Paru dans “Kant face aux mathématiques modernes” (E. Barot, J. Servois, dir), Vrin, Paris, 2009, 61-96

MATHEMATIQUES ET CONSTRUCTION

JEAN PETITOT

EHESS ET CREA (ECOLE POLYTECHNIQUE)

INTRODUCTION

Kant connaissait bien les mathématiques de son temps puisqu'il les a même enseignées pendant huit ans entre 1755 et 1763. Mais il ne les a pas particulièrement approfondies. On peut donc considérer à juste titre, et c'est ce que font la plupart des commentateurs, que la philosophie des mathématiques de Kant reste assez limitée et que des problèmes comme ceux du caractère synthétique d'un énoncé arithmétique tel que 7 + 5 = 12 sont dépassés. Toutefois, à y regarder de plus près, on constate que beaucoup de problèmes philosophiques soulevés par Kant à propos des mathématiques sont scientifiquement plus profonds qu'ils n'en ont l'air, qu'ils sont longtemps restés ouverts et qu'ils sont même encore, pour certains, largement ouverts à l'époque actuelle.

I. LE CONTINU ET LES INTUITIONS PURES

1. Le continu

1.1. La non compositionnalité du continu chez Kant

Malgré la profondeur de la seconde antinomie cosmologique sur la "divisibilité / non-divisibilité" infinie de la matière, Kant fait partie des philosophes "continuistes" en mathématiques. Il est contre les points-atomes géométriques.[1]

---

[1] En physique, il en va tout autrement. La *Monadologie physique* de 1756 est physiquement atomiste et géométriquement continuiste. Mais dans l'*Opus Postumum*, Kant est continuiste également au niveau physique : les forces fondamentales primitives internes à la matière sont immanentes à un *éther* envahi de calorique agitant sans cesse et uniformément

Le continu géométrique se trouve à la base des intuitions pures de l'espace et du temps qui sont les formes des intuitions sensibles externes et internes. Son rôle constitutif est donc primordial. Il est

(i) une donnée intuitive originaire,

(ii) un *quantum* non compositionnel.

Dès la *Dissertation* de 1770 (Section III : *Des principes de la forme du monde sensible*), Kant insiste sur le fait que les intuitions pures sont des grandeurs continues et que

> "une grandeur est continue quand elle n'est pas composée d'éléments simples" (P I 647, Ak II 399).[2]

C'est le cas pour le temps :

> "… toute partie du temps est encore un temps, et les éléments simples qui sont dans le temps, à savoir les *moments*, ne sont pas ses parties, mais des *limites*, entre lesquels se place un temps" (P I 648, Ak II 399).

C'est le cas pour l'espace, mais la note du §15C ("Le concept d'espace est donc une intuition pure") ajoute une remarque particulièrement intéressante à propos du concept de limite :

> "L'espace doit nécessairement être conçu comme une grandeur continue; de cela, la démonstration est facile, et je passe. Il en résulte que le simple, dans l'espace, n'est pas une partie, mais une limite. Mais la limite, prise au sens général, est ce qui, dans une grandeur continue, contient la raison des délimitations. Un espace qui n'est pas la limite d'un autre est *complet* (*solide*). La limite du solide est la *surface*, la limite de la surface est la *ligne*, la limite de la ligne est le *point*. Il y a donc trois espèces de limites dans l'espace, comme il y a trois dimensions. De ces limites, deux (la surface et la ligne) sont elles-mêmes des espaces. Le concept de limite ne concerne aucune autre grandeur que l'espace et le temps" (P I 654, Ak II 404).

Cette conception de la continuité est intégralement reprise dans les "Anticipations de la perception" :

> "L'espace et le temps sont des quanta continua, parce qu'aucune partie n'en peut être donnée, sans être enfermée entre des limites (points ou instants),

---

toutes les parties de tous les corps. Sorte de continuum dynamique, énergétique, spatialisé et réel, l'éther est le *fondement* originaire des mouvements causés par des forces mécaniques dérivatives secondes.

[2] Nous citons l'édition de la Pléiade (P) et l'édition de l'Académie de Berlin (Ak).

donc seulement de sorte que cette partie soit à son tour un espace ou un temps. L'espace ne se compose donc que d'espaces et le temps que de temps. Points et instants ne sont que des limites, c'est-à-dire de simples places, où l'espace et le temps ont leur limitation; or, ces places présupposent toujours ces intuitions qu'elles doivent délimiter ou déterminer, et ni l'espace ni le temps ne peuvent être composés de simples places, comme de parties intégrantes qui pourraient être données [A 170] avant même l'espace ou le temps" (P I 909, Ak III 154).

Cette essence non compositionnelle et "cohésive" du continu implique en particulier le principe leibnizien ou "loi métaphysique" de continuité : "tous les changements sont continus" (*Dissertation*, P I 648, Ak II 399).

Il faut insister sur le fait que, comme nombre de philosophes "continuistes", Kant fonde sa conception de l'espace intuitif sur des propriétés caractéristiques de *méréologie* (relations entre tout et parties) et, en particulier sur le concept de limite, autrement dit de bord ou de frontière (*Grenze*). Les points sont des bords de segments et il est par conséquent impossible de considérer le continu comme un ensemble de bords. C'est pour des raisons de méréologie que l'espace n'est pas compositionnel : un bord ne peut pas "précéder" logiquement ce dont il est le bord, il ne peut pas en être indépendant, c'est, comme disait Husserl, un *moment dépendant*.

1.2. Actualité du problème

On pourrait penser que l'arithmétisation du continu avec le modèle ensembliste de Cantor-Dedekind résout tous ces problèmes mais cela est loin, très loin, d'être le cas.

1.2.a. Le continu phénoménologique

D'abord, le continu des intuitions pures n'est pas le continu mathématique arithmétisé dont nous avons pris l'habitude. C'est un continuum *originairement donné* dans les formes de l'intuition, autrement dit un continuum *phénoménologique* profondément lié à la perception sensible. Après l'arithmétisation cantorienne, les problèmes centraux soulevés par la non compositionnalité de ce continuum phénoménologique ont persisté pour les plus grands philosophes et psychologues. Il suffit de penser à Peirce et à sa "synéchologie" [3], à Brentano

---

[3] Du terme grec pour "continu". Peirce est l'un des grands philosophes du continu phénoménologique. Sa réflexion l'a d'ailleurs conduit, sur le plan mathématique, à être l'un

et, surtout, à Husserl. Chez Gödel lui-même se trouve affirmée la thèse que "l'intuition sensible réelle" est un continuum indécomposable où les points ne sont que des limites. Et Gödel l'oppose à la conception ensembliste idéalisée.

Comme nous venons de le voir, Kant définit les points comme des "limites", c'est-à-dire comme des *bords*. Or un bord est un exemple typique de concept relationnel (de moment dépendant) et ne peut donc pas être considéré comme un point individué isolé. En revanche les *nombres* qui permettent de situer les points dans le continu sont, eux, des entités isolables et indépendantes (cf. plus bas). Il est donc impossible d'identifier le continu au système de nombres qui le mesure puisqu'il existe une différence de statut au niveau des objets mis en jeu.

Ce que Kant appelle un "solide" est, en termes de topologie et de géométrie différentielle, un fermé plein (un fermé égal à la fermeture de son intérieur) dont le bord est une surface différentiable par morceaux. Et, comme nous venons de le souligner, cette définition s'effectue dans le contexte de ce que l'on appelle depuis la troisième *Recherche Logique* de Husserl et les travaux de Stasnislaw Lesniewski entre 1916 et 1921, une méréologie. Or la définition des bords dans une méréotopologie qui soit compatible aux données des théories de la perception reste, encore aujourd'hui, un problème très largement ouvert [4]. Pour s'en convaincre il suffit de citer le titre de la récente thèse soutenue par Olivia Breysse (2007) sous la direction de Michel De Glas : *Résolution du problème des frontières dans la formalisation logico-algébrique de l'espace sensible*.

Par ailleurs, la note du §15C de la *Dissertation* est extrêmement intéressante car elle donne une définition *phénoménologique* de la *dimension*. On sait qu'il est très difficile de définir correctement le concept de dimensionnalité d'un espace. Les définitions mathématiques habituelles ne sont pas phénoménologiques dans la mesure où elles sont abstraites et idéales et ne sont pas données dans l'évidence intuitive de l'expérience. Comme Husserl l'a expliqué dans de nombreux textes, et en particulier dans *Ding und Raum* (1907), phénoménologiquement parlant, les seules données originaires sont des fragments d'espace

---

des premiers à remettre radicalement en cause l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) et à définir la puissance du continu κ comme un grand cardinal, en l'occurrence un cardinal inaccessible (si $\lambda < \kappa$ alors $2^{\lambda} < \kappa$). Il existe même des textes où Peirce explique que la puissance du continu est tellement grande qu'elle ne peut pas être un cardinal.

[4] Cf. par exemple Smith [1993], Petitot [1994b].

remplis de qualités sensibles. Et pour définir purement phénoménologiquement la dimension à partir de ces données originaires, Husserl reprend presque mot pour mot (pour le champ visuel bidimensionnel) la description kantienne :

> "La bidimensionnalité signifie que chaque fragment du champ est délimité par des limites dépendantes, qui sont elles-mêmes à leur tour des multiplicités continues, donc à nouveau fragmentables de telle sorte que ses fragments 'se limitent réciproquement'. Mais les limites ne sont maintenant pas fragmentables, elles sont de simples éléments de l'étendue, des 'points'" (Husserl 1907, p. 202).

Nous trouvons là une idée géométrique remarquable qui sous-tend le concept géométrique moderne (en grande partie dû à René Thom) de *stratification* en géométrie différentielle. La donnée première est celle d'une sous-variété fermée pleine (d'un domaine, d'une "partie", d'un "fragment") D d'une variété différentiable W. La sous-variété D a la même dimension que W (que l'on veut déterminer) et elle est munie d'un bord $B = \partial D$. On fait des hypothèses de régularité sur les bords à savoir que ce sont eux aussi des sous-variétés différentiables par morceaux. La première idée fondamentale est que le bord d'une variété de dimension n est de dimension $n - 1$. La seconde est que l'on peut itérer l'opération bord ∂ et considérer $\partial^k D$ pour $k = 1, 2, ...$ La troisième est que les points sont infragmentables (sans bord possible) et donc de dimension 0. Kant applique cette idée pour $n = 3$: "solide" $\rightarrow$ "surface" $\rightarrow$ "ligne" $\rightarrow$ "point".

1.2.b. Le continu intuitionniste

La non compositionnalité signifie que le continu ne peut pas être conçu comme un ensemble de points. Ce point de vue se retrouve dans nombre de théories modernes et tout d'abord dans la théorie intuitionniste. En logique intuitionniste, la loi du tiers exclu affirmant que deux éléments a et b de $\boldsymbol{R}$ sont soit différents soit égaux [5], ainsi que la loi de comparabilité disant que soit $a = b$, soit $a < b$ soit $a > b$ (ordre total), ne sont plus valables. Cela est dû à l'impossibilité *d'individuer* tous les éléments de $\boldsymbol{R}$. Pour Hermann Weyl, cette limitation intrinsèque des ressources d'individuation était caractéristique du statut du continu

---

[5] Nous notons en gras italiques les structures numériques de base : $\boldsymbol{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\boldsymbol{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\boldsymbol{Q}$ le corps des rationnels, $\boldsymbol{R}$ le corps des réels, $\boldsymbol{C}$ le corps des complexes.

comme *intuition*. En logique intuitionniste, le continu est indécomposable et le principe de continuité de Leibniz est valable puisque toute fonction de [0, 1] dans $\boldsymbol{R}$ est uniformément continue.

Étant donné le lien étroit découvert par Bill Lawvere entre la théorie catégorique des topoï et la logique intuitionniste, on ne s'étonnera pas du fait que dans nombre de topoï l'objet $\boldsymbol{R}$ (construit à partir de $\boldsymbol{N}$ de façon standard) soit généralement indécomposable et que tous les morphismes $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ soient continus.

1.2.c. Intuition et quantification

Ces propriétés "intuitionnistes" du continu n'étaient évidemment pas exprimables dans la logique syllogistique élémentaire non quantifiée dont disposait Kant et étaient donc attribuées à un "supplément" extra-logique fourni par l'intuition pure. Par exemple, comme l'a montré Michael Friedman dans son article "Kant's Theory of Geometry" (1985), la propriété de densité :

$$\forall x \forall y\, (x < y \to \exists z\, (x < z < y))$$

inclut, de par la structure même de sa quantification, une itération et fournit une fonction de Skolem qui permet de déduire l'infini de la seule logique. Cela était impossible avec la logique de l'époque de Kant.

> "So, for Kant, one cannot represent or capture the idea of infinity formally or conceptually".

L'intuition signifie, entre autres, cette irréductibilité. Elle fournit les procédures analogues, par exemple, aux procédures d'itération et aux fonctions de Skolem.

Il en va de même pour le passage de la densité à la continuité proprement dite. La convergence des suites de Cauchy (s_n) exprimant la complétude de $\boldsymbol{R}$ est quantificatoirement compliquée, de type $\forall\exists\forall\forall \to \exists\forall\exists\forall$:

$$\forall \varepsilon \exists N \forall m \forall n\, (m, n > N \to |s_m - s_n| < \varepsilon) \to \exists s \forall \varepsilon \exists N \forall n\, (n > N \to |s_n - s| < \varepsilon).$$

Mais la représentation temporelle intuitive des limites permet à Kant de représenter intuitivement des processus qui deviendront après lui des opérations logiques de type $\forall\exists\forall$.

Hintikka a également bien noté ce point. La complétude de $\boldsymbol{R}$ ne fait pas partie des axiomes d'Euclide (Hilbert l'ajoutera dans ses *Grundlagen der Geometrie*) et l'intuition remplace cet axiome manquant.

On voit qu'il n'y a pas grand sens à critiquer Kant à partir de l'opposition moderne entre syntaxe et sémantique en théorie logique des modèles. En effet, dans le cadre de la logique de son époque, une géométrie non interprétée dans l'intuition ne pouvait pas être une géométrie puisqu'elle ne pouvait même pas représenter le concept d'une infinité de points. Depuis Hilbert, la géométrie axiomatique a les moyens de ne plus avoir besoin d'une intuition adjuvante. Mais cela ne signifie en rien que la problématique de l'intuition perd sa pertinence. Bien au contraire. Nous le verrons au § 4.1.

1.2.d. L'intuition du continu chez Riemann.

D'ailleurs, jouer les progrès post-kantiens des mathématiques contre l'intuition pure kantienne conduirait à le faire pour des mathématiciens prestigieux et en particulier Riemann. En effet, dans sa célèbre Habilitation de 1854 *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Riemann devait définir ses métriques sur un substrat et pour ce faire s'est profondément inspiré du psychologue J.F. Herbart comme cela est bien attesté par ses réflexions philosophiques. Herbart avait réfléchi sur la façon dont des représentations mentales peuvent présenter des transitions continues (ce qu'il appelait des *Reihenformen*, des "formes sérielles") et il avait forgé le néologisme de *synécologie* à cet effet. Le concept riemannien de variété (*Mannigfaltigkeit*) provient directement de cette psychologie continuiste car c'est sur ces substrats intuitifs que Riemann introduisit les concepts fondamentaux de coordonnées locales et de métrique riemannienne. Autrement dit, comme le remarque Erhard Scholtz, la différence entre la théorie de Riemann et la théorie moderne des variétés riemanniennes qui en est issue est que

> "the role of the topological space [is] taken in a vague sense by a Herbartian-type of 'serial form', backed by mathematical intuition".[6]

L'espace "intuitif" sous-jacent à une variété riemannienne est une variété différentiable. Mais tant que ce concept n'a pas été formalisé par Hermann Weyl, il est resté intuitif dans un sens très proche de l'intuition pure kantienne.

Affirmer que la théorie kantienne de l'intuition pure est "fausse" parce qu'il existe plusieurs structures métriques possibles sur $\boldsymbol{R}^3$ est aussi fallacieux que d'affirmer que la géométrie riemannienne est "fausse" parce qu'il peut exister plusieurs structures différentiables sur une même variété topologique (par exemple les sphères exotiques de Milnor).

---

[6] Scholtz [1992], p. 23.

1.2.d. Analyse non-standard

À supposer qu'on laisse maintenant de côté toute référence à une intuition pure phénoménologique pour adopter un point de vue cantorien, il ne faudrait pas croire pour autant que la théorie logique des modèles réussit à combler l'écart entre le "discursif" et l'"intuitif". Bien au contraire. Elle lui donne seulement une nouvelle formulation, encore plus profonde, encore plus transcendantale si l'on peut dire. En effet, comme le disait déjà Veronese, comme l'a affirmé Gödel, comme l'affirment les spécialistes de l'Analyse non-standard, comme l'a encore repris récemment Alain Connes, la signification des théorèmes de limitation (incomplétude, indécidabilité, etc.) et d'existence de modèles non-standard est précisément que le continu constitue une réalité *objective*, informationnellement infinie, *transcendant* sa maîtrise symbolique logique (que Kant appelait "discursive"). [7]

Ce n'est pas le lieu de reprendre ici les théories visant, dans le cadre de la théorie des ensembles, à dominer axiomatiquement le continu. Le lecteur intéressé pourra se référer à mes études [1979], [1989], [1991b], [1992b], [1995] et [2008a] et, surtout, à leurs bibliographies. Une bonne partie de ces théories peuvent s'interpréter philosophiquement de la façon suivante. On suppose que le continu est originairement *donné* comme un continuum phénoménologique et/ou une forme de la réalité mais qu'il doit être *pensé*, compris, exploré, modélisé mathématiquement, l'opposition entre donné et pensé reprenant l'opposition kantienne entre *gegeben* et *gedacht* qui se trouve à la base de la problématique transcendantale. La question est alors double :

(i) savoir à quel degré de compréhension peuvent conduire les différentes théories mathématiques en fonction de leurs forces respectives;

(ii) savoir quel est le lien entre cette compréhension mathématique formalisée et la pré-compréhension du continu associée à sa donation intuitive.

Dans ce contexte mathématique, la difficulté d'élaborer une "bonne" définition ensembliste du continu se manifeste de plusieurs façons. Nous en citerons trois.

1. L'existence de modèles non-standard de ***R***, c'est-à-dire d'extensions, dites "élémentaires", ***R**** de ***R*** qui sont *indiscernables* de ***R*** pour la logique des prédicats du premier ordre très forte où il existe un symbole de constante pour chaque élément de ***R***. Ces modèles étudiés sémantiquement par Abraham Robinson et syntaxiquement par Edward Nelson remontent à

---

[7] Sur la théorie logique des modèles et l'Analyse non-standard, cf. MNS [1989], Petitot [1979], [1989]. Sur la philosophie des mathématiques de Gödel, cf. Wang [1987]. Sur la position d'Alain Connes, cf. Changeux-Connes [1989] et Petitot [1991b].

Giuseppe Veronese qui dans ses *Fondamenti di Geometria* développa l'une des premières théories non-archimédiennes du continu. Contrairement à l'arithmétisation à la Cantor-Dedekind, il part d'un continu intuitif conçu comme "forme fondamentale" originairement donnée (c'est-à-dire comme intuition pure a priori) et y inscrit des points-marques qui en brisent l'homogénéité. Les nombres réels de ***R*** permettent de repérer ces marques par rapport à un point origine O au moyen d'une unité OA. Ce sont des instruments de mesure. Par itération, OA définit une "échelle" sur la forme fondamentale. Veronese introduit alors l'axiome non archimédien que la forme fondamentale se prolonge au-delà de ***Z***.OA. Pour mesurer la forme fondamentale dans sa totalité, il faut donc étendre le corps ***R*** par des nombres infinis, donc aussi par les infinitésimales qui en sont les inverses, et l'on aboutit ainsi à un modèle non-standard. Or il faut insister sur le fait que dans *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, le néo-kantien Paul Natorp a accordé beaucoup d'attention à la construction de Veronese [8]. Cela est bien compréhensible puisque la démarche de Veronese approfondit la différence kantienne entre les formes de l'intuition (continuum phénoménologique originairement donné) et les "Axiomes de l'intuition" (grandeurs extensives numériquement mesurables) [9].

2. L'impossibilité de développer une "bonne" théorie du continu sans enrichir les axiomes de *ZFC* (Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix). En effet, dans le modèle "ontologiquement déflationniste" de ***R*** que l'on trouve dans le modèle *L* des ensembles *constructibles* de Gödel (le plus petit modèle de *ZFC* comprenant les ordinaux [10]), les propriétés du continu sont très "mauvaises" au sens où des classes de sous-ensembles, certes plus complexes que les sous-ensembles boréliens et analytiques (au sens de Souslin) mais quand même bien construits à partir de ces derniers – ce que l'on appelle les projectifs de ***R*** –, n'ont pas nécessairement de "bonnes" propriétés de régularité, comme par exemple être mesurables Lebesgue. Pour démontrer celles-ci, il faut adjoindre à *ZFC* des axiomes d'existence de "grands cardinaux" et donc opter pour une "ontologie inflationniste" de la théorie des ensembles [11].

---

[8] Cf. Peiffer-Reuter [1989].

[9] Pour des précisions, cf. Petitot [1994a].

[10] Les ensembles constructibles consistent à n'accepter comme sous-ensembles d'un ensemble que ceux explicitement définissables par une formule du premier ordre.

[11] Cf. Petitot [1992b] et [1995].

3. La meilleure méthode pour arriver à un "bon" modèle ensembliste du continu est d'essayer de construire un modèle de ***R*** dont les propriétés ne peuvent plus être modifiées par forcing [12]. C'est ce qu'est en train de réussir Hugh Woodin (sans doute le plus grand spécialiste actuel de ces questions) mais le problème est d'une difficulté inouïe.[13]

L'une des conclusions philosophiques de tous ces travaux est que, si l'on veut traduire dans un univers de théorie des ensembles satisfaisant la logique classique les propriétés "intuitives" du continu, il faut des modèles de cardinal immense, à la limite de l'inconsistance logique. Telle est la forme contemporaine de l'opposition kantienne entre "intuitif" et "logico-discursif" : le continu transcende toute maîtrise logique élémentaire et l'intuitif est infiniment plus riche que le conceptuel.

2. Infini potentiel et infini actuel, nombre et arithmétisation

2.1. Le problème du nombre

Comme forme de l'intuition, le continu est un continuum phénoménologique intuitif de nature aristotélicienne caractérisé par le "fusionnement" de ses parties. Comme nous venons de le voir, on trouve encore après l'arithmétisation du continu de telles conceptions chez Peirce (le continu est inépuisable, non compositionnel, condition du général), chez Brentano et chez Stumpf (qui a élaboré le concept de fusionnement, i.e. de *Verschmelzung*), chez Husserl [14], chez Brouwer et Weyl (le continu intuitif n'est pas compositionnel, ses "points" sont en puissance, donc *non* individués et non exactement localisés, ce qui empêcherait, croit-on, toute formalisation ensembliste, celle-ci étant nécessairement atomiste [15]), chez Thom (le

---

[12] La méthode de forcing introduite par Paul Cohen est un moyen systématique de forcer des modèles à possèder certaines propriétés. Par exemple pour rendre $\aleph_1$ dénombrable on "force" la construction d'une surjection $\aleph_0 \to \aleph_1$.

[13] Cf. Petitot [2008a].

[14] A propos du concept de *Verschmelzung* chez Stumpf et Husserl (en particulier dans la troisième *Recherche Logique*), cf. Petitot [1991b], [1994b] et [1999].

[15] La situation est plus complexe car, dans un univers ensembliste V qui contient un "bon" modèle du continu, la plupart des nombres réels sont non individuables. Par exemple il existe un réel non constructible, noté $0^{\#}$, qui permet de définir la vérité dans le sous-univers L des

primat ontologique du continu comme homogénéité qualitative). Soit elles "psychologisent" le continu phénoménologique (Brentano et les Gestaltistes, Poincaré), soit elles "l'ontologisent" (Thom), soit elles le pensent comme proprement intuitif et phénoménologique (Peirce, Husserl, Weyl).

Le lien est étroit entre la non compositionnalité du continu et, d'une part, le statut actuel/potentiel de l'infini et, d'autre part, le problème de la mesure numérique du continu. Dans les conceptions que nous venons d'évoquer on considère :

(i) qu'un point du continu est une discontinuité (une marque, une hétérogénéité locale, un bord) engendrée par un processus de passage de la puissance à l'acte,

(ii) que ces points actuels constituant des atomes singuliers individuables peuvent être des référents de symboles et des objets de quantification,

(iii) que les systèmes de nombres ont pour fonction de dominer axiomatiquement de tels systèmes de marques,

(iv) que l'arithmétisation du continu consiste à faire équivaloir le continu phénoménologique intuitif à un infini actuel ensembliste (atomiste) nombré par un système de nombres,

(v) mais qu'une telle arithmétisation représente une prétention irréalisable violant le mode de donation originaire du continu.

Il est intéressant de voir que tous ces problèmes centraux de la philosophie des mathématiques se trouvent déjà en germe chez Kant (et d'ailleurs aussi en partie chez Leibniz).

2.2. Une grandeur infinie donnée

On connaît la formule de l'exposition métaphysique de l'espace comme condition de possibilité des phénomènes externes dans l'Esthétique transcendantale :

> "L'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée" (P I 786, Ak III 53).

La méréologie de l'espace est fortement accentuée (toute partie de l'espace est obtenue par délimitation "en lui") et explique pourquoi ce n'est pas un concept général mais une intuition singulière.

---

constructibles de Gödel sans pour autant contredire le théorème de Tarski sur la non définissabilité de la vérité car *V* est beaucoup plus gros que *L*. Cf. Petitot [2008a].

> "Aucun concept ne peut comme tel être pensé, comme s'il contenait *en lui* une multitude infinie de représentations. C'est pourtant ainsi que l'espace est pensé (car toutes les parties de l'espace coexistent à l'infini). La représentation originaire de l'espace est donc une intuition a priori, et non pas un concept" (ibid.).

Cette "grandeur infinie donnée" est la condition de possibilité de la géométrie (exposition transcendantale) et devient elle-même objet de géométrie en tant qu'*intuition formelle* expliquant la synthèse *non* conceptuelle (que Heidegger appelait "syndosis") donnant à la forme de l'intuition son unité originairement donnée (célèbre note au §26 de la *Déduction transcendantale*).

Il y a donc dans la donation de l'espace comme intuition pure un *infini en acte*. Nous avons longuement commenté ailleurs, en particulier dans *La philosophie transcendantale et le problème de l'objectivité*, cette thèse absolument fondamentale de Kant. Comme l'a remarqué Frank Pierobon dans son *Kant et les Mathématiques* (2003), on se heurte ici à une foule de problèmes techniques particulièrement difficiles car cette intuition donnée peut devenir construite (intuition formelle) [16] et fonctionner alors comme un "horizon" pour des synthèses toujours possibles mais toujours inachevables. Mais l'infini donné en acte dans l'exposition métaphysique *n'est pas* l'illimitation d'une telle synthèse.

Comme l'explique Pierobon (p. 102) en suivant Michel Fichant (1997), les intuitions pures

> "sont des quanta originaires que l'entendement n'a pas encore rendus mesurables".

M. Fichant rappelle que la découverte fondamentale de Kant est que l'intuition sensible possède une forme qui est une détermination formelle constitutive du sujet en deçà de toute pensée conceptuelle. Cette forme de l'intuition est une condition originairement subjective et c'est à ce titre qu'elle relève bien d'une exposition *métaphysique*. Elle est décorrélée du temps et de son infini potentiel et c'est à son niveau, qui n'est ni objectif, ni mathématique, qu'un infini en acte peut-être donné dans la représentation.[17]

---

[16] Cf. Chenet [1994].

[17] Pour ce débat particulièrement délicat, voir, outre Fichant [1997], Benoist [1996] et Longuenesse [1993].

2.3. Le nombre et la mesure

Si cet infini en acte est celui d'une grandeur, c'est parce que la grandeur n'y est pas encore nombrée en tant que telle. C'est un pur *quantum* et non pas une *quantitas* et ce n'est que *l'évaluation* de la grandeur, la mesure, qui est numérique. Celle-ci est une comparaison numérique entre grandeurs qui est étalonnée par une unité de mesure et présuppose un système de nombres.

Comme il est expliqué au début de l'*Analytique des Principes* (Chap. I sur le schématisme), le nombre est pour Kant le *schème* de la grandeur :

> "Le *schème* pur de la *grandeur* (*quantitatis*), considérée comme un concept de l'entendement, est le nombre, qui est une représentation embrassant l'addition successive de l'unité à l'unité (de l'homogène)" (P I 888, Ak III 137).

C'est l'unité de la synthèse de l'appréhension d'un divers homogène, un concept certes, intellectuel et abstrait comme tout concept, mais qui ne s'actualise concrètement qu'à travers des mesures et ces mesures font intervenir le temps à cause de l'addition "successive". Il est très intéressant de voir que pour Kant l'arithmétique abstraite est "intellectuelle" dans la mesure où elle ne porte pas sur des grandeurs en tant que telles mais uniquement sur des *déterminations* de grandeurs (des mesures). Mais en revanche l'arithmétique concrète, pour autant qu'elle détermine précisément des grandeurs, s'applique à l'intuition et est donc schématique et temporelle. Le nombre a bien à voir avec la *mesure*. Et Kant ajoute que pour qu'il y ait grandeur mesurée, il faut que la temporalité du schème qu'est le nombre soit synthétisée dans l'espace de façon à ce que la "successivité" devienne une "simultanéité" *donnée*. L'espace décorrélé de la temporalité dans l'exposition métaphysique retrouve ainsi la temporalité mais à travers le schème c'est-à-dire à travers le nombre. Ce n'est qu'une fois nombré que l'infini en acte donné dans le continu métaphysique originaire devient l'infini potentiel mathématique numérique.

L'infini du nombre est donc chez Kant un infini *potentiel* et il existe chez lui un jeu subtil entre l'infini actuellement donné de l'espace et l'infini potentiel du nombre comme schème. Nous retrouvons là aussi une dimension très "intuitionniste" des mathématiques kantiennes sur laquelle Jean Seidengart a insisté [18]. Ernst Cassirer ne l'a pas compris lorsque,

---

[18] Conférence au Colloque de Cerisy autour de la *Critique de la Faculté de Juger* (1990).

dans *Substanzbegriff und Funktionbegriff*, il rejette la relation schématique kantienne entre la succession numérique abstraite et la succession temporelle.

3. Logique, algèbre, arithmétique

Il existe chez Kant une hiérarchie allant de l'analytique conceptuelle logique au synthétique a priori géométrique. Elle suit un mouvement allant des règles de l'entendement aux formes de l'intuition.

La logique concerne la non-contradiction, les propriétés de l'identité, les congruences, les formes syllogistiques du raisonnement, etc. L'algèbre qui, selon Kant, "fait complètement abstraction de la nature de l'objet" (P I 1300, Ak III 471) calcule sur des "constructions symboliques" et non pas "ostensives" comme les constructions géométriques. Mais cela ne signifie pas pour autant qu'elle soit "discursive" et relève de la logique ou d'une caractéristique universelle à la Leibniz. Elle est *intuitive* car l'intuitif est plus large que l'ostensif géométrique. Cela ne contredit pas le fait que l'arithmétique soit "intellectuelle" car les nombres ne sont que dénotés par l'algèbre dont les symboles intuitifs dénotent des concepts. Ce point est très intéressant et mériterait d'être approfondi. Le symbole est intuitif mais détemporalisé relativement à la temporalité schématique du nombre. Comme le souligne Frank Pierobon (2003, p. 181),

> "le symbole signifie hors du temps".

Le nombre est un concept schématisé, mais le symbole algébrique est une *intuition* et est donc non conceptuel. À travers les symboles algébriques, les nombres-concepts deviennent représentés dans l'intuition.

> "[L'algèbre] parvient ainsi, au moyen d'une construction symbolique, tout aussi bien que la géométrie suivant une construction ostensive ou géométrique (des objets mêmes), là où la connaissance discursive ne pourrait jamais atteindre au moyen de simples concepts" (*Méthodologie transcendantale*, P I 1301, Ak III 471).

Et l'un des bénéfices fondamentaux des calculs algébrico-symboliques traités dans ce sens est qu'ils permettent de maîtriser les erreurs car la construction symbolique dans l'intuition fait que

> "toute fausse démarche devient visible" (P I 1314, Ak III 482).

Il vaut la peine de citer un peu longuement ce passage sur les démonstrations dans la *Méthodologie transcendantale* ("Discipline de la Raison pure dans l'usage dogmatique") :

> "La méthode algébrique elle-même, avec ses équations d'où elle tire par réduction la vérité en même temps que la preuve, si elle n'est pas, il est vrai, une construction géométrique, n'en est pas moins une construction caractéristique, où, à l'aide des signes, on présente les concepts dans l'intuition (…) et où l'on garantit tous les raisonnements contre les erreurs par cela seul que chacun d'eux est mis devant les yeux" (P I 1313, Ak III 481).

Cette thèse de l'intuitivité des calculs symboliques formels sera puissamment repris par Hilbert qui, dans son texte célèbre de 1925 *Über das Unendliche* [19], en appelle à une véritable Esthétique transcendantale symbolique :

> "Kant pensait déjà (…) que les mathématiques ont un contenu garanti indépendamment de la logique et ne pouvaient donc pas être fondées sur la seule logique. Une condition de possibilité de l'usage des inférences logiques et de l'efficacité des opérations logiques est que quelque chose soit déjà donné à notre faculté de représentation [*in der Vorstellung*], que certains objets extra-logiques concrets soient intuitivement [*anschaulich*] présents en tant qu'expérience immédiate précédant toute pensée. Pour que les inférences logiques soient fiables, il faut pouvoir parcourir ces objets complètement dans toutes leurs parties, et il faut que soit donné avec eux immédiatement dans l'intuition, comme quelque chose qui ne puisse pas être réduit à autre chose et ne requiert pas de réduction, le fait qu'ils se présentent, qu'ils diffèrent l'un de l'autre ou qu'ils se suivent l'un l'autre par concaténation. Telle est la position philosophique de base que je considère être requise pour les mathématiques. (…) En mathématiques, ce que l'on considère sont les signes eux-mêmes, dont la forme (…) est immédiatement claire et reconnaissable."

Cela reprend la déclaration de foi de la Conférence de Hambourg de 1922 :

> "Pour moi – et en cela je m'oppose totalement à Frege et à Dedekind – les objets de la théorie des nombres sont les signes eux-mêmes dont nous pouvons reconnaître la forme en toute généralité et en toute sécurité. (...) Le point de vue philosophique solide que je considère comme indispensable

---

[19] Conférence du 4 juin 1925 donnée à la Société Mathématique de Westphalie en l'honneur de Weierstrass.

> pour les fondements des mathématiques pures – aussi bien que pour toute espèce de pensée, de compréhension et de communication scientifique – se résume comme suit : *au commencement* – c'est ainsi que nous nous exprimerons ici – *est le signe*."[20]

Dans certaines de mes précédentes études (1991b, 1992b, 1995), j'avais considéré ce texte célèbre comme une innovation de Hilbert. Mais en fait il s'enracine profondément dans la thèse kantienne que les constructions symboliques de l'algèbre sont intuitives au sens technique du terme.

Ces textes de Hilbert sont, je crois, en général mal interprétés. Soit on y retient l'affirmation que le formalisme réduit les énoncés mathématiques à des assemblages symboliques, mais c'est alors pour négliger la référence appuyée à Kant et à l'Esthétique transcendantale; soit on y retient cette référence, mais c'est alors pour sous-estimer la légalité sui generis du formel. En fait, on trouve ici chez Hilbert tous les moments constitutifs du processus de constitution d'une *objectivité*, d'une objectivité sui generis et autonome propre aux mathématiques formelles (et dont la "physique" sera plus tard l'informatique) [21].

Le fait que l'algèbre et, à travers elle, l'arithmétique soient, sans être "discursives", symboliques et donc intuitives en un sens différent des intuitions pures et des grandeurs (même si elles concourent à leur détermination), entraîne, selon Kant, que leurs principes sont des "formules numériques" synthétiques qu'il appelle des "postulats" et non pas des "axiomes", car Kant réserve le terme d'"axiome" à ce qui concerne les "Axiomes de l'intuition", c'est-à-dire les intuitions comme grandeurs extensives.

4. Géométrie

Il y a beaucoup à dire sur les résonances que peut entretenir la conception kantienne de la géométrie avec les théories modernes.

4.1. Synthétique a priori et neurosciences

Tout d'abord, les formes de l'intuition étant celles de la perception sensible, il est normal de considérer ce que disent les neurosciences cognitives contemporaines de la vision

---

[20] Hilbert [1922].

[21] Pour une analyse de cette objectivité *sui generis* en relation avec les travaux de Hilbert, Husserl et Wittgenstein, cf. Petitot [1992b].

sur la genèse de l'espace sensible. Ce déplacement de perspective de la "métaphysique" vers la neurophysiologie pourra sembler incongru tant nous avons perdu l'habitude de la solidarité des problèmes métaphysiques, logiques, mathématiques, physiques, psychologiques et physiologiques qui dominait la philosophie, de Descartes à Husserl en passant par Locke, Hume, Leibniz, Helmholtz ou Brentano. Pourtant, nous considérons que les déterminations pré-conceptuelles originairement constitutives du sujet, c'est-à-dire "métaphysiques" au sens de l'exposition métaphysique, relèvent désormais des neurosciences cognitives.

Or celles-ci donnent massivement raison à Kant [22] et montrent que l'origine neuronale de l'espace sensible est double. D'abord la "rétinotopie" de la voie rétino-géniculo-corticale, c'est-à-dire le fait qu'il existe une projection possédant de bonnes propriétés topographiques (il s'agit en fait d'une représentation conforme de type logarithme complexe) de la rétine sur les aires primaires du cortex visuel. Ensuite, et surtout, "l'architecture fonctionnelle" de ces aires, en particulier celle de l'aire V1, c'est-à-dire l'organisation micro-anatomique des couches de V1 et la structure fine de leurs connexions intracorticales. L'espace apparaît ainsi comme *un format* pour le traitement des informations sensorielles véhiculées par les fibres du nerf optique.

Il suffit de comprendre que l'espace est un format neurophysiologique défini par l'architecture fonctionnelle du système visuel pour valider immédiatement la plupart des thèses kantiennes sur l'espace sensible. Ce formatage est en effet par définition une forme ontogénétique a priori des contenus sensoriels (de la "matière" ou "hylé" sensorielle dirait Husserl) et n'appartient pas à ces contenus eux-mêmes, qui ne sont que des inputs qui, ainsi formatés, structurés et traités, se transforment en percepts [23]. Il est "synthétique" et non conceptuel (ante-prédicatif et pré-judicatif dirait Husserl) dans la mesure où les aires visuelles occipitales ne sont pas les aires temporales du langage et leur architecture fonctionnelle détermine un format non prédicatif. On est vraiment très proche de Kant :

> "Il n'y a ainsi pour mon intuition qu'une seule façon possible de précéder la réalité effective de l'objet et de se produire comme connaissance *a priori*,

---

[22] Cf. Petitot [2003] et [2006].

[23] Le fait, qu'en tant que format sensoriel, l'espace soit un résultat de l'évolution biologique ne remet pas en cause son statut *a priori* car les *a posteriori* de la phylogenèse sont des *a priori* de l'ontogenèse. Par ailleurs, ce n'est pas parce que la neurophysiologie est une discipline empirique que ce format est empiriquement a posteriori. Pour les contenus sensoriels il fonctionne bien comme un a priori.

> *c'est de ne contenir rien d'autre que la forme de la sensibilité, qui dans le sujet que je suis précède toutes les impressions effectives par lesquelles je suis affecté par des objets*" (*Prolégomènes*, P II 50, Ak IV 282)

La thèse de l'analyticité de l'espace est donc erronée car toute structure "analytique" présuppose un format propositionnel. Or il est neurophysiologiquement faux que la perception soit une attitude propositionnelle ("je vois que *p*" avec *p* une proposition) et s'identifie à des *jugements* perceptifs. Il s'agit d'une "category mistake" à propos de laquelle on peut regretter ce que Kant regrettait déjà chez les "logicistes" leibniziens-wolffiens de son temps :

> "Je ne puis m'empêcher de faire remarquer le préjudice que le fait de négliger cette observation, d'ailleurs facile et d'apparence insignifiante, a fait subir à la philosophie." (*Prolégomènes*, P II 38, Ak IV 272)

4.2. Neurogéométrie et exposition métaphysique

Ce qui relevait de l'exposition métaphysique (formes de l'intuition) chez Kant relève selon nous aujourd'hui de la *neurogéométrie* qui formate les sensations, c'est-à-dire de la micro-géométrie des architectures fonctionnelles cérébrales. Une telle "naturalisation" change évidemment le statut de l'a priori, mais beaucoup moins qu'on pourrait le croire. En effet, les architectures fonctionnelles appartiennent au patrimoine génétique de notre espèce et les structures héritées de la phylogenèse sont, répétons-le, des a priori ontogénétiques pour les sujets. Certes Kant était anti-innéiste mais de façon subtile. Dès la *Dissertation*, il explique que les catégories ne sont pas innées mais acquises, mais acquises réflexivement au sens de

> "concepts abstraits des lois inhérentes à l'esprit." (*Dissertation*, P I 642, Ak II 395)

Quant aux intuitions pures, en faire des représentations innées relèverait d'une philosophie "paresseuse". Elles sont acquises, mais au sens de

> "abstrait(e)s de l'action même par laquelle l'esprit coordonne, selon des lois permanentes, ses sensations." (*Dissertation*, P I 658, Ak II 406)

Toutefois, cette coordination est elle-même *innée* et fonctionne comme un *fondement* de l'acquisition.

Dans sa réponse à Eberhard de 1790, Kant parle "d'acquisition originaire" des intuitions pures (P II 1351, Ak VIII 221) et insiste sur le fait que

> "Il faut cependant qu'il y ait pour ce faire un fondement dans le sujet, fondement par lequel il est possible que les représentations en question

> naissent ainsi et pas autrement, et qu'en outre elles puissent être rapportées à des objets qui ne sont pas encore donnés; ce fondement, du moins, est inné." (P II 1351, Ak VIII 221-222)

Autrement dit, le fondement de la possibilité d'une intuition spatiale est inné et c'est en lui que s'enracine la condition subjective a priori d'être affecté par des objets.

Mais c'est exactement cela la fonction des architectures fonctionnelles : être la condition des formats qui formatent les données sensorielles.

4.3. Géométrie et réflexion

Le fait qu'il existe des "formes de l'intuition" qui formatent les sensations peut par conséquent être considéré désormais comme une donnée scientifique. Non seulement le synthétique a priori a un sens, mais les *jugements* synthétiques a priori géométriques peuvent être interprétés comme une "*réflexion*" de structures neurophysiologiques fondamentales. En effet, la géométrie intuitive que nous éprouvons constamment dans la perception visuelle provient de l'architecture fonctionnelle des aires visuelles. On trouvera dans Petitot (2003) les exemples du transport parallèle (reconnaître que deux orientations en deux points différents du champ visuel sont les mêmes), du principe gestaltiste de "bonne continuation" (le système visuel a tendance à prolonger coaxialement les segments orientés), des mécanismes d'intégration des bords (des détections locales de bords d'objets sont intégrées en bords globaux), et aussi des droites comme géodésiques. Toute cette neurogéométrie fonctionnelle de base qui conduit progressivement à la géométrie euclidienne est une conséquence directe de l'architecture fonctionnelle visuelle. Les contenus sensoriels correspondent à des inputs neuronaux qui se propagent dans ces réseaux, mais c'est le "design" de ces derniers qui les formatent et fonctionne donc comme une forme a priori de la sensibilité. La géométrie euclidienne est une axiomatisation de cette neurogéométrie et, en tant que telle, fait passer des formes de l'intuition aux intuitions formelles.

Exprimées en termes de formatage, les thèses du §15 de la *Dissertation* et l'Esthétique transcendantale de la *CRP* deviennent évidentes. L'espace ne peut pas être abstrait des sensations (l'abstraction relationnelle leibnizienne est neurophysiologiquement fausse), il n'est pas un réceptacle d'objets, il est une représentation singulière, il est une intuition pure et il n'est pas réel mais idéal en tant que forme coordonnant (*liant* comme on dit en neurosciences [24]) le divers de la sensation.

La géométrie formalise et axiomatise cette situation exactement comme en informatique la logique formelle formalise et axiomatise des calculs machine (correspondance de Curry-Howard) [25]. Elle "décompile" – c'est ce que signifie ici "réflexion" – les algorithmes neuronaux du système visuel et, dans la mesure où ces algorithmes sont matériellement réalisés dans le hardware neuronal, elle *ne peut pas* être conceptuelle et analytique dans son contenu (l'intuition pure) bien qu'elle soit composée de jugements mathématiques.

4.4. Conceptuel VS Intuitif et What VS Where

Le soutien qu'apportent les neurosciences cognitives contemporaines aux thèses kantiennes se renforce encore lorsqu'on prend en compte les relations qu'entretiennent les aires visuelles primaires occipitales avec les autres aires cérébrales. En effet il existe deux grandes "voies" corticales, la première – dite pariétale – allant vers les aires du mouvement et de la motricité et concernant la localisation des objets et leurs relations spatiales, la seconde – dite ventrale – allant vers les aires temporales du langage et concernant l'identification des objets (reconnaissance de forme) et leurs propriétés en relation avec leurs descriptions linguistiques. La première voie est appelée celle du "Where" par les neurophysiologistes et la seconde celle du "What". L'opposition "Where VS What" correspond bien à celle entre intuitif et conceptuel chez Kant.

C'est donc, insistons-y, une erreur que de poser que la perception est réductible aux jugements perceptifs et que les contenus perceptifs sont conceptuels et de format

---

[24] C'est en effet l'architecture fonctionnelle qui explique par son formatage les phénomènes de *binding* (liage) de données sensorielles locales en Gestalten perceptives globales. Cela correspond exactement à la synthèse kantienne du divers de la sensation, synthèse phénoménologiquement conditionnée par les formes de l'intuition et mathématiquement déterminée par les intuitions formelles.

[25] La correspondance de Curry-Howard établit une correspondance entre des programmes de bas niveau (λ-calcul typé) proches du langage machine et des preuves logiques de haut niveau qui s'y trouvent compilées et qui les typent, et cela de façon à ce que les démonstrations logiques correspondent au fait que les calculs de bas niveau soient exécutés correctement sur la machine (β-réduction).

propositionnel. Cette thèse est tout simplement fausse, même si elle est encore très largement dominante.

4.5. Le passage du local au global

Les neurosciences de la vision confirment également que l'espace sensible global se constitue par recollement de domaines locaux. Elles retrouvent de façon étonnamment précise l'approfondissement phénoménologique de l'esthétique transcendantale kantienne proposé par Husserl dans des textes comme *Ding und Raum* [26] où les procédures de recollement sont interprétées en termes de kinesthésie, la perception étant inséparable de la motricité [27]. Il est donc fallacieux de critiquer Kant à partir de la généralisation de la géométrie effectuée par la géométrie riemannienne et la théorie des variétés différentiables puisque celles-ci généralisent l'esthétique transcendantale en l'approfondissant et non pas en l'invalidant.

4.6. Modèles euclidiens de géométries non-euclidiennes

D'ailleurs, même si l'on ne tient pas compte des neurosciences cognitives de la perception et de l'action et si l'on en revient au conflit supposé entre le synthétique a priori et les géométries non-euclidiennes, on est conduit également à réviser nombre d'idées reçues sur le caractère obsolète du synthétique a priori. Il faut d'abord rappeler que Kant admettait parfaitement la possibilité logique des géométries non-euclidiennes (la géométrie euclidienne étant synthétique, sa négation ne peut pas être logiquement contradictoire) et que pour lui le primat de la géométrie euclidienne était lié à la mécanique et au principe d'inertie. Par exemple dans les *Prolégomènes*, à propos du paradoxe des objets non-congruents qui ont exactement les mêmes propriétés alors qu'ils ne sont pourtant pas substituables l'un à l'autre, il parle des triangles *sphériques* :

> "diverses figures sphériques montrent, nonobstant cette parfaite concordance intérieure, une différence dans leur relation extérieure, telle que l'une ne se laisse pas du tout substituer à l'autre : par exemple, deux triangles sphériques situés dans deux hémisphères, ayant pour base commune un arc de l'équateur, peuvent être parfaitement égaux en ce qui

---

[26] Cf. Petitot [2004a].

[27] Cf. le beau livre d'Alain Berthoz et Jean-Luc Petit *Phénoménologie et physiologie de l'action* sur cette affinité profonde entre phénoménologie et neurosciences.

> concerne leurs côtés et leurs angles (…) et pourtant on ne peut mettre l'un à la place de l'autre" (P II 54, Ak IV 285-286).

Or la géométrie sphérique est non-euclidienne. Ce qui faisait question à l'époque de Kant était la possibilité de géométries non-euclidiennes tridimensionnelles non constructibles dans $\boldsymbol{R}^3$.

Par ailleurs, dans son analyse du premier modèle – euclidien – de géométrie hyperbolique proposé par Beltrami, Ricardo Gomez rappelle à son tour que Kant a toujours admis que les géométries non-euclidiennes étaient logiquement possibles et que le primat de $\boldsymbol{R}^3$ comme substratum réel des intuitions était d'une part physique et d'autre part perceptif. L'a prioricité et la nécessité de l'espace et du temps sont celles d'une condition de l'expérience possible. Elles sont donc aussi radicalement contingentes (et cela sans paradoxe) que cette expérience elle-même. Qui plus est, le modèle euclidien de Beltrami est lui-même un exemple typique de construction de concepts (les concepts de la géométrie hyperbolique) dans l'intuition pure (la géométrie euclidienne). Il fournit donc plutôt une confirmation – et non pas une réfutation –

> "of both Kant's view about the possibility of non-Euclidean geometries and of the intuitive necessity of Euclidean geometry" (Gomez, 1986, p. 102).

Donc en fait,

> "the first allegedly true interpretation of such [NE] geometry was consistent with the kantian program of constructing in Eulidean space of our human representation all the geometrical concepts" (ibid. p. 107).

J.E. Wiredu a également insisté sur le fait que les géométries non-euclidiennes que rejetait Kant n'étaient pas les géométries non-euclidiennes "faibles" que nous connaissons, mais les géométries non-euclidiennes "fortes" où, par exemple, dans un plan de courbure 0, deux lignes droites pourraient enfermer un espace.

> "As soon as it is appreciated that the concept of non-Euclidean geometry to which Kant denied physical applicability by implication is different in type from that of the known non-Euclidean geometries, the denial of the synthetic *a priority* of geometrical theses on the score of the proven applicability of e.g. Riemannian geometry is seen to have no force" (Wiredu 1970, p. 13).

4.7. Théorie des groupes et synthétique a priori

Le caractère synthétique de l'espace est lié chez Kant à la découverte du paradoxe des objets symétriques qui implique que dans la méréologie spatiale le tout précède les parties, les relations internes dépendant des relations externes :

> "Celle-ci [notre sensibilité] a l'espace comme forme de l'intuition externe et la détermination interne de tout espace n'est possible que par la détermination de sa relation extérieure à l'espace tout entier (la relation au sens externe) dont il est une partie, c'est-à-dire que la partie n'est possible que par le tout" (*Prolégomènes* P II 55, Ak IV 286).

Mais le fait que l'interne présuppose l'externe correspond à ce que deviendra plus tard la géométrie avec Klein et Poincaré, à savoir le *groupe de symétrie* de l'espace, le concept de groupe étant l'une des principales formes modernes du synthétique a priori en géométrie.

II. MATHEMATIQUES, SCHEMATISME ET CONSTRUCTION

Nous allons maintenant aborder le concept central de *construction* chez Kant. On connaît la célèbre caractérisation des mathématiques pures dans la *Méthodologie transcendantale* [28]

> "La connaissance *philosophique* est la *connaissance rationnelle* par *concepts*, et la connaissance *mathématique* la connaissance rationnelle par la *construction* des concepts" (P I 1298, Ak III 469).

1. Construction et généricité

Dans l'interprétation du concept kantien de construction proposée par Hintikka, l'intuitif correspond à des instanciations individuelles et singulières de concepts généraux. Cette interprétation est en partie justifiée dans la mesure où, en tant que systèmes de règles d'engendrement d'objets, de structures et de configurations individuels, les constructions sont "*génériques*" et permettent de traiter au moyen de règles générales le général *in concreto* dans l'intuition singulière. Mais elle reste trop limitée et je voudrais faire trois remarques à son sujet.

---

[28] Première section : "Discipline de la raison pure dans l'usage dogmatique".

1.1. Intuition et individuation

Les intuitions sensibles empiriques sont bien des perceptions d'individus donnés mais ce n'est pas le cas des intuitions pures. L'espace est bien individuant, c'est bien une intuition singulière, mais ce n'est pas pour autant un individu auquel pourrait référer des symboles logiques. Comme nous l'avons vu plus haut, c'est un *format*.

1.2. Généricité et schématisme

Le fait que la construction permette aux mathématiques de traiter du général *in concreto* dans l'intuition est intimement lié au schématisme dont la construction est un enrichissement. Le problème est fascinant et a été considérablement approfondi par la géométrie contemporaine. Pour l'exposer nous allons prendre l'exemple standard du triangle en suivant une analyse de Bernard Teissier (1988).

Le schème du triangle est le principe d'engendrement de l'ensemble $\boldsymbol{T}$ de tous les triangles dans le plan euclidien. Le groupe G des isométries et des homothéties du plan agit sur $\boldsymbol{T}$ et le quotient $\boldsymbol{T} / G$ est un quotient d'un espace beaucoup plus petit, le simplexe Δ des angles φ, ψ, θ satisfaisant la relation $\varphi + \psi + \theta = \pi$[29]. Le point essentiel est qu'il existe des triangles exceptionnels satisfaisant des propriétés particulières supplémentaires : les isocèles, les rectangles et les équilatéraux. Ils sont définis dans Δ par les droites d'équation $\varphi = \psi$, $\psi = \theta$, $\varphi = \theta$, $\varphi = \pi / 2$, $\psi = \pi / 2$, $\theta = \pi / 2$ (cf. figure 1).

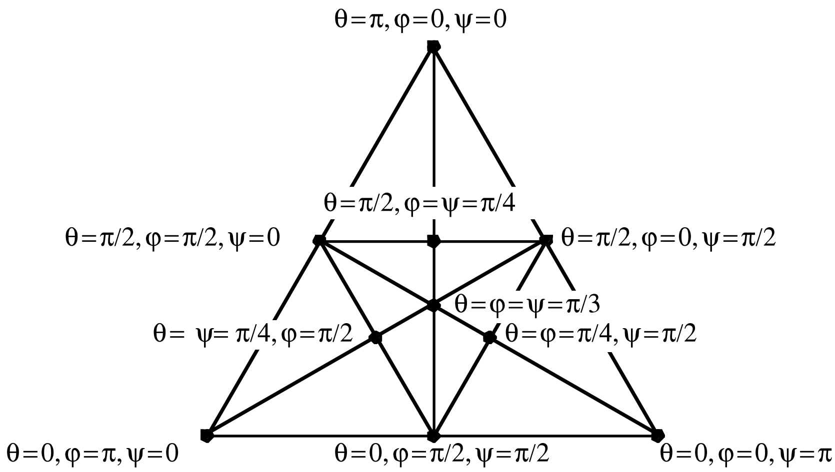

Figure 1. Le schème du triangle comme stratification d'un espace classifiant.

---

[29] Dans le $\boldsymbol{R}^3$ de coordonnées φ, ψ, θ, le simplexe Δ correspond à la partie du plan d'équation $\varphi + \psi + \theta = \pi$ définie par $\varphi, \psi, \theta \in [0, \pi]$.

Un domaine fondamental Δ_0 pour l'action du groupe G sur Δ est représenté à la figure 2. En A, le triangle T est un triangle isocèle aplati (dégénéré) : $\theta = \pi, \varphi = 0,\ \psi = 0$. Sur le segment AC, T est isocèle et θ décroît de π à $\pi / 3$, valeur pour laquelle T est équilatéral (C), en passant par $\pi / 2$, valeur pour laquelle T est rectangle isocèle (B). Sur le segment BD, $\theta = \pi / 2$ et T est donc rectangle. De B vers D, φ décroît et ψ croît et, en D, T est un triangle dégénéré bi-rectangle avec un sommet à l'infini et deux côtés parallèles : $\theta = \pi / 2, \varphi = 0$, $\psi = \pi / 2$. Sur le segment CD, T est isocèle $\psi = \theta$ et φ décroît de $\pi / 3$ à 0. Enfin sur le segment AD, T est dégénéré avec $\varphi = 0$ et deux côtés parallèles. De A vers D, θ décroît de π à π / 2 et ψ croît de 0 à π / 2.

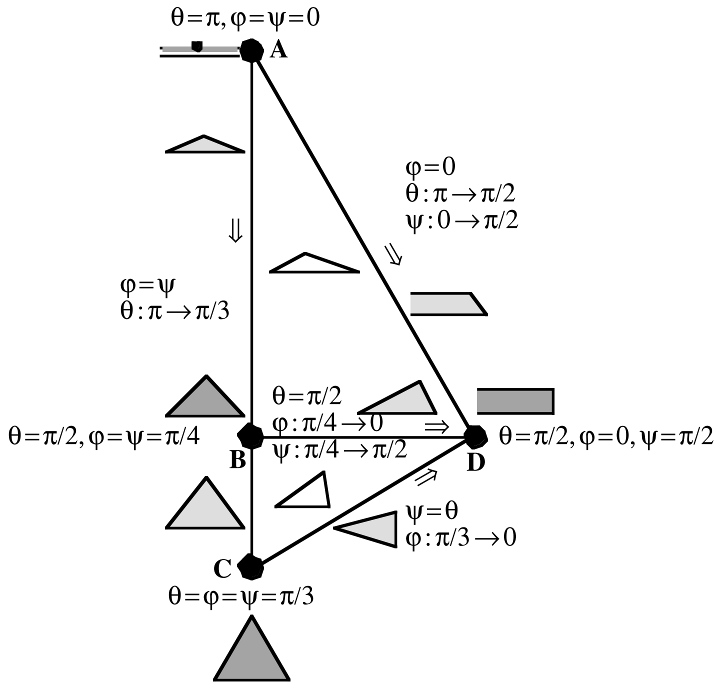

Figure 2. La décomposition du domaine fondamental Δ_0 par la stratification de la figure 1. Les deux cellules ouvertes ABD et BCD correspondent respectivement aux deux types génériques "obtus" et "aigu". Les cas non-génériques de codimension 1 (segments) et 2 (points) sont respectivement en gris clair et gris foncé.

Le sous-simplexe Δ est ainsi un ensemble *stratifié* (cf. I.1.2.a.) composé de cellules correspondant à *deux types génériques* de triangles : ceux dont tous les angles sont aigus et ceux dont un angle est obtus. Les contraintes "isocèle" et "rectangle" et le cas limite de parallélisme sont définis par une relation numérique sur les angles et correspondent à des segments, c'est-à-dire des bords de dimension $2 - 1 = 1$ ou encore de codimension 1 [30]. Ces segments ont pour bords des points de codimension 2 définis par une double contrainte : rectangle-isocèle, isocèle-isocèle = équilatéral, parallèle-birectangle, parallèle-aplati.

Cet exemple du triangle est emblématique de la façon dont les objets génériques sont traités aujourd'hui à la suite des travaux fondamentaux de René Thom et d'autres grands géomètres. Soit $\boldsymbol{T}$ une variété différentiable d'objets, de fonctions, de structures, de configurations, etc. F_w dépendant de paramètres continus w. On suppose définie une topologie sur $\boldsymbol{T}$ et l'on suppose également que le type qualitatif des F_w est défini, par exemple par l'action d'un groupe G sur $\boldsymbol{T}$. Ces données permettent de définir la notion de généricité ou de stabilité structurelle : F_w est structurellement stable si son type qualitatif ne change pas lorsque w varie un peu au sens de la topologie. Dans les bons cas, les F_w structurellement instables définissent une hypersurface stratifiée $\boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{T}$ qui décompose $\boldsymbol{T}$ en cellules ouvertes correspondant aux différents types qualitatifs stables possibles des F_w. Ces cellules ouvertes définissent rigoureusement *le schème* des entités F, c'est-à-dire les différentes façons qu'il y a de traiter un F particulier comme un *objet générique*, c'est-à-dire encore de traiter, pour la variété $\boldsymbol{T}$, le général *in concreto* au moyen d'instanciations singulières.

1.3. Logique des prédicats et objets génériques

Il existe un aspect logique non trivial du schématisme et de la généricité et c'est celui qui a intéressé Hintikka. On peut l'approfondir en utilisant une version des calculs des prédicats inventée par Hilbert pour éliminer la quantification au moyen d'une introduction d'objets génériques.

L'idée fondamentale de Hilbert était la suivante [31]. Soit $F(x)$ un prédicat (unaire) quelconque. De façon purement syntaxique, Hilbert introduit un symbole *intensionnel d'individu* – dit *ε-terme* – noté $\varepsilon_x F(x)$ ou ε_F par commodité, où x devient une variable liée. Comme $\varepsilon_x F(x)$ possède le *même* type logique que celui des arguments x de F, l'expression $F(\varepsilon_F)$, bien qu'autoréférentielle, est pourtant bien formée. Plus généralement, pour toute formule ouverte $G(y)$ à une variable libre y de même type que x (en particulier pour tout autre prédicat unaire), $G(\varepsilon_F)$ est une formule fermée, c'est-à-dire un énoncé. $\varepsilon_x F(x)$ est un symbole

---

[30] La codimension d'une sous-variété de dimension p d'une variété ambiante de dimension n est la dimension complémentaire $n - p$.

[31] Cf. Petitot [1979], [1989], [2004b].

complet (fermé, saturé). Mais l'opérateur ε permet de construire des symboles incomplets. Si $F(x,y)$ est un prédicat binaire, alors $\varepsilon_x F(x,y)$ est un prédicat unaire de y et l'on peut former l'ε-terme $\varepsilon_y \varepsilon_x F(x,y)$, etc.

L'existence et l'identité des ε-termes ainsi définis sont purement syntaxiques. ε_F est un symbole d'individu et non pas de variable et sémantiquement il représente l'*idée* d'un individu *in concreto* satisfaisant F, et cela que l'extension X_F de F soit non vide ou non. C'est donc une *idée in individuo*.

Hilbert *définit* alors la *quantification existentielle* par l'équivalence syntaxique :

(∃) $\exists x\, F(x) \equiv F(\varepsilon_F)$.

Informellement interprétée, cette équivalence signifie que le fait qu'il existe un individu satisfaisant F équivaut au fait que l'idée *in individuo* d'un individu satisfaisant F satisfait effectivement F. Il s'agit donc d'un critère autoréférentiel de consistance de signification. Par l'adjonction d'individus idéaux à l'univers considéré, il devient par conséquent possible de ramener des formules avec quantificateurs à des formules de forme strictement plus simple, sans quantificateurs.

Les ε-termes ε_F sont des entités *intensionnelles*. Comme un déictique d'une langue naturelle, ε_F est en quelque sorte un symbole-index – i.e. une entité intensionnelle de nature pragmatique et dépendante du contexte – dont l'identité syntaxique est bien définie (aspect symbole) mais dont la dénotation est au contraire indéfinie (aspect index). C'est pourquoi, avant que les logiques intensionnelles et la pragmatique formelle n'aient investigué ce genre d'entités, on interprétait sémantiquement les ε-termes comme des opérateurs de choix sélectionnant certains éléments $a \in X_F$, la définition (∃) devenant alors la reformulation de la règle d'introduction du quantificateur existentiel (règle GE de généralisation existentielle) du calcul des prédicats :

(GE) $F(a) \Rightarrow \exists x\, F(x)$.

Mais ε_F peut également être considéré comme un *type générique* dont les spécialisations sont les éléments $a \in X_F$.[32] Comme beaucoup d'autres entités intensionnelles,

[32] Les objets génériques ont été commentés entre autres par Alexius Meinong et ont fait l'objet d'un débat ayant impliqué nombre de philosophes et logiciens intéressés par l'ontologie formelle, de Husserl à Quine en passant par l'école polonaise (Lesniewski, etc.). On trouvera un excellent panorama du débat dans l'ouvrage de Frédéric Nef (1998) sur *L'objet quelconque*.

les ε-termes possèdent une interprétation *de dicto* (l'interprétation générique) et une interprétation *de re* (l'interprétation comme fonction de choix). Ce point a été approfondi par Edward Zalta (1998) qui défend l'introduction d'objets idéaux pour tous les types logiques. Son idée est que les individus génériques idéaux "*encodent*" des propriétés au lieu de les exemplifier. Ce ne sont pas des "supports" de propriétés mais des encodeurs de règles déterminantes, des "concepts-objets" (des idées *in individuo*) qui sont "constitués" par les descriptions qui les déterminent sans pour autant y satisfaire nécessairement. Ils ne sont donc complets que par rapport à leurs propriétés déterminantes et restent incomplets par rapport à leurs autres propriétés possibles. Cet écart entre "constitution" syntaxique et "satisfaction" sémantique est d'ailleurs une façon de formuler leur statut de symbole-index. Dans un article comparant la théorie de ces objets chez Ernst Mally (le disciple de Meinong lui ayant succédé à sa chaire de Gratz) et Husserl, E. Zalta (1998) conclut que, phénoménologiquement parlant, ce sont des contenus noématiques intentionnels. Cette description en fait exactement des *schèmes* au sens de Kant.

Dans le cadre de la logique classique où $\neg\neg F = F$ [33] et $\forall x\, F(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\, \neg F(x)$, un jugement universel du type $\forall x\, F(x)$ s'exprime par

(∀) $\quad \forall x\, F(x) \Leftrightarrow F(\varepsilon_{\neg F})$.

Comme l'a montré John Bell (1993), on peut alors dériver de l'opérateur ε *la loi du tiers exclu* sous la forme

$\neg\forall x\, F(x) \Rightarrow \exists x\, \neg F(x)$.

Mais sans l'utilisation de $\neg\neg F = F$ on ne peut déduire que *le principe de Markov*

$(\forall x\, \neg\neg F(x) \Rightarrow F(x)) \Rightarrow (\neg\forall x\, F(x) \Rightarrow \exists x\, \neg F(x))$

qui affirme le tiers exclu pour les prédicats décidables (i.e. tels que $\neg\neg F = F$).

Ces divers aspects de l'opérateur ε deviennent particulièrement intéressants et significatifs si l'on songe qu'à partir de lui Hilbert et ses collaborateurs ont élaboré un calcul logique – dit ε-calculus et noté CP_ε – qui est syntaxiquement équivalent au calcul classique des prédicats CP [34]. Dans CP_ε, les objets génériques sont canoniquement associés aux formules, mais l'on peut, de façon plus générale, envisager d'autres types d'adjonction. Sur ce

---

[33] $\neg F$ est la négation de F.

[34] Cf. par exemple Leisenring [1969] et Petitot [1979] et [2004b].

point, on pourra consulter par exemple, les travaux de Kit Fine.[35] Ce dernier insiste en particulier sur les faits suivants.

(i) Une interprétation en termes d'objets génériques permet immédiatement de trouver les restrictions qui doivent être apportées, dans les divers systèmes logiques, aux règles d'instanciation (I) et de généralisation (G) respectivement universelle (U) et existentielle (E) :

$$\text{IU} \quad \frac{\forall x F(x)}{F(a)} \qquad \text{GU} \quad \frac{F(a)}{\forall x F(x)}$$

$$\text{IE} \quad \frac{\exists x F(x)}{F(a)} \qquad \text{GE} \quad \frac{F(a)}{\exists x F(x)}$$

Les règles IU et GE étant évidentes, ce sont évidemment les règles GU (celle qui intéressait Hintikka chez Kant) et IE qui font problème. Par exemple, à cause de l'existence de modèles non-standard, on peut parfaitement pouvoir démontrer pour chaque a l'énoncé $F(a)$ sans pouvoir pour autant démontrer l'universelle $\forall x\, F(x)$.

Par exemple, dans le système Q proposé par Quine on a les restrictions suivantes :

R_1 : le symbole d'objet (générique) a n'intervient pas dans $F(x)$ dans les règles GU et IE. Dans une application de GU ou de IE, soient b, c, etc. les constantes de F et soit a ($a \neq b$, c, etc.) une instanciation de x. On dira que a, terme instancié, dépend immédiatement des termes donnés b, c, etc.

R_2 : un symbole a d'objet générique ne peut pas être instancié deux fois.

R_3 : on peut ordonner les termes instanciés dans une démonstration dans un ordre $a_1, ..., a_n$ tel que pour tout i aucun des $a_{i+1}, ..., a_n$ ne dépende immédiatement de a_i.

Ces restrictions sont naturelles si l'on interprète dans Q le a de IE comme un représentant typique et générique de X_F (i.e. comme ε_F, IE devenant l'équivalence ($\exists$) de CP_ε) et le a de GU comme un "contre-exemple" générique de F (i.e. comme $\tau_F = \varepsilon_{\neg F}$, GU devenant l'équivalence ($\forall$) de CP_ε).

(ii) Ces interprétations en termes de sémantique de la généricité permettent de comprendre les différences importantes qui existent dans les divers systèmes logiques entre les restrictions apportées aux règles ci-dessus. Par exemple une autre interprétation de GU consiste à poser que a est l'objet générique de tout l'univers d'objet considéré (par exemple $a = \varepsilon_x(x = x)$). Cela est très différent de l'interprétation quinienne de a comme $\tau_F = \varepsilon_{\neg F}$.

---

[35] Cf. Fine [1985].

(iii) Les objets génériques permettent de donner un sens plus clair aux fonctions de Skolem. Par exemple, une instanciation de IE $\frac{\exists x F(x,b)}{F(a,b)}$ sera représentée par $\frac{\exists x F(x,b)}{F(f(b),b)}$ où f est la fonction de Skolem associée. On sait que les avis divergent sur l'interprétation de f. Est-ce une fonction définie (f étant alors un symbole de constante) ou indéfinie? Qu'elle soit indéfinie est contraire à l'intuition. Mais en général, elle ne peut pas être explicitement définie. Elle le devient toutefois si sa valeur $f(b)$ est considérée comme un ε-terme générique.

(iv) Enfin, et c'est un point décisif, la pensée et le raisonnement *naturels* reposent sur l'usage d'objets génériques. La logique naturelle est une logique catégorique de la généricité et non pas une logique ensembliste extensionnelle. Comme l'affirme Kit Fine

> "le principal avantage de la sémantique générique est qu'elle fournit une représentation fidèle du raisonnement ordinaire."[36]

On voit à quel point les schèmes kantiens comme objets génériques abstraits traités in concreto demeurent en résonance avec des problématiques logiques plus contemporaines.

2. La construction comme "sortie" du concept

La construction kantienne est un approfondissement du schématisme pour les mathématiques. Selon moi, on n'accorde pas suffisamment d'importance à la radicalité de son opposition à la connaissance "par simples concepts". Elle introduit pourtant, si on y regarde de près, *une inversion entre abstraction et construction* sur laquelle Kant est parfaitement clair. L'abstraction conceptuelle est une subsomption qui va du particulier au général : elle ne considère le particulier que sous le général. Au contraire la construction va du général au particulier et même au singulier : comme nous l'avons vu, elle traite l'universel non pas *in abstracto* mais *in concreto*. Comment cela est-il possible ? Parce que

> "construire un concept, c'est présenter *a priori* l'intuition qui lui correspond" (ibid.).

Présentation est ici *Darstellung*. Elle est procédurale, elle est "l'acte" – le système de *règles* – par lequel l'objet du concept peut être "exhibé" [37].

---

[36] Fine [1985].

[37] Kant revient souvent sur cette définition de la la construction, cf. par exemple la *Logique* (Introduction IX 23), ou la *Critique du jugement* (Introduction, P II 949, Ak V 192).

Pourquoi la construction est-elle si importante ? C'est parce qu'elle permet "de sortir du concept" pour atteindre ce que contient son intuition correspondante. Comme l'affirme Kant à propos du concept de triangle :

> "je dois bien plutôt en sortir [du concept], pour aller à des propriétés qui ne se trouvent pas dans ce concept, mais qui pourtant lui appartiennent" (P I 1301, Ak III 472).

La formule est étonnante : "appartenir à … sans s'y trouver". Comment cela est-il possible ? Au moyen *d'inférences à partir d'axiomes*. Le point est vraiment délicat et stratégique. Kant appelle analytique ce qui est *conceptuellement* analytique ("décomposition de concepts" et raisonnements syllogistiques) et appelle *en mathématiques* synthétique a priori ce qui dérive inférentiellement des axiomes axiomatisant les intuitions pures qui ne sont pas conceptuelles. Les constructions *explicitent* inférentiellement en termes de jugements (d'énoncés) ce qui appartient *implicitement* à l'intuition pure où se construit "*l'intuition correspondante*" du concept. Comme l'explique très bien Frank Pierobon (2003, p. 82),

> "la construction faite selon les règles n'invente rien qui ne soit déjà là, mais doit l'inventer pour le rendre accessible à l'entendement".

"Appartenir à" signifie que des propriétés *non-conceptuelles* de l'intuition pure sont néanmoins explicitables en termes de jugements géométriques sur l'intuition formelle et donc que des évidences et des structures intuitives peuvent devenir *mathématiquement* "discursives", mathématiquement et non pas "par simples concepts" [38] :

> "Donc, puisque, dans ses propositions, elle [la connaissance mathématique] doit sortir du concept pour atteindre ce que contient l'intuition qui lui correspond, alors, ses propositions ne peuvent et ne doivent jamais non plus être produites par une décomposition de concepts, c'est-à-dire analytiquement, et elles sont par suite, dans leur totalité, synthétiques" (Prolégomènes, P II 37, Ak IV 272).

"Se trouver dans" signifie au contraire que l'on reste analytiquement dans le contenu conceptuel, sans "en sortir".

Le transcendantal concerne la source des représentations et des jugements et c'est *transcendantalement* que la géométrie est synthétique a priori et non pas analytique car sa source est l'intuition et non pas le concept. Produit d'une réflexivité, la géométrie de l'intuition

[38] Les jugements géométriques sont "discursifs" à cause de leur structure prédicative mais intuitifs et synthétiques a priori en tant que portant sur les intuitions pures.

formelle formalise un format sensoriel et en typifie les algorithmes. Elle "décompile" les algorithmes compilés dans les architectures fonctionnelles de la perception sensible et ne relève donc pas d'une logique des contenus conceptuels. Cela ne l'empêche pas d'être constituée de jugements et d'être "analytique" mathématiquement. Mais un "analytique" décompilant et typifiant n'est pas du tout analytique-conceptuel et *hérite* son caractère synthétique a priori de ce qu'il décompile et typifie.

3. La construction comme problème inverse

J'ai proposé il y a longtemps de concevoir l'opposition kantienne entre abstraction et construction comme la résolution *d'un problème inverse*. Le problème direct est celui d'abstraire le divers intuitif sous l'unité conceptuelle, ce que l'on appelle aujourd'hui une catégorisation. Le problème inverse est celui de construire les référents des concepts en transformant les contenus conceptuels en algorithmes de construction. Il va du concept au divers intuitif en passant par le schème et on peut l'appeler *une synthèse computationnelle*. Les mathématiques sont l'outil par excellence de la synthèse computationnelle, elles sont relayées aujourd'hui par les méthodes de simulation numérique (il suffit de penser aux algorithmes de synthèse d'images).

Les conséquences en sont énormes car c'est aussi pour cette raison que les propositions mathématiques sont intuitives et synthétiques a priori et non pas purement discursives-prédicatives et analytiques-conceptuelles.

4. Définition et constitution d'objet : le synthétique a priori mathématique est aussi inférentiellement "analytique"

La construction mathématique est beaucoup plus forte que le schématisme des concepts empiriques

> "cet art caché dans les profondeurs de l'âme humaine, et dont nous aurons de la peine à arracher à la nature les secrets du fonctionnement pour les mettre à découvert sous les yeux" (P I 887, Ak III 136),

car l'objet référent qu'il s'agit de rejoindre est non seulement donné mais *constitué par des définitions*. Alors que pour les concepts les définitions sont une analyse, en mathématique les définitions *donnent* originairement le concept et l'objet, elles sont des "constructions de concepts originairement formés".

Cette thèse kantienne qu'en mathématiques *les définitions constituent l'objet* anticipe celle des axiomes comme "définitions implicites" et montre que, sous le nom de "synthétique a priori", Kant développe l'idée de ce qu'il vaudrait peut-être mieux appeler un "synthétique axiomatique-inférentiel" qui s'oppose aussi bien au synthétique a posteriori (donné empiriquement) qu'à l'analytique conceptuel et satisfait la propriété que tout y est dérivable d'axiomes, c'est-à-dire démontrable : "il n'y a que la mathématique qui contienne des démonstrations" (P I 1313, Ak III 481). Comme nous venons de le voir, on peut "sortir" du concept tout en restant dans "ce qui lui appartient" au moyen de démonstrations portant sur son intuition correspondante. Le synthétique a priori est un analytique non-conceptuel qui porte sur l'intuition formelle. Il est bien formel, mais son contenu est non-conceptuel et intuitif.

On voit que si l'on décide d'appeler conventionnellement "analytique" *toute* inférence quelle qu'elle soit sans tenir compte de ce sur quoi elle porte, alors le synthétique a priori mathématique kantien devient analytique en ce nouveau sens. Mais cet analytique mathématique syntaxique, non-conceptuel, formel et inférentiel qui formalise les intuitions pures et les fait accéder à l'entendement reste séparé par un abîme de l'analytique conceptuel. C'est pourquoi je considère la guérilla de l'empirisme logique contre le synthétique a priori kantien comme non pertinente, fondée sur une incompréhension et tout à fait obsolète. Elle aura rebaptisé "analytique" le synthétique a priori pour pouvoir affirmer qu'il n'existe pas … comme si, répétons-le une dernière fois, il n'existait pas d'abîme entre l'analytique conceptuel opérant par décomposition de concepts et définitions lexicales et l'analytique mathématique non-conceptuel et inférentiel où l'on infère à partir d'axiomes fonctionnant comme des définitions implicites normant les intuitions pures. Il est faux que la géométrie soit "analytique" au sens de Kant puisqu'elle ne l'est pas conceptuellement. W.E. Wiredu a insisté à ce propos sur l'anachronisme qu'il y a à vouloir appliquer à Kant (comme l'ont fait par exemple Carnap ou Hempel) l'opposition entre géométrie pure (supposée être analytique a priori) et géométrie appliquée (synthétique a posteriori).

> "This account commits what may be called the fallacy of inexhaustive disjonction, for it implicitly assumes the false conception that the two levels alluded to are the only possible levels of geometrical theory" (Wiredu 1970, p. 25).

CONCLUSION

J'aimerais tirer deux conclusions très différentes de ces quelques remarques. La première est que, même si elle est moins approfondie que par exemple celle d'un Leibniz, la philosophie kantienne des mathématiques reste en résonance avec de nombreux problèmes dont l'histoire post-kantienne est très riche et qu'il n'y a donc aucune raison de l'ostraciser.

La seconde, plus importante, est que les neurosciences cognitives de la vision sont en train d'apporter une réponse au problème extrêmement difficile de ce que Kant appelait l'esthétique transcendantale et que cette réponse donne massivement raison à Kant contre les critiques logicistes du synthétique a priori. Il est en train de se passer pour la géométrie ce qui s'est passé pour la logique avec l'avènement des machines de Turing et des ordinateurs. De même que l'on a compris que les énoncés logiques typifient dans des langages formels de haut niveau des calculs machine de bas niveau, de même on commence à comprendre que les énoncés géométriques typifient dans des langages formels de haut niveau des processus neuronaux perceptifs entièrement contraints par des architectures fonctionnelles spécifiques. La géométrie est un format pour la hylé sensorielle et en ce sens est bien "intuitive" et non-conceptuelle, synthétique et non analytique. C'est une grave erreur de croire que, sous prétexte qu'il existe des propositions géométriques permettant "d'intellectualiser" l'espace, la géométrie est elle-même "intellectuelle" et de format propositionnel. La neurogéométrie fait subir au "tournant linguistique" un "retournement géométrique" qui réhabilite le synthétique a priori.

BIBLIOGRAPHIE

Allison, H.E., 1983. *Kant's Transcendental Idealism. An Interpretation and Defense*, New-Haven, Yale University Press.

Bell, J.L., 1993. "Hilbert's ε-operator and classical logic", *Journal of Philosophical Logic*, 22, 1-18.

Benoist, J., 1996. *Kant et les limites de la synthèse*, Paris, Presses Universitaires de France.

Berthoz, A., Petit, J.-L., 2006. *Phénoménologie et physiologie de l'action*, Paris, Odile Jacob.

Bitbol, M., Kerszberg, P., Petitot, J. (eds) 2008. *Constituting objectivity. Transcendental approaches of modern physics*, Berlin, Springer (à paraître).

Breysse, O., 2007. *Résolution du problème des frontières dans la formalisation logico-algébrique de l'espace sensible*, Thèse, Université de Paris VI.

Changeux, J.P., Connes, A., 1989. *Matière à Pensée*, Paris, Odile Jacob.

Chenet, F.-X., 1994. *L'assise de l'ontologie critique – l'esthétique transcendantale*, Presses Universitaires de Lille.

Fichant, M., 1997. "'L'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée' – La radicalité de l'esthétique", *Philosophie*, 56, Paris, Editions de Minuit.

Fine, K., 1985. *Reasoning with Arbitrary Objects*, Oxford, Blackwell.

Friedman, M., 1985. "Kant's Theory of Geometry", *The Philosophical Review*, XCIV, 4, 455-506.

——— 1999. *Dynamics of Reason*, Stanford, CSLI Publications.

Gomez, R.J., 1986. "Beltrami's Kantian View of Non-Euclidean Geometry", *Kant-Studien*, 77, 1, 102-107.

Hilbert, D., 1922. "Neue Begründung der Mathematik. Erste Mitteilung", *Abh. Aus dem Math. Seminar d. Hamb. Univ.*, 1, 157-177. Traduit par J. Largeault in *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Paris, Vrin, 1992.

——— 1925. "Über das Unendliche", trad. anglaise "On the Infinite" in Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic*, 1879-1931, Cambridge, Harvard University Press, 367-392, 1967.

Hintikka, J., 1974. *Knowledge and the Known*, Dordrecht, D. Reidel.

——— 1981. "Kant's Theory of Mathematics Revisited", *Philosophical Topics*, 12, 2, 201-215.

Husserl, E., 1907. *Ding und Raum, Vorlesungen 1907*, Husserliana XVI, La Hague, Martinus Nijhoff, 1973. Trad. Fr., J-F. Lavigne, Paris, Presses Universitaires de France, 1989.

Kant, E., 1781-1787. *Kritik der reinen Vernunft*, Kants gesammelte Schriften, Band III, Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Georg Reimer, 1911. Traduction in Kant [1980-1986].

——— 1786. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Kants gesammelte Schriften, Band IV, Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Georg Reimer, 1911. Traduction in Kant [1980-1986].

——— 1979. *Critique de la Faculté de Juger*, trad. A. Philonenko, Paris, Vrin.

——— 1980-1986. *Oeuvres philosophiques* (F. Alquié ed.), Paris, Bibliothèque de la Pléïade, Gallimard.

——— 1970. *Quelques opuscules précritiques*, Trad. S. Zac, Paris, Vrin.

——— 1971. *Premiers Pincipes métaphysiques de la Science de la Nature*, Trad. J. Gibelin, Paris, Vrin.

——— 1796-1803. *Opus Postumum*, trad. F. Marty, Paris, Presses Universitaires de France, 1986.

Kerszberg, P., 1997. *Critique and Totality*, State University of New York Press.

——— 1999. *Kant et la nature*, Paris, Les Belles Lettres.

Lautman, A., 1937. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, (M. Loi ed., réedition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946), Paris, Bourgois, 1977.

Leisenring, A.C., 1969. *Mathematical Logic and Hilbert's ε-Symbol*, New York, Gordon & Breach.

Longuenesse, B., 1993. *Kant et le pouvoir de juger*, Paris, Presses Universitaires de France.

Miller, L., 1975. "Kant's Philosophy of Mathematics", *Kant-Studien*, 66, 3, 297-308.

MNS, 1989. *La Mathématique non-standard*, (H. Barreau, J. Harthong, eds.), Paris, Editions du CNRS.

Natorp, P., 1910. *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, Leipzig-Berlin, B. G. Teubner.

Nef, F., 1998. *L'objet quelconque*, Paris, Vrin.

Peiffer-Reuter R., 1989. "L'infini relatif chez Veronese et Natorp. Un chapitre de la préhistoire de l'analyse non-standard", *MNS [1989]*, 117-142.

Petitot, J., 1979-1982. "Infinitesimale", "Locale/Globale", "Unità delle matematiche", *Enciclopedia Einaudi*, VII, 443-521 ; VIII, 429-490 ; XV, 341-352 ; XV, 1034-1085, Turin, Einaudi.

——— 1985. *Morphogenèse du Sens*, Paris, Presses Universitaires de France.

——— 1987, "Refaire le "Timée". Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman", *Revue d'Histoire des Sciences*, XL, 1, 79-115.

——— 1989. "Rappels sur l'analyse non-standard", *MNS [1989]*, 187-209.

——— 1990, "Logique transcendantale, Synthétique a priori et Herméneutique mathématique des Objectivités", *Fundamenta Scientiæ*, (numéro en l'honneur de L. Geymonat), 10, 1, 57-84.

——— 1991a, *La Philosophie transcendantale et le problème de l'Objectivité*, Entretiens du Centre Sèvres, (F. Marty ed.), Paris, Editions Osiris.

——— 1991b. "Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale", *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, (G. Granel ed.), Mauvezin, Editions TER, 213-282.

——— 1992a, "Actuality of Transcendental Aesthetics for Modern Physics", *1830-1930 : A Century of Geometry*, (L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis eds), Berlin, New-York, Springer, 273-304.

——— 1992b, "Continu et Objectivité. La bimodalité objective du continu et le platonisme transcendantal", *Le Labyrinthe du Continu*, (J.-M. Salanskis, H. Sinaceur eds.), Paris, Springer, 239-263.

——— 1992c. *Physique du sens*, Paris, Editions du CNRS.

——— 1994a. "Esthétique transcendantale et physique mathématique", *Neukantianismus. Perspektiven und Probleme* (E.W. Orth, H. Holzhey Hrsg.), Würzburg, Königshausen & Neumann, 187-213.

——— 1994b, "Phenomenology of Perception, Qualitative Physics and Sheaf Mereology", *Philosophy and the Cognitive Sciences*, Proceedings of the 16th International Wittgenstein Symposium (R. Casati, B. Smith, G. White eds), Vienne, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 387-408.

——— 1995. "Pour un platonisme transcendantal", *L'objectivité mathématique. Platonisme et structures formelles* (M. Panza, J-M. Salanskis eds), Paris, Masson, 147-178.

——— 1997. "Objectivité faible et Philosophie transcendantale", *Physique et Réalité, débat avec B. d'Espagnat*, (M. Bitbol, S. Laugier, eds.), Paris, Diderot Editeur, 201-236.

——— 1997. "Philosophie transcendantale et objectivité physique", *Philosophiques*, XXIV, 2, 367-388, Québec, Bellarmin.

——— 1999. "Morphological Eidetics for Phenomenology of Perception", *Naturalizing Phenomenology: Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science*, (J. Petitot, F. J. Varela, J.-M. Roy, B. Pachoud, eds.), Stanford, Stanford University Press, 330-371.

——— (ed.) 2000, "Philosophie et Sciences: Objectivité scientifique et logique transcendantale", (G. Brittan, M. Bitbol, M. Stölzner, P. Kerszberg, J-M. Salanskis, J. Petitot), *Archives de Philosophie*, 63, 4.

——— 2003. "Neurogéométrie et phénoménologie de la perception", *Philosophie de la Perception* (J. Bouveresse, J-J. Rosat, eds.) , Paris, Collège de France-Odile Jacob, 53-76.

——— 2004a. « Géométrie et Vision dans *Ding und Raum* de Husserl », *Des lois de la pensée aux constructivismes* (M-J. Durand-Richard ed.), *Intellectica*, 2004, 2, 39, 139-167.

——— 2004b. "Le problème logique de la quantification existentielle chez Preti et Hilbert", *Il pensiero filosofico di Giulio Preti* (P. Parrini, L. Scarantino eds), Milano, Guerini, 109-143.

——— 2006. "Neurogéométrie des architectures fonctionnelles de la vision", *Journée annuelle de la SMF*, 24 juin 2006, *Mathématiques et Vision*, 69-128.

——— 2008a "Set theory and the transcendence of the continuum", *Intellectica*, (à paraître).

——— 2008b "Noncommutative geometry and transcendental physics", *Constituting objectivity. Transcendental approaches of modern physics*, Berlin, Springer (à paraître).

Philonenko, A., 1972. *L'œuvre de Kant*, Paris, Vrin.

Pierobon, F., 2003. *Kant et les Mathématiques*, Paris, Vrin.

Posy, C.J., 1992 (ed.). *Kant's Philosophy of Mathematics*, Kluwer.

Riemann, B., 1854. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, *Gesammelte Mathematische Werke*, 1990, 304-319.

Salanskis J. M., 1991. *L'Herméneutique formelle : L'Infini – Le Continu – L'Espace*, Paris, Editions du CNRS.

Scholtz, E., 1992. "Riemann's Vision of a New Approach to Geometry", *1830-1930 : A Century of Geometry*, (L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis eds), Berlin, New-York, Springer, 22-34.

Servois, J., 2004. *Paul Natorp et la Théorie Platonicienne des Idées*, Toulouse, Presses Universitaires du Septentrion.

Smith, B., 1993. “Ontology and the logistic analysis of reality”, Preprint.

Teissier, B., 1988. "Stratifications, finitude et intuition", *Logos et Théorie des Catastrophes*, Colloque de Cerisy à partir de l'œuvre de René Thom (J. Petitot ed.), Genève, Editions Patiño, 59-65.

Thom, R., 1980. *Modèles mathématiques de la Morphogenèse*, Paris, Christian Bourgois.

Veronese, G., 1892. *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Padoue, Tipografia del Seminario.

Vuillemin, J., 1955. *Physique et Métaphysique kantiennes*, Paris, Presses Universitaires de France.

Wang, H., 1987. *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, M.I.T Press.

Wiredu, J.E., 1970. "Kant's Synthetic a priori in geometry and the rise of non-euclidean geometries", *Kant-Studien*, 61, 1, 5-27.

Zalta, E., 1998. "Mally's Determinates and Husserl's Noemata", in *Ernst Mally - Versuch einer Neubewertung*, A. Hieke (ed.), St. Augustin, Academia-Verlag, 9-28.