

## Annexe au débat Nieuwentijt / Leibniz

Jean Petitot  
CAMS, EHESS, Paris

Juin 1995

Considérons la parabole d'équation  $x = y^2$ . Leibniz fait la déduction suivante pour le calcul de la tangente :

$$\begin{aligned}x + dx &= (y + dy)^2 = y^2 + 2ydy + (dy)^2 , \\dx &= 2ydy + (dy)^2 \text{ car } x = y^2 , \\ \frac{dx}{dy} &= 2y + dy \approx 2y .\end{aligned}$$

Il élimine donc  $dy$  parce que c'est un infinitésimal et traite l'égalité comme une équivalence.

En revanche Nieuwentijt passe directement de

$$dx = 2ydy + (dy)^2$$

à

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

sans passer par

$$\frac{dx}{dy} = 2y + dy$$

car pour lui on a  $dy \neq 0$  mais  $(dy)^2 = 0$  à cause de la nilpotence de  $dy$ . Il traite donc l'égalité comme une égalité stricte.

Leibniz admet ainsi le principe d'élimination des infinitésimales d'ordre supérieur mais sans changer les règles algébriques (symboliques) du calcul. Pour ce faire, il élargit le concept d'égalité (ce sera l'égalité des parties standard dans les modèles non standard). Pour lui, si une quantité  $dy$  est  $\neq 0$ , il est par conséquent impossible que l'on puisse avoir  $(dy)^2 = 0$ .  $(dy)^2$  est simplement une quantité "infinitement infinitésimale" (*infinites infinite parvae*), i.e. qui reste infinitésimale quand on la multiplie par un infiniment grand du premier ordre. Elle ne redevient finie que lorsqu'on la multiplie par un infiniment grand du deuxième ordre (*numerum infinites infinitum*).

Nieuwentijt considère quant à lui que le problème du calcul différentiel à la Leibniz est qu'une infinitésimale ne peut être "ni imaginée, ni construite,

ni représentée” (*quas quatenus infinite parva sunt, nulla imaginatio, nulla constructio, nullum schema capit*). Les images leibniziennes n’autorisent en rien d’attribuer aux infinitésimales, qui sont “inassignables”, les propriétés des quantités finies qui sont, elles, “assignables”. Nieuwentijt refuse donc le principe de transfert leibnizien.

Un bon exemple des difficultés rencontrées est donné par le “paradoxe de Nieuwentijt” démontrant que toute courbe est une droite !

Soit par exemple l’hyperbole

$$2rx + x^2 = y^2 .$$

( $r$  étant une constante). En différentiant on trouve

$$2rdx + 2xdx = 2ydy .$$

Mais par ailleurs on a aussi

$$2r(x + dx) + (x + dx)^2 = (y + dy)^2 .$$

D’où, en développant et en éliminant,

$$(dx)^2 = (dy)^2 .$$

Pour Nieuwentijt cela ne pose aucun problème puisque

$$(dx)^2 = (dy)^2 = 0 .$$

Mais pour Leibniz, selon Nieuwentijt, cela devrait en poser un car si  $(dx)^2 = (dy)^2 \neq 0$  et si les règles classiques sont applicables alors

$$dx = \pm dy$$

et donc, par intégration,

$$x = \pm y + \text{constante} .$$

Selon Jakob Hermann (1700) l’erreur de Nieuwentijt vient du fait qu’il confond l’égalité stricte  $=$  et l’égalité à une infinitésimale près  $\approx$ . En fait on n’a pas  $(dx)^2 = (dy)^2$ , mais seulement

$$(dx)^2 \approx (dy)^2 .$$

Nieuwentijt présuppose que si l’on enlève des quantités égales à des quantités égales on obtient des quantités égales. Mais c’est faux dans le calcul leibnizien où l’on mélange en fait  $=$  et  $\approx$ . Selon Jakob Hermann, la bonne démarche est de développer

$$2r(x + dx) + (x + dx)^2 = (y + dy)^2 \text{ (égalité stricte),}$$

d’y éliminer  $(dx)^2$  et  $(dy)^2$ , puis d’en tirer l’égalité large

$$2rdx + 2xdx \approx 2ydy .$$

On voit que le conflit entre Leibniz et Nieuwentijt est un conflit entre deux options concernant l’égalité et le principe de transfert. Comme on ne peut pas avoir les deux en même temps il y a une alternative.

<b>Leibniz</b>	<b>Nieuwentijt</b>
Changer l'égalité	Garder l'égalité
Garder les règles algébriques	Changer les règles algébriques