Séminaire de Philosophie et Mathématiques, ENS, 4 avril 2022
***
Approche lautmanienne de la notion de déploiement universel

Jean Petitot
CAMS (EHESS), Paris

Pour Lautman: "Refaire le Timée" (1987), *Revue d'Histoire des Sciences*.
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01130394v2

Le n°37 de *Philosophiques* (2010) (Jean-Pierre Marquis, ed.) consacré à Lautman

René Thom, 1956. "Les Singularités des applications différentiables", *Annales de l'Institut Fourier* + Notes d'Harold Levine sur le cours de 1959 à Bonn.

John Mather, 1968-1971. "Stability of C^∞ Mappings", I–VI.

Alain Chenciner, 1973. "Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique", *Séminaire Bourbaki*, 424.
1980. "Singularités des fonctions différentiables", *Encyclopædia Universalis*.

"Handbook of Geometry and Topology of Singularities" (Préface Bernard Teissier, eds : José Luis Cisneros Molina, Lê Dũng Tráng , José Seade, eds), Springer.

Compilation http://jeanpetitot.com/ArticlesPDF/Petitot_Sing.pdf

Idées dialectiques, compréhension et schémas de genèse

L'idée centrale d'Albert Lautman est qu'une intuition intellectuelle est a l'œuvre dans les mathématiques, et que, dans le développement historique de leurs théories,celles-ci actualisent une "dialectique du concept" (en un sens "platonicien"), dialectique "abstraite et supérieure"developpant leur unité, dévoilant leur réel et déterminant leur valeur philosophique.

C'est en tant que *structurales*, dans le mouvement autonome et historique d'élaboration de leurs théories, que les mathématiques réalisent des Idées dialectiques.

À travers ces Idées elles paraîssent

> *"raconter, mêlée aux constructions auxquelles s'intéresse le mathématicien, une autre histoire (...) faite pour le philosophe" (p. 28)*
> *"Nous entendons par Idées des schémas de structure." (p. 204)*

Ceux-ci établissent, comme dans toute dialectique, des liaisons spécifiques entre notions contraires : local/global, intrinsèque/extrinsèque, essence/existence, continu/discontinu/discret (triade), fini/infini, etc. et

> *"la compréhension des Idées de cette Dialectique se prolonge nécessairement en genèse de théories mathématiques effectives." (p. 203)*

De Platon à Holton

Il y a une très longue histoire de thèses analogues.

1. Platon. Cf. le n°37 de *Philosophiques*.
2. La dialectique tanscendantale de Kant et les antinomies dont la "problématicité" a été bien analysée par Deleuze.
3. Les "dyades antithétiques" que sont les themata de Gerald Holton dans *The Scientific Imagination* (1978).
4. Les "apories fondatrices" de Thom. L'exposé de Thom au colloque de Cerisy *Logos et théorie des catastrophes* (1982) s'intitulait "Thèmes de Holton et apories fondatrices".

L'Idée dialectique de stabilité structurelle

L'Idée dialectique de stabilité structurelle s'incarne dans le schéma de genèse suivant :

Classe d'entités $X \in \mathfrak{X}$. Double structure sur $\mathfrak{X}$:

1. *topologie* $\mathcal{T}$,
2. *classification* par une *relation d'équivalence* : *type qualitatif* des entités X.

Définition. – *Soit* $X \in \mathfrak{X}$. *On dit que l'entité* X *est* structurellement stable *si toute entité* Y *assez voisine de* X *au sens de la topologie* $\mathcal{T}$ *est équivalente à* X, *i.e.* si la classe d'équivalence $\widetilde{X}$ contient un voisinage ouvert (au sens de $\mathcal{T}$) de X.

Soit $U_{\mathfrak{X}}$ le sous-ensemble *ouvert* de $\mathfrak{X}$ constitué des $X \in \mathfrak{X}$ structurellement *stables* et $K_{\mathfrak{X}}$ le sous-ensemble *fermé* de $\mathfrak{X}$ constitué des $X \in \mathfrak{X}$ structurellement *instables*.

$K_{\mathfrak{X}}$ est une "morphologie discriminante" qui sépare les X stables avec leurs voisinages ouverts dans leurs classes d'équivalence des X instables. Elle *géométrise la classification* interne à $\mathfrak{X}$.

La stabilité structurelle est par définition une propriété relationnelle *extrinsèque* de X. Mais nous verrons que dans certains cas elle peut être définie *intrinsèquement*.

Lautman : propriétés intrinsèques et propriétés induites

Lautman a beaucoup approfondi ce thème concernant les cas où

> *"les propriétés géométriques de relation [entre une entité et un espace ambiant] se laissent (...) exprimer en propriétés algébriques intrinsèques" (p. 58).*

et où il y a la possibilité

> *"de ramener les relations qu'un être mathématique soutient avec le milieu ambiant, en propriétés d'inhérence caractéristiques de cet être" (p. 48),*

Déformations

Pour étudier le positionnement d'une entité X *instable* dans $\mathfrak{X}$, on peut "sonder" le voisinage de X au moyen de *familles paramétrées* $(X_w)_{w \in W}$ définies par des champs $\sigma : W \to \mathfrak{X}$.

Le fermé $K_{\mathfrak{X}}$ induit alors par image réciproque un fermé K_W dans l'espace externe W. D'où autant de "sections" de dimension finie de $K_{\mathfrak{X}}$.

C'est ce schéma de genèse "topologie + équivalence" incarnant l'idée dialectique "instabilité/stabilité structurelles" que Thom a mis à la base d'une *phénoménologie des morphologies naturelles* : transitions de phases, phénomènes critiques et ruptures de symétries, caustiques, flambage élastique, fronts d'ondes, embryogenèse, etc.

Soit S un système. On fait les hypothèses :

(i) Processus interne X qui définit les *états internes* de S.

(ii) Définition *globale* des états internes de S. Ils s'entre-déterminent par détermination réciproque.

(iii) Instance de sélection I de l'état interne *actuel*.

(iv) S est *contrôlé* par des $w \in W$. *Espace externe*. X est un X_w.

S est décrit par $\sigma : W \rightarrow \mathfrak{X}$ des X_w et par l'instance de sélection I.
$S = (W, \mathfrak{X}, \sigma, I)$.

$K_W = \sigma^{-1}(K_{\mathfrak{X}}) =$ diagramme de phase.

Si $W =$ *l'extension spatiale d'un substrat matériel*, alors modèles de *morphologies naturelles* et de *morphogenèse*.

Principe de base. Les instabilités internes sont morphogènes dans des espaces externes qu'elles engendrent.

Liens avec les modèles de *réaction-diffusion* de Turing (1952).

Espaces d'applications différentiables

On veut donc étudier les espaces d'applications différentiables $C^\infty(M, N)$, M et N deux variétés différentiables.

Difficulté : les espaces fonctionnels d'applications différentiables sont des espaces compliqués sur lesquels il est impossible de faire directement de la géométrie.

Topologie de Whitney

Cas $\mathfrak{F} = C^\infty(M, \mathbb{R})$ avec M *compacte.* Topologie de la convergence uniforme de f et de toutes ses dérivées.

Comme M est compacte, $f(M)$ est compacte dans $\mathbb{R}$, donc bornée.

On prend $\|f\| = \max_{x \in M} |f(x)|$. Idem pour les dérivées.

M et N quelconques. Topologie de *Whitney :* topologie de la convergence uniforme sur les compacts avec conditions de stationnarité à l'infini.

Théorème. – *Muni de la topologie de Whitney, $C^\infty(M,N)$, est un espace de Baire, autrement dit toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Ensembles *résiduels* et propriétés *génériques*.

Espaces de jets

Soit $f : M \to N$, $a \in M$ et $b = f(a)$. $(x_1, \ldots, x_m)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ coordonnées locales en a et $b = f(a)$.
$f = n$ fonctions $y_i = f_i(x)$ des m variables $x = (x_j)$.

On veut définir le développement de Taylor de f en a.

Dérivée d'ordre $1 =$ matrice *jacobienne* $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$.

La dérivée seconde $=$ système des $\left(\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a)\right)$, etc.

Mais, sauf pour le jacobien, les dérivées ne sont pas *intrinsèques*.

Charles Ehresmann a introduit la notion de *jet*.

La propriété pour deux fonctions f et g d'avoir le même développement de Taylor en a jusqu'à un certain ordre k est une propriété d'équivalence invariante par changement de coordonnées locales. La classe d'équivalence de f est le jet d'ordre k de f en a qui se note $j^k f(a)$.

Les $J^k(M,N)_{a,b}$ forment un fibré localement trivial $J^k(M,N)$. Si $f \in C^\infty(M,N)$ on peut alors lui associer son jet d'ordre k, $j^k f$

$$\begin{array}{rcl} j^k f : M & \rightarrow & J^k(M,N) \\ a & \mapsto & j^k f(a) \end{array}$$

Les espaces de jets ont une *géométrie intrinsèque* d'une grande richesse qui généralise la géométrie de *contact* et la géométrie *symplectique*.

Pour chaque dérivée partielle possible on introduit un *symbole de variable* supplémentaire *indépendant.*

C'est une "dérivée cachée" (Richard Montgomery). Il s'agit d'une technique qui remonte à Euler et renvoie aux racines leibniziennes du calcul différentiel.

Des systèmes canoniques de formes différentielles garantissent que ces variables sont interprétables de façon cohérente comme de "vraies" dérivées partielles.

Par exemple pour les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j^1 f(x) = (x, y, p)$, avec $y = f(x)$ et $p = f'(x)$.

On décrit la géométrie différentielle des courbes $y = f(x)$ du plan en introduisant *une dimension supplémentaire* qui est la "dérivée cachée" du premier ordre : "p has the 'hidden' meaning of $\frac{dy}{dx}$" (Montgomery).

γ courbe (différentiable) dans $\mathbb{R}^2$ d'équation locale $y = f(x)$. Son 1-jet est une courbe gauche Γ dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sa "relevée legendrienne" (l'enveloppe de ses tangentes).

Réciproquement, une courbe gauche Γ dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\{x, y = f(x), p = p(x)\}$ n'est une relevée legendrienne que si la *condition d'intégrabilité* $p = y'$ est satisfaite,

i.e. que si Γ est une *courbe intégrale de la structure de contact* qui est le *noyau de la forme différentielle* $\omega = dy - pdx$,

i.e. que si elle est partout tangente aux plans de contact $\omega = 0$.

Cette distribution de plans est maximalement non intégrable car la 3-forme $\omega \wedge d\omega$ est une forme volume et est donc partout non nulle.

Base des plans de contact : $t_1 = \partial_x + p\partial_y$ et $t_2 = \partial_p$ avec $[t_1, t_2] = t_3 = -\partial_y$, $[t_1, t_3] = [t_2, t_3] = 0$. Et puisque $\partial_x = t_1 + pt_3$, $\mathrm{Lie}\{t_1, t_2\}$ = fibré tangent tout entier (condition de Hörmander).

C'est donc *l'expression symbolique* $\omega = dy - pdx$ (forme de contact a priori) qui gouverne les dérivées *virtuelles* “cachées”, l'*actualisation* en une “vraie” dérivée correspondant à l'annulation $\omega = dy - pdx = 0$ (intégrabilité par tangence aux plans de contact).

Le problème de Pfaff

La “révolution copernicienne” démarrant avec Pfaff est analogue à celle de Galois. Galois est une révolution parce qu'il existe une *théorie mathématique des groupes* qui fonctionne comme une “background structure” synthétique a priori pour la résolution des équations algébriques.

De même, on a découvert en élaborant le “problème de Pfaff” un univers géométrique (géométrie de contact, géométrie symplectique, etc.) qui fonctionne comme une “background structure” synthétique a priori pour le calcul différentiel.

Cette actualisation d'une dérivée “virtuelle et cachée” en une dérivée effective au moyen d'une forme de contact $\omega = dy - pdx = 0$ est un exemple de ce que Lautman appelait des “mixtes”

> *“intermédiaires entre des genres d'être différents et dont la considération est souvent nécessaire pour opérer le passage d'un genre de l'être à un autre genre de l'être” (p. 29).*

Variables indépendantes + systèmes de Pfaff $\Longleftrightarrow$ dérivées.

Euler, Monge, Pfaff, Gauss, Jacobi, Hamilton, Grassmann, Natani, Clebsch, Frobenius (1887), Darboux, Lie et Engel (1889), Weber (1898), Cartan (1899, 1910, 1914), Goursat (1922), jusqu'à Charles Ehresmann, Hassler Whitney, René Thom, Vladimir Arnold, John Mather, Richard Montgomery, Michail Zhitomirskii et tant d'autres.

Géométrie des espaces de jets des $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
1-jets : structure de contact $\omega_1 = dy - pdx = 0$.
2-jets : on introduit la variable supplémentaire q pour la dérivée seconde (la courbure) et l'annulation de la 1-forme $\omega_2 = dp - qdx$.
C'est la structure d'Engel $E \to M \to \mathbb{R}^2$

On itère. On obtient des distributions $\mathfrak{D}$ de plans dans $J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2+k}$ maximalement non intégrables.

Ce sont des *distribution de Goursat* : à chaque pas l'adjonction des crochets de Lie augmente la dimension exactement de 1.

Théorème d'Élie Cartan (réciproque) : les $J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont localement les formes normales *génériques* des distributions de Goursat $\mathfrak{G}$ de type $(2, 2+k)$.

Mais si l'on prend en compte *toutes* les distributions de Goursat alors d'autres géométries plus compliquées que celle des espaces de jets peuvent apparaître (Giaro-Kumpera-Ruiz, 1978), la complexité devenant même "monstrueuse" (Montgomery-Zhitomirskii)

Dès la dimension 5, il existe une forme normale de Goursat *exceptionnelle* $\{\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega'_3 = 0\}$ avec $\omega'_3 = dx - rdq$ qui *échange* x et q dans $\omega_3 = dq - rdx$.

Lautman : local/global

Contrairement aux niveaux de structure analytiques et algébriques, le niveau différentiable ne manifeste aucune solidarité entre le local et le global.

Le thème local VS global est l'un des plus connus chez Lautman. Méréologie : l'assemblage des parties dans une unité fonctionnelle.

Lautman cite souvent deux exemples très différents

1. les procédures de prolongement, comme le prolongement analytique, où le local détermine le global,
2. les procédures de recollement, comme le recollement des cartes locales d'une variété différentiable où le local ne détermine pas le global.

C'est ce dernier cas qui intervient ici.

Il est vain de chercher à classifier directement les éléments de $\mathfrak{F}$.

1. On classe d'abord les applications *stables*,
2. puis on classe ensuite les applications présentant des "degrés" finis croissants d'instabilité.

La propriété de stabilité structurelle rétablit une certaine forme de solidarité entre le local et le global au niveau différentiable.

La notion de stabilité structurelle utilisée est essentiellement celle associée à l'*équivalence différentiable*.

Stabilité structurelle, équivalence différentiable et détermination finie

$f, g : M \to N$ sont différentiablement équivalentes s'il existe des difféomorphismes $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ et $\psi \in \mathrm{Diff}(N)$ tels que $g \circ \varphi = \psi \circ f$, i.e. $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Important pour la structure *locale* des applications : f peut être équivalente, *localement* en a, à l'un de ses jets $j^k f(a)$.

On dit qu'elle est *déterminée à l'ordre k en a*. Cela signifie que $j^k f$ contient *toute l'information qualitative intrinsèque locale* sur f.

Trivialité locale et théorème des fonctions implicites

Un outil essentiel pour analyser la structure *qualitative* de $f : M \to N$ est de voir comment on peut la simplifier à équivalence près et la réduire à une "forme normale" typique.

La forme normale des "bonnes situations" dépend es dimensions respectives m et n de M et de N,
$f : M \to N$, $a \in M$, $f(a) = b$.

(i) $m = n$, f est localement l'identité $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;

(ii) $m < n$, f est localement l'injection canonique $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$;

(iii) $m > n$, f est localement la projection canonique $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$.

f est *localement triviale* si elle est, localement en $(a, f(a))$, différentiablement équivalente à la "bonne situation" de (m, n).

Théorème des fonctions implicites : la trivialité locale ne dépend que de l'application linéaire tangente $D_a f$ de f en a et est réalisée dès que $D_a f : T_a M \to T_{f(a)} N$ *est de rang maximal* : m et n si $m = n$, m si $m < n$ et n si $m > n$.
f est alors déterminée l'ordre 1.

Le théorème classique dit que si $f(x, y)$ est définie sur un produit $U_1 \times U_2$ et si sa dérivée à x constant est inversible alors on peut exprimer y en fonction de f.

Les théorèmes de transversalité de Thom

Par définition, la propriété de stabilité structurelle est une propriété *ouverte*. Une question cruciale est de savoir si elle est en plus *générique*, c'est-à-dire vérifiée sur un ouvert *dense*.

Cela est faux pour les dynamiques générales.

Mais c'est vrai pour les f. Démonstration en deux étapes.

1. interpréter les propriétés de stabilité en termes de propriétés de *transversalité* dans les espaces de jets,
2. démontrer que les propriétés de transversalité sont génériques.

N de dimension n et N_1 et N_2 sous-variétés de dimensions n_1 et n_2. N_1 et N_2 sont *transverses* si en tout $x \in N_1 \cap N_2$ on a $T_x N = T_x N_1 + T_x N_2$.

(i) Si N_1 et N_2 disjointes, elles sont transverses.

(ii) Si $n_1 + n_2 < n$, N_1 et N_2 transverses ssi disjointes.

(iii) Si $n_1 + n_2 = n$, N_1 et N_2 transverses ssi tous leurs points d'intersection sont des points isolés d'intersection transversale.

(iv) Si $n_1 + n_2 > n$ la transversalité signifie dimension$(N_1 \cap N_2) = n_1 + n_2 - n$, l'excès de $n_1 + n_2$ sur n et le long de cette intersection il y a transversalité.

Si W sous-variété de N, $f \pitchfork W$ si, pour tout $x \in M$ tel que $f(x) \in W$, on a

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}W + D_x f(T_x M).$$

Proposition. – *Si $f \pitchfork W$ alors $f^{-1}(W)$ est une sous-variété de M de même codimension que W.*

Le théorème fondamental de transversalité de Thom dit que la transversalité dans les espaces de jets est *générique*.

Il s'applique même aux sous-variétés *stratifiées* des espaces de jets.

Intuitivement, un espace est stratifié s'il est la réunion d'un ensemble de "bons" sous-espaces "réguliers" de dimension décroissante, appelés strates, chaque strate admettant pour bord un ensemble de strates de dimension inférieure. On impose des conditions de finitude et des bonnes propriétés d'incidence des strates entre elles.

Théorème de transversalité. – *Soit W une sous-variété stratifiée de l'espace des jets $J^k(M, N)$. L'ensemble T_W des $f \in \mathfrak{F} = C^\infty(M, N)$ dont le k-jet $j^k f$ est transverse sur W est résiduel.*

Corollaire. – f ne peut pas présenter génériquement des singularités de codimension $> \dim(M)$.

Les théorèmes d'immersion et de plongement de Whitney

$f : M \to N$ immersion en $x \in M$ signifie que $D_x f$ est de rang maximal $m \leq n$.

La fibre F de $J^1(M, N)$ est l'espace des matrices jacobiennes $D_x f$. Il est de dimension mn.

$J^1(M, N)$ est lui de dimension $m + n + mn$. Soit H le sous-espace de F des matrices A qui ne sont pas de rang maximal. H est défini par "tous les mineurs $m \times m$ de A s'annulent". Il est de codimension $r = n - m + 1$ dans F. H décrit un sous-fibré S de codimension r de $J^1(M \times N)$.

f est une immersion ssi $j^1 f(M)$ n'intersecte pas S. Mais si $m < n - m + 1$, *i.e.* si $2m \leq n$, cette condition est une condition de transversalité. Le théorème de transversalité implique:

Théorème d'immersion de Whitney. – *Si $n \geq 2m$, les applications $f : M \to N$ sont génériquement des immersions.*

De même que si $n \geq 2m + 1$, les f sont génériquement des immersions injectives et si M est compacte et si $n \geq 2m + 1$, les f sont génériquement des plongements.

La théorie de Morse

À l'autre extrême cas $n = 1$. Théorie de Morse des $f : M \to \mathbb{R}$.

$x \in M$ est un *point critique* de f ssi la $(m \times 1)$-matrice jacobienne $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)$ (le gradient) $= 0$ en x

Alors $j^1 f(x) \in S_1$ section 0 de $J^1(M, \mathbb{R})$

$\dim\left(J^1\right) = m + 1 + m = 2m + 1$, $\dim(\text{fibre}) = m$,
$\dim(S_1) = m + 1$, $\text{codim}(S_1) = m$.

x point critique *non dégénéré* si le *hessien* de f en x – la matrice $m \times m \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$ – est non dégénéré, i.e. de rang maximal m.

Proposition. – *$x \in M$ est un point critique non dégénéré ssi $j^1 f(x) \in S_1$ et $j^1 f \pitchfork S_1$ en $j^1 f(x)$.*

Preuve. – En coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m, y, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ de $J^1(M, \mathbb{R})$,

$$j^1 f(x) = \left(x_1, \ldots, x_m, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right).$$

$\dim(S_1) = m + 1$, $\dim\big(J^1(M, \mathbb{R})\big) = 2m + 1$. Qui plus est $\dim\big(j^1 f(M)\big) \leq m$. Les dimensions $m + 1$ et m sont complémentaires.

Donc $j^1 f(M)$ ne peut intersecter S_1 transversalement qu'en des points isolés $z = j^1 f(x)$ où

$$T_z S_1 + D(j^1 f)(x)(T_x M) = T_z J^1(M, \mathbb{R}) \tag{1}$$

Soit $z = (x_1, \ldots, x_m, f(x), 0, \ldots, 0)$ et

$$(X_1, \ldots, X_m, Y, \Xi_1, \ldots, \Xi_m)$$

les coordonnées de $T_z J^1(M, \mathbb{R})$.

$D(j^1 f)(x)$ associe à $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in T_x M$ le vecteur tangent

$$\left(\alpha, \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), H\alpha\right) \in T_z J^1(M, \mathbb{R})$$

Or $T_z S_1$ correspond aux $m+1$ premières coordonnées $(X_1, \ldots, X_m, Y)$ de $T_z J^1(M, \mathbb{R})$. Il faut donc que $D(j^1 f)(x)(T_x M)$ "occupe" toutes les autres dimensions, *i.e.* que H soit de rang maximal. $\square$

Le théorème de transversalité donne :

Corollaire. – *Soit $f : M \to \mathbb{R}$. Génériquement, tous les points critiques de f sont non dégénérés (fonction de Morse).*

Corollaire. – *Génériquement, une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de Morse dont toutes les valeurs critiques sont distinctes (fonction de Morse* excellente).

Donc si M *compacte*, $f : M \to \mathbb{R}$ est structurellement stable si et seulement si :

(i) ses points critiques sont non dégénérés, et si

(ii) ses valeurs critiques (*i.e.* les valeurs $f(x)$ de f pour x critique) sont distinctes.

Cela caractérise *intrinsèquement* des entités structurellement stables dont la stabilité structurelle est pourtant *extrinsèque* (situationnelle).

Comme nous l'avons vu, Lautman a approfondi cette possibilité.

Ici elle est en plus corrélée au thème “structure et décomposition”. Lautman a thématisé deux types de décompositions :

1. Les décompositions intrinsèques qui

   “mettent en lumière les propriétés particulières d'un être au sein de l'ensemble auquel il appartient, et le caractérisent par la spécificité de sa structure propre” (p. 161)

2. Les décompositions extrinsèques, relatives à la totalité d'un ensemble d'éléments et qui

   “se font selon un plan commun à tous [les êtres considérés] et traduit ainsi non pas seulement leurs propriétés particulières mais également leur appartenance à un même ensemble dont la structure globale se réfléchit en celle de ses éléments” (p. 161).

Lorsqu'il y a équivalence entre deux types de décompositions :

> *"les mêmes êtres sont étudiables des deux façons et c'est cette rencontre des méthodes qui fait l'unité profonde des mathématiques" (p. 172).*

La stabilité infinitésimale

Définir des notions plus maniables de stabilité structurelle.

$\mathfrak{F} = C^\infty(M, N)$, $G = \mathrm{Diff}(M) \times \mathrm{Diff}(N)$ agit sur $\mathfrak{F}$ par $(\varphi, \psi)f = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Action $\gamma_f : G \to \mathfrak{F}$.

Définir "l'application linéaire tangente" $D_e\gamma_f$ de γ_f à l'origine $e = (1_M, 1_N)$ de G. Comme $\gamma_f(e) = f$, on voit que $D_e\gamma_f$ envoie "l'espace tangent" T_eG à G en e sur "l'espace tangent" $T_f\tilde{f}$ à $\tilde{f}$ en f.

f structurellement stable signifie que $\tilde{f}$ est un voisinage de f, et donc que γ_f est une "submersion" en e, i.e. que $D_e\gamma_f$ envoie T_eG *sur tout* $T_f\mathfrak{F}$.

Un "vecteur tangent" en f à $\mathfrak{F}$ est "une tendance infinitésimale" de déformation de f, *i.e.* la donnée pour tout $f(x)$ d'un vecteur tangent $X(x)$ à N en $f(x)$.

Définition. – *Un* champ de vecteurs sur N le long de $f : M \to N$ *est une application différentiable* $X : M \to TN$ au-dessus de f, i.e. *telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} & & TN \\ & X \nearrow & \downarrow \pi_N \\ M & \underset{f}{\longrightarrow} & N \end{array}$$

soit commutatif (i.e. $X(x)$ *est un vecteur tangent à* N *en* $f(x)$*).*

$$T_f\mathfrak{F} = \Gamma(f^*(TN))$$

Un “vecteur tangent” à G en e est un couple (R, S) d'un champ de vecteurs R sur M et d'un champ de vecteurs S sur N.

$$T_e G = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(N) = \Gamma(TM) \oplus \Gamma(TN)$$

$D_e \gamma_f$ opère sur $T_e G$.

1. Si $R \in \Gamma(TM)$, $D_e\gamma_f(R) = Df \circ R \in \Gamma(f^*TN)$:

$$\begin{array}{ccc} TM & \overset{Df}{\rightarrow} & TN \\ R \uparrow\downarrow & \nearrow & \downarrow \\ M & \underset{f}{\rightarrow} & N \end{array}$$

Notons $\theta_f : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(f^*TN)$ cette application.

2. Si $S \in \Gamma(TN)$, $D_e\gamma_f(S) = S \circ f \in \Gamma(f^* TN)$:

$$\begin{array}{ccc} TM & \overset{Df}{\longrightarrow} & TN \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow\uparrow S \\ M & \underset{f}{\longrightarrow} & N \end{array}$$

Notons $\Omega_f : \Gamma(TN) \to \Gamma(f^* TN)$ cette application.

$$D_e\gamma_f(R, S) = \theta_f(R) + \Omega_f(S)$$

Définition. – $f : M \to N$ *est dite* infinitésimalement stable *si* $\theta_f + \Omega_f : \Gamma(TM) \oplus \Gamma(TN) \to \Gamma(f^* TN)$ *est surjective.*

Théorème de stabilité de Thom-Mather. – *Si M compacte, f est structurellement stable ssi elle est infinitésimalement stable*

1. Si $f : M \to N$ est une *submersion* alors elle est infinitésimalement stable – et donc structurellement stable.

1. $D_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ est surjective pour tout $x \in M$.
2. Son noyau K_x engendre un sous-fibré K de TM. Soit H un sous-fibré supplémentaire de K dans TM.
3. Pour tout $x \in M$, $D_x f : H_x \to T_{f(x)} N$ est un *isomorphisme*.
4. Si X est un champ de vecteurs sur N le long de f, on lui associe le champ de vecteurs R sur M
$$R(x) = (D_x f)^{-1}(X(x)) \in H_x.$$
5. On a $\theta_f(R) = X$ et donc θ_f est surjective. *A fortiori*, $\theta_f + \Omega_f$ est surjective.

2. Si $f : M \to N$ est une immersion injective alors elle est infinitésimalement stable – et donc structurellement stable. En effet un champ de vecteurs X sur N le long de f s'identifie à un champ sur $f(M)$. Or un tel champ peut être prolongé à N et donc Ω_f est surjective. *A fortiori* $\theta_f + \Omega_f$ est surjective.

3. Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est structurellement stable c'est une fonction de Morse excellente.

1. les Morse excellentes sont génériques,
2. donc f structurellement stable est équivalente à une Morse excellente,
3. f est donc une fonction de Morse excellente.

Réciproquement, toute Morse excellente est infinitésimalement stable – et donc structurellement stable.

Théorème de Morse. – *Si M est compacte, $f : M \to \mathbb{R}$ est structurellement stable si et seulement si c'est une fonction de Morse excellente. La stabilité structurelle est donc générique. Comme elle est ouverte, elle est donc ouverte et dense.*

$f : M \to \mathbb{R}$ Morse excellente

1. $X : M \to T\mathbb{R}$ le long de f. X équivaut à $(f(x), \xi(x))$ avec $\xi(x) = X(f(x))$.
2. Si R champ sur M. $\theta_f(R)$ correspond à $\xi(x) = L_R f$ où L_R est l'opérateur de dérivation associé à R.
3. Si S sur $\mathbb{R}$, $\Omega_f(S)$ correspond à $\xi = S \circ f$.
4. f infinitésimalement stable signifie que toute fonction $\xi : M \to \mathbb{R}$ peut s'écrire $\xi = L_R f + S \circ f$.
5. Comme f est Morse excellente sur M compacte, elle n'admet qu'un nombre fini $c_1, \ldots, c_n$ de points critiques non dégénérés dont toutes les valeurs $v_1, \ldots, v_n$ sont distinctes.

6. On choisit S t.q. $\xi(c_i) = S \circ f(c_i)$. $\xi' = \xi - S \circ f$ s'annule sur les points critiques de f et il suffit de montrer que ξ' est de la forme $\xi' = L_R f$.
7. On choisit autour de chaque point x régulier ou critique une carte locale U_x de mise sous forme normale. Comme M est compacte, on peut extraire de ce recouvrement ouvert de M un sous-recouvrement fini $U_1, \ldots U_k$ de M correspondant à un nombre fini de points (réguliers ou critiques) $a_1, \ldots, a_k$. Soit $g_1, \ldots, g_k$ une *partition de l'unité* subordonnée à ce recouvrement.

8. Si a_i est régulier, on choisit un champ local w_i sur U_i tel que $Df(w_i) \neq 0$ sur U_i et on lui associe le champ global R_i défini sur M par :

$$\begin{cases} R_i & = \dfrac{\xi' g_i w_i}{L_{w_i} f} \text{ sur } U_i, \\ R_i & = 0 \text{ sur } M - U_i. \end{cases}$$

9. Si a_i est critique, alors $\xi'(a_i) = 0$ et donc $g_i\xi'$ peut s'écrire sur U_i sous la forme $g_i\xi' = \sum_{j=1}^{m} x_j h_j$. Considérons le champ global R_i bien défini sur M par :

$$\begin{cases} R_i & = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon_j h_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ (où } \varepsilon_j \text{ est le signe de } x_j \text{ dans la forme norma} \\ & \quad \text{au voisinage de } a_i \text{) sur } U_i \\ R_i & = 0 \text{ sur } M - U_i. \end{cases}$$

Le champ somme $R = \sum_{i=1}^{k} R_i$ satisfait à $L_R f = \xi'$.

En effet,

(i) si a_i est régulier, on a :

$$\begin{cases} L_{R_i} f & = \xi' g_i \text{ sur } U_i \ , \\ L_{R_i} f & = 0 \text{ sur } M - U_i \ , \end{cases}$$

soit $L_{R_i} f = \xi' g_i$.

(ii) Si a_i est critique, on a:

$$\begin{cases} L_{R_i} f & = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon_j h_j}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k x_k^2) \text{ sur } U_i \ , \\ & = \sum_{j=1}^{m} h_j x_j = \xi' g_i \text{ sur } U_i \ , \\ & = 0 \text{ sur } M - U_i \ , \end{cases}$$

soit $L_{R_i} f = \xi' \ g_i$.

(iii) Donc $L_R f = \sum_{i=1}^{k} L_{R_i} f = \sum_{i=1}^{k} \xi' g_i = \xi'$. □

Les anneaux locaux

Il faut passer de la stabilité à l'instabilité et développer l'analyse *locale* des *singularités* induisant des instabilités.

Notions de *détermination*, de *codimension*, de *modèle transverse* et de *déploiement universel*.
Germes de $f : M \to N$, $a \mapsto f(a) = b$ *instables*.

1. Anneau Γ_a des germes en a de fonctions $h : M \to \mathbb{R}$. Anneau *local* d'idéal maximal $\mathfrak{m}_a =$ les $h : M \to \mathbb{R}$ s'annulant en a. Si $(x_1, \ldots, x_m)$ coordonnées locales en a, $\mathfrak{m}_a$ est engendré par les (germes) x_i et le germe de h en a est dans $\mathfrak{m}_a^k$ si et seulement si h et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k-1$ s'annulent en a.
2. Anneau local Γ_b d'idéal maximal $\mathfrak{m}_b$ et morphisme d'anneaux $f^* : \Gamma_b \to \Gamma_a$ défini par la composition avec f qui envoie $\mathfrak{m}_b$ dans $\mathfrak{m}_a$.
3. Anneau local quotient $Q_f(a) = \Gamma_a / f^*(\mathfrak{m}_b)\Gamma_a$, l'*anneau local* de f en a. Anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_f = \mathfrak{m}_a / f^*(\mathfrak{m}_b)\Gamma_a$, l'idéal des germes $h : (M, a) \to \mathbb{R}$ qui s'annulent sur la fibre $f^{-1}(b)$.

Avec des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m)$ en a et $(y_1, \ldots, y_n)$ en b, $\Gamma_a(M) \simeq \mathcal{E}_m$ et $\Gamma_b(N) \simeq \mathcal{E}_n$ et on étudie le morphisme d'anneaux locaux $f^* : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ et $Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$.

1. Si $f : (M, a) \to (N, b)$ est une immersion $(m \leq n)$ alors dans des coordonnées locales linéarisant f, f s'écrit $y_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $y_j = 0$ pour $j = m+1, \ldots, n$. Donc $f^*(y_i) = y_i \circ f = x_i$ si $i = 1, \ldots, m$ et $f^*(y_j) = y_j \circ f = 0$ si $j = m+1, \ldots, n$. Donc, $f^*(\mathfrak{m}_n) = \mathfrak{m}_m$, $\mathfrak{m}_f = 0$ et

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m / \mathfrak{m}_m \simeq \mathbb{R}.$$

2. Si $f : (M, a) \to (N, b)$ est une submersion $(m \geq n)$ alors, dans des coordonnées locales linéarisant f, f s'écrit $y_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Donc $f^*(y_i) = y_i \circ f = x_i$ si $i = 1, \ldots, n$. Donc $f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$ est l'idéal de $\mathcal{E}_m$ engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$.

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m \simeq \mathcal{E}_{m-n}.$$

3. Si f fonction de Morse avec a point critique non dégénéré avec Hessien sous forme normale $H(x) = \sum_{i=1}^{i=m} \varepsilon_i x_i^2$ ($\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, m$). Alors $f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$ est l'idéal principal des fonctions $g \in \mathcal{E}_m$ qui s'écrivent comme produits $g = Hg'$ et

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m/(H)$$

L'isomorphisme des anneaux locaux $Q_f(a)$ et $Q_g(a)$ est une équivalence *plus forte* que l'équivalence différentiable, dénommée par Mather *équivalence de contact*.

Détermination et codimension

La notion de *détermination*.

Définition. – *On dit que* f *est déterminée à l'ordre* k *en* a *si toute fonction* g *telle que* $j^k g(a) = j^k f(a)$ *est équivalente à* f *en* a*, et si* k *est le plus petit entier satisfaisant cette propriété.*

La notion de *codimension*.

"L'espace tangent" à la G-orbite $\widetilde{f}$ de f est donné par l'application linéaire

$$\begin{aligned} \theta_f + \Omega_f \quad &: \quad \Gamma(TM) \oplus \Gamma(TN) \to \Gamma\left(f^*(TN)\right), \\ (R \quad &\in \quad \Gamma(TM), S \in \Gamma(TN)) \mapsto Df \circ R + S \circ f \in \Gamma\left(f^*(TN)\right). \end{aligned}$$

La *codimension* de f est la dimension du quotient de "l'espace tangent" total $T_f\mathfrak{F}$ par "l'espace-tangent" à la G-orbite de f.

Définition. – *La G-codimensions est :*

$$\operatorname{codim} f = \dim_{\mathbb{R}} \Gamma\left(f^*(TN)\right) / \left(\theta_f\left(\Gamma(TM)\right) + \Omega_f\left(\Gamma(TN)\right)\right),$$

Résultat fondamental : f est de détermination finie ssi elle est de codimension finie.

Si codimension finie, on peut “descendre” dans des espaces de jets de dimension finie où la situation devient *algébrique et calculable*.

1. On ne garde que ce qui est *invariant*.
2. Les *formes normales* sont comme des *schèmes*.

Les formes normales comme “mixtes”

Lautman a étudié plusieurs exemples de

> *“mixtes intermédiaires entre des genres d’être différents et dont la considération est souvent nécessaire pour opérer le passage d’un genre de l’être à un autre genre de l’être” (p. 29).*

Il fait remonter philosophiquement cette problématique à celle du schème kantien.

Ici, les formes normales font passer du qualitatif à l'algébrique et de l'intuition géométrique au calcul.

En éliminant tout le qualitatif possible grâce à des changements de coordonnées, il ne reste plus qu'un squelette algébrique (polynomial).

C'est comme en topologie algébrique (Lautman traite à ce propos de l'homotopie, du groupe fondamental et du revêtement universel, de l'homologie et de la cohomologie).

Si f est (infinitésimalement) stable on a

$$\theta_f\left(\Gamma(TM)\right) + \Omega_f\left(\Gamma(TN)\right) = \Gamma(f^*(TN))$$

et donc f est de G-codimension 0. f est donc de G-détermination finie.

Théorème de Mather. – *Si f est stable, f est déterminée à l'ordre $n+1$ relativement à l'équivalence différentiable.*

Ce théorème généralise les théorèmes de Morse et de Whitney-Thom.

1. Lorsque $n = 1$ (théorème de Morse) une fonction n'est localement stable que si ses points critiques sont non dégénérés et, en ces points, f est déterminée à l'ordre $2 = n + 1$ (points quadratiques).
2. Lorsque $n = 2$ et $m = 2$ (théorème de Whitney-Thom), une fonction f n'est localement stable que si ses points critiques sont des plis ou des cusps et, en ces points, f est déterminée à l'ordre $3 = n + 1$.

La classification des singularités de fonctions potentiel

On va maintenant se focaliser sur les singularités des fonctions *potentiel*.
Germe instable de $f : M \to \mathbb{R}$ en un point critique a dégénéré

Comme 0 point critique $f \in \mathfrak{m}^2$. On peut supposer que $f \in \mathfrak{m}^3$ car les points critiques quadratiques sont stables.

Pour l'équivalence à droite la codimension est :

$$\dim_{\mathbb{R}} \Gamma\left(f^*(T\mathbb{R})\right) / \theta_f\left(\Gamma(TM)\right)$$

Soit y la coordonnée de $\mathbb{R}$. Un champ sur $\mathbb{R}$ le long de f, $X : M \to T\mathbb{R}$ est de la forme $X(x) = (f(x), u(x)\dfrac{\partial}{\partial y})$ avec $u \in \mathfrak{m}$.

Donc $\Gamma\left(f^*(T\mathbb{R})\right)$ est l'espace $\mathfrak{m}\dfrac{\partial}{\partial y}$ identifiable à $\mathfrak{m}$.

D'autre part, si $R \in \Gamma(TM)$ est un champ sur M, $R = \sum_{i=1}^m u_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, avec $u_i \in \mathfrak{m}$ (car champ $= 0$ en 0), alors $\theta_f(R) = \left(\sum_{i=1}^m u_i(x)\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)\dfrac{\partial}{\partial y}$. Donc

$$\theta_f \Gamma(TM) = \mathfrak{m}\Delta$$

où Δ est *l'idéal jacobien* engendré par les $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

Codimension à droite de $f = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}\Delta$.

On peut ajouter l'équivalence à gauche avec $\Omega_f\left(\Gamma(T\mathbb{R})\right)$. Si $S = u\dfrac{\partial}{\partial y}$ est un (germe de) champ sur $\mathbb{R}$ avec $u \in \mathfrak{m}_1$, on a $\Omega_f(S) = (u \circ f)\dfrac{\partial}{\partial y}$. Donc $\Omega_f\left(\Gamma(T\mathbb{R})\right) = f^*\left(\mathfrak{m}_1\right)$. Donc

$$\operatorname{codim}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}/\left(\mathfrak{m}\Delta + f^*\left(\mathfrak{m}_1\right)\right)$$

Proposition. – *f est de détermination finie ssi il existe ℓ tel que $\mathfrak{m}^{\ell} \subset \Delta$.*

Théorème. *Si f est k-déterminée pour l'équivalence différentiable, alors $\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}\Delta + f^*(\mathfrak{m}_1)$. Réciproquement, si $\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}^2\Delta + f^*(\mathfrak{m}_1) + \mathfrak{m}^{k+2}$ alors f est k-déterminée.*

Si l'on s'en tient seulement à l'équivalence à droite, on a

$$\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}^2\Delta + \mathfrak{m}^{k+2} \Longrightarrow f \text{ est } k\text{-déterminée} \Longrightarrow \mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}\Delta + \mathfrak{m}^{k+2}$$

Le problème des modules

Il peut exister des *modules* – des déformations unidimensionnelles (des "homotopies") f_t – où le type différentiable de f_t varie *continûment* avec t.

Phénomène subtil lié à la chaîne d'implications pour la d-équivalence :

$$\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}^2\Delta + \mathfrak{m}^{k+2} \Longrightarrow f \text{ est } k\text{-déterminée} \Longrightarrow \mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}\Delta + \mathfrak{m}^{k+2}$$

On montre un critère de trivialité des homotopies $f_t = f + th$, $t \in I = [0, 1]$:

Proposition. – *Si* $h \in \mathfrak{m}\Delta(f_t)$ *pour tout* t, *alors l'homotopie* f_t *est triviale.*

Théorème. – *Si* homotopie $f_t = f + th$ telle que

1. $\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}\Delta(f) + \mathfrak{m}^{k+2}$ (f est $(k+1)$-déterminée),
2. $h \notin \mathfrak{m}\Delta(f) + \mathfrak{m}^{k+1}$,
3. $\mathrm{codim}\,(f_t)$ *est constante,*

alors t *est un module au voisinage de* $t = 0$.

Exemple. Homotopie $f_t = x^4 + y^4 + tx^2y^2$ du double cusp $x^4 + y^4$ où $h = x^2y^2$. Les f_t sont déterminées à l'ordre 4 et de codimension constante 8.

$h \notin \mathfrak{m}\Delta(f) + \mathfrak{m}^5$. En effet h est de degré 4 et dans $\mathfrak{m}\Delta(f) + \mathfrak{m}^5$ les seuls termes de degré 4 sont des combinaisons linéaires de x^4, y^4, x^3y et xy^3. Donc t est un module au voisinage de $t = 0$.

Explication.

1. Comme les f_t sont 4-déterminées, on peut se situer dans $J^4(2,1)$.
2. Comme les f_t sont *homogènes* seule intervient à l'ordre 4 la partie *linéaire* des difféomorphismes.
3. f_t étant homogène de degré 4, elle est le produit de 4 droites complexes sur lesquelles les changements linéaires de coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ opèrent comme des transformations *projectives*.
4. Ces changements laissent invariant l'invariant projectif qu'est le *birapport* de ces 4 droites.
5. Or le paramètre t est fonction de ce birapport.

Les 4 droites sont $y - \lambda x$ avec $\lambda_i = \pm\sqrt{\frac{-t \pm \sqrt{t^2-4}}{2}}$ et le birapport est

$$B = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_4)} : \frac{(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_4)} = -1 - \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{2^{n-1}}$$

Il est constitué de l'orbite B, $1 - B$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{1-B}$, $1 - \frac{1}{B}$, $\frac{1}{1-\frac{1}{B}}$. Il est harmonique $= \left(-1, 2, \frac{1}{2}\right)$ (de multiplicité 2) pour $t = 0$ (carré $\pm\sqrt{\pm i}$).

Les déploiements universels

Si f k-déterminée, on se situe dans $J^k(m, 1)$, on y considère l'orbite $\tilde{f}$ de f puis, si $c = \mathrm{codim}(f)$, une section W de dimension c transverse à $\tilde{f}$ en f.

$W =$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^c$. D'où déploiement f_w de $f_0 = f$, $w \in W$.

Questions :

(i) Tous ces déploiements sont-ils équivalents ?

(ii) Sont-ils stables en tant que déploiements (de germes) $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^c \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^c$.

(iii) Sont-ils universels au sens où tout déploiement f_t de f de base T peut se déduire de f_w par image réciproque d'une application, si possible unique, $\theta : T \rightarrow W$.

L'existence d'un déploiement universel est un exemple typique de *passage de l'essence à l'existence* et de *montée vers l'absolu* au sens de Lautman.

Lautman développe ce thème à propos du revêtement universel, de la classification des surfaces de Riemann, de la théorie de Galois et de 1a théorie du corps de classes.

Il concerne la possibilité

> *"d'éliminer les imperfections de certains êtres mathématiques par passage de ce qu'ils sont primitivement à un idéal de simplicité absolue dont l'existence est impliquée dans l'enchevêtrement même de leur structure" (p. 77).*

Il fait donc partie des procédés de passage de l'Essence (structure) à l'Existence :

> *"comment la structure d'un être imparfait peut parfois préformer l'existence d'un être parfait en lequel toute imperfection a disparu" (p. 28).*

Ce qui intéresse Lautman sont les cas

> *"où l'on voit la structure d'un être s'interpréter en termes d'existence pour d'autres êtres" (p. 29) et*
> *"une structure préformer l'existence d'êtres abstraits sur le domaine que cette structure définit" (p. 97).*

Cette dialectique de l'essence et de l'existence est inséparable de celle *entre le virtuel et l'actuel* :
le virtuel contient en puissance l'engendrement de son actualisation au moyen d'un nouveau domaine sur lequel sont définies de nouvelles entités.

Ici le virtuel est l'instabilité. La stabilité structurelle est un principe de raison suffisante (aussi essentiel pour Thom que le principe de causalité) et gouverne l'actualisation du virtuel.

Le potentiel interne instable est un "centre organisateur"

1. qui *engendre son espace externe universel* W,
2. qui déploie l'ensemble de bifurcation K_W classifiant de façon optimale tous les stabilisés possibles à équivalence près.

La codimension est un nombre qui a une double signification : elle mesure le degré d'instabilité interne et donne la dimension de l'espace externe *optimal*.

C'est un exemple magnifique de genèse reposant

> *"sur le double sens de ce nombre, structural et créateur" (p. 104)*

Les exemples favoris de Lautman sont

1. le genre d'une surface de Riemann comme nombre des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes,
2. le nombre de classes d'idéaux d'un corps de nombres,
3. le nombre de représentations irréductibles d'un groupe fini.

Modèles hylémorphistes

Les déploiements universels *abstraits* servent de base chez Thom à des modèles de morphogenèse *concrète* dans des substrats matériels.

Les dialectiques essence/existence et virtuel/actualisastion sont, comme chez Lautman, inséparable de la dialectique métaphysique forme/matière (hylémorphisme),

> *"l'essence d'une forme se réalisant au sein d'une matière qu'elle créerait, l'essence d'une matière faisant naître les formes que sa structure dessine" (p. 95).*

Pour Lautman, les structures abstraites sont

> *"profondément engagées dans la genèse de leurs réalisations" (p. 105).*

$f_t, g_t : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ de même espace externe $\mathbb{R}^\ell$ sont équivalents s'il existe un difféomorphisme H de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell$ au-dessus d'un difféomorphisme φ de $(\mathbb{R}^\ell, 0)$ (*i.e.* de la forme $H(x,t) = (H_1(x,t), \varphi(t))$ et une application $\psi : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ tels que :

(i) $H(x,0) = Id_{\mathbb{R}^m}$ et

(ii) $g_t(x) = f_{\varphi(t)}(H_1(x,t)) + \psi(t)$.

f_t, g_t équivalents si l'on peut les ramener l'un à l'autre :

(i) par un difféomorphisme φ de la base;

(ii) par une famille de difféomorphismes H_t de la source $\mathbb{R}^m$ variant différentiablement avec t et envoyant la fibre $\mathbb{R}^m \times (t)$ sur la fibre $\mathbb{R}^m \times (\varphi(t))$;

(iii) par une famille de translations $\psi(t)$ du but $\mathbb{R}$ dépendant de t.

Pour des déploiements "universels", on considère ℓ germes $h_1, \ldots, h_\ell$, $\ell \geq \operatorname{codim}(f)$, constituant un *système transverse* pour f, i.e. engendrant, avec les fonctions constantes, $\mathcal{E}$ modulo l'espace tangent à l'orbite de f.

Proposition. – *Le déploiement (f_t) est stable si et seulement si les $\dfrac{\partial f_t}{\partial t_i}$, $i = 1, \ldots, \ell$ constituent un système transverse pour f.*
Parmi les déploiements transversaux il y à ceux engendré par une base $h_1, \ldots, h_c$ ($c = \operatorname{codim}(f)$) de $\mathfrak{m}/\Delta$ c'est-à-dire donnés par

$$f_w = f + \sum_{i=1}^{c} w_i h_i.$$

Théorème. – *Tous ces déploiements transversaux de dimension* $c = \mathrm{codim}(f)$ *sont stables, universels et tous équivalents. À équivalence près, il n'existe essentiellement qu'un déploiement universel d'une singularité de codimension finie.*