanti, che costituiscono una *gerarchia* di livelli, ciascun livello essendo associato a (e anche caratterizzato da) un tipo di applicazione, di morfismo, tra spazi. Il livello di base è il livello insiemistico che è il meno vincolante. I morfismi associati sono le applicazioni e gli isomorfismi, le applicazioni biiettive (cfr. gli articoli «Insieme» e «Applicazioni»). Il primo livello che manifesta una certa coesione è il livello topologico. I morfismi associati sono le applicazioni continue e gli isomorfismi, detti anche omeomorfismi, le applicazioni biiettive bicontinue (cfr. l'articolo «Geometria e topologia»). Se si incollano pezzi di $\mathbf{R}^n$ mediante gli omeomorfismi si ottengono spazi detti «varietà topologiche». Un livello piú vincolante di quello topologico è il livello differenziabile. Dato che $\mathbf{R}^n$ è uno spazio vettoriale normato, se $f: U \rightarrow V$ è un'applicazione continua tra due aperti di $\mathbf{R}^n$, si può dire quando è differenziabile (cfr. l'articolo «Differenziale»). I morfismi associati a questo livello di struttura sono dunque le applicazioni differenziabili e gli isomorfismi, detti anche diffeomorfismi, sono le biiezioni bicontinue differenziabili insieme alle loro inverse. Se si incollano pezzi di $\mathbf{R}^n$ con diffeomorfismi si ottengono spazi detti «varietà differenziabili», i quali costituiscono il principale esempio di spazi ottenuti con un processo di incollamento.

Per costruzione, le varietà differenziabili sono *localmente triviali* (cfr. l'articolo ♦Locale/globale♦) poiché sono localmente diffeomorfe a spazi standard $\mathbf{R}^n$. Esse si distinguono dunque soltanto globalmente. Se si vuol tentare di classificarle a meno di diffeomorfismi, occorre di conseguenza costruire degli invarianti differenziabili (cioè invarianti per diffeomorfismo) e cercare di trovare una lista abbastanza ricca di invarianti affinché i loro valori, data una varietà M, siano sufficienti a caratterizzare M. Un tale programma si scontra con terribili difficoltà che sono ancora lungi dall'essere risolte. Ma alcune idee si impongono in modo naturale. La prima idea è quella di determinare quali vincoli impone un livello di struttura inferiore a un livello di struttura superiore. Il livello insiemistico non impone quasi nessun vincolo. Infatti l'unico invariante insiemistico rispetto alle biiezioni è il numero cardinale, e tutte le varietà «normali» hanno la potenza del continuo. In compenso il livello topologico è di grande importanza. Se M e N sono due varietà differenziabili diffeomorfe, sono a fortiori omeomorfe in quanto varietà topologiche. Si può dunque cominciare tentando di classificare le varietà topologiche per poi classificare, essendo dato un tipo topologico, le strutture differenziabili che sono compatibili con esso (supponendo che ne esistano, il che esige che il tipo topologico considerato non sia troppo «patologico»).

Lo strumento principale per classificare le varietà topologiche è la topologia algebrica (detta inizialmente topologia combinatoria) inventata da Poincaré. Essa comprende due rami principali, la teoria dell'*omotopia* e la teoria dell'*omologia-coomologia*. La teoria dell'omotopia parte da una semplice osservazione. Ciò che distingue tra loro le forme globali delle varietà è in particolare il modo in cui sono «bucate» o comprendono dei «vuoti». Il miglior modo per misurare queste caratteristiche topologiche globali di una varietà topologica M (e piú in generale di uno spazio topologico) è quello di «immergere» mediante applicazioni continue $f: S^n \rightarrow M$ delle sfere di dimensione n in M e di cercare di contrarle in un punto. Se la «sfera» $f(S^n)$ comprende un «buco», allora questo buco farà *ostruzione* alla contrazione. Se per esempio, partendo da un punto base x_0 di una sfera S^2, un «osservatore» dipanando un filo descrive un cammino qualunque che ritorna in x_0 (un tale cammino chiuso si chiama laccio ed è un'applicazione continua

$f: S^1 \to S^2$) egli potrà riportare tutto il filo in x_0 facendolo scivolare sulla superficie di S^2. Una tale deformazione di un laccio si chiama «omotopia». Se in compenso, camminando su un toro, l'osservatore descrive un laccio facendo il giro di un meridiano o di un parallelo, non potrà piú contrarre il laccio corrispondente in un punto. La sfera è uno spazio senza omotopia in dimensione 1 mentre il toro è uno spazio che possiede omotopia in dimensione 1 e ciò per ragioni globali. Similmente, se l'osservatore camminando su un piano al quale è stato tolto un punto a descrive un laccio che circonda questo punto, non potrà contrarlo, poiché l'assenza del punto a fa ostruzione. Anche un piano senza un punto è dunque uno spazio che possiede omotopia in dimensione 1 ma questa volta per ragioni locali. D'altra parte se l'osservatore descrive un laccio nello spazio a tre dimensioni $\mathbf{R}^3$ senza il punto a, potrà sempre contrarlo perché dispone di una dimensione supplementare che gli permette di scansare a. $\mathbf{R}^3 - (a)$ è dunque uno spazio senza omotopia in dimensione 1. Ma è intuitivo che una sfera S^2 che comprende a in $\mathbf{R}^3$ non potrà essere contratta in un punto, poiché l'assenza di a le fa ostruzione. $\mathbf{R}^3 - (a)$ è dunque uno spazio che possiede omotopia in dimensione 2. La scoperta principale di Poincaré è che, dato uno spazio M, se si considerano i lacci a meno di omotopia (cioè se si considerano come equivalenti due lacci deformabili con continuità l'uno nell'altro) e se si compongono due lacci concatenandoli (percorrendoli uno di seguito all'altro), si ottiene sull'insieme delle classi di omotopia dei lacci una struttura algebrica di *gruppo*. Questo gruppo, detto gruppo fondamentale o gruppo di Poincaré di M e indicato con $\pi_1(M)$, è il primo esempio di invariante algebrico utile alla classificazione delle varietà. Di fatto il gruppo fondamentale di uno spazio topologico M non è soltanto un invariante topologico, ma un invariante del tipo di omotopia. Esso varia *funtorialmente* con M (si veda l'articolo «Trasformazioni naturali / categorie»). Si definiscono nello stesso modo i gruppi di omotopia $\pi_k(M)$ in dimensione superiore.

Si vede come un invariante algebrico come il gruppo fondamentale interviene nel problema della classificazione. Dato che π_1 è un funtore della categoria degli spazi topologici puntati nella categoria dei gruppi, ogni omoemorfismo $h: M \to N$ tra due spazi topologici induce un *isomorfismo* $h^*: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ tra i loro gruppi fondamentali. Se dunque $\pi_1(M)$ e $\pi_1(N)$ non sono isomorfi, M e N non possono essere omeomorfi. Per esempio, dato che la sfera S^2 non possiede omotopia in dimensione 1 mentre il toro T la possiede, S^2 e T non possono essere omeomorfi. Reciprocamente si cercherà di classificare gli spazi topologici che hanno gli stessi gruppi di omotopia.

Quanto all'omologia, è inizialmente una tecnica combinatoria adattata agli spazi muniti di una *triangolazione* (cfr. l'articolo «Geometria e topologia»). Essa consiste nello studiare i cicli di uno spazio (cioè le catene di bordo nullo) modulo i bordi (cioè i cicli che sono bordi di catene). L'omologia è strettamente legata all'omotopia. Considerando le forme lineari sulle catene, si definiscono dualmente i gruppi di coomologia.

L'interesse principale dei gruppi di omotopia, di omologia e di coomologia è di essere oggetti *algebrici* che misurano la struttura globale degli spazi e che variano funtorialmente. Si può svilupparne un *calcolo* (che costituisce l'oggetto della topologia algebrica) studiando il loro comportamento in rapporto alle procedure standard di costruzione e di decomposizione degli spazi (sottospazi, spazi quoziente, spazi prodotto, fibrazioni, ecc.). A partire dal momento in cui si dispone di tali strumenti per trattare il livello topologico si cercherà di sapere in quale misura questo livello vincola i livelli gerarchicamente superiori e in particolare il livello differenziabile. Data una varietà topologica M, si cercherà di classificare le strutture differenziabili su M che inducono la sua struttura topologica. L'idea principale è quella di tradurre queste strutture con classi di omotopia di applicazioni tra spazi associati a M e di applicare i metodi della topologia algebrica.

Oltre questi metodi di topologia algebrica si è stati condotti ad inventare metodi corrispondenti direttamente al livello differenziabile e che sono l'oggetto della topologia differenziale. Tra questi occorre citare prima di tutto la teoria di Morse e il cobordismo. Poiché la classificazione delle varietà a meno di omeomorfismi è troppo complicata, s'indebolisce la nozione di omeomorfismo considerando due varietà M e N come equivalenti (cobordanti) se esse costituiscono il bordo di una stessa varietà W. Questa equivalenza è operatoriale nella misura in cui, come ha mostrato Thom, l'insieme delle classi di equivalenza può essere munito di una struttura di gruppo. Quanto alla teoria di Morse, essa consiste nell'analizzare le applicazioni differenziabili $f: M \to \mathbf{R}$ di una varietà M nella retta reale. Tale teoria è presentata nell'articolo «Locale/globale» (cfr. anche «Applicazioni»). L'idea direttrice è che, benché una tale funzione $f: M \to \mathbf{R}$ possa essere estremamente complicata, tuttavia è relativamente semplice quando è ***strutturalmente stabile***, vale a dire di tipo differenziabile invariante per piccole deformazioni. I due teoremi di base della teoria sono da una parte il teorema di Morse che afferma che, se M è compatta, f è strutturalmente stabile se e solo se i suoi punti critici sono non-degeneri (il che implica che siano isolati) e i suoi valori critici sono tutti distinti (caratterizzazione geometrica della stabilità strutturale), e dall'altra il teorema (corollario del teorema di trasversalità di Thom) che afferma che le applicazioni strutturalmente stabili sono *dense* (e anche generiche) dato che ogni applicazione è approssimabile da una applicazione strutturalmente stabile. Considerevolmente sviluppata da Thom, questa teoria è alla base della teoria delle catastrofi (cfr. l'articolo «Locale/globale»: nozione di dispiegamento universale). Nella misura in cui le applicazioni stabili (dette anche di Morse) $f: M \to \mathbf{R}$ sono quelle che permettono di definire una presentazione ad anse di M, tale teoria ha avuto un ruolo determinante nella dimostrazione di Smale del teorema dell'h-cobordismo che è il primo grande risultato che riguarda la congettura di Poincaré.

La congettura di Poincaré (una delle grandi congetture del secolo) domanda in quale misura, per le sfere S^n, il livello omotopico-omologico ***determina*** il livello topologico: se M è una varietà compatta di dimensione n semplicemente connessa ($\pi_1(M) = 0$) e che ha l'omologia di S^n, è M omeomorfa a S^n? La congettura è vera per $n = 2$ (dimostrazione elementare). Smale ha dimostrato che è vera per $n \geq 5$. La tecnica è un teorema sul cobordismo. Si dice che due varietà M e N sono h-cobordanti se sono il bordo di una varietà W e se le inclusioni canoniche

$M \hookrightarrow W$ e $N \hookrightarrow W$ sono delle equivalenze di omotopia. Il teorema di Smale afferma che se $\dim M = \dim N \geq 5$ e se M e N sono semplicemente connesse, allora un h-cobordismo W è necessariamente *triviale*, cioè diffeomorfo a $M \times I$. Ciò implica che M e N sono diffeomorfe. La tecnica consiste nel partire da una funzione di Morse su W definendo una presentazione ad anse e nel mostrare come si possano sopprimere progressivamente le anse (cfr. l'articolo *Unità delle matematiche* in questo stesso volume dell'*Enciclopedia*).

La considerazione delle funzioni di Morse porta al problema della classificazione delle applicazioni differenziabili $f: M \to N$ tra due varietà qualunque ($M \neq \neq \mathbf{R}$). Queste applicazioni non sono localmente triviali quando possiedono delle *singolarità*. L'idea è quella di tentare 1) di caratterizzare geometricamente e di classificare le applicazioni strutturalmente stabili in modo da controllare le cause d'instabilità; 2) di mostrare che le applicazioni stabili sono generiche, cioè che ogni applicazione è stabilizzabile con una piccola deformazione; 3) di classificare le applicazioni instabili con un grado crescente di instabilità; 4) di utilizzare dei metodi di riduzione alla dimensione finita (tecnica dei getti) considerando le applicazioni che hanno lo stesso tipo differenziabile di uno dei loro getti di ordine finito; 5) di trattare questi problemi prima localmente (mediante germi di applicazioni) e poi globalmente (cfr. gli articoli «Locale/globale», «Applicazioni» e «Funzioni»).

3. *I livelli analitici e algebrici.*

Una delle caratteristiche del livello differenziabile è che non esiste solidarietà tra il locale e il globale. Di qui l'importanza cruciale della stabilità strutturale che restaura tale solidarietà. Non accade affatto la stessa cosa per quanto riguarda i livelli molto piú vincolanti, analitico e algebrico, in cui al contrario il locale *determina* il globale. In questo caso le principali tecniche di passaggio dal locale al globale sono il prolungamento analitico e la coomologia a valori in un fascio (cfr. gli articoli «Geometria e topologia», «Invariante», «Trasformazioni naturali / categorie»). Esiste, a partire dai lavori pionieristici di Riemann, una gran quantità di relazioni di dipendenza e di determinazione reciproca tra i livelli topologico, differenziabile, analitico e algebrico. Per esempio una sottovarietà analitica di uno spazio proiettivo $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ è algebrica (teorema di Riemann per le curve e teorema di Chow per le varietà generali). Il genere di una curva algebrica piana che è il suo invariante topologico maggiore è derivabile dal grado della curva (formula di Riemann). Esso vincola anche il numero di forme differenziali di prima specie indipendenti (teorema di Riemann che stabilisce un legame tra livello topologico, livello differenziabile e livello analitico). La coomologia di una varietà differenziabile è esprimibile a partire dal teorema di Stokes in termini di forme differenziali sulla varietà (teorema di De Rham). Se la varietà è analitica, essa è anche esprimibile, ma lo è in termini di forme armoniche (teoria di Hodge che collega il livello differenziabile e il livello analitico), ecc. Tutti questi temi che costituiscono il cuore della geometria analitica e algebrica moderna oltrepassano il contenuto del gruppo di articoli qui esaminato e sono affrontati in altri articoli dell'*Enciclopedia*.

4. *Equazioni differenziali e analisi globale.*

Una delle teorie in cui la dialettica «locale/globale» è maggiormente importante è la teoria delle equazioni differenziali. Innumerevoli problemi concreti (fisica, chimica, biologia, ecc.) conducono a sistemi di equazioni differenziali definiti nel modo seguente. Il sistema considerato è definibile con un numero finito $x_1, ..., x_N$ di coordinate che descrivono una varietà differenziabile M di dimensione N detta spazio delle fasi del sistema. Uno stato istantaneo del sistema è dunque rappresentato da un punto x di M e l'evoluzione del sistema a partire da una condizione iniziale $x_0 \in M$ con un cammino $x(t)$ in M che parte da x_0. Assegnare una *legge* di evoluzione significa assegnare, in ogni punto x di M, un vettore velocità dx/dt in funzione di x e di t: $dx/dt = f(x, t)$. Questo vettore velocità è un vettore tangente in x a M, cioè un vettore dello spazio vettoriale tangente $T_x M$ di M in x. Se f non dipende dal tempo (il sistema di equazioni differenziali è detto allora autonomo), assegnare una legge di evoluzione f equivale dunque ad assegnare una sezione del fibrato tangente TM di M. In generale si suppone che questa sezione sia differenziabile. Ma essa può essere piú analitica o algebrica se M è una varietà analitica o algebrica.

Data una sezione differenziabile $X(x)$ di TM (detta anche campo di vettori su M), si chiama *traiettoria* del campo X una curva differenziabile di M parametrizzata dal tempo t, la quale, in ogni punto x di M, ammette $X(x)$ come vettore velocità. Il primo teorema fondamentale della teoria afferma che se $x_0 \in M$ è una condizione iniziale, esiste sempre localmente una e una sola traiettoria passante per x_0 (principio del determinismo). Il secondo dice che sotto condizioni abbastanza generali (per esempio se M è compatta) esiste anche sempre una e una sola traiettoria globale (cioè parametrizzata da $t = -\infty$ a $t = +\infty$). In questo caso si può associare a X ciò che viene chiamato il suo flusso, vale a dire un'entità globale che sintetizza l'insieme delle traiettorie. Infatti se $t \in \mathbf{R}$, a $x \in M$ si può associare il punto x_t raggiunto alla fine del tempo t sulla traiettoria uscente da x. Per t fissato, l'applicazione $\varphi_t : M \rightarrow M$ che a x associa x_t è un diffeomorfismo di M, in altre parole un elemento $\varphi_t \in \mathrm{Diff}\, M$ in cui $\mathrm{Diff}\, M$ è il gruppo di Lie dei diffeomorfismi di M. È facile verificare che φ_0 è l'identità di M e che i diffeomorfismi φ_t soddisfano $\varphi_{t'} \circ \varphi_t = \varphi_{t'+t}$. In altre parole l'applicazione di $t \xrightarrow{\Phi} \varphi_t$ è un morfismo di gruppi di Lie tra il gruppo additivo di $\mathbf{R}$ e $\mathrm{Diff}\, M$. Reciprocamente, assegnata Φ si può ritrovare X, poiché X è la «derivata» $\left.\frac{d\varphi_t}{dt}\right|_{t=0}$ del morfismo Φ in $t = 0$.

Se si discretizza il tempo, si può considerare il diffeomorfismo $\varphi = \varphi_1$ e approssimare il sistema dinamico Φ con la successione iterata φ^n di φ.

Mentre per lungo tempo si è cercato di trovare formule *esplicite* per le traiettorie di un sistema dinamico X, dopo Poincaré si cerca di comprendere *qualita-*

tivamente la struttura del flusso Φ associato (cfr. l'articolo «Qualità/quantità»). Perciò si è portati a distinguere un approccio locale e un approccio globale. A priori si può pensare che, essendo dato un sistema dinamico X su M, le sue traiettorie siano immersioni (o almeno applicazioni iniettive) di $\mathbf{R}$ in M. Ma ciò è falso perché alcune traiettorie possono essere *critiche*. Sono possibili due casi. O la traiettoria è ridotta a un punto x_0 e allora questo punto, detto punto critico di X, è un punto di equilibrio del sistema. Per questo è necessario e sufficiente che X si annulli in x_0. Oppure la traiettoria è chiusa, vale a dire periodica. Dato che si può mostrare che, in un punto $x \in M$ in cui $X(x) \neq 0$, X è *localmente triviale* (cioè riducibile a un campo costante in un sistema appropriato di coordinate locali), si vede che lo studio di X si scompone in tre parti:

1) Lo studio locale di X nell'intorno dei suoi punti critici.
2) Lo studio semilocale di X nell'intorno delle sue traiettorie periodiche.
3) Lo studio globale di X che comprende la configurazione delle sue traiettorie critiche e lo studio *d'insieme* delle sue traiettorie non critiche.

Per quanto riguarda il primo punto, la tecnica di base consiste, in un punto critico x_0 di X, nello studiare il campo lineare X_0 tangente in x_0 a X e nel cercare sotto quali condizioni X è equivalente nell'intorno di x_0 alla sua parte lineare. Se non si ha questo caso, si cercheranno allora (come nello sviluppo di Taylor delle funzioni) delle approssimazioni piú sottili. Per quanto riguarda il secondo punto, si cercheranno in primo luogo dei criteri che permettano di garantire l'esistenza di traiettorie periodiche in un certo dominio di M. Data una tale traiettoria γ_0, lo studio di X nell'intorno di γ_0 si riduce ad uno studio locale. Sia infatti W una piccola sezione trasversa a γ_0 in x_0. L'applicazione che ad ogni punto x di W associa il punto x' in cui la traiettoria uscente da x interseca per la prima volta W è un diffeomorfismo di W che ammette x_0 come punto fisso. È dunque sufficiente analizzare questo diffeomorfismo nell'intorno di x_0 per comprendere la struttura di X nell'intorno di γ_0. Per quanto riguarda il terzo punto, si cercherà di analizzare i vincoli che la topologia di M impone alla ripartizione delle traiettorie critiche. Ma si cercherà soprattutto di analizzare il comportamento *asintotico* delle traiettorie non critiche cosí come la *stabilità* delle traiettorie. Intuitivamente una traiettoria è stabile se ogni traiettoria generata da una condizione iniziale prossima a uno dei suoi punti le resta indefinitamente prossima. Questa stabilità è essenziale per le applicazioni perché è quella che assicura che il determinismo matematico ideale del campo ha un senso concreto (cfr. l'articolo ♦Stabilità/instabilità♦). Esistono infatti dei sistemi in cui tutte le traiettorie sono instabili e che dunque sono sistemi *matematicamente deterministici* e tuttavia *concretamente stocastici*.

Infine si cercherà di applicare allo studio qualitativo dei sistemi dinamici il paradigma catastrofista sviluppato per lo studio delle applicazioni differenziabili (cfr. l'articolo ♦Locale/globale♦). Si cercherà in particolare di caratterizzare geometricamente la *stabilità strutturale* dei campi (da non confondere con la stabilità delle traiettorie), di studiare la ripartizione dei campi stabili tra i campi qualunque cosí come le possibilità di passare da un tipo di campo stabile a un altro attraversando campi instabili (teoria della biforcazione). Si tratta di un programma immenso, di una tremenda complessità, che si trova in parte esposto negli articoli «Differenziale» e «Stabilità/instabilità».

5. *Meccanica hamiltoniana.*

Tra le equazioni differenziali, quelle che provengono dalla meccanica classica sono molto particolari. In questo caso il sistema è rappresentato da un numero finito di coordinate generalizzate $q_1, ..., q_n$ che percorrono uno spazio (detto spazio delle configurazioni) M e dai momenti $p_1, ..., p_n$ associati. Lo spazio delle fasi del sistema è allora il fibrato cotangente T^*M di M. Come è stato mostrato da Hamilton, le equazioni differenziali del secondo ordine (del tipo dell'equazione di Newton $f = m\gamma$) che regolano l'evoluzione del sistema, sono allora traducibili in un formalismo *canonico*. Se $H(q, p)$ è l'energia del sistema, energia indipendente dal tempo, e se il sistema è conservativo (non dissipativo, senza attrito), le equazioni di evoluzione sono date dalle celebri formule di Hamilton ($dq/dt = \partial H/\partial p$, $dp/dt = -\partial H/\partial q$). Ciò implica non soltanto la conservazione dell'energia, ma la conservazione del *volume* dello spazio delle fasi (teorema di Liouville). Questo fatto è fondamentale perché implica l'impossibilità per un sistema hamiltoniano di possedere attrattori e, con ciò stesso, l'esistenza di forti proprietà di *ergodicità*.

Essendo conservativi, i sistemi hamiltoniani sono strutturalmente *instabili*. Si pone dunque il problema di sapere come si stabilizzano quando si introduce della dissipazione. D'altra parte, se ci si limita ai campi hamiltoniani, alcuni campi diventano stabili. Ma non tutti. Tra i campi instabili restano in particolare i campi detti *integrabili* che possiedono un numero massimale di integrali primi indipendenti. Si pone dunque il problema di sapere come un campo integrabile può stabilizzarsi all'interno della classe dei sistemi hamiltoniani. È la teoria delle perturbazioni (cfr. l'articolo «Stabilità/instabilità»).

Si noterà infine che il formalismo hamiltoniano consiste nel pensare la meccanica in analogia con l'ottica geometrica. Ora, è noto che in ottica i raggi luminosi non sono nient'altro che le *geodetiche* per una struttura riemanniana che esprime le proprietà ottiche del mezzo. Succede la stessa cosa in meccanica. Le traiettorie definite localmente con le equazioni di Hamilton possono anche essere definite *globalmente* a partire da un principio variazionale detto principio di minima azione (cfr. l'articolo «Variazione»). Si tratta in questo caso di una delle più spettacolari equivalenze tra determinazione locale e determinazione globale.

6. *Conclusione.*

Queste poche elementari generalità sulla dialettica del locale e del globale rinviano evidentemente soltanto ad alcuni di questi aspetti. Per maggior completezza, occorrerebbe parlare in particolare: 1) dell'intervento di questa dialettica in aritmetica e in teoria dei corpi di classe: si tratta in questo caso infatti di un esempio particolarmente sorprendente, profondo e operatorio di transfert di una concettualità dal suo dominio di origine a un dominio che, apparentemente, le è estraneo (si veda l'articolo ♦Locale/globale♦); 2) del ruolo considerevole che hanno le considerazioni qui appena abbozzate nell'analisi funzionale e in particolare nella teoria delle equazioni alle derivate parziali cosí fondamentale per la fisica (cfr. gli articoli ♦Differenziale♦ e ♦Funzioni♦); 3) delle tecniche di localizzazione e di globalizzazione in algebra commutativa, tecniche fondamentali per la geometria algebrica.

Si spera che queste osservazioni siano sufficienti a mostrare che l'opposizione locale/globale possiede un eminente valore categoriale, costituendo uno dei punti focali di ciò che Lautman chiamava l'*unità* (concettuale) della matematica. [J. P.].

Appelgate, H., e Tierney, M.

[1966-67] *Categories with Models*, in *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, Springer, Berlin - New York 1969, pp. 156-244.

Cerf, J.

1970 *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Presses Universitaires de France, Paris.

Derrida, J.

1962 Prefazione alla trad. franc. di E. Husserl, *Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentional-historisches Problem*, Presses Universitaires de France, Paris.

Ellison, W. J., e Ellison, F.

1978 *Théorie des nombres*, in J. Dieudonné e altri, *Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900)*, vol. I, Hermann, Paris, pp. 165-334.

Godement, R.

1964 *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris.

Goodwin, B., e Webster, J.

1982 *The origin of species: a structuralist approach*, in «Journal of Social Biology Structure», V, pp. 15-47.

Gramain, A.

1971 *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, Paris.

Guillaume, P.

1937 *La psychologie de la forme*, Flammarion, Paris (trad. it. Editrice Universitaria, Firenze 1963).

Hatcher, A., e Wagoner, J.

1973 *Pseudo-isotopies of compact manifolds*, in «Astérisque», n. 6.

Lautman, A.

[1935-46] *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Union générale d'éditions, Paris 1977.

Milnor, J. W.

1963 *Morse Theory*, Princeton University Press, Princeton N.J.

1965 *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton University Press, Princeton N.J.

Piaget, J.

1968 *Le structuralisme*, Presses Universitaires de France, Paris 1968[2] (trad. it. Il Saggiatore, Milano 1968).

Serre, J.-P.

1970 *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris.

Smale, S.

1961 *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*, in «Annals of Mathematics», LXXIV, pp. 361-406.