Les infinitésimales comme éléments nilpotents: actualité du débat Nieuwentijt / Leibniz *

Jean Petitot
CAMS, EHESS, Paris

Juin 1995

1 Le conflit Nieuwentijt / Leibniz

J'aimerais faire quelques remarques sur la polémique de 1694-1696 ayant opposé Leibniz au théologien calviniste hollandais Bernhard Nieuwentijt. Nieuwentijt refusait les infinitésimales d'ordre supérieur car il concevait les infinitésimales comme des indivisibles et n'acceptait que des égalités strictes. Il refusait donc l'idée que l'on puisse avoir à la fois $y = x$ et $y = x + dx$. Sa thèse était que pour toute infinitésimale dx on a à la fois $dx \neq 0$ et $(dx)^2 = 0$. Dans ses critiques ironiques au "Sapientissimo Autore", Leibniz rejette ce paradoxe comme une absurdité pour la raison qu'un infiniment petit du deuxième ordre pouvant être multiplié par un infiniment grand du deuxième ordre en donnant un résultat non nul, il ne saurait être strictement nul. Autrement dit, même s'il admet que l'on puisse négliger les infiniment petits d'ordre supérieur, Leibniz refuse d'admettre qu'ils puissent être traités comme des grandeurs strictement nulles. Les infinitésimales constituent pour lui des grandeurs inversibles et ne peuvent pas, par conséquent, être des diviseurs de 0.

La position de Leibniz vient de ce que, pour lui, l'algèbre des grandeurs normales (archimédiennes) augmentée, d'un côté, des grandeurs infinitésimales et, d'un autre côté, des grandeurs infinies possède une structure algébrique de corps qui étend celle du corps $\mathbb{R}$ des réels. Une telle extension doit respecter le principe de permanence des propriétés algébriques des opérations

*Colloque de Cerisy *Actualité de Leibniz : les deux labyrinthes*, (D. Berlioz, F. Nef), 15-22 juin 1995. Paru dans *Studia Leibnitiana Supplementa*, 34 (1999) 567-575, Stuttgart, Franz Steiner.

numériques dans le passage du fini à l'infini. C'est ce point de vue : extension de $\mathbb{R}$ par des infinitésimales et leurs inverses qui a été formalisé, on le sait, par l'Analyse non standard.

2 L'Analyse non standard et Leibniz

Dans un modèle non standard à la Robinson de l'analyse réelle, on construit (en utilisant des techniques de théorie des modèles comme celle des ultrapuissances) ce que l'on appelle une extension *élémentaire* $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^*$ du corps $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un corps non archimédien $\mathbb{R}^*$, de cardinal strictement supérieur à celui de $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{R}$ comme sous-corps et possédant exactement la *même* théorie que $\mathbb{R}$, et cela dans le langage formel très riche $L_{\mathbb{R}}$ où il existe un nom de constante pour *chaque* élément de $\mathbb{R}$. C'est dire que $\mathbb{R}^*$, tout en étant non isomorphe à $\mathbb{R}$ (puisque de cardinal supérieur) en est néanmoins *indiscernable.* Dans $\mathbb{R}^*$ il existe un "halo" $\mu(x)$ — une "monade" selon la terminologie de Luxemburg — d'infinitésimales autour de chaque point x de $\mathbb{R}$. x est le seul élément standard de sa monade. Tous les autres éléments de $\mu(x)$ sont non standard. L'invariance par translation implique que si μ est la monade de 0 on a $\mu(x) = x + \mu$. Le symbole dx est un symbole de variable pour μ et l'équivalence $x + dx \simeq x$ signifie que x et $x + dx$ ont la même partie standard. Autrement dit, les paradoxes des infinitésimales leibniziennes comme "fictions bien fondées" ou "fondées en réalité" se résolvent en disant qu'il n'y a pas d'infinitésimale standard non nulle et que les infinitésimales non nulles sont non standard et indiscernables de 0. Leurs inverses sont des infiniments grands.[1]

Chez Leibniz, les infinitésimales conservent donc le statut de grandeurs. Ce n'est plus le cas chez Nieuwentijt. C'est sans doute la raison principale pour laquelle il a été si sévèrement jugé, d'abord par Leibniz, qui dans une lettre de Décembre 1696 à Johann Bernouilli le met au ban comme un hérétique, puis par Johann Bernouilli (qui l'accuse de déformer la concep-

[1] Pour des précisions sur l'Analyse non standard robinsonienne, cf. entre autres Robinson, A., *Selected Papers* (Keisler H.J., Körner S., Luxemburg W.A.J., Young A.D., eds.), New Haven, Yale University Press, 1979 ; *La Mathématique non-standard* (Barreau H., Harthong J., eds.), Paris, Editions du CNRS, 1989 ; Petitot, J., "Infinitesimale", *Enciclopedia Einaudi*, VII, 443-521, Einaudi, Turin, 1979 ; "Rappels sur l'Analyse non standard", *La Mathématique non standard*, 187-209, Editions du CNRS, Paris, 1989 ; "Continu et Objectivité. La bimodalité objective du continu et le platonisme transcendantal", *Le Labyrinthe du Continu*, (J.-M. Salanskis, H. Sinaceur éds.), 239-263, Springer, Paris, 1992. Pour l'approche syntaxique d'Edward Nelson, cf. Nelson, E., "Internal Set Theory", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83, 6, 1977 ; Salanskis, J.-M., *L'Herméneutique formelle : l'Infini - le Continu - l'Espace*, Paris, Editions du CNRS, 1991.

tion leibnizienne) et Jacob Hermann. Pour ces savants, ses remarques sur les "fondements de la nouvelle analyse" dans ses traités de 1694 *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia & Calculi differentialis usum in resolvendibus problematibus geometricis* et de 1696 *Analysis infinitorum seu curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae* sont tout simplement des "tissus d'absurdités". Leibniz propose une *Responsio* dans les *Acta Eruditorum* de juillet 1695.[2] Nieuwentijt y réplique en 1696 par ses *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia & responsio ad Virum Nobilissimum G.G. Leibnitium.* Mais le conflit resta ouvert.

3 L'idée d'élément nilpotent chez Nieuwentijt

Et pourtant, comme l'a fort justement souligné Giulio Giorello dans son remarquable ouvrage sur le calcul infinitésimal *Lo Spettro e il Libertino*,[3] Nieuwentijt "l'hérétique" avait remarquablement mis le doigt sur un certain statut *algébrique* de l'infinitésimale, celui d'élément *nilpotent*.

Dans une algèbre A, un élément $x \neq 0$ est dit nilpotent s'il existe n tel que $x^n = 0$. x est par conséquent un diviseur de 0. Nieuwentijt élargit $\mathbb{R}$ à une algèbre A avec éléments nilpotents. Celle-ci ne peut plus être un corps (les nilpotents ne sont pas inversibles). Les infinitésimales changent de statut : ce ne sont plus des grandeurs non archimédiennes inversibles.

Le fait remarquable, que j'aimerais souligner et qui montre à quel point une histoire des idées doit être à la fois internaliste et récurrente, est que c'est précisément la définition des infinitésimaux comme éléments nilpotents qui a été retenue par la géométrie algébrique moderne à partir des travaux fondamentaux d'Alexandre Grothendieck. Pourquoi ? Parce qu'en géométrie algébrique on doit pouvoir travailler sur un corps de base K *quelconque* et K n'a évidemment aucune raison de posséder les propriétés topologiques et transcendantes de $\mathbb{R}$. Comment donc, dans ce cadre très général, définir les phénomènes infinitésimaux ? Comment définir les structures infinitésimales purement *algébriquement* (i.e. indépendamment des structures transcendantes de l'analyse) ?

[2] *Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Niewentiit circa Methodum differentialem seu infinitisimalem motas* , GM.

[3] Giorello G., *Lo Spettro e il Libertino*, Mondadori, Milan, 1985.

4 Rudiments de géométrie algébrique

Il m'est évidemment impossible d'introduire ici à la géométrie algébrique. Je me borne donc aux quelques intuitions suivantes.

La première idée est celle de la dualité entre espaces et fonctions. Traiter $\mathbb{R}^n$ comme une variété algébrique c'est le considérer comme l'espace de base sur lequel sont définis les polynômes $P(X_1, ..., X_n)$ de n variables X_i à coefficients dans $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ est donc l'espace associé à la $\mathbb{R}$-algèbre de polynômes :

$$\mathbb{R}\left[X_1, \ldots, X_n\right] = A\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Une variété algébrique V de $\mathbb{R}^n$ est le lieu des 0 de certains polynômes $(f_1, \ldots,\ f_p) \in A(\mathbb{R}^n)$. Mais c'est en fait *l'idéal* I des (f_j) qui est associé à V car si les f_i s'annulent sur V, il en va de même de toute combinaison linéaire $\sum g_i f_i$ à coefficients dans $A(\mathbb{R}^n)$. On a donc une correspondance $V \Leftrightarrow I$. L'anneau des polynômes sur V, i.e. des restrictions à V des polynômes sur $\mathbb{R}^n$, s'identifie alors au quotient $A(I) = \mathbb{R}\left[X_1, ..., X_n\right]/I$, i.e. à ce que devient $\mathbb{R}\left[X_1, ..., X_n\right]$ lorsque l'on annule les éléments de I. En effet deux polynômes P et $Q = P + R$ avec $R \in I$ sont égaux sur V puisque $R \equiv 0$ sur V.

Un point $(a_1, ..., a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ correspond à l'idéal $\mathfrak{M} = (X_1 - a_1,\ ...,\ X_n - a_n)$ qui est un idéal *maximal*. On peut donc récupérer l'espace de base $\mathbb{R}^n$ à partir de l'algèbre des fonctions algébriques (des polynômes) $\mathbb{R}\left[X_i\right]$. En fait, pour avoir une bonne correspondance variétés $\Leftrightarrow$ algèbres, il faut se placer sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes qui est algébriquement clos. Sur $\mathbb{C}$, il existe une correspondance biunivoque entre points et idéaux maximaux, entre les variétés V et les idéaux I "radiciels" (i.e. égaux à l'intersection des idéaux maximaux qui les contiennent).

5 Algèbres avec nilpotents

Comment interviennent les éléments nilpotents dans un tel contexte ? Pour le voir, reprenons l'exemple élémentaire donné par Jean Dieudonné dans son cours d'introduction à la géométrie algébrique.[4] Considérons la parabole P (cf. figure 1) d'équation $y^2 - x = 0$ et sa projection π sur l'axe des x (noté Δ).

- La parabole P est associée à l'algèbre quotient :

$$A(P) = \mathbb{R}\left[X, Y\right]/(Y^2 - X)\ ;$$

- L'axe des x, Δ, est associé à $A(\Delta) = \mathbb{R}[X]$;
- La projection $\pi : P \to \Delta$ est associée à l'injection :

[4] Dieudonné J., *Cours de Géométrie algébrique*, Presses Universitaires de France, 1974.

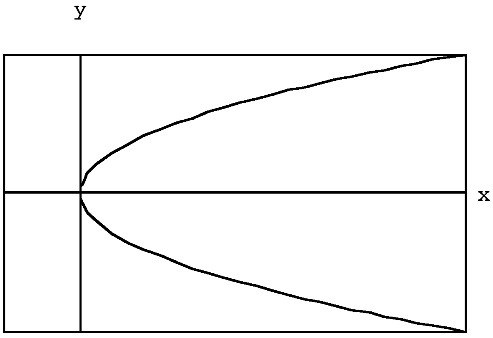

Figure 1: La parabole P.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X,Y]/(Y^2-X) \\ X & \mapsto & X \end{array}$$

Soit alors ξ un point de l'axe des x. Il correspond à l'idéal maximal $\mathfrak{M} = (X - \xi)$ de $\mathbb{R}[X]$. La fibre $\pi^{-1}(\xi)$ au-dessus de ξ correspond quant à elle à l'algèbre quotient :

$$\mathbb{R}[Y]/(Y^2 - \xi)$$

obtenue en faisant $X = \xi$ dans l'algèbre $\mathbb{R}[X,Y]/(Y^2 - X)$.[5]

• Si $\xi > 0$, c'est la somme de deux corps isomorphes à $\mathbb{R}$, ce qui correspond au fait que la fibre $\pi^{-1}(\xi)$ est composée de deux points distincts $y = \pm\sqrt{\xi}$.

• Si $\xi < 0$, le polynôme $(Y^2 - \xi)$ est irréductible sur $\mathbb{R}$, ce qui correspond au fait que la fibre $\pi^{-1}(\xi)$ est vide.

• Mais si $\xi = 0$, l'algèbre de la fibre $\pi^{-1}(\xi)$ devient $\mathbb{R}[Y]/(Y^2)$. Y y devient donc nilpotent, phénomène qui exprime le fait que les deux points de la fibre sont devenus infiniments voisins.

Comme le dit Jean Dieudonné en commentant cette idée de base d'Alexandre Grothendieck [6] :

> "D'une façon générale, c'est dans les éléments nilpotents que la théorie des schémas[7] trouve l'équivalent algébrique des phénomènes infinitésimaux".

Pour la géométrie algébrique sur un corps K quelconque, l'algèbre avec nilpotents

[5] Si $X = \xi$, $\mathbb{R}[X,Y] = \mathbb{R}[Y]$ car $\xi \in \mathbb{R}$.

[6] Dieudonné J., *op. cit.* I, 202.

[7] i.e. la géométrie algébrique moderne.

$$K\left[X\right]/(X^2) = K \oplus \epsilon K$$

est l'algèbre qui décrit "l'espace" constitué de deux points infiniment voisins. C'est à partir d'elle que l'on peut définir les vecteurs tangents à une variété algébrique. Elle exprime, ce qu'avait déjà admirablement bien vu Nieuwentijt, l'approximation linéaire.

6 La géométrie différentielle synthétique

Mais ce qui est encore plus remarquable est que le point de vue à la Grothendieck sur les infinitésimaux comme nilpotents est en fait repassé de la géométrie algébrique à la géométrie différentielle à partir d'une idée due à William Lawvere en 1967. C'est ainsi que s'est développée ce que l'on a appelé la *géométrie différentielle synthétique*, point de vue qui *unifie* les infinitémisales transcendantes à la Leibniz et les infinitésimales nilpotentes à la Nieuwentijt. Il s'agit là d'une approche technique qui reformule la géométrie différentielle dans le cadre de la théorie des catégories et plus précisément de ce que l'on appelle *la théorie des topoï*. Je me borne à indiquer comment les infinitésimaux nilpotents y interviennent.[8]

Qu'est-ce qu'un ensemble algébrique, un "locus algébrique" au sens de Demazure, défini par une équation comme celle du cercle :

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\} \text{ ?}$$

C'est, étant donnée une structure algébrique A où cette expression symbolique a un sens — en l'occurrence une $\mathbb{R}$-algèbre commutative avec élément unité — l'ensemble :

$$\mathbb{S}^1(A) = \left\{ (a, b) \in A^2 \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, on a

$$f(a)^2 + f(b)^2 = f(a^2 + b^2) = f(1) = 1,$$

ce qui permet de définir une application :

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{S}^1(f) : & \mathbb{S}^1(A) & \to & \mathbb{S}^1(B) \\ & (a, b) & \mapsto & (f(a), f(b)) \end{array}$$

[8] Cf. Kock, A., *Synthetic Differential Geometry*, LMS Lecture Notes Series 51, Cambridge University Press, 1981 ; Moerdijk I., et Reyes G., *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, 1991, Springer.

Autrement dit, $\mathbb{S}^1(A)$ covarie correctement lorsque l'on transforme A par des morphismes de structure. On dit que $\mathbb{S}^1$ est un *foncteur* de la catégorie des anneaux dans la catégorie des ensembles.

Dans cette optique, les infinitésimaux nilpotents à la Nieuwentijt correspondent au foncteur :

$$D(A) = \left\{ a \in A \,\middle|\, a^2 = 0 \right\} \ .$$

Et même si dans $\mathbb{R}$ il n'existe pas de nilpotents ($\mathbb{R}$ est un corps), ce foncteur reste bien défini.

Bref, les $\mathbb{R}$-algèbres A qui sont à la base de la géométrie algébrique sont caractérisées par le fait que les polynômes y sont fonctoriellement interprétables : à tout polynôme $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on peut associer un morphisme $A(p) : A^n \to A^m$.

L'idée de base de la géométrie différentielle synthétique est de considérer, à la place des $\mathbb{R}$-algèbres où les polynômes sont interprétables, des $\mathbb{R}$-algèbres dites *différentiables* (C^∞-algèbres) où *toutes les fonctions différentiables* (dites C^∞ : elles sont beaucoup plus générales que les polynômes) sont interprétables. Ce sont donc des structures où l'on peut interpréter fonctoriellement toute fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ par un morphisme $A(f) : A^n \to A^m$. Les morphismes $\varphi : A \to B$ de C^∞-algèbres sont évidemment les morphismes de $\mathbb{R}$-algèbres qui préservent les interprétations des fonctions C^∞, c.a.d qui rendent commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} & A^n & \xrightarrow{\varphi^n} & B^n & \\ A(f) & \downarrow & & \downarrow & B(f) \\ & A^m & \xrightarrow{\varphi^m} & B^m & \end{array}$$

On obtient ainsi (évidemment) les variétés différentiables M car les $\mathbb{R}$-algèbres $C^\infty(M)$ des fonctions différentiables sur les variétés différentiables sont des C^∞-algèbres. On obtient également les quotients $C^\infty(M)/I$. Mais on obtient aussi d'autres espaces plus généraux.

Il est alors facile de montrer que la $\mathbb{R}$-algèbre avec nilpotents :

$$\mathbb{R}[\epsilon] = \mathbb{R}\left[X\right]/(X^2) = \mathbb{R} \oplus \epsilon\mathbb{R}$$

est une C^∞-algèbre. Elle s'obtient en effet comme quotient :

$$\mathbb{R}[\epsilon] = C^\infty\left(\mathbb{R}\right)/(x^2) \ .$$

C'est ce que l'on appelle une *algèbre de Weil.*

Soit alors $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application C^∞. Comment s'interprète-t-elle dans $\mathbb{R}[\epsilon]$? Il est facile de montrer, en utilisant précisément la nilpotence de ϵ, que la formule est la suivante :

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{R}[\epsilon][f]: & \mathbb{R}[\epsilon]^n & \to & \mathbb{R}[\epsilon] \\ & (a_1 + \epsilon b_1, \ldots, a_n + \epsilon b_n) & \mapsto & \begin{array}{c} f(a_1, ..., a_n)+ \\ \epsilon \left(\sum\limits_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n) b_i \right) \end{array} \end{array}$$

On remarquera que l'on retrouve ainsi la formule donnant le développement de Taylor au premier ordre de la fonction f au voisinage de $a = (a_1,\ ...,\ a_n)$.

L'espace $\mathbf{D}$ correspondant à $\mathbb{R}[\epsilon]$ est donc l'espace des infinitésimales du premier ordre. Pour disposer des infinitésimales d'ordre k, il suffit de considérer l'algèbre de Weil qu'est la C^∞-algèbre :

$$\mathbb{R}[X] / (X^{k+1}) \cong C^\infty(\mathbb{R}) / (x^{k+1}) \ .$$

On retrouve alors, sous le nom de ce que l'on appelle *l'axiome de Kock-Lawvere*, la thèse de Nieuwentijt que toute courbe infinitésimale est une ligne droite :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbf{D}}\ \exists!(x, y) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})\ \forall z \in \mathbf{D}\ \ (\alpha(z) = x + yz) \ .$$

7 Retour aux infinitésimales leibniziennes

Mais l'on peut définir aussi facilement d'autres infinitésimales et en particulier les infinitésimales *leibniziennes*. Si f est une application différentiable, on appelle intuitivement son *germe* en un point a (la vraie définition est assez technique) la restriction de f à des voisinages ouverts aussi petits que l'on veut de a. En termes d'analyse non standard à la Leibniz-Robinson cela revient à considérer la restriction de f à la "monade" de a i.e. à son voisinage infinitésimal. Soit alors $\mathfrak{M}_0$ l'idéal des $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ dont le germe en l'origine 0 s'annule. La $\mathbb{R}$-algèbre :

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}) / \mathfrak{M}_0$$

des germes en l'origine des $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est une C^∞-algèbre. Elle correspond à un espace Δ qui peut s'interpréter comme un voisinage infinitésimal de l'origine.

Quant aux infinitésimales inversibles elles correspondent à la C^∞-algèbre :

$$C^\infty(\mathbb{R} - \{0\}) / \mathfrak{M}_0 \,|(\mathbb{R} - \{0\})$$

où $\mathfrak{M}_0\,|(\mathbb{R}-\{0\})$ représente la restriction des germes en 0 aux voisinages de 0 épointés de 0. De façon générale, les germes en 0 de fonctions C^∞ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sont représentables par des fonctions $\tilde{f}:\Delta(n)\to\mathbb{R}$ où $\Delta(n)$ est un *espace infinitésimal* (la monade de 0 dans $\mathbb{R}^n$ au sens de l'analyse non standard).

On peut ainsi développer rigoureusement et formellement la géométrie différentielle avec des infinitésimaux *à la fois* nilpotents et inversibles. Cette synthèse Leibniz-Nieuwentijt permet de rendre parfaitement corrects les raisonnements intuitifs (synthétiques) à la Lie-Cartan. On peut les appliquer à tous les aspects de la géométrie différentielle : fibrés tangents, champs de vecteurs, formes différentielles, cohomologie de de Rham, connexions, courbure, torsion, théorie de Morse, théorie des singularités, etc.

8 Infinitésimales intuitionnistes

Une dernière remarque (peut-être un peu cryptique) pour conclure. A partir de ces espaces généralisant les variétés différentiables on peut construire plus ou moins naturellement des structures catégoriques que l'on appelle des *topoï*. Or la structure de topos est précisément la structure catégorique nécessaire pour que l'on puisse interpréter en termes *d'objets* les *symboles* d'un langage formel (il ne s'agit pas de la dénotation d'un symbole mais de son typage par un type d'objet). C'est ce que l'on appelle la logique interne d'un topos. Il s'agit là d'une grande découverte de William Lawvere.

La logique interne du topos de la géométrie différentielle synthétique n'est pas classique mais intuitionniste. La double négation n'y est donc pas l'identité. Jacques Penon a montré la formule remarquable suivante [9] :

$$\Delta=\{x\in\mathbb{R}\,|\neg\neg x=0\}\,, i.e. \Delta=\neg\neg\{0\}\,.$$

Autrement dit, les paradoxes logiques des infinitésimales sont en dernière instance liés au fait que le concept d'infinitésimale est contradictoire avec la logique classique : si la double négation vaut pour l'identité alors $\neg\neg\{0\}=0$ et il n'existe pas d'infinitésimale non nulle. Mais le concept d'infinitésimale est sain du point de vue de la logique intuitionniste.

[9] Penon, J., *De l'infinitésimal au local*, Thèse, Université de Paris VII, 1985.