Colloque Albert Lautman

École Normale Supérieure, 27–29 octobre 2021

$*$

# Approche lautmanienne de la notion de déploiement universel

Jean Petitot
CAMS (EHESS), Paris

## 1 Introduction

Depuis notre découverte de ses travaux, Albert Lautman a toujours représenté pour nous l'idéal du philosophe des mathématiques. Une philosophie des mathématiques *avec* mathématiques, alors que très souvent, la philosophie des mathématiques n'approfondit que fort peu de grands résultats théoriques.

Depuis notre article "Locale/globale" de l'*Enciclopedia Einaudi* en 1979 [?] et notre étude "Refaire le Timée" de 1987 [10] dans la *Revue d'Histoire des Sciences* [1], nous n'avons cessé, en nous inspirant de Lautman, de penser la philosophie des mathématriques comme une "auto-réflexion" métaphysique des géniales innovations conceptuelles des inventeurs de structures.

Parallèlement aux commentaires érudits, nous pensons par conséquent qu'un bon moyen de rendre hommage à Albert Lautman et d'assurer une actualité et un avenir à sa pensée est d'essayer de donner une interprétation néo-lautmanienne de certaines grandes créations mathématiques qui lui sont postérieures. Évidemment cela nécessite de commenter des résultas difficiles de mathématiques non triviales.

*

* *

1. La version complète est disponible sur HAL : hal-01130394, version 2.

Nous aimerions présenter une interprétation lautmanienne d'un concept fondamental introduit par René Thom dans les années 1960, celui de *déploiement universel d'une singularité*.

L'existence d'un déploiement universel est en effet un exemple typique de *passage de l'essence à l'existence* et de *montée vers l'absolu* au sens de Lautman. Ce dernier a consacré de magnifiques réflexions aux exemples de revêtement universel d'un espace topologique, de la théorie de Galois et de 1a théorie du corps de classes. Nous voudrions y ajouter un nouvel exemple.

## 2 Idées dialectiques et schémas de genèse

Rappelons que l'idée centrale d'Albert Lautman est qu'une intuition intellectuelle est a l'œuvre dans les mathématiques, et que, dans le développement historique de leurs théories, celles-ci actualisent une "dialectique du concept" (en un sens "platonicien"), dialectique "abstraite et supérieure" développant leur unité, dévoilant leur réel et déterminant leur valeur philosophique.

C'est en tant que *structurales*, dans le mouvement autonome et historique d'élaboration de leurs théories, que les mathématiques réalisent de telles Idées dialectiques et qu'elles paraîssent [2]

> "raconter, mêlée aux constructions auxquelles s'intéresse le mathématicien, une autre histoire (...) faite pour le philosophe." (p. 28)

Les Idées sont des "schémas de structure" (p. 204) qui établissent, comme dans toute dialectique, des liaisons spécifiques entre notions contraires : local/global, intrinsèque/extrinsèque, essence/existence, continu/discontinu/discret (triade), fini/infini, etc. L'histoire est fort longue de thèses "dialectiques" analogues. Nommons-en quelques unes :

1. Évidemment Platon. On pourra se référer au n°37 de *Philosophiques* [7] dirigé en 2010 par Jean-Pierre Marquis et consacré à "Albert Lautman, philosophe des mathématiques".
2. Les antinomies de la dialectique transcendantale chez Kant.
3. Les Idées régulatrices de Kant avec leur fonction heuristique dans le jugement réfléchissant.
4. Les "dyades antithétiques" que sont les *themata* de Gerald Holton dans *The Scientific Imagination* [5] (1978).

2. Les pages sont celles de l'édition de 1977 de Lautman [6].

5. Les “apories fondatrices” de Thom. L’exposé de Thom au Colloque de Cerisy *Logos et théorie des catastrophes* (1982) s’intitulait d’ailleurs “Thèmes de Holton et apories fondatrices”.

La thèse, profondément originale, de Lautman est que

> “la compréhension des Idées de cette Dialectique se prolonge nécessairement en genèse de théories mathématiques effectives.” (p. 203)

# 3 L’Idée dialectique de stabilité/instabilité structurelles

L’Idée dialectique de “stabilité/instabilité structurelles” s’incarne dans le schéma de structure suivant qui est très abstrait.

On considère une classe d’entités $X \in \mathfrak{X}$, l’ensemble $\mathfrak{X}$ possédant une double structure :

1. Une topologie $\mathcal{T}$ “naturelle” (*i.e.* significative pour le type d’entités étudié). On sait dire quand deux entités $X$ et $Y$ sont “voisines”.
2. Une classification au moyen d’une relation d’équivalence $X \sim Y$ définissant les différentes catégories d’entités $X$. Comme toute relation d’équivalence, $X \sim Y$ est un affaiblissement de la relation d’identité $X = Y$, une identité faible. Si l’on considère l’espace $\mathfrak{X}$ comme un “genre” d’entités, alors les classes $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$, etc. constituent autant “d’espèces”.

Le schéma de structure général débouche ainsi sur la reprise originale d’une problématique très ancienne, celle de la logique genre/espèce ou générique/spécial. Les éléments $X$ d’une classe $C$ (si $X \in C$ alors $C = \widetilde{X}$) sont autant de spécialisations – de “tokens” – du “type” associé à $C$.

L’idée de base est alors d’étudier les rapports entre cette logique classificatoire et la topologie $\mathcal{T}$. En effet, dès que l’on dispose sur un espace $\mathfrak{X}$ d’une topologie $\mathcal{T}$ et d’une relation d’équivalence $\sim$ définissant le type qualitatif, on peut définir de façon naturelle une notion de *stabilité structurelle.*

**Définition.** – *Soit* $X \in \mathfrak{X}$. *On dit que l’entité* $X$ *est* structurellement stable *si toute entité* $Y$ *assez voisine de* $X$ *au sens de la topologie* $\mathcal{T}$ *est équivalente à* $X$, *i.e.* si la classe d’équivalence $\widetilde{X}$ de $X$ contient un voisinage ouvert (au sens de $\mathcal{T}$) de $X$.

$X$ est ainsi structurellement stable si son type qualitatif "résiste" aux petites perturbations (au sens de $\mathcal{T}$).

Notons que la stabilité structurelle est, par définition, une propriété relationnelle "extrinsèque" de $X$. Mais nous verrons que dans certains cas elle peut être définie "intrinsèquement".

Soit $U_{\mathfrak{X}}$ le sous-ensemble (par définition ouvert) de $\mathfrak{X}$ constitué des $X \in \mathfrak{X}$ *structurellement stables* et $K_{\mathfrak{X}}$ le sous-ensemble *fermé* de $\mathfrak{X}$ constitué des $X \in \mathfrak{X}$ *structurellement instables.* $K_{\mathfrak{X}}$ est une "morphologie discriminante" qui sépare les classes d'équivalence des $X$ stables de celles des $Y$ instables. Ce fermé *géométrise* la classification qualitative interne à $\mathfrak{X}$ en faisant exploser $\mathfrak{X}$ en classes d'équivalence ouvertes.séparées par des frontières. La *complexité géométrique* de ces frontières *code* la *complexité interne* des entités stables. Elle géométrise par la topologie (i.e. par des relations de situation) les façons dont une entité $X$ stable peut devenir instable.

Pour étudier le positionnement d'une entité $X$ *instable*, $X \in K_{\mathfrak{X}}$, dans "l'espace ambiant" $\mathfrak{X}$, on peut par conséquent "sonder" le voisinage de $X$ au moyen de familles paramétrées $(X_w)_{w \in W}$ définies par des champs $\sigma : W \to \mathfrak{X}$ appelés *déploiements.* Le fermé $K_{\mathfrak{X}}$ induit alors par image réciproque un fermé $K_W$ dans l'espace "externe" $W$. D'où autant de "sections" $(W, K_W)$de dimension finie de $K_{\mathfrak{X}}$.

C'est avec de telles sections issues du schéma de genèse général "topologie + équivalence" que René Thom a développé une *phénoménologie des morphologies naturelles.* Dans ses modèles morphodynamiques hylémorphistes, $W$ est l'étendue spatiale externe du substrat et les $X_w$ sont les dynamiques internes dont les instabilités se déploient dans l'espace externe $W$ en engendrant la morphologie $K_W$.

# 4 Les espaces d'applications différentiables

Ce schéma de structure abstrait ne fait intervenir que des concepts structuraux très généraux, à savoir ceux de topologie et d'équivalence. On peut le transformer en théorie mathématique effective en en spécifiant mathématiquement les termes. Le cas le plus simple, mais déjà notablement compliqué, est celui des espaces d'applications différentiables $\mathfrak{F} = C^\infty(M, N)$ entre deux variétés différentiables $M$ et $N$. C'est le cas que René Thom a commencé à traiter dans son grand article de 1956 "Les Singularités des applications différentiables" [12]. Il a particulièrement approfondi le cas où $\mathfrak{F}$ est l'espace fonctionnel des potentiels (différentiables) $f : M \to \mathbb{R}$ sur un espace interne $M$. On y considère des familles $f_w$ paramétrées par des espaces externes $W$ et on associe à $f_w$ l'application différentiable de déploiement

$$\begin{array}{rcl} F : M \times W & \to & \mathbb{R} \times W \\ (x, w) & \mapsto & (f_w(x), w) \end{array}$$

Si $M$ est *compacte*, on a une topologie naturelle sur $\mathfrak{F} = C^\infty(M, \mathbb{R})$, celle de la convergence uniforme des $f$ et de toutes leurs dérivées. En effet, comme $M$ est compacte, $f(M)$ est compacte dans $\mathbb{R}$, donc bornée et atteint ses extremas. On prend $\|f\| = \max_{x \in M} |f(x)|$ et de même pour les dérivées. Si $M$ n'est pas compacte on utilise la topologie dite de Whitney qui est la topologie de la convergence uniforme sur les compacts avec conditions de stationnarité à l'infini. On généralise aux cas où $N$ est plus générale que $\mathbb{R}$.

Une importante propriété de ces topologies est exprimée par le théorème suivant :

**Théorème.** – *Muni de la topologie de Whitney, $\mathfrak{F} = C^\infty(M, N)$, est un espace de Baire, autrement dit toute intersection dénombrable d'ouverts denses y reste dense. De telles intersections s'appellent des ensembles* résiduels.

Cela permet de définir les propriétés *génériques* comme celles qui sont satisfaites sur des ensembles résiduels.

Pour définir la stabilité structurelle des applications différentiables munies de la topologie de Whitney, il faut définir la relation d'équivalence appropriée. Il s'agit de "l'équivalence différentiable". On dit que $f, g : M \to N$ sont *différentiablement équivalentes* s'il existe des difféomorphismes $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ et $\psi \in \mathrm{Diff}(N)$ tels que $g \circ \varphi = \psi \circ f$, i.e. si $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est *conjuguée* de $f$.

Il faut avoir conscience de l'immense complexité globale du problème de classification. On a des groupes de difféomorphismes de dimension infinie agissant sur des espaces fonctionnels de dimension infinie.

# 5 Lautman et la relation local/global. Nouvel exemple

Un point essentiel est que, contrairement aux niveaux de structure analytiques et algébriques, le niveau différentiable ne manifeste aucune solidarité entre le local et le global.

Lautman cite souvent deux exemples très différents de relations local/global :

1. les procédures de prolongement, comme le prolongement analytique, où le local détermine le global,
2. les procédures de recollement, comme le recollement des cartes locales d'une variété différentiable où le local ne détermine pas le global. C'est ce dernier cas qui intervient ici.

La plasticité des $f \in C^\infty(M,N) = \mathfrak{F}$ fait qu'il est vain de chercher à les classifier directement. C'est beaucoup trop compliqué et l'on doit donc trouver une stratégie. Celle de Ren'e Thom a été

(i) de classer d'abord les applications stables,

(ii) puis de classer ensuite les applications présentant des "degrés" finis croissants d'instabilité.

# 6 Les espaces de jets

L'absence de solidarité local/global rend particulièrement difficile l'étude de $\mathfrak{F}$ et de la *géométrie* du fermé $K_{\mathfrak{F}}$ des $f$ structurellement instables. Les espaces fonctionnels en jeu sont des espaces de dimension infinie compliqués sur lesquels on ne peut pas faire directement de la géométrie. Il est donc vital de pouvoir se ramener à des approximations de dimension finie et de voir quelles propriétés qualitatives de stabilité et d'instabilité peuvent se caractériser en dimension finie. Il s'agit là d'une grande idée reposant sur la notion technique de *jet*. Elle fournit un bel exemple de la façon dont la *compréhension* d'une Idée dialectique se réalise par des innovations mathématiques *techniques*.

Soient $f : M \to N$, $a \in M$, $b = f(a)$, $(x_1, \ldots, x_m)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ des coordonnées locales en $a$ et $b$. L'application $f$ correspond à la donnée de $n$ fonctions $y_i = f_i(x)$ des $m$ variables $x = (x_j)$. On veut alors définir le développement de Taylor de $f$ en $a$. La dérivée d'ordre 1 est naturellement la matrice "jacobienne" $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ des dérivées partielles premières. La dérivée seconde est le système des $n$ hessiens $\left(\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a)\right)$, etc. Mais, sauf pour le jacobien, les dérivées ne sont pas *intrinsèques*. C'est pour surmonter cette difficulté que Charles Ehresmann a introduit la notion de *jet* en remarquant que la propriété pour deux applications $f$ et $g$ d'avoir le même développement de Taylor en $a$ jusqu'à un certain ordre $k$ est une propriété d'équivalence *invariante* par changement de coordonnées locales. La classe d'équivalence de $f$ est le jet d'ordre $k$ de $f$ en $a$ et se note $j^k f(a)$.

Les espaces $J^k(M,N)_{a,b}$ des $j^k f(a)$ pour $f \in \mathfrak{F}$ et $f(a) = b$ sont des espaces vectoriels tous isomorphes qui varient différentiablement avec $(a,b)$ et qui engendrent, lorsque $(a,b)$ parcourt $M \times N$, un fibré localement trivial $J^k(M,N)$ au-dessus de $M \times N$. Si $f \in \mathfrak{F} = C^\infty(M,N)$ on peut alors lui associer son jet d'ordre $k$, $j^k f$

$$\begin{array}{rcl} j^k f : M & \to & J^k(M,N) \\ a & \mapsto & j^k f(a) \end{array}$$

Les espaces de jets ont une *géométrie intrinsèque* d'une très grande richesse qui généralise la géométrie de *contact* et la géométrie *symplectique*. En effet ils introduisent pour chaque dérivée partielle possible un *symbole de variable* supplémentaire *indépendant* qui est une "dérivée cachée", comme le dit Richard Montgomery, et il existe des systèmes canoniques de formes différentielles qui garantissent que ces variables sont interprétables de façon cohérente comme de vraies dérivées partielles. Ils ramènent des calculs *locaux* à des calculs *ponctuels*, la contrepartie de ce remarquable bénéfice étant l'augmentation de la dimension (c'est-à-dire du nombre de variables indépendantes).

Il s'agit d'une technique très leibnizienne qui renvoie aux racines du calcul différentiel. Un exemple montre facilement ce qu'il en est. Pour les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le 1-jet de $f$ en $x$, $j^1 f(x)$, est le triplet $(x,y,p)$, avec $y = f(x)$ (la valeur de $f$ en $x$) et $p = f'(x)$. Au lieu de considérer le plan de coordonnées $(x,y)$ et de calculer $y' = \frac{dy}{dx}$ (ce qui exige de connaître non seulement la valeur $y = f(x)$ de $f$ en $x$ mais aussi les valeurs de $f$ dans un voisinage de $x$), on se place dans l'espace tridimensionnel $(x,y,p)$ et l'on impose la *contrainte* $y' = p$. Autrement dit, on décrit la géométrie différentielle des courbes du plan en introduisant une dimension supplémentaire qui est en quelque sorte la "dérivée cachée" du premier ordre. Comme le dit Montgomery, "$p$ has the 'hidden' meaning of $\frac{dy}{dx}$".

Cette idée très profonde remonte à Euler, Monge et Lagrange. Elle est à l'origine de la révolution qu'a été en 1815 le *Methodus* de Johann Pfaff qui a géométrisé le calcul différentiel. Une suite ininterrompue de géomètres a approfondi ces idées : Gauss, Jacobi, Grassmann, Natani, Clebsch, Frobenius (1887), Darboux, Lie et Engel (1889), Weber (1898), Cartan (1899, 1910, 1914), Goursat (1922), jusqu'à Charles Ehresmann, Hassler Whitney, René Thom, Vladimir Arnold, John Mather et tant d'autres. On la retrouve chez Hamilton qui, en introduisant les moments conjugués $p_i$ des variables de position $q_i$ d'un système mécanique comme des variables indépendantes, est passé de la formulation lagrangienne à la formulation hamiltonienne, la structure *symplectique* de l'espace des phases garantissant que les moments ont a voir avec les vitesses.

Soit $\gamma$ une courbe (différentiable) dans $\mathbb{R}^2$ et une équation locale $y = f(x)$. Son 1-jet est une courbe gauche $\Gamma$ dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dite "relevée legendrienne" (l'enveloppe de ses tangentes). Réciproquement, une courbe gauche $\Gamma$ dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\{x, y = f(x), p = p(x)\}$ n'est une relevée legendrienne que si la *condition d'intégrabilité* $p = y'$ est satisfaite, i.e. si $\Gamma$ est une courbe intégrale de la *structure de contact* qu'est le noyau de la forme différentielle $\omega = dy - pdx$, i.e. si elle est partout tangente aux plans de contact $\omega = 0$. Cette distribution de plans est maximalement non intégrable car la 3-forme $\omega \wedge d\omega$ est une forme volume et est donc partout non nulle. Le lecteur intéressé pourra se référer à notre ouvrage [11].

# 7 Lautman et les mixtes. Nouvel exemple

C'est donc l'expression symbolique $\omega = dy - pdx$ qui gouverne les dérivées virtuelles "cachées", dont l'*actualisation* en une "vraie" dérivée correspond à l'annulation $\omega = dy - pdx = 0$. Une base des plans de contact est $t_1 = \partial_x + p\partial_y$ et $t_2 = \partial_p$ avec le crochet de Lie $[t_1, t_2] = t_3 = -\partial_y$, $[t_1, t_3] = [t_2, t_3] = 0$. Et puisque $\partial_x = t_1 + pt_3$, l'algèbre de Lie de la distribution des plans de contact est le fibré tangent tout entier (condition dite de Hörmander).

La "révolution copernicienne" démarrant avec Pfaff est tout à fait analogue à celle de Galois. Cette dernière est une révolution parce qu'il existe une théorie mathématique des groupes qui fonctionne comme une "background structure" synthétique a priori pour la résolution des équations algébriques. De même, on a découvert en élaborant le dit "problème de Pfaff" tout un univers géométrique (géométrie de contact, géométrie symplectique, etc.) qui fonctionne comme une "background structure" synthétique a priori pour le calcul différentiel.

L'actualisation d'une dérivée "virtuelle et cachée" en une dérivée effective au moyen d'une forme de contact $\omega = dy - pdx = 0$ est typiquement lautmanienne. C'est un *mixte* "variables indépendantes + systèmes de Pfaff

$\Longleftrightarrow$ dérivées"au sens où Lautman parlait de

> "mixtes intermédiaires entre des genres d'être différents et dont la considération est souvent nécessaire pour opérer le passage d'un genre de l'être à un autre genre de l'être." (p. 29)

# 8 Détermination finie, trivialité locale et théorème des fonctions implicites

La classification globale des applications différentiables étant trop difficile on peut commencer par analyser leur structure *locale*. L'analyse devient praticable lorsque $f$ est équivalente, localement en $a$, à l'un de ses jets $j^k f(a)$. On dit dans ce cas qu'elle est *déterminée à l'ordre* $k$ en $a$ (on prend le $k$ minimal avec cette propriété). Cela signifie que $j^k f$ contient toute l'information qualitative intrinsèque locale sur $f$ en $a$. On peut alors simplifier $f$ localement à équivalence près et la réduire à une "forme normale" prototypique algébrique.

Cette stratégie est justifiée par le résultat suivant. Il existe une forme normale typique des "bonnes situations" qui ne dépend que des dimensions respectives $m$ et $n$ de $M$ et de $N$. Soit $f : M \to N$ , $a \in M$, $f(a) = b$. Localement en $a$, $M$ est identifiable à $\mathbb{R}^m$ et localement en $b$, $N$ est identifiable à $\mathbb{R}^n$.

(i) si $m = n$, la "bonne situation" est que $f$ soit localement l'identité $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ;

(ii) si $m < n$, la "bonne situation" est que $f$ soit localement l'injection canonique $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ;

(iii) si $m > n$, la "bonne situation" est que $f$ soit localement la projection canonique $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$.

On dit alors que $f$ est *localement triviale* si elle est localement en $(a, f(a))$ différentiablement équivalente à la "bonne situation" pour $(m, n)$. Un des théorèmes classiques les plus importants dans cette perspective est le :

**Théorème des fonctions implicites** : *la trivialité locale ne dépend que de l'application linéaire tangente $D_a f$ de $f$ en $a$ (qui est une application linéaire de l'espace vectoriel tangent $T_a M$ de $M$ en $a$ qui est de dimension $m$ dans l'espace vectoriel tangent $T_{f(a)}N$ qui est de dimension $n$) et est réalisée dès que $D_a f : T_a M \to T_{f(a)}N$ est de* rang maximal : *$m$ et $n$ si $m = n$, $m$ si $m < n$ et $n$ si $m > n$. On dit alors que $a$ est un point* régulier *de $f$.*

Dans ce cas, $f$ est donc déterminée á l'ordre 1 et "linéarisable". Il s'agit d'un théorème profond disant que, quelle que soit la série infinie des jets de $f$, tous les jets d'ordre $> 1$ peuvent être annulés par un même changement de coordonnées.

# 9 Les théorèmes de transversalité de Thom

Par définition, la propriété de stabilité structurelle est une propriété *ouverte*. Une question cruciale est de savoir si elle est en plus *générique*, c'est-à-dire vérifiée sur un ouvert *dense* du $C^\infty(M, N)$ considéré.

Cela est faux pour les dynamiques générales mais Thom a pu le prouver pour les applications différentiables $f$. La démonstration se fait en deux étapes :

1. interpréter les propriétés de stabilité structurelle en termes de propriétés de *transversalité* dans les espaces de jets,
2. démontrer que les propriétés de transversalité sont génériques.

La notion de transversalité est intuitive et remonte à la géométrie algébrique italienne de la fin du XIX$^e$ qui parlait de variétés algébriques en "position générale". Soit $N$ une variété de dimension $n$ et $N_1$ et $N_2$ deux sous-variétés de dimensions respectives $n_1$ et $n_2$. On dit que $N_1$ et $N_2$ sont *transverses* si en tout $x \in N_1 \cap N_2$ on a $T_xN = T_xN_1 + T_xN_2$. Remarquons que si $N_1$ et $N_2$ sont disjointes, elles sont transverses et que si $n_1 + n_2 < n$, $N_1$ et $N_2$ ne sont transverses que si elles sont disjointes. Si $n_1 + n_2 = n$ (*i.e.* si les dimensions $n_1$ et $n_2$ sont complémentaires) alors $N_1$ et $N_2$ ne sont transverses que si tous leurs points d'intersection sont des points isolés d'intersection transversale. Si $n_1 + n_2 > n$ la condition de transversalité signifie que la dimension de l'intersection $N_1 \cap N_2$ est égale à l'excès $n_1 + n_2 - n$ de $n_1 + n_2$ sur $n$ et que, le long de cette intersection, l'intersection est transversale.

Si maintenant $W$ est une sous-variété de $N$ et si $f : M \to N$ est une application différentiable, on dit que $f$ est transverse sur $W$ (notation $f \pitchfork W$) si, pour tout $x \in M$ tel que $f(x) \in W$, on a $T_{f(x)}N = T_{f(x)}W + D_xf(T_xM)$. La transversalité implique en particulier que $f(M)$ "*évite*" toute sous-variété $W$ de $N$ dont la "codimension" $\dim(N) - \dim(W)$ est strictement supérieure à la dimension de $M$.

Le théorème fondamental de transversalité de Thom, basé sur le lemme de Sard disant que l'image des valeurs critiques d'une $f$ est de mesure nulle, dit que la transversalité dans les espaces de jets est *générique*.

**Théorème de transversalité de Thom.** – *Soit $W$ une sous-variété (stratifiée) de l'espace des jets $J^k(M,N)$. L'ensemble $T_W$ des $f \in \mathfrak{F} = C^\infty(M,N)$ dont le k-jet $j^k f$ est transverse sur $W$ est résiduel.*

**Corollaire.** – $f$ ne peut pas présenter génériquement des singularités de codimension $> \dim(M)$.

Les théorèmes de transversalité de Thom ont un nombre considérable de conséquences. Citons-en quelques unes tout à fait immédiates qui sont de simples conséquences de l'arithmétique des dimensions.

# 10 Les théorèmes d'immersion et de plongement de Whitney

Soit $f : M \to N$ avec $m \leq n$. On peut exprimer en termes de transversalité dans un espace de jets le fait qu'elle soit une *immersion*. Dire que $f$ est une immersion en $a \in M$, c'est en effet dire que $D_a f$ est de rang maximal $m \leq n$. Soit $J^1(M,N)$ le fibré des 1-jets. Sa fibre $F$ est l'espace des matrices jacobiennes $D_a f$ et est donc de dimension $mn$. Quant à $J^1(M,N)$, il est de dimension $m+n+mn$. Un simple calcul dimensionnel permet alors de savoir quand les immersions sont génériques.

Soit $H$ le sous-espace de $F$ composé des matrices $A$ qui ne sont pas de rang maximal $m$. $H$ est la fermeture des $A$ de rang $m-1$ et ce dernier est défini par le fait que tous les déterminants mineurs $m \times m$ de $A$ contenant un certain mineur $(m-1) \times (m-1) \neq 0$ s'annulent. Il y en a $n-(m-1) = n-m+1$. $H$ est donc de codimension $c = n-m+1$ dans $F$ et décrit ainsi un sous-fibré $S$ de codimension $c$ de $J^1(M \times N)$.

Par définition $f$ est une immersion si et seulement si $j^1 f(M)$ n'intersecte pas $S$. Mais si $m < n-m+1$, *i.e.* si $2m \leq n$, cette condition est une condition de transversalité. Le théorème de transversalité implique donc le

**Théorème d'immersion de Whitney.** – *Si $n \geq 2m$, les applications $f : M \to N$ sont génériquement des immersions.*

De même que si $n \geq 2m+1$, les $f$ sont génériquement des immersions injectives et si $M$ est compacte et si $n \geq 2m+1$, les $f$ sont génériquement des plongements faisant de $M$ une sous-variété de $N$.

Ce sont des théorèmes étonnants puisqu'ils disent que si $n$ est assez grand relativement à $m$, aussi loin que soit $f$ d'une immersion (par exemple $f$

constante), elle est infiniment voisine d'une immersion.

# 11 La théorie de Morse

À l'autre extrême des relations entre les dimensions $m$ et $n$, il y a le cas où $n$, loin d'être grand relativement à $m$, est au contraire minimal, *i.e.* égal à 1. Ce cas est celui de la théorie de Morse étudiant la structure des fonctions potentiel $f : M \to \mathbb{R}$.

Soit $f : M \to \mathbb{R}$. Le point $a \in M$ est dit *point critique* de $f$ si et seulement si la $(m \times 1)$-matrice jacobienne $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right)$ (son vecteur gradient) est nulle en $a$. En un tel point, $j^1 f(a)$ appartient à la sous-variété $S_1$ de $J^1(M, \mathbb{R})$ qui est sa section 0. $J^1$ est de dimension $m + 1 + m = 2m + 1$, sa fibre est de dimension $m$, $S_1$ est de dimension $m + 1$ et donc de codimension $m$.

On dit qu'un point critique $a$ est *non dégénéré* si le hessien de $f$ en $a$ – à savoir la matrice $m \times m$ des dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ – est non dégénéré c'est-à-dire de rang maximal $m$. Or on peut facilement interpréter cette propriété en termes de transversalité comme le montre la proposition suivante :

**Proposition.** – *$a \in M$ est un point critique non dégénéré si et seulement si $j^1 f(a) \in S_1$* (point critique) *et $j^1 f \pitchfork S_1$ en $j^1 f(a)$.*

Le théorème de transversalité donne par conséquent :

**Corollaire.** – *Soit $f : M \to \mathbb{R}$. Génériquement, tous les points critiques de $f$ sont non dégénérés. On dit alors que $f$ est une* fonction de Morse.

Si $f$ est de Morse, l'ensemble de ses points critiques $(j^1 f)^{-1}(S_1)$ est une sous-variété de codimension $m$ de $M$ et donc une sous-variété de dimension 0. Si $M$ est compacte, les fonctions de Morse ne possèdent par conséquent qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés et isolés.

Considérons maintenant les valeurs critiques de $f \in \mathfrak{F} = C^\infty(M, \mathbb{R})$, *i.e.* les valeurs $f(a)$ de $f$ pour $a$ critique. On peut exprimer en termes de transversalité le fait qu'elles soient toutes distinctes. En appliquant le théorème de transversalité on obtient :

**Corollaire.** – *Génériquement, une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction de Morse dont toutes les valeurs critiques sont distinctes. On dit alors que $f$ est une fonction de Morse* excellente.

On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait *intrinsèquement* les $f$ structurellement stables dont la stabilité structurelle est pourtant *extrinsèque* (situationnelle).

**Théorème de Morse.** – *Si $M$ est compacte, $f : M \to \mathbb{R}$ est structurellement stable si et seulement si $f$ est une fonction de Morse excellente. La stabilité structurelle est donc générique. Comme elle est ouverte, elle est donc ouverte et dense.*

# 12 Lautman : Structure et décomposition, propriétés intrinsèques/induites. Nouvel exemple

Le théorème de Morse caractérise intrinsèquement des entités dont la stabilité structurelle est pourtant extrinsèque. Lautman a beaucoup approfondi ces situations où

> "les propriétés *géométriques* de *relation* [entre une entité et un espace ambiant] se laissent (...) exprimer en propriétés *algébriques intrinsèques*." (p. 58)

et où il y a la possibilité

> "de ramener les relations qu'un être mathématique soutient avec le milieu ambiant, en propriétés d'inhérence caractéristiques de cet être." (p. 48)

Cela est lié à deux types de décompositions :

1. Les décompositions intrinsèques qui

   > "mettent en lumière les propriétés particulières d'un être au sein de l'ensemble auquel il appartient, et le caractérisent par la spécificité de sa structure propre." (p. 161)

2. Les décompositions extrinsèques, relatives à la totalité d'un ensemble d'éléments et qui

   > "se font selon un plan commun à tous [les êtres considérés] et traduit ainsi non pas seulement leurs propriétés particulières mais également leur appartenance à un même ensemble dont la structure globale se réfléchit en celle de ses élé."(p. 161)

Lorsqu'il y a équivalence entre deux types de décompositions :

"les mêmes êtres sont étudiables des deux façons et c'est cette rencontre des méthodes qui fait l'unité profonde des mathématiques." (p. 172)

# 13 Les anneaux locaux

Une fois acquis ce genre de résultats sur la stabilité structurelle, il faut passer à une clarification de l'instabilité. Pour cela, on commence par l'analyse *locale* des *singularités* qui induisent des instabilités.

On commence d'abord par les singularités de détermination finie ce qui, grâce aux formes normales dans les espaces de jets, permet de passer de la géométrie différentielle à *l'algèbre*.

Nous allons donner un bref aperçu de la théorie locale fondée sur les notions de détermination, de codimension, de *modèle transverse* et de *déploiement universel*. La classification bien connue des catastrophes élémentaires avec leur géométrie en découle directement.

Pour localiser on considère des "germes" de $f : M \to N$, $a \mapsto f(a) = b$ instables, c'est-à-dire, intuitivement, des restrictions de $f$ à des voisinages "infinitésimaux". Soient $(x_1, \ldots, x_m)$ des coordonnées locales en $a$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ en $b$. On travaille avec les entités algébriques suivantes :

1. D'abord l'anneau $\Gamma_a$ des germes en $a$ de fonctions $h : M \to \mathbb{R}$. C'est un anneau *local* (i.e. un anneau commutatif possédant un seul idéal maximal) d'idéal maximal $\mathfrak{m}_a$ constitué des $h : M \to \mathbb{R}$ s'annulant en $a$. $\mathfrak{m}_a$ est engendré par les (germes) $x_i$ et le germe de $h$ en $a$ est dans $\mathfrak{m}_a^k$ si et seulement si $h$ et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k-1$ s'annulent en $a$.
2. Ensuite l'anneau local $\Gamma_b$ d'idéal maximal $\mathfrak{m}_b$ et le morphisme d'anneaux $f^* : \Gamma_b \to \Gamma_a$ défini par la composition avec $f$ qui envoie $\mathfrak{m}_b$ dans $\mathfrak{m}_a$. Il traduit algébriquement la structure locale de $f$.
3. Enfin, l'anneau local quotient $Q_f(a) = \Gamma_a / f^*(\mathfrak{m}_b)\,\Gamma_a$. Il s'appelle l'*anneau local* de $f$ en $a$. C'est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_f = \mathfrak{m}_a / f^*(\mathfrak{m}_b)\Gamma_a$ qui, géométriquement, est l'idéal des germes $h : (M, a) \to \mathbb{R}$ qui s'annulent sur la fibre $f^{-1}(b)$. Autrement dit, $Q_f(a)$ est l'anneau local des restrictions des fonctions $h : (M, a) \to \mathbb{R}$ à la fibre $f^{-1}(b)$.

En termes de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m)$ en $a$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ en $b$, on a $\Gamma_a(M) \simeq \mathcal{E}_m$ et $\Gamma_b(N) \simeq \mathcal{E}_n$ où $\mathcal{E}_m$ (resp. $\mathcal{E}_n$) correspond au cas $(M, a) =$

$(\mathbb{R}^m, 0)$ (resp. $(N, b) = (\mathbb{R}^n, 0)$) et l'on étudie le morphisme d'anneaux locaux $f^* : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ et $Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$ où $\mathfrak{m}_m$ et $\mathfrak{m}_n$ correspondent aux idéaux maximaux.

Donnons quelques exemples simples d'anneaux $Q_f$.

1. Si $f : (M, a) \to (N, b)$ est une immersion ($m \leq n$) alors dans des coordonnées locales linéarisant $f$, $f$ s'écrit sous la forme normale $y_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $y_j = 0$ pour $j = m+1, \ldots, n$. Donc $f^*(y_i) = y_i \circ f = x_i$ si $i = 1, \ldots, m$ et $f^*(y_j) = y_j \circ f = 0$ si $j = m+1, \ldots, n$. Par conséquent, $f^*(\mathfrak{m}_n) = \mathfrak{m}_m$, $\mathfrak{m}_f = 0$ et

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m / \mathfrak{m}_m \simeq \mathbb{R}.$$

2. Si $f : (M, a) \to (N, b)$ est une submersion ($m \geq n$) alors, dans des coordonnées locales linéarisant $f$, $f$ s'écrit sous la forme normale $y_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Donc $f^*(y_i) = y_i \circ f = x_i$ si $i = 1, \ldots, n$. Par conséquent $f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$ est l'idéal de $\mathcal{E}_m$ engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$.

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m \simeq \mathcal{E}_{m-n}$$

est ainsi l'anneau local des germes en 0 des fonctions des $(m-n)$ variables restantes $(x_{n+1}, \ldots, x_m) \simeq \mathcal{E}_{m-n}$.

3. Si maintenant $f$ est une fonction de Morse avec un point critique non dégénéré dont le Hessien sous forme normale est $H(x) = \sum_{i=1}^{i=m} \varepsilon_i x_i^2$ ($\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, m$), alors $f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$ est l'idéal principal des fonctions $g \in \mathcal{E}_m$ qui s'écrivent comme produits $g = Hg'$ et

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m / (H)\ .$$

Notons à propos de ces exemples que l'isomorphisme des anneaux locaux $Q_f(a)$ et $Q_g(a)$ est une autre équivalence que l'équivalence différentiable, dénommée par John Mather *équivalence de contact*.

# 14 Détermination et codimension

Nous avons vu plus haut que $f$ est dite déterminée à l'ordre $k$ en $a$ si toute fonction $g$ telle que $j^k g(a) = j^k f(a)$ est équivalente à $f$ localement en $a$, et si $k$ est le plus petit entier satisfaisant cette propriété.

Une autre notion fondamentale est celle de *codimension*. De façon intuitive, la codimension de $f$ est la dimension du quotient de “l'espace tangent” total $T_f\mathfrak{F}$ par "l'espace-tangent" à la classe d'équivalence $\widetilde{f}$ de $f$. Dans le cas local où l'on se restreint à des germes il existe des formules pour la calculer explicitement.

Un résultat fondamental est que $f$ est de détermination finie si et seulement si elle est de codimension finie. Par exemple si $f$ est stable $f$ est de codimension 0 et est donc de détermination finie.

**Théorème de Mather.** – *Si $f : M \to N$ est stable, $f$ est déterminée à l'ordre $n+1$ relativement à l'équivalence différentiable* ($n$ est la dimension au but $N$).

Ce théorème généralise le théorème de Morse. En effet, lorsque $n = 1$ une fonction n'est localement stable que si ses points critiques sont non dégénérés et, en ces points, $f$ est effectivement déterminée à l'ordre $2 = n+1$.

Une conséquence du théorème de Mather est le

**Théorème.** – *Soient $f$ et $g$ stables. Si $Q_f^{n+1} \simeq Q_g^{n+1}$ alors $f$ et $g$ sont différentiablement équivalentes.*

L'équivalence de contact $Q_f \simeq Q_g$ est donc plus forte que l'équivalence différentiable.

# 15 Les formes normales comme "schémas de genèse par sélection" au sens de Lautman

Dans le cas de codimension finie, on peut, puisqu'il y a détermination finie, "descendre" en dimension finie en se ramenant à des espaces de jets où la situation devient *algébrique et calculable*. Cela conduit à un nouvel exemple du grand thème lautmanien des "mixtes" que nous avons déjà rencontré plus haut. Grâce à l'équivalence, on élimine de la structure de $f$ tout ce qui dépend du choix arbitraire des coordonnées locales et l'on ne garde que ce qui est *invariant*. Cela permet de *sélectionner* dans la classe d'équivalence $\widetilde{f}$ un élément privilégié de simplicité maximale et, dans les bons cas, algébrique.

Ces modèles algébriques s'appellent des *formes normales*. En tant qu'éléments "typiques" de leur classe d'équivalence, ils fonctionnent comme des *schèmes* au sens technique (kantien) du terme. Ils exemplifient des cas particuliers de "mixtes intermédiaires entre des genres d'être différents" que Lautman appelle des "schémas de genèse par sélection" (p. 123), c'est-à-dire des

> "procédés par lesquels un être peut être distingué au sein d'une infinité d'autres." (p. 29)

Lautman a d'ailleurs également fait remonter philosophiquement cette problématique à celle du schème kantien

Les formes normales font passer du qualitatif à l'algébrique et de l'intuition géométrique au calcul. En éliminant tout le qualitatif pssible grâce à des changements de coordonnées, il ne reste plus qu'un squelette algébrique (polynomial).

# 16 La classification des singularités de fonctions potentiel

Une des grandes réussites de René Thom, John Mather, Vladimir Arnold (cf. notre compilation [9] pour des précisions) est d'avoir résolu le problème de la classification des singularités de fonctions potentiel (cas $n = 1$) pour les petites codimensions.

On considère le germe instable d'une fonction potentiel $f : M \to \mathbb{R}$ en un point critique $a$ (on prend $a = 0$) qui est dégénéré (puisque les points critiques non dégénérés sont stables). On continue à noter $\mathcal{E}$ $(= \mathcal{E}_m)$ l'anneau local $\Gamma_a$ et $\mathfrak{m}$ $(= \mathfrak{m}_m)$ son idéal maximal. On peut supposer $f(0) = 0$, *i.e.* $f \in \mathfrak{m}$. Dire que 0 est un point critique de $f$ c'est dire que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, m$ s'annulent, *i.e.* que $f \in \mathfrak{m}^2$. Un théorème de séparation des variables, le "théorème des singularités résiduelles", dit que pour étudier les instabilités on peut se restreindre aux points critiques totalement dégénérés de hessien $H = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right) = 0$. Bref, on peut supposer que $f \in \mathfrak{m}^3$.

Soit alors $\Delta$ *l'idéal jacobien* de $f$ engendré par les $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. La codimension de $f$ à droite (i.e. seulement pour les changement de coordonnées en $0 \in M$, c'est la plus facile à utiliser) est égale à $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}\Delta$. On a le résultat, simple à énoncer et difficile à démontrer,

**Proposition.** – *$f$ est de détermination finie si et seulement si il existe $\ell$ tel que $\mathfrak{m}^\ell \subset \Delta$.*

En fait on a un résultat plus précis qui rend particulièrement clair le fait que $f$ est de détermination finie si et seulement si $f$ est de codimension finie :

**Théorème.** *Pour l'équivalence différentiable à droite,* $\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}^2\Delta + \mathfrak{m}^{k+2} \Longrightarrow f$ *est* $k$*-déterminée* $\Longrightarrow \mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}\Delta + \mathfrak{m}^{k+2}$.

Cet énoncé qui peut sembler un peu curieux recouvre une subtilité technique remarquable et fort intéressante, celle de l'existence de "modules" constitués de familles *continues* de types différentiables. Mais il est d'un usage très simple. Considérons par exemple $f = x^2 + y^4$ (le terme $x^2$ est stable, le terme $y^4$ est instable). On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$. Si l'on écrit la suite des $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{m}^3$, etc. sous la forme de leurs monômes générateurs et si l'on considère les multiples dans $\mathfrak{m}$ de $x$ et de $y^3$, on voit immédiatement que $\mathfrak{m}/\Delta = \mathbb{R}y + \mathbb{R}y^2$. La codimension est donc égale à 2. D'autre part $\mathfrak{m}^3 \subset \Delta$ et donc $\mathfrak{m}^5 \subset \mathfrak{m}^2\Delta$ et donc $f$ est 4-déterminée.

# 17 Les déploiements universels

Après avoir commencé à classer les singularités, envisageons pour conclure leurs déploiements et essayons de voir s'il y en existe d'*universels.* La notion de problème universel est cruciale dans de nombreux domaines et d'une grande portée philosophique. Elle est également très lautmanienne.

Intuitivement, si $f$ est $k$-déterminée, on peut se situer dans $J^k(m, 1)$, y considérer d'abord la classe d'équivalence $\tilde{f}$ de $f$ (sous variété algébrique dont l'espace tangent en $f$ est l'image dans $J^k$ de $\mathfrak{m}\Delta(f)$) puis, si $c = \mathrm{codim}(f)$, une section $W$ de dimension $c$ transverse à $\tilde{f}$ en $f$. $W$ étant isomorphe à un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^c$, cette section est identifiable à une déformation – à un déploiement – $f_w$ de $f_0 = f$, $w \in W$. Trois questions se posent alors naturellement :

(i) Tous ces déploiements sont-ils équivalents ?

(ii) Sont-ils stables en tant que déploiements (de germes) $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^c \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^c$ ?

(iii) Sont-ils universels au sens où tout déploiement $f_t$ de $f$ de base $T$ peut se déduire de $f_w$ par image réciproque d'une application, si possible unique, $\theta : T \to W$.

La réponse est *positive.* On considère les déploiements transversaux engendrés par une base $h_1, \ldots, h_c$ ($c = \mathrm{codim}(f)$) de $\mathfrak{m}/\Delta$, c'est-à-dire les familles

$$f_w = f + \sum_{i=1}^{c} w_i h_i.$$

**Théorème.** – *Tous ces déploiements transversaux de dimension* $c = \mathrm{codim}(f)$ *sont stables, universels et tous équivalents. À équivalence près, il n'existe essentiellement qu'un déploiement universel d'une singularité de codimension finie.*

## 18 Lautman et la "montée vers l'absolu". Nouvel exemple

Comme nous l'"avons souligné d'emblée, l'existence d'un déploiement universel est un exemple typique, et particulièrement profond, de *passage de l'essence à l'existence* et de *montée vers l'absolu* au sens de Lautman. Répétons que Lautman a développé ce thème surtout à propos du revêtement universel en topologie algébrique, de la classification des surfaces de Riemann (théorème d'uniformisation globale), de la théorie de Galois et de 1a théorie du corps de classes. Il concerne la possibilité

> "d'éliminer les imperfections de certains êtres mathématiques par passage de ce qu'ils sont primitivement à un idéal de simplicité absolue dont l'existence est impliquée dans l'enchevêtrement même de leur structure." (p. 77)

Il fait donc partie des procédés de passage de l'Essence (structure) à l'Existence :

> "comment la structure d'un être imparfait peut parfois préformer l'existence d'un être parfait en lequel toute imperfection a disparu." (p. 28)

Lautman le fait remonter philosophiquement aux métaphysiques platonicienne et cartésienne du "passage de l'idée d'imperfection à 1'idée de perfection" (p. 66). Dans ce contexte, l'existence n'est plus du tout un problème de non-contradiction comme en logique mathématique. Ce qui intéresse Lautman sont les cas

> "où l'on voit la structure d'un être s'interpréter en termes d'existence pour d'autres êtres" (p. 29) et
> "une structure préformer l'existence d'êtres abstraits sur le domaine que cette structure définit." (p. 97)

Cette dialectique de l'essence et de l'existence est inséparable de celle entre le *virtuel* et l'*actuel* : le virtuel contient en puissance *l'engendrement de son actualisation* au moyen d'un nouveau domaine sur lequel sont définies de nouvelles entités. Ici le virtuel est l'*instabilité* considérée comme une “imperfection” à compléter. La stabilité structurelle est un *principe de raison suffisante* (aussi essentiel pour Thom que le principe de causalité) et gouverne l'actualisation du virtuel. Le potentiel interne instable est un “centre organisateur”

1. qui *engendre son espace externe universel* $W$,
2. qui déploie l'ensemble de bifurcation $K_W$ classifiant de façon optimale tous les stabilisés possibles de $f$ à équivalence près.

La dimension de l'espace externe $W$ qui est la codimension du potentiel interne $f$ est un nombre qui a une *double signification* : d'une part elle mesure le degré d'instabilité interne et d'autre part elle donne la dimension de l'espace de déploiement externe optimal. Elle fournit un exemple magnifique de genèse reposant

> “sur le double sens de ce nombre, structural et créateur.” (p. 104)

Les exemples favoris de Lautman sont

1. le genre d'une surface de Riemann comme nombre des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes,
2. le nombre de classes d'idéaux d'un corps de nombres,
3. le nombre de représentations irréductibles d'un groupe fini.

# 19 Modèles hylémorphistes

Une dernière remarque pour conclure. Les déploiements universels *abstraits* servent de base chez Thom à des modèles de morphogenèse *concrète* dans des substrats matériels. Les dialectiques essence/existence et virtuel/actuel qui s'y réalisent sont, comme chez Lautman, inséparable de la dialectique métaphysique forme/matière et de l'*hylémorphisme*,

> “l'essence d'une forme se réalisant au sein d'une matière qu'elle créerait, l'essence d'une matière faisant naître les formes que sa structure dessine.” (p. 95)

Mais il s'agit là d'une autre histoire, traversant les siècles et remontant métaphysiquement à Aristote.

# Bibliographie


[1] Emmanuel Barot, *Lautman*, Figures du savoir, Les Belles Lettres, Paris, 2009.

[2] Alain Chenciner, "Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique", *Séminaire Bourbaki*, 424, 1973.

[3] Alain Chenciner, "Singularités des fonctions différentiables", *Encyclopædia Universalis*,1980.

[4] Gerhard Heinzmann, "La position de Cavaillès dans le problème des fondements en mathématiques, et sa différence avec celle de Lautman", *Revue d'histoire des sciences* , 40/1, (1987), 31-47.

[5] Gerald Holton, *The Scientific Imagination. Case studies*, Cambridge University Press, 1978.

[6] Albert Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Union Générale d'Éditions, Paris, 1977. [Réedition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946].

[7] Jean-Pierre Marquis, (dir.), *Albert Lautman, philosophe des mathématiques*, Philosophiques, 37, 2010.

[8] John Mather, 1968-1971. "Stability of $C^\infty$ Mappings", I–VI, *Annals of Mathematics*, 87, (1968), 89-104 (I), 89, (1969), 254-291 (II), *Publications Mathématiques de l'IHES*, Presses Universitaires de France, Paris, 35, (1968), 127-156 (III), . 37, (1969), 223-248 (IV), *Advances in Mathematics*, 4, (1970), 301-336 (V), *Liverpool Singularities Symposium*, (C.T.C. Wall ed.), *Lecture Notes in Mathematics*, 192, (1971), 207-253, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York (VI).

[9] Jean Petitot, *Èléments de théorie des singularités*, 1982/2011, http ://jeanpetitot.com/ArticlesPDF/Petitot_Sing.pdf

[10] Jean Petitot, "Refaire le Timée", *Revue d'Histoire des Sciences*, XL/1, (1987) 79-115. Version complète https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01130394v2

[11] Jean Petitot, *Neurogéométrie de la vision*, Les éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau ; 2008.

[12] René Thom, "Les Singularités des applications différentiables", *Annales de l'Institut Fourier*, 6, (1956), 43-87.

[13] René Thom "Thèmes de Holton et apories fondatrices", Colloque de Cerisy *Logos et théorie des catastrophes* (1982, J. Petitot dir.), Éditions Patiño, Genève, 1989, 468-481.