Kant e il problema del trascendentale, Il Protagora, XXXVII, 13 (2010) 63-86.

LE CONTINU CHEZ KANT

JEAN PETITOT

EHESS ET CREA (ECOLE POLYTECHNIQUE)

INTRODUCTION BIO-BIBLIOGRAPHIQUE

Au cours des années 1970, j'ai été amené à promouvoir un retour technique à une approche transcendantale des théories physiques et mathématiques modernes et cela en deux temps. Dans une première étape, j'étais confronté à la nécessité de thématiser philosophiquement cette nouvelle vague de géométrisation dans les sciences naturelles introduite par René Thom, Christopher Zeeman, Michael Berry, Ilya Prigogine, Hermann Haken, Henri Atlan et plusieurs autres scientifiques de premier plan, en particulier les physiciens spécialistes des phénomènes critiques. Il s'agissait d'une part de mathématiser au moyen de modèles morphodynamiques l'émergence de formes dans les substrats matériels, qu'ils soient physiques, chimiques ou biologiques, mais aussi, d'autre part, d'appliquer ces modèles à des domaines plus abstraits relevant de disciplines comme les neurosciences cognitives de la perception (visuelle et phonétique) voire même la sémio-linguistique. Les débats bouillonnants suscités par cette "révolution scientifique" conduisaient à interroger sur de nouvelles bases les processus de *constitution* des objectivités scientifiques et de mathématisation des données empiriques. De longues réflexions me conduisirent à la conclusion qu'une approche transcendantale était la plus appropriée. Le lecteur intéressé pourra consulter à ce sujet mes ouvrages de 1985 et 1992 *Morphogenèse du sens* et *Physique du sens*. Le sous-titre du premier, *Pour un schématisme de la structure*, reprenait le titre de ma thèse d'état de 1982 et le terme de "schématisme" y était utilisé au sens de "schématisme transcendantal".

Évidemment, un tel redéploiement d'une Analytique et d'une Esthétique transcendantales n'était possible qu'à travers une vaste généralisation du transcendantalisme kantien. Or, je me rendis compte rapidement qu'une telle généralisation rendait obsolète la plupart des critiques apparemment dirimantes qui avaient été portées contre le transcendantalisme à partir des "révolutions" physiques de la relativité générale et de la mécanique quantique. D'où la légitimité philosophique et l'intérêt technique, dans une seconde étape, d'une reprise des problèmes fondationnels de la physique moderne à partir de ces nouvelles bases. Après plusieurs années de réflexions et de séminaires (en particulier avec Jean-Michel Salanskis et Marco Panza), ce nouveau chantier déboucha sur tout un ensemble de travaux et de manifestations. J'aimerais citer le Colloque de Cerisy de septembre 1988 *Rationalité et Objectivités*, le Colloque de novembre 1989 à l'UNESCO *Rationalisme philosophique et scientifique*, le Colloque de Cerisy de septembre 1990 (co-organisé avec Fernando Gil et Heinz Wismann) *1790-1990. Le destin de la philosophie transcendantale. Autour de la Critique de la Faculté de Juger*, mes études "Logique transcendantale, Synthétique a priori et Herméneutique mathématique des Objectivités" in *Fundamenta Scientiæ* (1990), "Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale" in *Hommage à Jean-Toussaint Desanti* (1991), "Actuality of Transcendental Aesthetics for Modern Physics" in *1830-1930 : A Century of Geometry* (1992), "Continu et Objectivité. La bimodalité objective du continu et le platonisme transcendantal" in *Le Labyrinthe du Continu* (1992), "Pour un platonisme transcendantal" in *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles* (1995). L'essentiel de mes réflexions sur cette période est résumé dans mon ouvrage de 1991 *La Philosophie transcendantale et le problème de l'Objectivité*, actes d'un merveilleux entretien du Centre Sèvres organisé par le père François Marty. Une version italienne se trouve dans *Per un nuovo illuminismo* (2009).

Depuis une dizaine d'années, j'ai beaucoup approfondi les problèmes de constitution de l'objectivité physique avec mes collègues du CREA Michel Bitbol et Pierre Kerszberg et, à travers de nombreuses rencontres internationales, nous avons pu mesurer à quel point l'approche transcendantale avait refait du chemin. J'aimerais citer mon article "Objectivité faible et Philosophie transcendantale" in *Physique et Réalité, débat avec Bernard d'Espagnat* édité par M. Bitbol et S. Laugier en 1997, le numéro spécial des *Archives de Philosophie* de 2000, *Philosophie et Sciences : Objectivité scientifique et logique transcendantale* organisé avec Michel Bitbol et Pierre Kerszberg, l'ouvrage de référence que nous venons de publier chez Springer *Constituting Objectivity: Transcendental Approaches of Modern Physics* ainsi que le colloque organisé avec M. Bitbol et Alexei Grinbaum à la Fondation des Treilles en avril 2007: *Philosophical and formal foundations of modern physics*.

De remarquables convergences se sont ainsi fait jour entre plusieurs groupes de recherche. L'une des plus manifestes est celle avec Michael Friedman. Dans son ouvrage *Dynamics of Reason* (1999), Friedman a également montré, de façon indépendante, que le développement de la physique moderne ne détruit pas la perspective transcendantale-constitutive :

> "We still need superordinate and highly mathematical first principles in physics – principles that must be injected into our experience of nature before such experience can teach us anything at all." (p.14)

Ces conditions de possibilité des théories physiques sont des principes de coordination synthétiques a priori qui ne sont pas des jugements logico-analytiques.

> "What characterizes [them] is rather their special constitutive function: the function of making the precise mathematical formulation and empirical application of the theories in question first possible." (p.40)

Les principes a priori de Kant peuvent être généralisés, relativisés et historicisés :

> "What we end up with (...) is thus a relativized and dynamical conception of a priori mathematical-physical principles, which change and develop along with the development of the mathematical and physical sciences themselves, but which nevertheless retain the characteristically Kantian constitutive function of making the empirical natural knowledge thereby structured and framed by such principles first possible." (p.31)

Évidemment, répétons-le, une généralisation aussi massive du transcendantal implique une prise de distance par rapport à la lettre de Kant. Elle est un peu analogue à la généralisation que l'empirisme des Lumières écossaises a pu connaître, de l'empirisme logique du Cercle de Vienne à l'empirisme constructif de Bas van Fraassen.

Dans cette courte étude, j'aimerais résumer la façon dont je vois les mathématiques pures chez Kant.

Kant connaissait bien les mathématiques de son temps puisqu'il les a même enseignées pendant huit ans entre 1755 et 1763. Mais il ne les a pas particulièrement approfondies. On peut donc considérer à juste titre, et c'est ce que font la plupart des commentateurs, que la philosophie des mathématiques de Kant reste assez limitée et que des problèmes comme ceux du caractère synthétique d'un énoncé arithmétique tel que 7 + 5 = 12 sont dépassés. Toutefois, à y regarder de plus près, on constate que beaucoup de problèmes soulevés par Kant sont plus profonds qu'ils n'en ont l'air, qu'ils sont longtemps restés ouverts et qu'ils sont même encore ouverts pour certains à l'époque actuelle.

1. Le continu

1.1. La non compositionnalité du continu chez Kant

Malgré la profondeur de la seconde antinomie cosmologique sur la "divisibilité / non-divisibilité" infinie de la matière, Kant fait partie des philosophes "continuistes" en mathématiques. Il est contre les points-atomes géométriques.

En physique, il en va autrement. La situation est plus complexe et Kant a beaucoup évolué au cours de sa réflexion. La *Monadologie physique* de 1756 est déjà physiquement atomiste et géométriquement continuiste. Kant y introduit l'idée profonde qu'une monade "remplit un espace déterminé" non ponctuel (Kant 1756 / 1970, p. 41) et que cela n'est pas contradictoire avec la divisibilité infinie de l'extension de la monade car la monade possède des "déterminations internes".

> "Or les déterminations internes ne sont pas dans l'espace, précisément parce qu'elles sont internes" (p. 41).

Elles ne se divisent pas quand on divise l'extension. Le petit espace qu'occupe une monade est donc une "sphère d'activité" et non pas une simple extension. Il faudra attendre l'usage du concept moderne de fibration en théorie quantique des champs pour géométriser rigoureusement cette remarquable intuition kantienne.

En revanche, dans l'*Opus Postumum*, Kant est continuiste également au niveau physique. Il explique que les forces fondamentales primitives internes à la matière sont immanentes à un *éther* envahi de calorique agitant sans cesse et uniformément toutes les parties de tous les corps. Il adopte un anti-atomisme en quelque sorte "énergétiste" avant la lettre. Sorte de continuum dynamique, énergétique, spatialisé et réel, l'éther est le *fondement* originaire des mouvements causés par des forces mécaniques dérivatives secondes.

Revenons au continu purement géométrique. Il se trouve à la base des intuitions pures de l'espace et du temps qui sont les formes des intuitions sensibles externes et internes. Son rôle constitutif est donc primordial. Il est

(i) une donnée intuitive originaire,

(ii) une structure non compositionnelle.

Dès la *Dissertation* de 1770 (Section III : *Des principes de la forme du monde sensible*), Kant insiste sur le fait que les intuitions pures sont des grandeurs continues et que

> "une grandeur est continue quand elle n'est pas composée d'éléments simples" (P 647, AK II 399).

> "… toute partie du temps est encore un temps, et les éléments simples qui sont dans le temps, à savoir les *moments*, ne sont pas ses parties, mais des *limites*, entre lesquels se place un temps" (P 648, AK II 399).

Il en va de même pour l'espace, mais la note du §15C ("Le concept d'espace est donc une intuition pure") ajoute une remarque particulièrement profonde et intéressante à propos du concept de limite :

> "L'espace doit nécessairement être conçu comme une grandeur continue; de cela, la démonstration est facile, et je passe. Il en résulte que le simple, dans l'espace, n'est pas une partie, mais une limite. Mais la limite, prise au sens général, est ce qui, dans une grandeur continue, contient la raison des délimitations. Un espace qui n'est pas la limite d'un autre est *complet* (*solide*). La limite du solide est la *surface*, la limite de la surface est la *ligne*, la limite de la ligne est le *point*. Il y a donc trois espèces de limites dans l'espace, comme il y a trois dimensions. De ces limites, deux (la surface et la ligne) sont elles-mêmes des espaces. Le concept de limite ne concerne aucune autre grandeur que l'espace et le temps" (P 654, AK II 404).

Cette conception de la continuité est intégralement reprise dans les "Anticipations de la perception" :

> "L'espace et le temps sont des quanta continua, parce qu'aucune partie n'en peut être donnée, sans être enfermée entre des limites (points ou instants), donc seulement de sorte que cette partie soit à son tour un espace ou un temps. L'espace ne se compose donc que d'espaces et le temps que de temps. Points et instants ne sont que des limites, c'est-à-dire de simples places, où l'espace et le temps ont leur limitation; or, ces places présupposent toujours ces intuitions qu'elles doivent délimiter ou déterminer, et ni l'espace ni le temps ne peuvent être composés de simples places, comme de parties intégrantes qui pourraient être données [A 170] avant même l'espace ou le temps" (P 909, AK III 154).

Cette essence non compositionnelle et "cohésive" du continu implique en particulier le principe leibnizien ou "loi métaphysique" de continuité : "tous les changements sont continus" (*Dissertation*, P 648, AK II 399).

Il faut insister sur le fait que Kant fonde sa conception de l'espace sur des propriétés caractéristiques de sa *méréologie* (relations entre tout et parties) et, en particulier sur le concept de limite, autrement dit de bord ou de frontière (Grenze). Les points sont des bords de segments et il est par conséquent impossible de considérer le continu comme un ensemble de bords. C'est pour des raisons de méréologie que l'espace n'est pas compositionnel (un bord ne peut précéder ce dont il est le bord : il s'agit là d'un exemple typique de synthétique a priori que l'on retrouve chez Thom) et ne peut pas être un concept.

1.2. Actualité du problème

On pourrait penser que l'arithmétisation du continu avec le modèle ensembliste de Cantor-Dedekind résout tous ces problèmes mais cela est loin, très loin, d'être le cas.

1.2.a. Le continu phénoménologique

D'abord, le continu des intuitions pures n'est pas le continu mathématique arithmétisé dont nous avons l'habitude. C'est un continuum *originairement donné* dans les formes de l'intuition, autrement dit un continuum *phénoménologique* profondément lié à la perception, le continu de l'espace et du temps sensibles. Même après l'arithmétisation cantorienne, la non compositionnalité du continu phénoménologique a continué à poser des problèmes centraux pour les plus grands philosophes et psychologues. Il suffit de penser à Peirce et à sa "synéchologie" [1], à Brentano et, surtout, à Husserl.

Comme nous venons de le voir, Kant définit les points comme des "limites", c'est-à-dire comme des *bords*. Or un bord est un exemple typique de concept relationnel et même de "moment dépendant". Il ne peut pas plus exister sans l'espace dont il est le bord que la couleur d'un objet ne peut exister sans l'extension spatiale qu'elle remplit. Les bords ne peuvent donc être des points individués isolés et indépendants. En revanche les *nombres* qui permettent de les situer dans le continu sont, eux, des entités isolables et indépendantes (cf. plus bas).

Ce que Kant appelle un "solide" est, en termes de topologie et de géométrie différentielle, un fermé plein (un fermé égal à la fermeture de son intérieur) dont le bord est une surface différentiable par morceaux. Et, comme nous venons de le souligner, cette

---

[1] Peirce est l'un des grands philosophes du continu phénoménologique. Sa réflexion l'a conduit, sur le plan mathématique, à être l'un des premiers à remettre radicalement en cause l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) et à définir la puissance du continu κ comme un grand cardinal, en l'occurrence un cardinal inaccessible (si $\lambda < \kappa$ alors $2^{\lambda} < \kappa$). Il existe même des textes où Peirce explique que la puissance du continu est tellement grande qu'elle ne peut pas être un cardinal.

définition s'effectue dans le contexte de ce que l'on appelle depuis la troisième *Recherche Logique* de Husserl et les travaux de Stasnislaw Lesniewski entre 1916 et 1921, une méréologie. Or la définition des bords dans une méréotopologie qui soit compatible aux données des théories de la perception reste, encore aujourd'hui, un problème très largement ouvert [2]. Pour s'en convaincre il suffit de citer le titre de la récente thèse soutenue par Olivia Breysse sous la direction de Michel De Glas : *Résolution du problème des frontières dans la formalisation logico-algébrique de l'espace sensible*.

Par ailleurs, la note du §15C de la *Dissertation* est extrêmement intéressante car elle donne une définition *phénoménologique* de la *dimension*. On sait qu'il est très difficile de définir correctement le concept de dimensionnalité d'un espace. Les définitions mathématiques habituelles ne sont pas phénoménologiques dans la mesure où elles sont abstraites et idéales et ne sont pas données dans l'évidence intuitive de l'expérience. Comme Husserl l'a expliqué dans de nombreux textes, et en particulier dans *Ding und Raum* (1907), phénoménologiquement parlant les seules données originaires sont des fragments d'espace remplis de qualités sensibles. Et pour définir purement phénoménologiquement la dimension à partir de ces données originaires, Husserl reprend presque mot à mot (pour le champ visuel bidimensionnel) la description kantienne :

> "La bidimensionnalité signifie que chaque fragment du champ est délimité par des limites dépendantes, qui sont elles-mêmes à leur tour des multiplicités continues, donc à nouveau fragmentables de telle sorte que ses fragments 'se limitent réciproquement'. Mais les limites ne sont maintenant pas fragmentables, elles sont de simples éléments de l'étendue, des 'points'" (Husserl 1907, p. 202).

Nous trouvons là une idée géométrique remarquable qui est celle sous-tendant le concept géométrique moderne (en grande partie dû à René Thom) de *stratification* en géométrie différentielle. La donnée première est celle d'une sous-variété fermée pleine (d'un domaine, d'une "partie", d'un "fragment") D d'une variété différentiable W. La sous-variété D a la même dimension que W (que l'on veut déterminer) et elle est munie d'un bord $B = \partial D$. On fait des hypothèses de régularité sur les bords à savoir que ce sont eux aussi des sous-variétés différentiables par morceaux. La première idée fondamentale est que le bord d'une variété de dimension n est de dimension $n - 1$. La seconde est que l'on peut itérer l'opération bord ∂ et

[2] Cf. par exemple Smith [1993], Petitot [1994b], Breysse [2007].

considérer $\partial^k D$ pour $k = 1, 2, \ldots$. La troisième est que les points sont infragmentables (sans bord possible) et donc de dimension 0. Kant applique cette idée pour $n = 3$: "solide" $\rightarrow$ "surface" $\rightarrow$ "ligne" $\rightarrow$ "point".

1.2.b. Le continu intuitionniste

La non compositionnalité signifie que le continu ne peut pas être conçu comme un ensemble de points (comme dit Kant, il ne peut pas être composé de simples places-limites). Ce point de vue se retrouve dans nombre de théories modernes et tout d'abord dans la théorie intuitionniste du continu. En logique intuitionniste, la loi du tiers exclu affirmant que deux éléments a et b de $\boldsymbol{R}$ [3] sont soit différents soit égaux, ainsi que la loi de comparabilité disant que soit $a = b$, soit $a < b$ soit $a > b$, ne sont plus valables. Cela est dû à l'impossibilité *d'individuer* tous les éléments de $\boldsymbol{R}$. Pour Hermann Weyl, cette limitation intrinsèque des ressources d'individuation était caractéristique du statut du continu comme *intuition* et, effectivement, on peut dire que Kant propose avant la lettre une théorie intuitionniste du continu. En logique intuitionniste, le continu est indécomposable et le principe de continuité de Leibniz est valable puisque toute fonction de [0, 1] dans $\boldsymbol{R}$ est uniformément continue.

Étant donné le lien étroit découvert par Bill Lawvere entre la théorie catégorique des topoï et la logique intuitionniste, on ne s'étonnera pas du fait que dans nombre de topoï l'objet $\boldsymbol{R}$ (construit à partir de $\boldsymbol{N}$ de façon classique) soit généralement indécomposable et que tous les morphismes $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ soient continus.

1.2.c. Intuition et quantification

Ces propriétés "intuitionnistes" du continu n'étaient évidemment pas exprimables dans la logique syllogistique élémentaire non quantifiée dont disposait Kant et étaient donc attribuées à un "supplément" extra-logique fourni par l'intuition pure. Par exemple, comme l'a montré Michael Friedman dans son article "Kant's Theory of Geometry" (1985), la propriété de densité :

$$\forall x \forall y \, (x < y \rightarrow \exists z \, (x < z < y))$$

---

[3] Nous notons en gras italiques les structures numériques de base : $\boldsymbol{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\boldsymbol{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\boldsymbol{Q}$ le corps des rationnels, $\boldsymbol{R}$ le corps des réels, $\boldsymbol{C}$ le corps des complexes..

inclut, de par la structure même de sa quantification, une itération et fournit une fonction de Skolem qui permet de déduire l'infini de la seule logique. Cela était impossible avec la logique de l'époque de Kant.

> "So, for Kant, one cannot represent or capture the idea of infinity formally or conceptually".

L'intuition signifie, entre autres, cette irréductibilité. Elle fournit les procédures analogues, par exemple, aux procédures d'itération et aux fonctions de Skolem.

Il en va de même pour le passage de la densité à la continuité proprement dite. La convergence des suites de Cauchy (s_n) exprimant la complétude de ***R*** est quantificatoirement compliquée, de type $\forall\exists\forall\forall \rightarrow \exists\forall\exists\forall$:

$$\forall\varepsilon\exists N\forall m\forall n\ (m, n > N \rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon) \rightarrow \exists s\forall\varepsilon\exists N\forall n\ (n > N \rightarrow |s_n - s| < \varepsilon).$$

Mais la représentation temporelle intuitive des limites permet à Kant de représenter intuitivement des processus qui deviendront après lui des opérations logiques de type $\forall\exists\forall$.

Hintikka a également bien noté ce point. La complétude de ***R*** ne fait pas partie des axiomes d'Euclide (Hilbert l'ajoutera dans ses *Grundlagen der Geometrie*) et l'intuition remplace cet axiome manquant.

On voit qu'il n'y a pas grand sens à critiquer Kant à partir de l'opposition entre syntaxe et sémantique en théorie logique des modèles. En effet, dans le cadre de la logique de son époque, une géométrie non interprétée ne pouvait pas être une géométrie puisqu'elle ne pouvait même pas représenter le concept d'une infinité de points. Depuis Hilbert, la géométrie axiomatique a les moyens de ne plus avoir besoin d'une intuition adjuvante. Mais cela ne signifie en rien que la problématique de l'intuition perd sa pertinence. Bien au contraire. Nous le verrons au § 4.1.

1.2.d. L'intuition du continu chez Riemann.

D'ailleurs, jouer les progrès post-kantiens des mathématiques contre l'intuition pure kantienne conduirait à le faire pour des mathématiciens prestigieux et en particulier Riemann. En effet, dans sa célébrissime Habilitation de 1854 *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Riemann devait définir ses métriques sur un substrat et pour ce faire s'est profondément inspiré du psychologue J.F. Herbart comme cela est bien attesté par ses réflexions philosophiques. Herbart avait beaucoup réfléchi sur la façon dont des représentations mentales peuvent présenter des transitions continues (ce qu'il appelait des

Reihenformen, des "formes sérielles") et il avait forgé le néologisme de *synécologie* [4] à cet effet.[5] Le concept riemannien de variété (*Mannigfaltigkeit*) provient directement de cette psychologie continuiste car c'est sur ces substrats intuitifs que Riemann introduisit les concepts fondamentaux de coordonnées locales et de métrique riemannienne. Autrement dit, comme le remarque Erhard Scholtz, la différence entre la théorie de Riemann et la théorie moderne des variétés qui en est issue est que

> "the role of the topological space [is] taken in a vague sense by a Herbartian-type of 'serial form', backed by mathematical intuition".[6]

L'espace "intuitif" sous-jacent à une variété riemannienne est une variété différentiable. Mais tant que ce concept n'a pas été formalisé par Hermann Weyl, il est resté intuitif dans un sens très proche de l'intuition pure kantienne.

Affirmer que la théorie kantienne de l'intuition pure est "fausse" parce qu'il existe plusieurs structures métriques possibles sur $\boldsymbol{R}^3$ est aussi fallacieux que d'affirmer que la géométrie riemannienne est "fausse" parce qu'il peut exister plusieurs structures différentiables sur une même variété topologique (par exemple les sphères exotiques de Milnor).

1.2.d. Analyse non standard

À supposer qu'on laisse maintenant de côté toute référence à une intuition pure phénoménologique pour adopter un point de vue cantorien, il ne faudrait pas croire pour autant que la théorie logique des modèles réussit à combler l'écart entre le "discursif" et l'"intuitif". Bien au contraire. Elle lui donne seulement une nouvelle formulation, encore plus profonde, encore plus transcendantale si l'on peut dire. En effet, comme le disait déjà Veronese, comme l'a affirmé Gödel, comme l'affirment les spécialistes de l'Analyse non standard, comme l'a encore repris tout récemment Alain Connes, la signification des théorèmes de limitation (incomplétude, indécidabilité, etc.) et d'existence de modèles non

---

4 Du terme grec signifiant “continu”.

5 Peirce aussi fondera sa phénoménologie de la perception (phanéroscopie) sur un concept de “synéchisme”.

6 Scholtz [1992], p. 23.

standard est précisément que le continu constitue une réalité *objective*, informationnellement infinie, *transcendant* sa maîtrise symbolique logique (que Kant appelait "discursive"). [7]

Ce n'est pas lieu de reprendre ici les théories visant, dans le cadre de la théorie des ensembles, à dominer axiomatiquement le continu. Le lecteur intéressé pourra se référer à mes études [1979], [1989], [1991b], [1992b], [1995] et [2008a] et, surtout, à leurs bibliographies. Une bonne partie de ces théories peuvent s'interpréter philosophiquement de la façon suivante. On suppose que le continu est originairement *donné* comme un continuum phénoménologique et/ou une forme de la réalité mais qu'il doit être *pensé*, compris, exploré, modélisé mathématiquement, l'opposition entre donné et pensé reprenant l'opposition kantienne entre *gegeben* et *gedacht* qui se trouve à la base de toute la problématique transcendantale. La question est alors double :

(i) savoir à quel degré de compréhension peuvent conduire les différentes théories mathématiques en fonction de leurs forces respectives;

(ii) savoir quel est le lien entre cette compréhension mathématique formalisée et la pré-compréhension du continu associée à sa donation intuitive.

Dans ce contexte mathématique, la difficulté d'élaborer une "bonne" définition ensembliste du continu se manifeste de plusieurs façons. Nous en citerons trois.

1. L'existence de modèles non standard de $\boldsymbol{R}$, c'est-à-dire d'extensions, dites "élémentaires", $\boldsymbol{R}^*$ de $\boldsymbol{R}$ qui sont indiscernables de $\boldsymbol{R}$ pour la logique des prédicats du premier ordre très forte où il existe un symbole de constante pour chaque élément de $\boldsymbol{R}$. Ces modèles étudiés sémantiquement par Abraham Robinson et syntaxiquement par Edward Nelson remontent à Giuseppe Veronese qui dans ses *Fondamenti di Geometria* développa l'une des premières théories non archimédiennes du continu. Contrairement à l'arithmétisation à la Cantor-Dedekind, il part d'un continu intuitif conçu comme "forme fondamentale" originairement donnée (c'est-à-dire comme intuition pure a priori) et y inscrit des points-marques qui en brisent l'homogénéité. Les nombres permettent de repérer ces marques par rapport à un point origine O au moyen d'une unité OA. Ce sont des instruments de mesure. Par itération, OA définit une "échelle" sur la forme fondamentale. Veronese introduit alors l'axiome non archimédien que la forme fondamentale se prolonge au-delà de $\boldsymbol{Z}$.OA. Pour mesurer la forme fondamentale dans sa totalité, il faut donc étendre $\boldsymbol{R}$ par des nombres infinis, et donc par des

[7] Sur la théorie logique des modèles et l'Analyse non standard, cf. MNS [1989], Petitot [1979], [1989]. Sur la philosophie des mathématiques de Gödel, cf. Wang [1987]. Sur la position d'Alain Connes, cf. Changeux-Connes [1989] et Petitot [1991b].

infinitésimales en prenant les inverses, et l'on aboutit ainsi à un modèle non standard. Or il faut insister sur le fait que dans *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, le néo-kantien Paul Natorp a accordé beaucoup d'attention à la construction de Veronese [8]. Cela est bien compréhensible puisque la démarche de Veronese approfondit la différence kantienne entre les formes de l'intuition (continuum phénoménologique originairement donné) et les "Axiomes de l'intuition" (grandeurs extensives numériquement mesurables) [9].

2. L'impossibilité de développer une "bonne" théorie du continu sans enrichir les axiomes de *ZFC* (Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix). En effet, dans le modèle "ontologiquement déflationniste" de ***R*** que l'on trouve dans le modèle *L* des ensembles constructibles de Gödel (le plus petit modèle de *ZFC* comprenant les ordinaux), les propriétés du continu sont très "mauvaises" au sens où des classes de sous-ensembles, certes plus complexes que les sous-ensembles boréliens et analytiques (au sens de Souslin) mais quand même construits bien régulièrement à partir de ces derniers, n'ont pas nécessairement de "bonnes" propriétés de régularité. Pour démontrer celles-ci, il faut adjoindre à *ZFC* des axiomes d'existence de "grands cardinaux" et donc opter pour une "ontologie inflationniste" de la théorie des ensembles [10].

3. La meilleure méthode pour arriver à un "bon" modèle ensembliste du continu est d'essayer de construire un modèle de ***R*** dont les propriétés ne peuvent plus être modifiées par forcing [11]. C'est ce qu'est en train de réussir Hugh Woodin (sans doute le plus grand spécialiste actuel de ces questions) mais le problème est d'une difficulté inouïe.

L'une des conclusions philosophiques de tous ces travaux est que, si l'on veut traduire dans un univers de théorie des ensembles satisfaisant la logique classique (i.e. non intuitionniste) les propriétés "intuitives" du continu, il faut des modèles de cardinal immense, à la limite de l'inconsistance logique. Telle est la forme contemporaine de l'opposition kantienne entre "intuitif" et "logico-discursif" : le continu transcende toute maîtrise logique élémentaire et l'intuitif est incommensurablement plus riche que le conceptuel.

---

[8] Cf. Peiffer-Reuter [1989].

[9] Pour des précisions, cf. Petitot [1994a].

[10] Cf. Petitot [1992b] et [1995].

[11] La méthode de forcing introduite par Paul Cohen est un moyen systématique de forcer des modèles à possèder certaines propriétés. Par exemple pour rendre $\aleph_1$ dénombrable on "force" la construction d'une surjection $\aleph_0 \rightarrow \aleph_1$.

2. Infini potentiel et infini actuel, nombre et arithmétisation

2.1. Le problème du nombre

Comme forme de l'intuition, le continu est un continuum phénoménologique intuitif de nature aristotélicienne caractérisé par le "fusionnement" de ses parties et l'infini *potentiel* de sa divisibilité (qui n'est pas composition). Comme nous venons de le voir, on trouve encore après l'arithmétisation du continu de telles conceptions chez Peirce (le continu est inépuisable, non compositionnel, condition du général), chez Brentano et chez Stumpf (qui a élaboré le concept de fusionnement, i.e. de *Verschmelzung*), chez Husserl [12], chez Brouwer et Weyl (le continu intuitif n'est pas compositionnel, ses "points" sont en puissance, donc *non* individués et non exactement localisés, ce qui empêcherait, croit-on, toute formalisation ensembliste, celle-ci étant nécessairement atomiste [13]), chez Thom (le primat ontologique du continu comme homogénéité qualitative). Soit elles "psychologisent" le continu phénoménologique (Brentano et les Gestaltistes, Poincaré), soit elles "l'ontologisent" (Thom), soit elles le pensent comme proprement intuitif et phénoménologique (Peirce, Husserl, Weyl).

Le lien est étroit entre la non compositionnalité fusionnante du continu et, d'une part, le statut actuel/potentiel de l'infini et, d'autre part, le problème de la mesure numérique du continu. Dans les conceptions que nous venons d'évoquer on considère :

(i) qu'un point du continu est une discontinuité (une marque, une hétérogénéité locale, un bord) engendrée par un processus de passage de la puissance à l'acte,

(ii) que ces points actuels constituant des atomes singuliers individuables peuvent être des référents de symboles et des objets de quantification,

(iii) que les systèmes de nombres ont pour fonction de dominer axiomatiquement de tels systèmes de marques,

---

[12] A propos du concept de *Verschmelzung* chez Stumpf et Husserl (en particulier dans la troisième *Recherche Logique*), cf. Petitot [1991b], [1994b] et [1999].

[13] La situation est plus complexe car, dans un univers ensembliste V qui contient un "bon" modèle du continu, la plupart des nombres réels sont radicalement non individuables. Par exemple il existe un réel non constructible, noté $0^{\#}$, qui permet de définir la vérité dans le sous-univers L des constructibles de Gödel sans pour autant contredire le théorème de Tarski sur la non définissabilité de la vérité car V est beaucoup plus gros que L.

(iv) que l'arithmétisation du continu consiste à faire équivaloir le continu phénoménologique intuitif à un infini actuel ensembliste (atomiste) nombré par un système de nombres,
(v) mais qu'une telle arithmétisation représente une prétention irréalisable violant le mode de donation originaire du continu.

Il est intéressant de voir que tous ces problèmes centraux de la philosophie des mathématiques se trouvent déjà en germe chez Kant (et d'ailleurs aussi en partie chez Leibniz).

2.2. Une grandeur infinie donnée

On connaît la formule de l'exposition métaphysique de l'espace comme condition de possibilité des phénomènes dans l'Esthétique transcendantale :

> "L'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée" (P 786, AK III 53).

La méréologie de l'espace est fortement accentuée (toute partie de l'espace est obtenue par délimitation "en lui") et explique pourquoi ce n'est pas un concept général mais une intuition singulière.

> "Aucun concept ne peut comme tel être pensé, comme s'il contenait *en lui* une multitude infinie de représentations. C'est pourtant ainsi que l'espace est pensé (car toutes les parties de l'espace coexistent à l'infini). La représentation originaire de l'espace est donc une intuition a priori, et non pas un concept" (ibid.).

Cette "grandeur infinie donnée" est la condition de possibilité de la géométrie (exposition transcendantale) et devient elle-même objet de géométrie en tant qu'*intuition formelle* expliquant la synthèse *non* conceptuelle donnant à la forme de l'intuition son unité originairement donnée (note au §26 de la *Déduction transcendantale*).

Il y a donc dans la donation de l'espace comme intuition pure un *infini en acte*, celui, extensif, de l'illimitation, mais cette illimitation est subtile et, comme l'a remarqué Frank Pierobon dans son *Kant et les Mathématiques*, on se heurte ici à une foule de problèmes techniques difficiles si l'on n'y prend garde. Car cette intuition donnée est aussi construite (intuition formelle) [14] et fonctionne comme un "horizon" pour des synthèses toujours possibles mais toujours inachevables et non pas comme "le produit d'une synthèse

---

[14] Cf. Chenet [1994].

immédiate" (Pierobon 2003, p. 101). C'est toute l'ambiguïté entre "donné" et "représenté comme donné". L'infini donné comme illimité n'est pas une illimitation de la synthèse.

Comme l'explique Pierobon (p. 102) en suivant Michel Fichant (1997), les intuitions pures

> "sont des quanta originaires que l'entendement n'a pas encore rendus mesurables".

2.3. Le nombre et la mesure

Donc si cet infini *en acte* est celui d'une grandeur, c'est parce que la grandeur n'y est pas encore nombrée en tant que telle. C'est *l'évaluation* de la grandeur, la mesure, qui est numérique. Elle est une comparaison numérique entre grandeurs qui est étalonnée par une unité de mesure et présuppose un système de nombres.

Comme il est expliqué au début de l'*Analytique des Principes* (Chap. I sur le schématisme), le nombre est pour Kant le *schème* de la grandeur :

> "Le *schème* pur de la *grandeur* (*quantitatis*), considérée comme un concept de l'entendement, est le nombre, qui est une représentation embrassant l'addition successive de l'unité à l'unité (de l'homogène)" (P 888, AK III 137).

C'est l'unité de la synthèse de l'appréhension d'un divers homogène, un concept certes, intellectuel et abstrait comme tout concept, mais qui ne s'actualise concrètement qu'à travers des mesures et ces mesures font intervenir le temps à cause de l'addition "successive". Il est très intéressant de voir que pour Kant l'arithmétique abstraite est "intellectuelle" dans la mesure où elle ne porte pas sur des grandeurs en tant que telles mais uniquement sur des *déterminations* de grandeurs (des mesures). Mais en revanche l'arithmétique concrète, pour autant qu'elle détermine précisément des grandeurs, s'applique à l'intuition et est donc schématique et temporelle. Le nombre a bien à voir avec la *mesure*. Et Kant ajoute que pour qu'il y ait grandeur mesurée, il faut que la temporalité du schème qu'est le nombre soit synthétisée dans l'espace de façon à ce que la "successivité" devienne une "simultanéité" *donnée*.

L'infini du nombre est donc chez Kant un infini *potentiel* et il existe chez lui un jeu subtil entre l'infini actuellement donné de l'espace et l'infini potentiel du nombre comme schème. Nous retrouvons là aussi une dimension très "intuitionniste" des mathématiques kantiennes sur laquelle Jean Seidengart a insisté [15]. Ernst Cassirer ne l'a pas compris lorsque, dans *Substanzbegriff und Funktionbegriff*, il rejette la relation schématique kantienne entre la succession numérique abstraite et la succession temporelle.

3. Logique, algèbre, arithmétique

Il existe chez Kant une hiérarchie allant de l'analytique logique au synthétique a priori de la géométrie. Elle suit un mouvement allant des règles de l'entendement aux formes de l'intuition.

La logique concerne la non contradiction, les propriétés de l'identité, les congruences, les formes syllogistiques du raisonnement, etc. L'algèbre qui, selon Kant, "fait complètement abstraction de la nature de l'objet" (P 1300, AK III 471) calcule sur des "constructions symboliques" et non pas "ostensives" comme les constructions géométriques. Mais cela ne signifie pas pour autant qu'elle soit "discursive" et relève de la logique ou d'une caractéristique universelle à la Leibniz. Elle est *intuitive* car l'intuitif est plus large que l'ostensif géométrique. Cela ne contredit pas le fait que l'arithmétique soit "intellectuelle" car les nombres ne sont que dénotés par l'algèbre dont les symboles intuitifs dénotent des concepts. Ce point est très intéressant et mériterait d'être approfondi. Le symbole est intuitif mais détemporalisé relativement à la temporalité schématique du nombre. Comme le souligne Frank Pierobon (2003, p. 181),

> "le symbole signifie hors du temps".

Le nombre est un concept schématisé, mais le symbole algébrique est une intuition et est donc non conceptuel. À travers les symboles algébriques, les nombres-concepts deviennent représentés dans l'intuition.

> "[L'algèbre] parvient ainsi, au moyen d'une construction symbolique, tout aussi bien que la géométrie suivant une construction ostensive ou géométrique (des objets mêmes), là où la connaissance discursive ne pourrait jamais atteindre au moyen de simples concepts" (*Méthodologie transcendantale*, P 1301, AK III 471).

Et l'un des bénéfices fondamentaux des calculs algébriques symboliques traités dans ce sens est qu'ils permettent de maîtriser les erreurs car la construction symbolique dans l'intuition fait que

---

[15] Conférence au Colloque de Cerisy autour de la *Critique de la Faculté de Juger* (1990).

"toute fausse démarche devient visible" (P 1314, AK III 482).

Il vaut la peine de citer un peu longuement ce passage sur les démonstrations dans la *Méthodologie transcendantale* ("Discipline de la Raison pure dans l'usage dogmatique") :

> "La méthode algébrique elle-même, avec ses équations d'où elle tire par réduction la vérité en même temps que la preuve, si elle n'est pas, il est vrai, une construction géométrique, n'en est pas moins une construction caractéristique, où, à l'aide des signes, on présente les concepts dans l'intuition (…) et où l'on garantit tous les raisonnements contre les erreurs par cela seul que chacun d'eux est mis devant les yeux" (P 1313, AK III 481).

Cette thèse de l'intuitivité des calculs symboliques formels sera puissamment repris par Hilbert qui, dans son texte célèbre de 1925 *Über das Unendliche* [16], en appelle à une véritable Esthétique transcendantale symbolique :

> "Kant already taught – and indeed it is part and parcel of his doctrine – that mathematics has at its disposal a content secured independently of all logic and hence can never be provided with a foundation by means of logic alone; that is why the efforts of Frege and Dedekind were bound to fail. Rather, as a condition for the use of logical inferences and the performance of logical operations, something must already be given to our faculty of representation [*in der Vorstellung*], certain extralogical concrete objects that are intuitively [*anschaulich*] present as immediate experience prior to all thought. If logical inference is to be reliable, it must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediately given intuitively, together with the objects, as something that neither can be reduced to anything else nor requires reduction. This is the basic philosophical position that I consider requisite for mathematics and, in general, for all scientific thinking, understanding, and communication. And in mathematics, in particular, what we consider is the concrete signs themselves, whose shape, according to the conception we have adopted, is immediately clear and recognizable."

[16] Conférence du 4 juin 1925 donnée à la Société Mathématique de Westphalie en l'honneur de Weierstrass.

Cela reprend la déclaration de foi de la Conférence de Hambourg de 1922 :

> "Pour moi – et en cela je m'oppose totalement à Frege et à Dedekind – les objets de la théorie des nombres sont les signes eux-mêmes dont nous pouvons reconnaître la forme en toute généralité et en toute sécurité. [...] Le point de vue philosophique solide que je considère comme indispensable pour les fondements des mathématiques pures – aussi bien que pour toute espèce de pensée, de compréhension et de communication scientifique – se résume comme suit : *au commencement* – c'est ainsi que nous nous exprimerons ici – *est le signe*."[17]

Dans certaines de mes études (1991b, 1992b, 1995), j'ai considéré ce texte célèbre comme une innovation de Hilbert. Mais en fait il s'enracine profondément dans la thèse kantienne que les constructions symboliques de l'algèbre sont intuitives au sens technique. Ce qui manquait évidemment à Kant était, malgré le précédent de Leibniz, une vraie "caractéristique" pouvant mettre la logique sur le même pied que l'algèbre.

Ces textes de Hilbert sont, je crois, en général mal interprétés. Soit on y retient l'affirmation que le formalisme réduit les énoncés mathématiques à des assemblages symboliques, mais c'est alors pour négliger la référence appuyée à Kant et à l'Esthétique transcendantale; soit on y retient cette référence, mais c'est alors pour sous-estimer la légalité sui generis du formel. En fait, on trouve ici chez Hilbert tous les moments constitutifs du processus de constitution d'une *objectivité*, d'une objectivité sui generis et autonome propre aux mathématiques formelles (et dont la "physique" sera plus tard l'informatique) [18].

Le fait que l'algèbre et, à travers elle, l'arithmétique soient, sans être "discursives", symboliques et donc intuitives en un sens différent des intuitions pures et des grandeurs (même si elles concourent à leur détermination), entraîne, selon Kant, que leurs principes sont des "formules numériques" synthétiques qu'il appelle des "postulats" et non pas des "axiomes", car Kant réserve le terme d'"axiome" à ce qui concerne les "Axiomes de l'intuition" : "toutes les intuitions sont des grandeurs extensives".

---

[17] Hilbert [1922].

[18] Pour une analyse de cette objectivité *sui generis* en relation avec les travaux de Hilbert, Husserl et Wittgenstein, cf. Petitot [1992b].

4. Géométrie

Il y a beaucoup à dire sur les résonances que peut entretenir la conception kantienne de la géométrie avec les théories modernes.

4.1. Synthétique a priori et neurosciences

Tout d'abord, les formes de l'intuition étant celles de la perception sensible, il est normal de considérer ce que disent les neurosciences cognitives contemporaines de la vision sur la genèse de l'espace sensible. Or celles-ci donnent massivement raison à Kant [19] et montrent que l'origine neuronale de l'espace sensible est double. D'abord la "rétinotopie" de la voie rétino-géniculo-corticale, c'est-à-dire le fait qu'il existe une projection possédant de bonnes propriétés topographiques (il s'agit en fait d'une représentation conforme de type logarithme complexe) de la rétine sur la première aire V1 du cortex visuel. Ensuite, et surtout, "l'architecture fonctionnelle" de V1, c'est-à-dire l'organisation micro-anatomique des couches de V1 et la structure fine de leurs connexions intracorticales. L'espace apparaît ainsi comme *un format* pour le traitement des informations sensorielles véhiculées par les fibres du nerf optique. Il en va de même pour le temps.

Il suffit de comprendre que l'espace est un format neurophysiologique défini par l'architecture fonctionnelle du système visuel pour valider immédiatement les thèses kantiennes sur l'espace sensible. Ce formatage est en effet par définition une forme ontogénétique a priori des contenus sensoriels (de la "matière" ou "hylé" sensorielle dirait Husserl) et n'appartient pas à ces contenus eux-mêmes, qui ne sont que des inputs qui, ainsi formatés, structurés et traités, se transforment en percepts [20]. Il est "synthétique" et non conceptuel (ante-prédicatif et pré-judicatif dirait Husserl) dans la mesure où les aires visuelles occipitales ne sont pas les aires temporales du langage et leur architecture fonctionnelle détermine un format non prédicatif. On est vraiment très proche de Kant :

---

[19] Cf. Petitot [2003] et [2006].

[20] Le fait, qu'en tant que format sensoriel, l'espace soit un résultat de l'évolution biologique ne remet pas en cause son statut *a priori* car les *a posteriori* de la phylogenèse sont des *a priori* de l'ontogenèse. Par ailleurs, ce n'est pas parce que la neurophysiologie est une discipline empirique que ce format est empiriquement a posteriori. Pour les contenus sensoriels il fonctionne bien comme un a priori.

> "Il n'y a ainsi pour mon intuition qu'une seule façon possible de précéder la réalité effective de l'objet et de se produire comme connaissance *a priori*, *c'est de ne contenir rien d'autre que la forme de la sensibilité, qui dans le sujet que je suis précède toutes les impressions effectives par lesquelles je suis affecté par des objets*" (*Prolégomènes*, P II 50, AK IV 282)

La thèse de l'analyticité de l'espace est donc erronée car toute structure "analytique" présuppose un format propositionnel. Or il est neurophysiologiquement faux que la perception soit une attitude propositionnelle ("je vois que *p*" avec *p* une proposition) et s'identifie à des *jugements* perceptifs. Il s'agit, c'est le cas de le dire, d'une "category mistake" à propos de laquelle on peut dire ce que Kant disait déjà aux "logicistes" leibniziens-wolffiens de son temps :

> "Je ne puis m'empêcher de faire remarquer le préjudice que le fait de négliger cette observation, d'ailleurs facile et d'apparence insignifiante, a fait subir à la philosophie" (*Prolégomènes*, P II 38, AK IV 272)

4.2. Géométrie et réflexion

Le fait qu'il existe des "formes de l'intuition" qui formatent les sensations peut ainsi être considéré désormais comme une donnée scientifique. Non seulement le synthétique a priori existe, mais les *jugements* synthétiques a priori géométriques sont la "réflexion" de structures neurophysiologiques fondamentales. En effet, la géométrie intuitive que nous éprouvons constamment dans la perception visuelle provient de l'architecture fonctionnelle des aires visuelles. On trouvera dans Petitot [2003] l'exemple du transport parallèle (reconnaître que deux orientations en deux points différents du champ visuel sont les mêmes), du principe gestaltiste de "bonne continuation" (le système visuel a tendance à prolonger coaxialement les segments orientés), des mécanismes d'intégration des bords (des détections locales de bords d'objets sont intégrées en bords globaux), des droites comme géodésiques. Toute cette géométrie de base qui conduit progressivement à la géométrie euclidienne est une conséquence directe de l'architecture fonctionnelle. Les contenus sensoriels correspondent à des inputs neuronaux qui se propagent dans ces réseaux, mais c'est le "design" de ces derniers qui les formatent. La géométrie euclidienne est une axiomatisation de cette géométrie sensible pure (passage des formes de l'intuition aux intuitions formelles).

Exprimées en termes de formatage, les thèses du §15 de la *Dissertation* et l'Esthétique transcendantale de la *CRP* deviennent évidentes. L'espace ne peut pas être abstrait des sensations (l'abstraction relationnelle leibnizienne est neurophysiologiquement fausse), il n'est pas un réceptacle d'objets, il est une représentation singulière, il est une intuition pure et il n'est pas réel mais idéal en tant que forme coordonnant (*liant* comme on dit en neurosciences [21]) le divers de la sensation.

La géométrie formalise et axiomatise cette situation exactement comme en informatique la logique formelle formalise et axiomatise des calculs machine (correspondance de Curry-Howard) [22]. Elle "décompile" – c'est ce que signifie "réflexion" – les algorithmes neuronaux du système visuel et, dans la mesure où ces algorithmes ne sont pas symboliques, elle ne peut pas être analytique dans son contenu (l'intuition pure) bien qu'elle soit composée de jugements.

4.3. Conceptuel VS Intuitif et What VS Where

Le soutien qu'apportent les neurosciences contemporaines aux thèses kantiennes se renforce encore lorsqu'on prend en compte les relations qu'entretiennent les aires visuelles primaires occipitales avec les autres aires cérébrales. En effet il existe deux grandes "voies" corticales, la première – dite pariétale – allant vers les aires pariétales du mouvement et de la motricité et concernant la localisation des objets et leurs relations spatiales, la seconde – dite ventrale – allant vers les aires temporales du langage et concernant l'identification des objets (reconnaissance de forme) et leurs propriétés en relation avec leurs descriptions linguistiques. La première voie est appelée celle du "where" par les neurophysiologistes et la seconde celle du "what". L'opposition "where VS what" correspond très précisément à celle entre intuitif et conceptuel chez Kant.

---

[21] Cest en effet l'architecture fonctionnelle qui explique par son formattage les phénomènes de *binding* (liage) de données sensorielles locales en Gestalten perceptives globales. Cela correspond exactement à la synthèse kantienne du divers de la sensation, synthèse phénoménologiquement conditionnée par les formes de l'intuition et mathématiquement déterminée par les intuitions formelles.

[22] La correspondance de Curry-Howard établit une correspondance entre des programmes de bas niveau (λ-calcul typé) proches du langage machine et des preuves logiques de haut niveau qui s'y trouvent compilés et qui les typent, et cela de façon à ce que les démonstrations logiques correspondent au fait que les calculs de bas niveau soient exécutés correctement sur la machine (β-réduction).

C'est donc, insistons-y, une erreur que de poser que la perception est réductible aux jugements perceptifs et que les contenus perceptifs sont conceptuels et de format propositionnel. Cette thèse est tout simplement fausse, même si elle est encore très largement dominante.

4.4. Le passage du local au global

Les neurosciences de la vision confirment également que l'espace sensible global se constitue par recollement de domaines locaux. Elles retrouvent de façon étonnamment précise l'approfondissement phénoménologique de l'esthétique transcendantale kantienne proposé par Husserl dans des textes comme *Ding und Raum* [23] où les procédures de recollement sont interprétées en termes de kinesthésie, la perception étant inséparable de la motricité [24]. Il est donc fallacieux de critiquer Kant à partir de la généralisation de la géométrie effectuée par la géométrie riemannienne et la théorie des variétés différentiables puisque celles-ci généralisent l'esthétique transcendantale en l'approfondissant et non pas en l'invalidant.

4.5. Modèles euclidiens de géométries non-euclidiennes

Même si l'on ne tient pas compte des neurosciences cognitives de la perception et de l'action et si l'on en revient au conflit supposé entre le synthétique a priori et les géométries non-euclidiennes, on est conduit également à réviser nombre d'idées reçues sur le caractère obsolète du synthétique a priori. Il faut d'abord rappeler que Kant admettait parfaitement la possibilité logique des géométries non-euclidiennes (la géométrie euclidienne étant synthétique, sa négation ne peut pas être logiquement contradictoire) et que pour lui le primat de la géométrie euclidienne était lié à la mécanique et au principe d'inertie. Par exemple dans les *Prolégomènes*, à propos du paradoxe des objets non congruents qui ont exactement les mêmes propriétés alors qu'ils ne sont pourtant pas substituables l'un à l'autre, il parle des triangles sphériques :

> "diverses figures sphériques montrent, nonobstant cette parfaite concordance intérieure, une différence dans leur relation extérieure, telle que l'une ne se laisse pas du tout substituer à l'autre : par exemple, deux

---

[23] Cf. Petitot [2004a].

[24] Cf. le beau livre d'Alain Berthoz et Jean-Luc Petit *Phénoménologie et physiologie de l'action* sur cette affinité profonde entre phénoménologie et neurosciences.

> triangles sphériques situés dans deux hémisphères, ayant pour base commune un arc de l'équateur, peuvent être parfaitement égaux en ce qui concerne leurs côtés et leurs angles (…) et pourtant on ne peut mettre l'un à la place de l'autre" (P II 54, AK IV 285-286).

Par ailleurs, dans son analyse du premier modèle – euclidien – de géométrie hyperbolique proposé par Beltrami, Ricardo Gomez rappelle à son tour que Kant a toujours admis que les géométries non-euclidiennes étaient logiquement possibles et que le primat de $\boldsymbol{R}^3$ comme substratum réel des intuitions était d'une part physique et d'autre part perceptif. L'a prioricité et la nécessité de l'espace et du temps sont celles d'une condition de l'expérience possible. Elles sont donc aussi radicalement contingentes (et cela sans paradoxe) que cette expérience elle-même. Qui plus est, le modèle euclidien de Beltrami est lui-même un exemple typique de construction de concepts (les concepts de la géométrie hyperbolique) dans l'intuition pure (la géométrie euclidienne). Il fournit donc plutôt une confirmation – et non pas une réfutation –

> "of both Kant's view about the possibility of non-Euclidean geometries and of the intuitive necessity of Euclidean geometry" (Gomez, 1986, p. 102).

Donc en fait,

> "the first allegedly true interpretation of such [NE] geometry was consistent with the kantian program of constructing in Eulidean space of our human representation all the geometrical concepts" (ibid. p. 107).

J.E. Wiredu a également insisté sur le fait que les géométries non-euclidiennes que rejetait Kant n'étaient pas les géométries non-euclidiennes "faibles" que nous connaissons, mais les géométries non-euclidiennes "fortes" où, par exemple, dans un plan de courbure 0, deux lignes droites pourraient enfermer un espace.

> "As soon as it is appreciated that the concept of non-Euclidean geometry to which Kant denied physical applicability by implication is different in type from that of the known non-Euclidean geometries, the denial of the synthetic *a priority* of geometrical theses on the score of the proven applicability of e.g. Riemannian geometry is seen to have no force" (Wiredu 1970, p. 13).

4.6. Théorie des groupes et synthétique a priori

Le caractère synthétique de l'espace est lié chez Kant à la découverte du paradoxe des objets symétriques qui implique que dans la méréologie spatiale le tout précède les parties, les relations internes dépendant des relations externes :

> "Celle-ci [notre sensibilité] a l'espace comme forme de l'intuition externe et la détermination interne de tout espace n'est possible que par la détermination de sa relation extérieure à l'espace tout entier (la relation au sens externe) dont il est une partie, c'est-à-dire que la partie n'est possible que par le tout" (*Prolégomènes* P II 55, AK IV 286).

Mais le fait que l'interne présuppose l'externe correspond à ce que deviendra plus tard la géométrie avec Klein et Poincaré, à savoir le *groupe de symétrie* de l'espace. Le concept de groupe est l'une des principales formes modernes du synthétique a priori en géométrie.

CONCLUSION

J'aimerais tirer deux conclusions très différentes de ces quelques remarques. La première est que, même si elle est moins approfondie que par exemple celle d'un Leibniz, la philosophie kantienne des mathématiques reste en résonance avec de nombreux problèmes dont l'histoire post-kantienne est très riche et qu'il n'y a donc aucune raison de l'ostraciser.

La seconde, plus importante, est que les neurosciences cognitives de la vision sont en train d'apporter une réponse au problème extrêmement difficile de ce que Kant appelait l'esthétique transcendantale et que cette réponse donne massivement raison à Kant contre les critiques logicistes du synthétique a priori. Il est en train de se passer pour la géométrie ce qui s'est passé pour la logique avec l'avènement des machines de Turing et des ordinateurs. De même que l'on a compris que les énoncés logiques typifient dans des langages formels de haut niveau des calculs machine de bas niveau, de même on commence à comprendre que les énoncés géométriques formalisent dans des langages formels de haut niveau des activités neuronales perceptives entièrement contraintes par des architectures fonctionnelles spécifiques. La géométrie est un format pour la hylé sensorielle et en ce sens est bien "intuitive" et non-conceptuelle, synthétique et non analytique. C'est une grave erreur de croire que, sous prétexte qu'il existe des propositions géométriques permettant "d'intellectualiser" l'espace, la géométrie est elle-même de format propositionnel. La neurogéométrie fait subir au "tournant linguistique" un "retournement géométrique" qui réhabilite le synthétique a priori.

BIBLIOGRAPHIE

Allison, H.E., 1983. *Kant's Transcendental Idealism. An Interpretation and Defense*, New-Haven, Yale University Press.

Bell, J.L., 1993. "Hilbert's ε-operator and classical logic", *Journal of Philosophical Logic*, 22, 1-18.

Berthoz, A., Petit, J.-L., 2006. *Phénoménologie et physiologie de l'action*, Paris, Odile Jacob.

Bitbol, M., Kerszberg, P., Petitot, J. (eds) 2008. *Constituting objectivity. Transcendental approaches of modern physics*, Berlin, Springer (à paraître).

Breysse, O., 2007. *Résolution du problème des frontières dans la formalisation logico-algébrique de l'espace sensible*, Thèse, Université de Paris VI.

Changeux, J.P., Connes, A., 1989. *Matière à Pensée*, Paris, Odile Jacob.

Chenet, F.-X., 1994. *L'assise de l'ontologie critique – l'esthétique transcendantale*, Presses Universitaires de Lille.

Fichant, M., 1997. "'L'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée' – La radicalité de l'esthétique", *Philosophie*, 56, Paris, Editions de Minuit.

Fine, K., 1985. *Reasoning with Arbitrary Objects*, Oxford, Blackwell.

Friedman, M., 1985. "Kant's Theory of Geometry", *The Philosophical Review*, XCIV, 4, 455-506.

——— 1999. *Dynamics of Reason*, Stanford, CSLI Publications.

Gomez, R.J., 1986. "Beltrami's Kantian View of Non-Euclidean Geometry", *Kant-Studien*, 77, 1, 102-107.

Hilbert, D., 1922. "Neue Begründung der Mathematik. Erste Mitteilung", *Abh. Aus dem Math. Seminar d. Hamb. Univ.*, 1, 157-177. Traduit par J. Largeault in *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Paris, Vrin, 1992.

——— 1925. "Über das Unendliche", trad. anglaise "On the Infinite" in Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*, 1879-1931, Cambridge, Harvard University Press, 367-392, 1967.

Hintikka, J., 1974. *Knowledge and the Known*, Dordrecht, D. Reidel.

——— 1981. "Kant's Theory of Mathematics Revisited", *Philosophical Topics*, 12, 2, 201-215.

Husserl, E., 1907. *Ding und Raum, Vorlesungen 1907*, Husserliana XVI, La Hague, Martinus Nijhoff, 1973. Trad. Fr., J-F. Lavigne, Paris, Presses Universitaires de France, 1989.

Kant, E., 1781-1787. *Kritik der reinen Vernunft*, Kants gesammelte Schriften, Band III, Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Georg Reimer, 1911. Traduction in Kant [1980-1986].

——— 1786. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Kants gesammelte Schriften, Band IV, Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Georg Reimer, 1911. Traduction in Kant [1980-1986].

——— 1979. *Critique de la Faculté de Juger*, trad. A. Philonenko, Paris, Vrin.

——— 1980-1986. *Oeuvres philosophiques* (F. Alquié ed.), Paris, Bibliothèque de la Pléïade, Gallimard.

——— 1970. *Quelques opuscules précritiques*, Trad. S. Zac, Paris, Vrin.

——— 1971. *Premiers Pincipes métaphysiques de la Science de la Nature*, Trad. J. Gibelin, Paris, Vrin.

——— 1796-1803. *Opus Postumum*, trad. F. Marty, Paris, Presses Universitaires de France, 1986.

Kerszberg, P., 1997. *Critique and Totality*, State University of New York Press.

——— 1999. *Kant et la nature*, Paris, Les Belles Lettres.

Lautman, A., 1937. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, (M. Loi ed., réedition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946), Paris, Bourgois, 1977.

Leisenring, A.C., 1969. *Mathematical Logic and Hilbert's ε-Symbol*, New York, Gordon & Breach.

Miller, L., 1975. "Kant's Philosophy of Mathematics", *Kant-Studien*, 66, 3, 297-308.

MNS, 1989. *La Mathématique non standard*, (H. Barreau, J. Harthong, eds.), Paris, Editions du CNRS.

Natorp, P., 1910. *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Leipzig-Berlin, B. G. Teubner.

Nef, F., 1998. *L'objet quelconque*, Paris, Vrin.

Peiffer-Reuter R., 1989. "L'infini relatif chez Veronese et Natorp. Un chapitre de la préhistoire de l'analyse non-standard", *MNS [1989]*, 117-142.

Petitot, J., 1979-1982. "Infinitesimale", "Locale/Globale", "Unità delle matematiche", *Enciclopedia Einaudi*, VII, 443-521 ; VIII, 429-490 ; XV, 341-352 ; XV, 1034-1085, Turin, Einaudi.

——— 1985. *Morphogenèse du Sens*, Paris, Presses Universitaires de France.

——— 1987, "Refaire le "Timée". Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman", *Revue d'Histoire des Sciences*, XL, 1, 79-115.

——— 1989. "Rappels sur l'analyse non standard", *MNS [1989]*, 187-209.

——— 1990, "Logique transcendantale, Synthétique a priori et Herméneutique mathématique des Objectivités", *Fundamenta Scientiæ*, (numéro en l'honneur de L. Geymonat), 10, 1, 57-84.

——— 1991a, *La Philosophie transcendantale et le problème de l'Objectivité*, Entretiens du Centre Sèvres, (F. Marty ed.), Paris, Editions Osiris.

——— 1991b. "Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale", *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, (G. Granel ed.), Mauvezin, Editions TER, 213-282.

——— 1992a, "Actuality of Transcendental Aesthetics for Modern Physics", *1830-1930 : A Century of Geometry*, (L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis eds), Berlin, New-York, Springer, 273-304.

——— 1992b, "Continu et Objectivité. La bimodalité objective du continu et le platonisme transcendantal", *Le Labyrinthe du Continu*, (J.-M. Salanskis, H. Sinaceur eds.), Paris, Springer, 239-263.

——— 1992c. *Physique du sens*, Paris, Editions du CNRS.

——— 1994a. "Esthétique transcendantale et physique mathématique", *Neukantianismus. Perspektiven und Probleme* (E.W. Orth, H. Holzhey Hrsg.), Würzburg, Königshausen & Neumann, 187-213.

——— 1994b, "Phenomenology of Perception, Qualitative Physics and Sheaf Mereology", *Philosophy and the Cognitive Sciences*, Proceedings of the 16th International Wittgenstein Symposium (R. Casati, B. Smith, G. White eds), Vienne, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 387-408.

——— 1995. "Pour un platonisme transcendantal", *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles* (M. Panza, J-M. Salanskis eds), Paris, Masson, 147-178.

——— 1997. "Objectivité faible et Philosophie transcendantale", *Physique et Réalité, débat avec B. d'Espagnat*, (M. Bitbol, S. Laugier, eds.), Paris, Diderot Editeur, 201-236.

——— 1997. "Philosophie transcendantale et objectivité physique", *Philosophiques*, XXIV, 2, 367-388, Québec, Bellarmin.

——— 1999. "Morphological Eidetics for Phenomenology of Perception", *Naturalizing Phenomenology: Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science*, (J. Petitot, F. J. Varela, J.-M. Roy, B. Pachoud, eds.), Stanford, Stanford University Press, 330-371.

——— (ed.) 2000, "Philosophie et Sciences: Objectivité scientifique et logique transcendantale", (G. Brittan, M. Bitbol, M. Stölzner, P. Kerszberg, J-M. Salanskis, J. Petitot), *Archives de Philosophie*, 63, 4.

——— 2003. "Neurogéométrie et phénoménologie de la perception", *Philosophie de la Perception* (J. Bouveresse, J-J. Rosat, eds.) , Paris, Collège de France-Odile Jacob, 53-76.

——— 2004a. « Géométrie et Vision dans *Ding und Raum* de Husserl », *Des lois de la pensée aux constructivismes* (M-J. Durand-Richard ed.), *Intellectica*, 2004, 2, 39, 139-167.

——— 2004b. "Le problème logique de la quantification existentielle chez Preti et Hilbert", *Il pensiero filosofico di Giulio Preti* (P. Parrini, L. Scarantino eds), Milano, Guerini, 109-143.

——— 2006. "Neurogéométrie des architectures fonctionnelles de la vision", *Journée annuelle de la SMF*, 24 juin 2006, *Mathématiques et Vision*, 69-128.

——— 2008. "Set theory and the transcendence of the continuum", *Intellectica*, (à paraître).

——— 2009a "Noncommutative geometry and transcendental physics", *Constituting objectivity. Transcendental approaches of modern physics*, (M. Bitbol, P. Kerszberg, J. Petitot, eds), Berlin, Springer.

——— 2009b. *Per un nuovo illuminismo. La conoscenza scientifica come valore culturale e civile* (trad. F. Minazzi), Milano, Bompiani.

Philonenko, A., 1972. *L'œuvre de Kant*, Paris, Vrin.

Pierobon, F., 2003. *Kant et les Mathématiques*, Paris, Vrin.

Posy, C.J., 1992 (ed.). *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer.

Riemann, B., 1854. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, *Gesammelte Mathematische Werke*, 1990, 304-319.

Salanskis J. M., 1991. *L'Herméneutique formelle : L'Infini – Le Continu – L'Espace*, Paris, Editions du CNRS.

Scholtz, E., 1992. "Riemann's Vision of a New Approach to Geometry", *1830-1930 : A Century of Geometry*, (L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis eds), Berlin, New-York, Springer, 22-34.

Servois, J., 2004. *Paul Natorp et la Théorie Platonicienne des Idées*, Toulouse, Presses Universitaires du Septentrion.

Smith, B., 1993. "Ontology and the logistic analysis of reality", Preprint.

Teissier, B., 1988. "Stratifications, finitude et intuition", *Logos et Théorie des Catastrophes*, Colloque de Cerisy à partir de l'œuvre de René Thom (J. Petitot ed.), Genève, Editions Patiño, 59-65.

Thom, R., 1980. *Modèles mathématiques de la Morphogenèse*, Paris, Christian Bourgois.

Veronese, G., 1892. *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padoue, Tipografia del Seminario.

Vuillemin, J., 1955. *Physique et Métaphysique kantiennes*, Paris, Presses Universitaires de France.

Wang, H., 1987. *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, M.I.T Press.

Wiredu, J.E., 1970. "Kant's Synthetic a priori in geometry and the rise of non-euclidean geometries", *Kant-Studien*, 61, 1, 5-27.

Zalta, E., 1998. "Mally's Determinates and Husserl's Noemata", in *Ernst Mally - Versuch einer Neubewertung*, A. Hieke (ed.), St. Augustin, Academia-Verlag, 9-28.