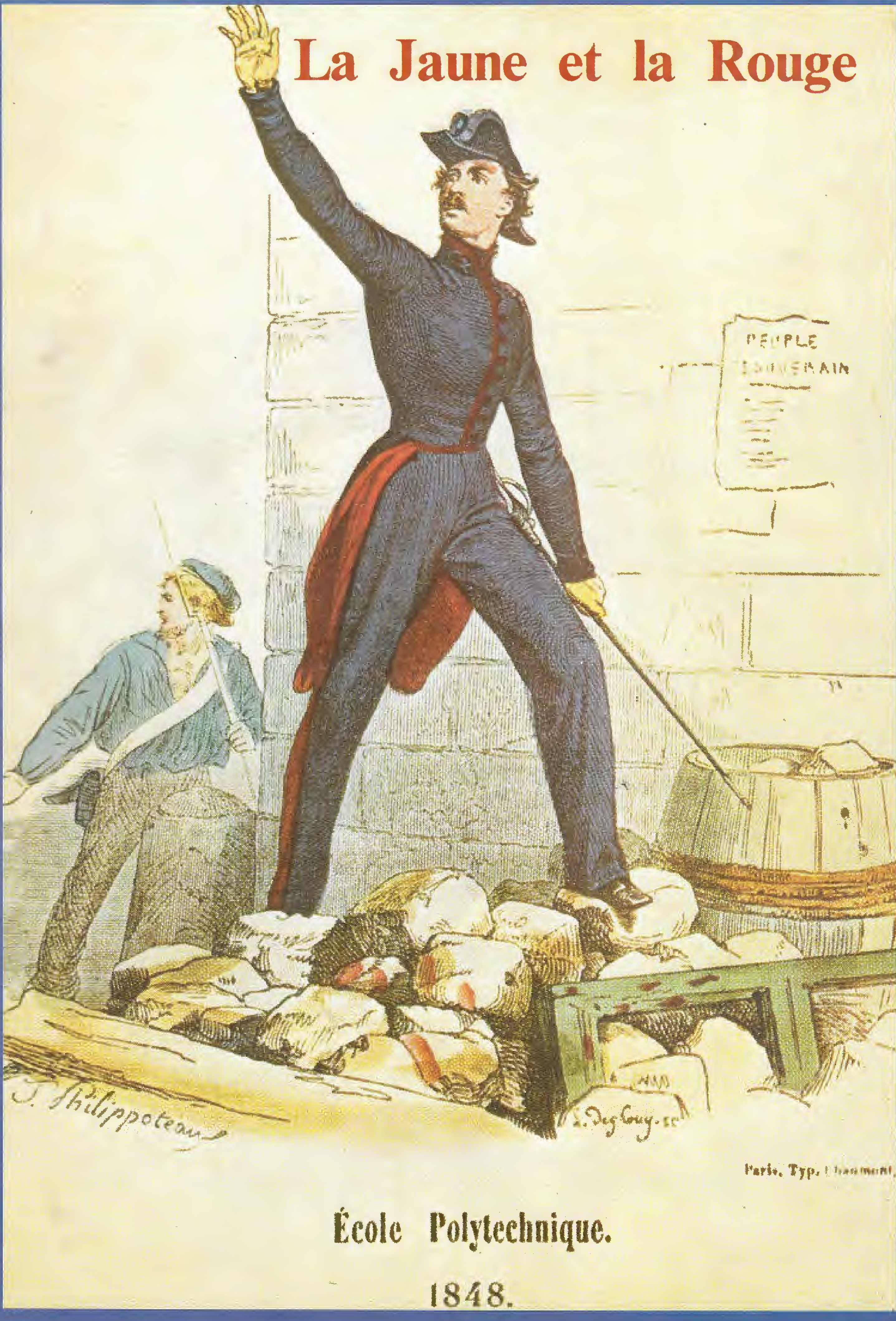
La Jaune et la Rouge



École Polytechnique.

1848.

DÉCEMBRE 1988 / N° 440 / 20 F

LA THEORIE DES CATASTROPHES : PRINCIPES ET METHODE

Jean Petitot
Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales
E.H.E.S.S.
54, bd Raspail 75006 Paris

INTRODUCTION

La théorie des catastrophes (TC) est le nom qu'a pris l'application d'une classe de modèles mathématiques très spécifiques à des domaines de réalité aussi différents que la physique des phénomènes critiques, la biologie structurale ou la sémio-linguistique. Apparue sur la scène scientifique et philosophique en 1972 lors de la publication de l'ouvrage fondateur de René Thom ***Stabilité structurelle et Morphogenèse***, cette théorie a connu un développement considérable et a suscité de très amples débats autour des années 1975. Depuis, son destin a été assez étrange. Il est dû en grande partie à *l'ambivalence épistémologique* de la TC, ce que René Thom a appelé sa "two fold way", sa *double voie*. Très grossièrement, on peut dire que sa première voie, la voie physique et mathématique, a été reconnue, célébrée et assimilée par la communauté scientifique alors qu'au contraire sa seconde voie, la voie phénoménologique et herméneutique, a été dénoncée, critiquée et rejetée. Selon nous, ce semi-échec n'est pas tant à imputer à la TC elle-même qu'à la disparition du sens et du souci philosophiques dans les techno-sciences contemporaines.

De très nombreuses introductions à la TC étant disponibles, nous nous limiterons dans ce court article à une brève présentation architectonique de ses divers principes, aspects et dimensions. Nous renvoyons aux articles cités en bibliographie (en particulier ceux de l'Encyclopaedia Universalis et de l'Enciclopedia Einaudi) pour des précisions ainsi que pour une biographie de René Thom.

1. LE CONTENU GENERAL DU MODELE

La meilleure façon d'aborder le modèle général de la TC est sans doute, à la suite de Christopher Zeeman, de le faire dans le cadre de la théorie des systèmes.

Soit S un système quelconque conçu comme une "boîte noire" ("black box"). Supposons que les hypothèses suivantes, toutes très générales, soient satisfaites.

(a) A l'intérieur de la boîte noire, il existe un processus interne (en général inobservable) X qui définit les *états internes* que le système S est susceptible d'occuper de façon stable. Pour des raisons de simplicité, on peut supposer que ceux-ci sont en nombre fini.

(b) Le processus interne X définit *globalement l'ensemble* des états internes de S. Cette hypothèse est essentielle. Elle signifie que les états internes sont *en compétition* et donc que le choix de l'un d'eux comme état *actuel virtualise* les autres. Autrement dit ces états n'existent pas en tant qu'entités isolées. Ils s'entredéterminent par des rapports de *détermination réciproque*.

(c) Il existe donc *une instance de sélection* I qui, sur la base de certains critères (spécifiques au système et pouvant varier considérablement) sélectionne l'état actuel parmi les états internes possibles.

(d) Enfin, autre hypothèse essentielle, le système S est *contrôlé* continuement par un certain nombre de paramètres de contrôle, paramètres variant dans un espace W que, pour l'opposer au processus interne X, on appelle *l'espace externe* (ou espace de contrôle, ou encore espace substrat) de S.

Soit alors $\mathfrak{X}$ "l'espace" des processus internes X possibles. Si les hypothèses ci-dessus sont vérifiées, le système S sera décrit d'abord par le champ $\sigma : W \rightarrow \mathfrak{X}$ associant à $w \in W$ le processus X_w et ensuite par l'instance de sélection I. De tels systèmes $S = (W, \mathfrak{X}, \sigma, I)$ abondent dans la nature. Pensons par exemple aux phénomènes thermodynamiques de transitions de phases. Dans de tels cas, le système S est le système thermodynamique considéré. Les états internes sont les phases thermodynamiques, l'instance de sélection I est réalisée par le principe de minimisation de l'énergie libre et les paramètres de contrôle sont, par exemple, la pression et la température. Quant au processus interne X_w, indescriptible en raison de sa complexité, il est celui de la dynamique moléculaire.

Or l'expérience la plus commune indique que de tels systèmes subissent, lorsque les paramètres de contrôle traversent certaines valeurs particulières - dites valeurs *critiques* - des transitions de phases c'est-à-dire des *discontinuités* de leurs qualités observables et donc des transformations *brusques* d'état interne. Les valeurs critiques constituent un sous-ensemble K de W, dit *diagramme de phases*. K partitionne W en domaines correspondant aux diverses phases que peut présenter S. Autrement dit, il le *catégorise* et y "*externalise*" sous la forme d'un système de discontinuités, de frontières, de seuils, la *compétition* (*la détermination réciproque*) des *états internes*. Il s'agit là d'une possibilité *générale* qui est une conséquence directe des hypothèses (a) - (d).

Comment se manifeste en effet *phénoménologiquement* un système de type $S = (W, \mathfrak{X}, \sigma, I)$? Phénoménologiquement parlant, *l'apparaître* du système est fourni par les *qualités observables* $q^1 \dots q^n$ qu'il manifeste lorsqu'il occupe un certain état interne. Autrement dit, le processus interne X_w "s'extériorise" en "qualités sensibles" q^i_w [1]. Lorsque le contrôle w varie continuement, l'état interne actuel varie continuement (hypothèse (d)), et donc les qualités q^i_w. Mais phénoménologiquement parlant, une variation continue n'est qu'un affaiblissement de l'invariance. Qualitativement, c'est une invariance. Elle n'est donc pas significative. Appelons alors avec René Thom *point régulier* de W une valeur w du contrôle telle que les qualités observables q^i_w varient continuement - et restent donc qualitativement invariantes, c'est-à-dire stables - dans tout un voisinage U de w. Les points réguliers constituent un ouvert R_W de W, l'ouvert de stabilité des qualités. Soit maintenant K_W le *fermé* complémentaire de R_W dans W. Par définition, les points de K_W sont des valeurs w du contrôle telles que au moins une qualité observable q^i_w subisse une discontinuité. Ce sont des valeurs *critiques* à la traversée desquelles le système S devient le support *d'un phénomène critique.* On les appelle aussi des valeurs *catastrophiques*, le fermé K_W s'appelant *l'ensemble catastrophique* de S. On peut également appeler les K_W des *morphologies externes.*

Comme René Thom y a souvent insisté, le concept de catastrophe est purement phénoménologique. Mais il est intimement solidaire du concept théorique, quant à lui mathématisable, de transition ou de bifurcation d'état interne. Car quelle peut être la cause des catastrophes observées ? Supposons que le contrôle w parcoure un chemin γ dans W. Soit A_w l'état interne actuel initial sélectionné par I. Au cours de la déformation de X_w le long de γ - et donc, d'après l'hypothèse (d), de la structure de A_w et des relations de détermination réciproque qu'il entretient avec les états virtuels B_w, C_w, etc. d'après l'hypothèse (b) - il peut fort bien se produire que, à la traversée d'une valeur (critique), A_w ne satisfasse plus aux critères de sélection imposés par I d'après l'hypothèse (c). Le système bifurque donc spontanément de A_w vers un autre

[1] Ces qualités sont "intensives" et, lorsqu'elles sont mesurables, deviennent observables.

état actuel (jusque là virtuel) B_W. Cette transition catastrophique d'état interne se manifeste par une discontinuité de certaines qualités observables q^i_W, i.e. par une catastrophe. Autrement dit, c'est la *déstabilisation* (relative à l'instance I) des états *internes* actuels sous la variation du contrôle qui induit dans l'espace *externe* W un ensemble de catastrophes K_W. Il y a là une dialectique interne/externe constitutive du modèle général, une dialectique *de l'expression des conflits internes par les morphologies externes.*

2. LES SPECIFICATIONS MATHEMATIQUES DU MODELE GENERAL

2.1. Première spécification. Le concept de stabilité structurelle

Mathématiquement parlant, la TC repose sur la possibilité de *spécifier* le modèle général et sur les théories hautement raffinées qui en découlent.

La première spécification consiste d'abord à supposer que, eu égard à leur nature, les processus internes X_W constituent un espace $\mathfrak{X}$ muni d'une *topologie* $\mathfrak{T}$ "naturelle" : cela signifie que l'on sait définir rigoureusement la continuité du champ $\sigma : W \to \mathfrak{X}$. Elle consiste ensuite à supposer que l'on sait définir le *type qualitatif* des processus X. Le type qualitatif est une relation d'équivalence qui sera en général définie par l'action d'un *groupe* G sur $\mathfrak{X}$. Soit $\tilde{X}$ la classe d'équivalence de X pour le type qualitatif (i.e. l'orbite de X sous l'action de G). On cherchera à caractériser ce qui demeure *invariant* lorsque X varie dans $\tilde{X}$ (i.e. varie à type qualitatif constant) par une information discrète, par exemple par les valeurs d'un nombre fini d'invariants $t_1, ..., t_k$. Au niveau des invariants - c'est-à-dire à un niveau "grossier", qualitatif - la variation dans une classe d'équivalence $\tilde{X}$ *se réduit à l'identité.* Il n'y a donc de variation qualitative que lorsqu'une déformation dans $\mathfrak{X}$ *fait changer de classe d'équivalence.* La variation se manifeste alors souvent pas une *discontinuité* de la valeur de certains invariants et l'on retrouve la "bonne" situation du modèle général[2].

La partition de $\mathfrak{X}$ en classes d'équivalence suivant le type qualitatif est une *classification* des éléments $X \in \mathfrak{X}$. Le modèle général débouche ainsi sur la reprise (originale) d'une problématique très ancienne, celle, *taxinomique*, de la logique *du générique et du spécial.* L'idée de base est alors d'étudier les rapports entre cette logique classificatoire et la topologie $\mathfrak{T}$. Par rapport à un point de vue standard qui consisterait à étudier, pour chaque système concret de type $S = (W, \mathfrak{X}, \sigma, I)$, les processus internes X_W comme des entités isolées, la TC introduit un déplacement de point de vue. Elle considère les familles paramétrées $(X_W)\ w \in W$ comme l'image de champs $\sigma : W \to \mathfrak{X}$ "plongeant" l'espace externe W (qui, en général, sera un morceau d'espace standard $\mathbb{R}^n$)[3] dans l'espace généralisé $\mathfrak{X}$. Cette considération des espaces $\mathfrak{X}$ et de leur *structure* intrinsèque (associée au couplage de la classification et de la topologie) permet de réinterpréter la dialectique de l'expression des conflits internes par les morphologies externes à partir de la dialectique entre variation et invariance.

En effet, dès que l'on dispose sur un espace $\mathfrak{X}$ d'une topologie $\mathfrak{T}$ et d'une relation d'équivalence définissant le type qualitatif, on peut définir une notion *de stabilité structurelle.*

Définition - Soit $X \in \mathfrak{X}$. On dit que X est structurellement stable si tout Y assez voisin de X (au sens de $\mathfrak{T}$) est équivalent à X.
X est donc structurellement stable si son type qualitatif "résiste" aux petites perturbations, ou encore si la classe $\tilde{X}$ est *ouverte* (au sens de $\mathfrak{T}$) en X.

Soit alors $K_{\mathfrak{X}}$ le sous-ensemble fermé de $\mathfrak{X}$ constitué des $X \in \mathfrak{X}$ *structurellement instables.* $K_{\mathfrak{X}}$ est un ensemble catastrophique global et *intrinsèque*, canoniquement associé à $\mathfrak{X}$. C'est une morphologie *discriminante* qui le catégorise et classifie les types qualitatifs de ses éléments structurellement stables. Autrement dit, $K_{\mathfrak{X}}$ *géométrise* la classification interne de $\mathfrak{X}$. Il y a là *un "supplément de géométrie" que la TC a pour vocation de transformer en source de modèles*

2 Dans les cas "complexes", le type qualitatif peut varier de façon continue. C'est le problème dit des "modules".

3 $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien standard de dimension n.

pour les phénomènes morphologiques et structuraux. L'idée directrice est la suivante.

Soit $W \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{X}$ le champ caractéristique d'un système $S = (W, \mathfrak{X}, \sigma, I)$. Soit $K'_W = \sigma^{-1}(K_W \cap \sigma(W))$ la trace de $K_{\mathfrak{X}}$ sur W par l'intermédiaire de σ. L'hypothèse de la modélisation est que l'ensemble catastrophique K_W de S est déductible de K'_W à partir de l'instance de sélection I. Elle signifie qu'une valeur w du contrôle appartient à K_W (i.e. est une valeur critique) si et seulement si la situation en w est corrélée de la façon réglée par I à une situation appartenant à K'_W. L'approche catastrophiste renoue ici avec un motif "platonicien" : l'*apparaître* d'un phénomène (i.e. la morphologie externe) est essentiellement le *contour apparent* sur son espace substrat de la forme décrivant son *être* (i.e. du processus interne).

C'est donc l'analyse (à la fois locale et globale) des ensembles catastrophiques "intrinsèques" $K_{\mathfrak{X}}$ qui sera au centre de la théorie. Si l'on introduit de plus l'hypothèse - évidente *a priori* - qu'un champ σ ne peut exister concrètement *que s'il est lui-même structurellement stable*, l'on est conduit à constater qu'une telle contrainte *borne drastiquement la complexité susceptible d'être présentée par les K'_W*. Dans les cas les plus simples, on peut même accéder à une *classification* des structures locales des K'_W et donc des morphologies externes locales. La théorie fait ainsi apparaître des *contraintes* purement mathématiques (platoniciennes) contraignant le domaine des phénomènes morphologiques et structuraux. Elle y révèle *de la nécessité*, la nécessité étant, rappelons-le, la catégorie suprême de toute science objective.

2.2. Deuxième spécification. La théorie des sytèmes dynamiques et la théorie des catastrophes généralisées (TCG)

La spécification mathématique majeure du modèle général consiste à postuler que le processus interne X est un *système dynamique* différentiable sur une variété différentiable M de paramètres internes $x_1, x_2, ..., x_n$ caractéristiques du système S considéré. Pour le distinguer de l'espace externe W, on appelle M l'*espace interne*. On suppose donc que chaque état *instantané* [4] de S est descriptible par un point x de M.

Un système dynamique X sur M consiste à associer à chaque point x de M un vecteur tangent (un vecteur "vitesse") X(x) à M en x, vecteur variant différentiablement avec x. X est donc un champ de vecteurs différentiable sur M, autrement dit, en termes des coordonnées locales $x_1, ..., x_n$, un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n)$$

où les f_i (composantes du champ) sont des fonctions différentiables des x_j (et où t est le paramètre temporel).

Etant donné un tel champ, l'intégrer consiste à trouver dans M des courbes différentiables paramétrées par le temps t i.e. des applications différentiables

$$\begin{cases} \gamma : \mathbb{R} \to M \\ t \mapsto \gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases}$$

qui admettent en chaque point pour vecteur vitesse $\frac{dx}{dt} = \frac{d\gamma(t)}{dt}$ le vecteur du champ $X(x)$ (= $X[\gamma(t)]$).

On suppose dans les modèles que le champ X est un système dynamique, i. e. (i) que l'on sait définir pour tout t l'application $\varphi_t : M \to M$ qui associe à tout x de M le point au temps t de la trajectoire issue de x au temps t = 0, (ii) que φ_t est un *difféomorphisme* de M et (iii) que l'application

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}\, M \\ t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_t \end{cases}$$

du groupe additif de $\mathbb{R}$ dans le groupe des difféomorphismes de M est un morphisme de groupe (i.e. φ_0 = identité de M, $\varphi_{t+t'} = \varphi_{t'} \circ \varphi_t$ et $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$). φ s'appelle *le flot* du système dynamique X. C'est la version intégrale du champ de vecteurs X.

René Thom a proposé d'appeler *modèles*

---

[4] Il ne faut pas confondre état instantané et état interne.

métaboliques les modèles S = (W, $\mathfrak{X}$, σ, I) où les processus internes X_W sont des systèmes dynamiques. Il faut y définir les états internes. L'idée de base est d'introduire une différence *entre dynamique rapide et dynamique lente*, c'est-à-dire entre deux échelles de temps, l'une interne rapide, l'autre externe lente. "L'idée philosophique essentielle sous-jacente à la TC est que tout phénomène, toute forme spatio-temporelle doit son origine à une distinction qualitative des modes d'action du *temps* dans les choses. Toute distinction d'apparence qualitative dans un espace W (le substrat) peut être attribuée à deux modes d'action du temps : un mode "rapide" qui crée dans un espace interne des "attracteurs" qui spécifient la *qualité* phénoménologique locale du substrat ; et un mode "lent" agissant dans l'espace substrat W lui-même"[5]. Autrement dit, on suppose que la dynamique interne d'évolution des états instantanés est "infiniment" rapide par rapport aux dynamiques externes d'évolution dans les espaces externes W. Seuls comptent donc les *états asymptotiques* (pour $t \to +\infty$) définis par les X_W i.e. les *régimes limites*.

Or l'analyse de ces états asymptotiques s'est révélée être d'une difficulté inattendue et redoutable. En effet, la complexité d'un système dynamique est en général prodigieuse. D'abord le déterminisme idéal qu'est le déterminisme mathématique *n'implique en rien* un déterminisme au sens concret du terme (le déterminisme comme prédictibilité)[6]. Concrètement, une condition initiale ne peut en effet être définie qu'approximativement. Elle n'est pas représentée par un point x_0 de M mais par un petit domaine U "épaississant" x_0. Pour que le déterminisme soit concret, il faut donc que les trajectoires issues de U forment un petit tube "épaississant" la trajectoire γ issue de x_0. Techniquement parlant, cela signifie que la trajectoire γ est *stable* relativement à de petites perturbations de sa condition initiale[7]. Un système dynamique concrètement déterministe est donc un système dynamique (par définition idéalement déterministe) dont les trajectoires sont stables. Cela n'a aucune raison d'être le cas. Il existe même des systèmes dynamiques (par exemple les systèmes géodésiques sur les variétés riemanniennes de courbure négative) qui présentent la propriété que *toutes* leurs trajectoires sont *instables*, et qui la présentent de façon *structurellement stable*.Ainsi que l'a noté Arnold, "l'éventualité de systèmes structurellement stables à mouvements compliqués dont chacun est exponentiellement instable en soi est à mettre au rang des plus importantes découvertes faites ces dernières années en théorie des équations différentielles. (...) Jadis on supposait que dans les systèmes d'équations différentielles génériques ne pouvaient exister que des régimes limites stables simples : des positions d'équilibre et des cycles. Si le système était plus compliqué (conservatif par exemple), on admettait que sous l'effet d'une faible modification des équations (par exemple si l'on tenait compte des petites perturbations non conservatives) les mouvements compliqués se "décomposaient" en mouvements simples. Maintenant nous savons qu'il en va autrement et que dans l'espace fonctionnel des champs de vecteurs il existe des domaines composés de champs où les courbes de phase (les trajectoires) sont plus complexes. Les conclusions qui en découlent couvrent un grand nombre de phénomènes dans lesquels les objets déterministes ont un comportement "stochastique""[8]. L'indéterminisme concret (le chaos, le hasard, l'aléatoire, etc.) est donc parfaitement compatible au déterminisme mathématique. Comme le remarque Thom, "ce que l'on appelle "lois du hasard" ne sont en fait que des propriétés du système déterministique le plus général"[9].

Revenons à la spécification du modèle général. En termes de systèmes dynamiques, les états internes de S sont les *attracteurs* de X_W. La notion très délicate d'attracteur généralise celle de point d'équilibre stable (i.e. attractif). Intuitivement, un attracteur A de X est un régime asympotique stable. C'est un ensemble fermé, X-invariant et indécomposable pour ces deux propriétés (i.e. minimal) qui attire (i.e. qui "capture" asympotiquement) toutes les trajectoires issues des points d'un de ses voisinages. Le plus grand voisinage de A, B(A), ayant cette propriété

5 Thom [1984] p. 2.

6 Cf. par exemple Ruelle [1984].

7 Cette stabilité des trajectoires est relative à *un* système dynamique X. Elle ne doit pas être confondue avec la stabilité structurelle de X (qui est, elle, relative à l'espace fonctionnel $\mathfrak{X}$).

8 Arnold [1976], pp. 314-315.

9 Thom [1980] p. 124.

s'appelle le *bassin* de A. Dans les cas simples, les attracteurs auront une structure topologique simple (point attractif ou cycle attractif), seront en nombre fini et leurs bassins seront de "bons" domaines (de forme simple) séparés par des séparatrices. Mais cette image est par trop optimiste car :
(i) les attracteurs peuvent être en nombre infini ;
(ii) les bassins peuvent être intriqués les uns dans les autres de façon inextricable ;
(iii) les attracteurs peuvent avoir une topologie très compliquée (attracteurs dits "étranges").

Sur un attracteur, les trajectoires d'un système dynamique présentent de la *récurrence*[10]. Intuitivement, la récurrence d'une trajectoire γ signifie que si $x \in \gamma$, γ repasse aussi près que l'on veut de x après un délai aussi grand que l'on veut et que γ revient donc indéfiniment sur elle-même. Les cas triviaux de récurrence sont les points fixes de X (les points où X s'annule, i.e. les trajectoires réduites à un point) et les cycles de X (les trajectoires fermées). Mais il existe en général de la récurrence non triviale. Si γ est une trajectoire récurrente "compliquée" et si A est sa fermeture topologique, A est un domaine entier de M (un fermé d'intérieur non vide) où γ se répand de façon dense. Quoi qu'il en soit de ces difficultés, on suppose en TCG que, pour presque toute condition initiale $x_0 \in M$ (seulement presque toute car il faut tenir compte des séparatrices entre bassins), la trajectoire issue de x_0 est "capturée" asymptotiquement par un attracteur A_w de la dynamique interne X_w. Cela correspond à une hypothèse *d'équilibre local*[11] : la dynamique interne "rapide" entraîne le système vers un régime asymptotique stable correspondant à un état interne.

Une fois admises ces diverses hypothèses qui, si l'on fait le choix du cadre différentiel, ne sont aucunement restrictives et s'imposent d'elles-mêmes, *le modèle général se convertit de lui-même en programme mathématique.* Il s'agit en effet d'analyser en détails des problèmes du type suivant :
(i) Structure générale des systèmes dynamiques (Dynamique qualitative ou Global analysis) ;
(ii) Caractérisation géométrique des systèmes dynamiques structurellement stables et de leurs attracteurs ;
(iii) Analyse des propriétés ergodiques sur les attracteurs "étranges" ;
(iv) Analyse des causes possibles d'instabilité ;
(v) Analyse des déformations (des perturbations) des systèmes structurellement instables ;
(vi) Etude de la géométrie (qui peut être d'une extrême complexité) des ensembles catastrophiques $K_{\mathfrak{X}}$; etc.

Ce programme, que l'on pourrait appeler le programme de Thom-Smale-Arnold prolonge celui de Poincaré et de Birkhoff. C'est en fait celui de la Dynamique qualitative moderne. A travers lui, la TC est *solidaire* d'un domaine et d'une tradition mathématiques d'une importance éminente tant sur le plan technique que sur le plan historique.

Ceci dit, le programme de Thom-Smale-Arnold, s'il est d'une immense portée, est également d'une immense difficulté. C'est pourquoi Thom a proposé de le simplifier drastiquement.

2.3. Troisième spécification. La théorie des singularités et la théorie des catastrophes élémentaires (TCE)

La complexité des systèmes dynamiques généraux étant trop grande pour être maîtrisée, on peut en faire une étude "grossière", de type thermodynamique. Celle-ci consiste à ne pas tenir compte de la structure fine (de la topologie compliquée) des attracteurs. Elle est d'autant plus nécessaire que les ensembles catastrophiques empiriques K_W sont en général beaucoup plus simples que ceux induits par les bifurcations de systèmes dynamiques généraux. Il faut donc comprendre comment des systèmes peuvent être "intérieurement" chaotiques (stochasticité des attracteurs définissant les états internes) et "extérieurement" ordonnés (simplicité des morphologies observables), autrement dit ce que Thom appelle "l'émergence du descriptible à partir de l'indescriptible"[12]. L'idée est de tenter de généraliser aux systèmes généraux ce qui se passe dans le cas des *systèmes de gradient*, à savoir l'existence de lignes de pente et de lignes de

10 Cette notion capitale est due à Poincaré et à Birkhoff, les fondateurs de la Dynamique qualitative.

11 Cf. Thom [1984] p. 2.

12 Cf. Thom [1980] p. 124.

niveau. Pour cela, on utilise le fait que, si A est un attracteur d'un système dynamique X sur une variété M, on peut construire sur le bassin B(A) de A une fonction positive f - dite *fonction de Liapounov* - qui décroît strictement sur les trajectoires dans B(A) - A et qui s'annule sur A. Cette fonction est une sorte d'entropie locale exprimant que, au cours du temps, B(A) se "contracte" sur A de façon analogue à un système de gradient. Mais elle ne permet de rien dire sur la structure interne de l'attracteur.

L'idée est alors de ne retenir des bifurcations d'attracteurs que les bifurcations associées de leurs fonctions de Liapounov[13]. Cette réduction ressemble à un moyennage thermodynamique. Elle correspond à *un changement de niveau d'observation* faisant passer du niveau "fin" décrit par les X_w au niveau "grossier" décrit par les f_w. Elle est analogue à celle que l'on trouve dans la théorie du champ moyen (théorie de Landau) en théorie des transitions de phases. Thom en donne la justification suivante : "Personnellement , j'aime à penser que ce qui joue un rôle, ce n'est pas la notion - trop fine - d'attracteur, mais une classe d'équivalence d'attracteurs "équivalents" parce qu'encapsulés dans la variété de niveau d'une fonction de Liapounov (un quasi-potentiel) pourvu que l'attracteur échappe à des implosions de caractère exceptionnel. Telle serait, selon nous, la voie par où trouver une définition mathématiquement satisfaisante de la notion de régime asymptotique stationnaire d'une dynamique. Dans une telle optique, la structure fine interne de l'attacteur n'a que peu d'importance : seule importe la fonction de Liapounov qui l'enserre dans une de ses variétés de niveau. Mais on peut concevoir que seule la structure du tube enfermant l'attracteur a phénoménologiquement de l'importance, et on retrouve ainsi une problématique proche de la TC élémentaire."[14].

La TCE consiste à passer des quasi-potentiels que sont les fonctions de Liapounov aux systèmes de gradient dérivés d'un potentiel. On suppose que la dynamique interne X_w est en fait la dynamique de gradient associée à une *fonction potentiel* différentiable $f_w : M \rightarrow \mathbb{R}$. Les états internes déterminés par f_w sont alors ses *minima* (si f est assimilée à une "énergie", ce principe est celui de la minimisation de l'énergie du système). Dans la terminologie thomienne, un tel système s'appelle un *modèle statique*.

Mathématiquement, la TCE fait donc partie intégrante de la théorie des bifurcations des fonctions potentiel. Or pour les potentiels, il existe une caractérisation simple de la stabilité structurelle, *le théorème de Morse*. Sous l'hypothèse que la variété M soit compacte, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est structurellement stable si et seulement si :

(i) ses points critiques, i.e. ses minima, ses maxima et ses cols (dans le produit cartésien $M \times \mathbb{R}$, le graphe de f constitué de l'ensemble des couples (x,f(x)) est comme un "relief" au-dessus de M) sont non dégénérés, c'est-à-dire ne sont pas des fusions de plusieurs minima, maxima ou cols ; et si :

(ii) ses valeurs critiques (i.e. les valeurs f(x) pour x critique) sont distinctes.

Il y a donc deux causes d'instabilité structurelle :

(i) la dégénérescence de points critiques, correspondant aux catastrophes dites *de bifurcation* ;

(ii) l'égalité de deux valeurs critiques, correspondant aux catastrophes dites *de conflit.*

A ces deux types bien distincts de catastrophes correspondent respectivement deux types d'instances de sélection I, ce que Thom a appelé deux *conventions* :

(i) la convention du retard parfait selon laquelle le système S demeure dans un état interne (un minima de f_w) tant que celui-ci existe : il n'y a donc catastrophe que lorsqu'un minimum disparaît par fusion avec un autre point critique (bifurcation) ;

(ii) la convention de Maxwell selon laquelle le système S occupe toujours le minimum *absolu* de f_w : il n'y a donc catastrophe que lorsqu'un autre minimum devient à son tour le minimum absolu (conflit).

Si la TC a pu se développer comme "paradigme" scientifique, c'est parce que, dans le cas des CE, il existe des résultats mathématiques fondamentaux, et en particulier un *théorème de classification*. Son contenu est le suivant. Considérons l'espace fonctionnel $\mathfrak{F}$ (de dimension infinie) des fonctions potentiel f sur M. Supposons M compacte pour simplifier. La

---

13 Cf. Thom [1981] p. 43.

14 Thom [1984], p.5.

topologie $\mathfrak{T}$ sur $\mathfrak{F}$ qui est "naturelle" pour les problèmes traités est celle de la convergence uniforme des fonctions et de toutes leurs dérivées partielles. L'équivalence qualitative sur $\mathfrak{F}$ est définie par l'action sur $\mathfrak{F}$ du groupe $G = \text{Diff } M \times \text{Diff } \mathbb{R}$ des difféomorphismes de la source M et du but $\mathbb{R}$ des $f \in \mathfrak{F}$. Autrement dit, $f : M \to \mathbb{R}$ et $g : M \to \mathbb{R}$ sont équivalentes si il existe $\Phi \in \text{Diff } M$ et $\Psi \in \text{Diff } \mathbb{R}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\Psi"] \\ M \arrow[r, dashed, "g"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Soit $K_{\mathfrak{F}}$ l'ensemble catastrophique (global et intrinsèque) de $\mathfrak{F}$. $K_{\mathfrak{F}}$ est constitué des f structurellement instables et il s'agit de démontrer des *théorèmes de structure* concernant *sa géométrie* à la fois locale et globale. En ce qui concerne la géométrie locale, la situation "idéale" serait la suivante.

(i) La classe d'équivalence $\tilde{f} = G(f)$ de f est une sous-variété de codimension finie c de $\mathfrak{F}$.

(ii)Il existe localement des supplémentaires $\mathcal{W}$ de $\tilde{f}$ dans $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire des sous-variétés $\mathcal{W}$ de $\mathfrak{F}$ de dimension c transverses à $\tilde{f}$ en f. Un tel supplémentaire est appelé *modèle* transverse.Si on identifie $(\mathcal{W},f)$ à un ouvert $(W,0)$ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^c$, il définit clairement une famille paramétrée f_W, appelée *déploiement* de f.

(iii) Tous les modèles transverses sont qualitativement *équivalents* (au sens d'une notion "naturelle" d'équivalence entre déploiements) et la géométrie de la trace de $K_{\mathfrak{F}}$ sur W - i.e. la géométrie de $(W \simeq \mathcal{W}, K_W \simeq \mathcal{W} \cap K_{\mathfrak{F}})$ - est donc *invariante*. Les déploiements associés sont dits *universels*.

(iv) Localement en f, $K_{\mathfrak{F}}$ est le *produit direct* $K_W \times \tilde{f}$ (et donc la géométrie de $K_{\mathfrak{F}}$ se réduit localement à celle de K_W).

Le résultat central de la TCE est que :

(i) Pour des codimensions assez petites ($c \leq 7$) la situation réelle correspond à la situation idéale.

(ii) Il existe une liste exhaustive de *formes normales* polynômiales simples pour les représentants des classes d'équivalence $\tilde{f}$ ainsi que pour leurs déploiements universels. Ce sont ces formes normales qui ont été popularisées sous le nom de catastrophes élémentaires.

3. LES PRINCIPES DES MODELES CATASTROPHISTES

3.1. Physique

Comme nous l'avons vu, les modèles de la TC reçoivent une interprétation naturelle dans le cadre de la théorie des systèmes. L'espace W y est alors un espace de contrôle et les phénomènes dont on rend compte sont du type "phénomènes critiques". La plupart des applications physiques rigoureuses et exactes de la TC sont de ce type : catastrophes de diffraction et dislocations des fronts d'onde en optique ondulatoire, avec leurs conséquences pour l'approximation semi-classique de la mécanique quantique ; théorie des transitions de phases et phénomènes de ruptures spontanées de symétries dans les milieux ordonnés ; stabilité des défauts dans les phases mésomorphes ; bifurcation (flambage) des structures élastiques ; équations différentielles contraintes, perturbations singulières et solutions chaotiques (chaos par réinjection) ; théorie des ondes de choc ; analyse des singularités des systèmes variationnels ; changements de régimes en hydrodynamique, en cinétique chimique et en thermodynamique (structures dissipatives et autoorganisation spontanée de la matière, etc.) ; attracteurs étranges, chaos déterministe et routes vers la turbulence ; etc. etc..

Sur le plan des principes, nous soulignerons ici deux points. Le premier est que dans ces applications rigoureuses et exactes constituant *la première voie* de la TC - voie que nous appellerons la voie *physicienne* - l'application de principes et de lois physiques permet de connaître *explicitement*, d'une façon ou d'une autre, la dynamique interne du système. On cherche donc à dériver mathématiquement les ensembles catastrophiques K_W de la connaissance explicite des champs $\sigma : W \to \mathfrak{X}$ et, tout naturellement, on pose que le processus interne X_w engendre causalement la morphologie externe K_W. Autrement dit, on pose que dans la dialectique interne/externe constitutive des modèles, *c'est* *l'être physique qui détermine l'apparaître morphologique*. Le second point est que l'analyse des divers exemples physiques montre que, souvent, sur un "squelette" de singularités d'échelle moyenne (niveau "grossier") descriptible par des modèles de la TCE se greffe une "chair" de processus complexes d'échelle "fine" (niveau "fin") descriptible par des méthodes de type TCG (groupe de renormalisation, intégrales oscillantes, etc.). Cela permet de parler avec une certaine précision des *infrastructures catastrophiques* de certaines classes de phénomènes physiques. Or, ces infrastructures sont *phénoménologiquement dominantes*. Elles commandent la manifestation de l'apparaître. L'on dispose donc - pour la première fois - *d'un lien entre les formalismes mathématiques de l'objectivité physique et la phénoménologie de la manifestation*. Il s'agit là d'une possibilité dont l'importance est incalculable sur le plan des principes puisque nous vivons sur l'évidence - désormais fallacieuse et caduque - d'un hiatus irréductible, d'une disjonction essentielle, *entre l'objectivité physique mathématiquement déterminée et l'apparaître phénoménologique linguistiquement décrit*.

3.2. Phénoménologie

Or, les modèles de la TC peuvent être également interprétés de façon purement phénoménologique. Ils permettent, comme René Thom l'a d'emblée proposé, de *redéfinir le concept primitif de "phénomène"*. Un phénomène est ce qui apparaît comme système de discontinuités dans un espace substrat. Si l'on compare cette définition à la définition kantienne (un phénomène est ce qui apparaît comme conditionné par les intuitions pures de l'espace et du temps) et si l'on se rappelle que, pour Kant, les intuitions pures *sont des méthodes de détermination objective (mathématique) des phénomènes*, on voit qu'il s'agit avec Thom d'intégrer "l'intuition pure" de la discontinuité à l'Esthétique transcendantale et d'en faire une méthode de détermination objective (mathématique) *pour des nouvelles classes de phénomènes*. Les phénomènes sont des formes et des états de choses. A partir du moment où l'on dispose pour eux d'une définition *morphologique*, on peut se proposer d'interpréter en termes d'infrastructures catastrophiques - c'est-à-dire en termes d'une *physique* de l'apparaître et d'une *ontologie* de la manifestion - la structuration qualitative du monde en formes et en états de choses perceptibles et linguistiquement descriptibles. Cela engage un véritable "tournant morphologique" de l'épistémologie dont les conséquences sont profondes et multiples.

3.3. Structuralisme

La jonction entre les modèles physiques et les schèmes phénoménologiques peut se faire en considérant *que l'espace de contrôle W est l'extension spatio-temporelle d'un substrat matériel*. Les modèles décrivent alors la variation qualitative de qualités sensibles observables dans le substrat. Tel est le cas des modèles, si controversés, proposés par Thom pour l'embryogenèse. Ils reposent sur deux idées directrices. La première est que les attracteurs des dynamiques internes définissent des *régimes "métaboliques" locaux* du substrat (d'où l'appellation de modèles métaboliques) et que, ces régimes étant contrôlés par l'extension spatio-temporelle du substrat, leurs catastrophes (rendues élémentaires par moyennage thermodynamique) se manifestent comme des processus de morphogenèse. La seconde, beaucoup plus spéculative, est qu'il est possible *d'interpréter* en termes de *significations fonctionnelles* (liées à la régulation globale de l'organisme) la *topologie* des attracteurs définissant les régimes locaux. C'est l'interprétation des modèles métaboliques comme *modèles sémantiques*. Dans un modèle sémantique, la topologie des attracteurs à valeur de "signifié" et les morphologies externes ont valeur de "syntaxe". La dialectique de l'expression de "l'intériorité" physique par "l'extériorité" morphologique s'y trouve donc appréhendée en quelque sorte "linguistiquement" comme une dialectique sémantique/syntaxe.

3.4. La "double voie"

Bien que très (trop) sommaire, cette esquisse du modèle général de la TC et de ses spécifications mathématiques, permet de mieux évaluer les principes de la méthodologie catastrophiste. L'idée principale en est que, à partir du moment où l'on a pu démontrer mathématiquement que la géométrie des ensembles catastrophiques présentés stablement par les systèmes empiriques est hautement contrainte (autrement dit qu'il existe des "*lois de la forme*") on peut, au lieu de chercher à dériver causalement la morphologie externe de la dynamique interne (i.e. l'apparaître de l'être) comme dans la voie physicienne, chercher au contraire à "*remonter*" de celle-là à des contraintes sur celle-ci. Cette stratégie inverse donc le sens du rapport de détermination entre être et apparaître. Elle est appropriée à l'étude des boîtes "vraiment noires", c'est-à-dire dont on ne connaît pas la dynamique interne et où on ne peut donc que la supposer à titre *implicite*. Elle rend l'apparaître déterminant pour l'être et est à la base de la TC dans sa *seconde voie* - voie que nous appellerons la voie *morphologique-structurale*. En particulier, elle conduit à chercher une dynamique interne Y_W génératrice de la morphologie observée K_W qui soit de *complexité minimale*. On pourra alors dire que la dynamique interne "réelle" (inobservable) X_W est une complexification de Y_W qui est phénoménologiquement non pertinente. Cette *réduction* (en général drastique) de la complexité de la dynamique interne correspond, nous l'avons vu plus haut, à un changement de niveau d'organisation et d'observation. Elle signifie que les dynamiques internes sont en général hautement *surdéterminées* relativement aux morphologies externes.

Dans un modèle sémantique réduit, le "sémantisme" (i.e. la dynamique interne) se trouve réduit à une sorte de "degré zéro", à juste ce qu'il faut pour engendrer la morphologie *sans surdétermination*. Mais la réduction n'est opérable que *localement*. Pour passer du local au global et comprendre la synthèse dynamique agrégeant entre eux les modèles statiques locaux, il faut revenir du moyennage thermodynamique (niveau "grossier") à la topologie des attracteurs (niveau "fin"), autrement dit de la TCE à TCG.

Mais, quoi qu'il en soit, on peut admettre que chaque niveau d'organisation possède *une autonomie ontologique et une syntaxe propre* : le rapport entre deux niveaux n'est pas, comme le point de vue réductionniste l'affirme, un rapport allant du niveau physique de base à celui de la manifestation morphologique, mais bien un rapport *expressif de dépendance bilatérale*. René Thom a toujours beaucoup insisté sur ce point dans sa dénonciation de la "prétention" réductionniste à expliquer par le niveau le plus fin "les formations apparues aux niveaux plus grossiers"[15]. Dernièrement encore, il a insisté sur le fait que cette prétention ne peut être fondée que sur la considération des symétries globales et universelles qui constituent la base de la physique. "Or l'existence même d'inhomogénéités révélées par la présence de niveaux d'organisation plus grossiers prouve que, dans le matériau considéré, la symétrie globale est phénoménologiquement brisée. Ce qui va jouer un rôle, au niveau "grossier", ce seront donc les formalismes régissant le comportement spatial des *brisures de symétrie* du milieu. Or ces formalismes font appel à des méthodes de type TC où c'est la singularité d'une prégnance locale qui régit, par son déploiement, la partition locale de l'espace en régimes d'organisations (de symétries) différentes. D'où la possibilité théorique d'un mode d'explication autonome de l'ontologie considérée à ce niveau"[16].

L'autonomie des niveaux implique le principe hylémorphiste (néo-aristotélien), si controversé, d'indépendance par rapport au substrat : il est possible de décrire les accidents typiques pouvant se réaliser stablement dans un substrat indifférencié (une hylé, une materia prima), la spécificité physique du substrat n'intervenant que pour imposer des contraintes supplémentaires. Le morphologique n'est pas que du physique complexe et il existe un *ordre de légalité propre et autonome* des phénomènes morphologiques en tant que tels. De cette nouvelle légalité, la TC aura offert la première théorie effective.

---

[15] Thom [1983].
[16] Ibid.

BIBLIOGRAPHIE

ARNOLD, V.I., 1976 : *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Quantique*, Ed. Mir, Moscou.

ARNOLD, V.I., 1985 : *Catastrophe Theory*, Springer, Berlin.

BERRY, M.V., UPSTILL,C., 1980 : Catastrophe Optics : Morphologies of Caustics and their Diffraction Patterns, *Progress in Optics* (E. Wolf ed.), 258-345, North-Holland.

BOULIGAND, Y. (ed.), 1980 : *La Morphogenèse : de la Biologie aux Mathématiques*, Maloine, Paris.

CHENCINER, A., 1980 : Singularités des fonctions différentiables, *Encyclopedia Universalis*, Paris.

CHENCINER, A., 1984 : Systèmes dynamiques, *Encyclopaedia Universalis*, Paris.

DSW, 1975 : Dynamical Systems, Warwick 1974 (A. Manning ed.), Lecture Notes in Mathematics 468, Springer, Berlin.

PETITOT, J., 1978 : Catastrophes, *Encyclopaedia Universalis*, Paris.

PETITOT, J., 1984 : *Les Catastrophes de la Parole : De Roman Jakobson à René Thom*, Maloine, Paris.

PETITOT, J. , 1985 : *Morphogenèse du Sens*, Presses Universitaires de France, Paris.

PETITOT, J. (ed.) 1988 : *Logos et Théorie des Catastrophes*, Editions Patiño, Genève..

POSTON, T., STEWART, I., 1978 : *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman Publishing, Londres.

RUELLE, D., 1984 : Déterminisme et Prédictibilité, *Pour la Science*, 82, 58 sq.

SSP, 1979 : *Structural Stability in Physics* (W. Güttinger, H. Eikemeir eds.), Springer, Berlin.

SSTCAS, 1976 : *Structural Stability, the Theory of Catastrophes and Applications in the Sciences* (P.J. Hilton, ed.), Lecture Notes in Mathematics 525, Springer, Berlin.

THOM, R., 1972 : *Stabilité Structurelle et Morphogenèse*,Benjamin,New-York, Ediscience, Paris.

THOM, R., 1980 : *Modèles Mathématiques de la Morphogenèse* (2e ed.), Christian Bourgois, Paris.

THOM, R., 1980 : Halte au hasard, Silence au Bruit, *Le Débat*, 3, 119-132.

THOM, R., 1981, Dynamique Globale et Morphologie locale chez les êtres vivants, *Cercle d'Epistémologie de Strasbourg*.

THOM, R., 1983 : Le problème des ontologies régionales en Science, *Actes du Congrés de la Société Internationale de Philosophie,* Montréal.

THOM, R., 1984 : *Classification des Sciences et des Techniques*, Séminaire de Philosophie et Mathématiques, Ecole Normale Supérieure, Paris (Séance du 16 Janvier 1984).

THOM, R., 1988, *Esquisse d'une Sémiophysique*, Interéditions, Paris.

WADDINGTON, C.H., (ed.), 1968-1972 : *Towards a Theoretical Biology*, 4 vol., Edinburgh University Press.

ZEEMAN, C., 1977 : *Catastrophe Theory : Selected Papers 1972-1977*, Addison-Wesley, Massachussetts