JEAN PETITOT, *Infinitesimale*

Estratto da:
Enciclopedia, VII: *Imitazione-Istituzioni*, Einaudi, Torino 1979.

Infinitesimale

Questo articolo si propone di esporre la soluzione del classico paradosso degli infinitesimi leibniziani con il metodo – meramente logico – della cosiddetta analisi non standard. Sviluppato negli anni '60 dalla scuola di Robinson, tale metodo ha una grande portata euristica, problematica ed epistemologica per le seguenti ragioni. Come progetto (galileiano) di matematizzazione della natura, la scienza moderna inizia con la dinamica, cioè con la teoria matematica del movimento. Qualunque siano i paradigmi che si sono poi succeduti (termodinamica, meccanica quantistica, biologia molecolare, teoria dei sistemi, strutture dissipative, teoria delle catastrofi, ecc.) è impossibile sottovalutare l'ampiezza (ancora attuale) della rottura, da essa segnata, non fosse altro per il fatto che la dinamica, dopo aver fornito fino a saturazione norme alla nostra episteme, resta ancora uno dei propulsori principali delle matematiche contemporanee (problema degli *n* corpi, turbolenza, analisi qualitativa dei sistemi dinamici, teoria della stabilità strutturale e delle biforcazioni, ecc.). Ora, appena si risale dal suo formalismo di base – cioè il formalismo differenziale – fino al suo concetto primitivo – vale a dire quello di infinitesimo – ci s'imbatte in una contraddizione. Data infatti la struttura archimedea della retta reale, una quantità infinitesimale è necessariamente nulla. Se il continuo è divisibile all'infinito senza residuo, non si dànno né degli «atomi» indivisibili che possano fermare il processo di divisione, né degli infinitamente piccoli che lo esauriscano.

Dunque, quel che sembra piú certo alla ragione moderna (certo al punto da avere forza di legge) si basa, apparentemente, su un calcolo sintatticamente consistente e semanticamente inconsistente. C'è qui come uno scandalo metodologico, un'alienazione epistemologica, una spaccatura ontologica, in breve un dimezzamento che esige una chiarificazione. Verrà delineata qui la sua storia teorica e non quella aneddotica.

Questa storia abbastanza movimentata può essere divisa in prima approssimazione in tre periodi. Il primo, che va da Leibniz a Cauchy passando per Eulero, è quello dell'elaborazione e dello sviluppo del calcolo differenziale e integrale secondo lo stile leibniziano. Il secondo, che conduce direttamente all'analisi contemporanea, comincia, con Cauchy e Weierstrass, con una crisi di rigore, la rimozione degli infinitesimi leibniziani e la loro sostituzione con un calcolo di limiti. Questo nuovo calcolo nello stesso tempo sintatticamente e semanticamente consistente, si è rivelato poi di una tale efficacia che la questione iniziale dello statuto logico-concettuale degli infinitesimi si è trovata a poco a poco sedimentata, relegata, dimenticata, cancellata, rimossa: in ogni caso, è decaduta al rango di una curiosità per filosofi (anche se matematici come Peirce vi davano ancora grande importanza). È soltanto negli anni '60 di questo secolo che tale questione è stata riattivata grazie all'analisi non standard e ciò in un modo, sulle prime, abbastanza strano.

Se si volesse infatti datare l'origine di questo terzo periodo, occorrerebbe risalire agli anni '20, ai primi lavori di Skolem sui modelli non standard. All'inizio si tratta di una problematica puramente logica: non ha alcun legame diretto con nessun dominio specifico della matematica, in particolare, dunque neanche col calcolo differenziale.

Il problema che si poneva Skolem era quello di sapere in quale misura il linguaggio formale che si utilizza per parlare di un oggetto matematico permetta di caratterizzarlo (almeno strutturalmente). Si trova che in generale ciò è impossibile. Dunque esisteranno in generale classi di oggetti differenti (non isomorfi) sintatticamente indiscernibili, cioè che possiedono esattamente le stesse proprietà purché queste siano formulate in un certo linguaggio di base. Tale risultato manifesta una spaccatura – generale e non eliminabile – tra sintassi e semantica; ci si è presto resi conto che il paradosso semantico degli infinitesimali non ne è altro che un caso particolare.

Si consideri infatti l'insieme **R** dei numeri reali corredato della sua struttura algebrica, della sua struttura d'ordine e della sua struttura topologica. Sia *L* un linguaggio formale di base che si utilizza per «parlare» di **R**. Esistono estensioni ***R** di **R** (corredate di una struttura algebrica, di una struttura d'ordine e di una struttura topologica) che sono indiscernibili da **R** relativamente a *L*, cioè che hanno esattamente la stessa teoria purché quest'ultima sia ridotta agli enunciati esprimibili in *L*. Una tale estensione viene chiamata modello non standard della teoria dei numeri reali. Se si tratta di una estensione in senso proprio, poiché ***R** è (al pari di **R**) totalmente ordinato, esistono in ***R** dei numeri che sono «infiniti» relativamente ad **R**, cioè dei numeri maggiori di tutti i numeri di **R**. Gli inversi di questi numeri infiniti sono degli infinitesimi nel senso leibniziano del termine.

Ma questo primo chiarimento non è certo sufficiente per fondare una dottrina degna del nome di analisi non standard. Se infatti ***R** è un modello non standard *qualunque* di **R** – la cui esistenza è assicurata soltanto dal teorema generale

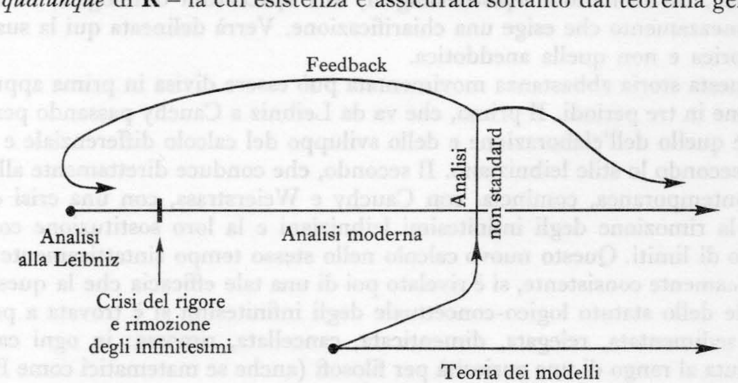

Figura 1.

La storia logico-concettuale dell'infinitesimale: un andamento non lineare, ma ramificato.

di esistenza dei modelli non standard – non vi si possono in generale prolungare funzioni familiari come le funzioni trigonometriche, esponenziali o logaritmiche. Non si potrebbe dunque parlare di analisi su $^*\mathbf{R}$. Come tale l'analisi non standard presuppone un metodo di costruzione di particolari modelli non standard ai quali tutte le entità costitutive del discorso dell'analisi siano *automaticamente* prolungabili.

La temporalità propria della storia logico-concettuale degli infinitesimi non è dunque quella di una storia lineare. È una temporalità ramificata e ricorrente che può venir grosso modo schematizzata come nella figura 1.

1. *Il paradosso degli infinitesimali.*

1.1. $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \bar{\mathbf{Q}}, \mathbf{C}$.

Sarà bene cominciare col ricordare le strutture di cui si farà uso.

Sia $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali (di un certo universo della teoria degli insiemi). Esso si costruisce a partire dall'insieme di base $\mathbf{N}$ degli interi naturali in tre tappe.

La prima è la costruzione dell'insieme $\mathbf{Z}$ degli interi positivi e negativi per aggiunta a $\mathbf{N}$ degli interi negativi. $\mathbf{Z}$ è un anello commutativo totalmente ordinato.

La seconda è la costruzione dell'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali per aggiunta a $\mathbf{Z}$ degli inversi $1/p$ dove $p \in \mathbf{Z}$ è un intero non nullo. $\mathbf{Q}$ è un corpo commutativo totalmente ordinato detto corpo delle frazioni di $\mathbf{Z}$.

Esistono due differenze essenziali tra $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Q}$. Prima di tutto $\mathbf{Q}$ è un corpo mentre $\mathbf{Z}$ non è che un anello: mentre l'inverso di un intero n non nullo non è un intero (eccetto che per $n = \pm 1$), l'inverso di un razionale non nullo è razionale. Per costruzione, $\mathbf{Q}$ è il piú piccolo corpo contenente $\mathbf{Z}$.

Per ulteriori particolari si rimanda all'articolo «Calcolo» in questa stessa *Enciclopedia* (vol. II, cfr. in particolare pp. 389-96). Va ancora ricordato che $\mathbf{Q}$ ammette una topologia indotta dalla metrica definita dalla distanza $d(x,y) = |x-y|$ ove con $|x|$ si denota il valore assoluto di x. Com'è noto, in $\mathbf{Q}$ esistono numeri arbitrariamente vicini gli uni agli altri. Ma l'esistenza di numeri irrazionali come $\sqrt{2}$ mostra che $\mathbf{Q}$ *non è un continuo*. Benché gli elementi di $\mathbf{Q}$ si «susseguano» gli uni agli altri (ordine totale) non essendo separati che da distanze «infinitesimali», $\mathbf{Q}$ è in qualche modo «incompleto» rispetto alla sua topologia. Di qui l'idea di un «completamento» topologico di $\mathbf{Q}$.

È questa la terza tappa, cioè la costruzione del corpo totalmente ordinato $\mathbf{R}$ dei numeri reali per completamento di $\mathbf{Q}$. Esistono diversi metodi, il piú celebre dei quali è quello di Dedekind. Per costruzione, $\mathbf{Q}$ è denso in $\mathbf{R}$: ogni numero reale è approssimabile, con la precisione che si desidera, mediante numeri razionali.

Completando $\mathbf{Q}$ si aggiungono «molti» numeri nuovi. $\mathbf{Q}$ ha infatti per cardinale (nel senso della teoria di Cantor) la potenza del numerabile (esistono procedure molto semplici che permettono di enumerare i razionali). Al contrario, il continuo **R** ha per cardinale la potenza del continuo che è un numero transfinito strettamente maggiore. Si può anche dire che, se si sceglie a caso un numero reale, si ha una probabilità *certa* di ottenere un irrazionale e una probabilità *nulla* di ottenere un razionale: «pressoché tutti» i numeri reali sono irrazionali. (Questo risultato non è molto soddisfacente dal punto di vista concettuale perché esiste comunque un'infinità di razionali distribuiti in **R** in modo denso. In realtà, è uno degli aspetti in cui può ripresentarsi il paradosso degli infinitesimi. Bisognerebbe dire che la probabilità P di trovare un razionale scegliendo un numero reale a caso è infinitesimale. Ma sinché le probabilità sono dei numeri reali, P è necessariamente zero; le cose cambiano nel caso in cui si considerino delle probabilità in un modello non standard di **R**).

I numeri irrazionali si dividono a loro volta in due classi. In una gli irrazionali algebrici (come $\sqrt{2}$) che sono soluzione di una equazione algebrica $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ a coefficienti a_i razionali. Nell'altra gli irrazionali trascendenti (come π o e). Poiché è facile costruire degli algoritmi che permettano di enumerare i numeri algebrici, il loro insieme ha la potenza del numerabile. «Pressoché tutti» i numeri reali sono dunque trascendenti benché non si diano che pochissimi esempi espliciti.

La considerazione dei numeri algebrici conduce naturalmente ad altre estensioni di **Q** e di **R**. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sono entrambe soluzioni dell'equazione algebrica di secondo grado $x^2 - 2 = 0$. Ma se si considera l'analoga equazione $x^2 + 2 = 0$ si constata subito che non ha alcuna soluzione reale poiché, essendo ogni quadrato positivo, si ha sempre $x^2 + 2 \geq 2$. È dunque naturale cercare di «completare» **Q** ed **R** relativamente all'esistenza delle radici delle equazioni algebriche in generale.

Nel caso di **R**, si cercherà una estensione $\bar{\mathbf{R}}$ di **R** che sia il piú piccolo corpo contenente **R** tale che ogni equazione algebrica di grado n a coefficienti in **R** vi abbia n radici (distinte o no). $\bar{\mathbf{R}}$ si dice una chiusura algebrica di **R** ed è unica a meno di isomorfismi. Per ottenere $\bar{\mathbf{R}}$ basta aggiungere a **R** l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$: $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}(i)$ è il corpo **C** dei numeri complessi (**C** è un corpo topologico commutativo, topologicamente completo e algebricamente chiuso, che non possiede piú una struttura d'ordine naturale: cfr. «Calcolo», pp. 430-33).

Tale risultato è notevole poiché mostra che **C** è uno spazio vettoriale su **R** di

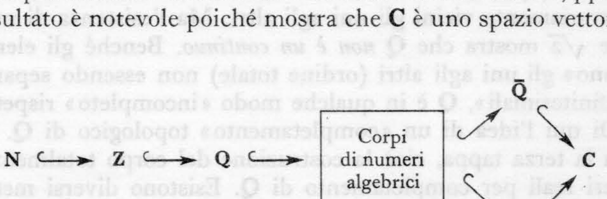

Figura 2.

La rete di inclusioni delle grandi strutture numeriche (↪ significa 'immersione con conservazione della struttura').

dimensione 2 (come mostra la rappresentazione vettoriale dei numeri complessi) e dunque – essendo ogni estensione di **R** uno spazio vettoriale su **R** – che non esistono corpi intermedi tra **R** e la sua chiusura algebrica.

Tutt'altro accade per **Q**. Sia $\bar{\mathbf{Q}}$ la chiusura algebrica (supposta inclusa in **C**) di **Q**, ottenuta aggiungendo a **Q** le soluzioni (esistenti in **C** per costruzione di **C**) delle equazioni algebriche a coefficienti in **Q**. Si può mostrare che, come spazio vettoriale su **Q**, $\bar{\mathbf{Q}}$ è di dimensione infinita e che esiste una infinità di estensioni intermedie $\mathbf{Q} \subset K \subset \bar{\mathbf{Q}}$ di dimensione finita su **Q**. Queste estensioni, chiamate corpi di numeri algebrici, sono l'oggetto della teoria dei numeri (si veda l'articolo «Divisibilità» in questa stessa *Enciclopedia*).

Le grandi strutture numeriche che servono di base all'aritmetica, all'algebra e all'analisi, sono dunque collegate dalla rete di inclusioni schematizzata nella figura 2.

Se (dalla fine del XIX secolo con Kronecker, Weber, Dedekind, ecc.) la teoria dei numeri è innanzitutto lo studio delle proprietà di divisibilità, se la geometria algebrica è prima di tutto (da Riemann in poi) lo studio degli anelli di polinomi e dei corpi di funzioni razionali, l'analisi, di per sé, è innanzitutto lo studio delle classi di funzioni definite su **R** e su **C**.

Ci si limita qui all'analisi reale. Il corpo di base sarà dunque **R**, corpo topologico commutativo, topologicamente completo e totalmente ordinato. Quanto alla sua struttura d'ordine, **R** possiede la proprietà (ereditata da **N**) di essere archimedeo: per ogni $x > 0$ di **R**, arbitrariamente piccolo, e per ogni $M > 0$ di **R**, arbitrariamente grande, esiste un intero n tale che $nx > M$: si può dunque «oltrepassare» qualunque numero a partire da qualunque altro. Ciò implica che **R** non possiede infinitesimi.

1.2. L'infinitesimale leibniziano come sovvertimento della referenza.

Agl'inizi, l'analisi su **R** riguarda da una parte la ripresa dei metodi integrali di Archimede per il calcolo delle aree e dei volumi e dall'altra lo studio delle proprietà differenziali delle funzioni. Queste funzioni sono sia funzioni reali $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(x \mapsto f(x))$ di una variabile reale x, sia funzioni reali $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}((x_1, ...,$

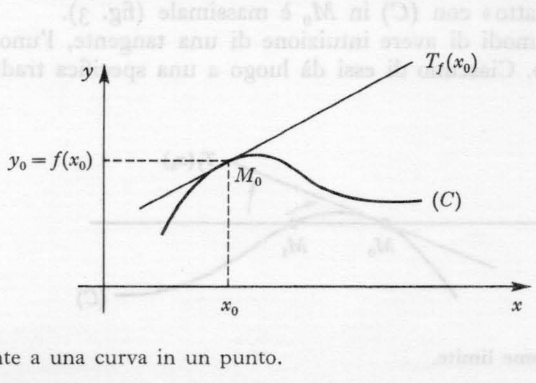

Figura 3.
La tangente a una curva in un punto.

$x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n))$ di piú variabili reali $x_1, ..., x_n$, sia funzioni $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m ((x_1, ..., x_n) \mapsto (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)))$ in cui $f_1, ..., f_m$ sono funzioni di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$, sia infine funzioni implicite $f(x,y) = 0$.

La nozione insiemistica di funzione come legge che associa a ogni elemento x del dominio di definizione un elemento $f(x)$ del dominio dei valori, si è prodotta solo piú tardi (cfr. gli articoli «Applicazioni» e «Funzioni» in questa stessa *Enciclopedia*). Inizialmente si trattavano funzioni la cui espressione è esplicita (trigonometriche, esponenziali, logaritmiche; coniche, cubiche, ecc.; spirali, lemniscate, ecc.) e si rappresentavano con i loro grafici. Se per esempio $f(x)$ è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ la sua rappresentazione grafica è la «curva» del piano $\mathbf{R}^2$ di equazione $y = f(x)$.

La rappresentazione simbolica (dovuta a Descartes) delle curve in termini di coordinate segnò una rottura essenziale in quanto *a*) fece «passare» alla scrittura l'intuizione geometrica del percepito; e *b*) aprí al concetto di relatività: poiché un oggetto geometrico non può essere algebrizzato (cioè espresso simbolicamente) che in relazione a un sistema arbitrario (relativo) di riferimento, le sue proprietà intrinseche devono risultare invarianti per cambiamenti di riferimento.

Ci sarebbe tutta una «archeologia» da de-sedimentare circa il rapporto tra geometria e scrittura: a partire dalla rottura cartesiana la geometria verrà subordinata al primato della scrittura e sarà soltanto nei periodi critici in cui viene ripensata e ristrutturata che essa ritornerà a *data* fenomenologici (geometrie non-euclidee, geometria sintetica, superfici di Riemann, catastrofi). Ora, appena si ammette, per ragioni di efficacia metodica, un tal primato della scrittura simbolica, si deve altrettanto esigere che «passino» alla scrittura le intuizioni geometriche di base.

Tra queste s'impone immediatamente la nozione di tangente. Data una funzione $f(x)$ che possiede una certa «consistenza», il cui grafico $y = f(x)$ sia cioè una curva (C) nel senso intuitivo e materiale del termine (un tracciato sul piano), è possibile in generale associare a ogni punto $M_0 = (x_0, f(x_0))$ di (C) una tangente $T_f(x_0)$ definita come la retta che approssima meglio (C) in M_0, cioè il cui «contatto» con (C) in M_0 è massimale (fig. 3).

Ci sono due modi di avere intuizione di una tangente, l'uno «dinamico» e l'altro «statico». Ciascuno di essi dà luogo a una specifica traduzione scritturale.

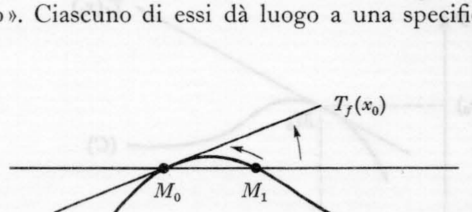

Figura 4.
La tangente come limite.

1) Nell'intuizione «dinamica», la retta $T_f(x_0)$ è il *limite* delle secanti M_0M_1 di (C) per il punto M_1 che tende verso il punto M_0 (fig. 4).

Questa intuizione «passa» facilmente alla scrittura. M_1 è il punto di coordinate $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ in cui Δx è un incremento di x tendente a zero. Il coefficiente angolare della retta M_0M_1 è dunque $\Delta f/\Delta x$ ove Δf è l'incremento $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ di f corrispondente a Δx (fig. 5). La tangente $T_f(x_0)$ di (C) in M_0 è di conseguenza la retta passante per M_0 e avente per coefficiente angolare il limite – che si scrive $f'(x_0)$ e si chiama derivata della funzione $f(x)$ in x_0 – del rapporto $\Delta f/\Delta x$ per Δx che tende a zero.

Se si è in grado di definire rigorosamente la nozione di limite, si è in grado ipso facto di definire analiticamente la nozione geometrica di contatto. Questo sarà il punto di vista di Newton (almeno in parte), poi di d'Alembert e, infine, di Cauchy e soprattutto di Weierstrass.

2) Nell'intuizione «statica» la tangente non è definita da un processo (passaggio al limite) ma da una *posizione*. La tangente $T_f(x_0)$ è *la* retta che taglia (C) in M_0 in due punti infinitamente vicini. È la retta che – in un intorno infinitesimale di M_0 – si identifica con (C). Per fare «passare» alla scrittura questa intuizione occorre:

a) introdurre la nozione di incremento infinitesimale dx di x;
b) definire l'incremento infinitesimale $df=f(x_0+dx)-f(x_0)$ di f in x_0 corrispondente a dx;
c) ipotizzare che il rapporto df/dx sia definito e costante per ogni dx (ed è questa costanza che traduce l'intuizione che (C) è localmente indiscernibile dalla sua tangente);
d) definire la derivata (coefficiente angolare della tangente) $f'(x_0)$ di f in x_0 come uguale a questo rapporto costante.

Leibniz ha immortalato la definizione «statica». Si osservi che, fin dall'origine, essa è profondamente problematica e ambivalente. Affinché sia coerente, occorre infatti che 1) dx non sia nullo poiché in caso contrario df/dx si ridurrebbe al rapporto indeterminato 0/0; e che 2) pertanto dx sia un numero, poiché in caso contrario non si potrebbe definire il valore di $f(x+dx)$, né dunque quello di df e di df/dx.

Ora, come numero, dx è necessariamente nullo, il che manifesta l'ambivalenza linguistica che si è incontrata nelle definizioni «statiche» di contatto: «intersecare in due punti infinitamente vicini» e/o «intersecare in due punti coincidenti».

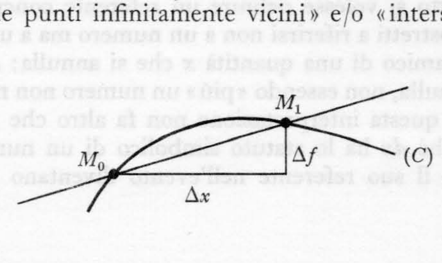

Figura 5.
La secante.

Il problema sta dunque nel fatto che il «passaggio» alla scrittura dall'intuizione «statica» passa attraverso l'introduzione di un supplemento simbolico – quello del *dx* leibniziano – che viola il principio d'identità e che sovverte la referenza.

Inizialmente, la nozione di incremento infinitesimale è un concetto. Il *coup de force* di Leibniz è stato di «ritualizzarla» con l'introduzione di un supplemento alla notazione scritta il cui statuto è paradossale; infatti, come identità sintattica, 1) *dx* è l'indice di referenti numerici nello stesso tempo arbitrari e impossibili, e 2) *dx* è il simbolo di un concetto semanticamente inconsistente.

Per l'ideologia positivista questa aporia è sufficiente per legittimare la rimozione degli infinitesimi. Ma nella misura in cui ci si propone di mostrare che la forzatura leibniziana rinvia di fatto a una dimensione cruciale dell'articolazione *generale* tra il simbolico e il reale, diventa necessario delineare i contorni del suo statuto nel modo piú esatto possibile.

Il *dx* leibniziano è un simbolo-indice, per dirla con Peirce, che «fissa» un concetto contraddittorio. È una finzione letterale che viene trattata come un numero. Non ha pertanto per referenza alcun numero concreto ma un posto generato dai procedimenti stessi di costruzione dei numeri. Si consideri infatti l'algoritmo di costruzione di **N** con l'operazione «successivo di» (si veda il citato articolo «Calcolo», p. 408). Poiché **N** è infinito, la sua iterazione trasgredisce indefinitamente il suo limite. Ma l'algoritmo induce il posto di un numero «infinito» maggiore di tutti gli altri. Questo posto inoccupabile associato a un concetto senza referente e contraddittorio segna un «effetto de-limitante» relativo a **N**. Per riprendere una terminologia di Badiou [1969], si può chiamare infinito-punto un contrassegno supplementare che occupa un posto inoccupabile e dipendente, per tutto ciò che non riguarda questa occupazione, dai procedimenti iniziali. L'infinito-punto è il contrassegno di un inaccessibile del dominio, completato da una *forzatura* dei procedimenti, che li costringe ad avere valore anche per ciò che hanno escluso.

L'inverso di un intero «infinito» è appunto un infinitesimo.

Di piú, il *dx* leibniziano nel suo rapporto con la referenza è un elemento di codice che 1) possiede un'identità sintattica definita (poiché è una costante e non un simbolo di variabile), 2) si riferisce a elementi non definiti.

Se malgrado tutto si volesse definire un referente concreto del *dx* leibniziano, si sarebbe costretti a riferirsi non a un numero ma a un evento. S'immagini il processo dinamico di una quantità *x* che si annulla: *dx* rappresenta l'istante in cui *x* si annulla, non essendo «piú» un numero non nullo e non essendo «ancora» zero. Ma questa interpretazione non fa altro che riproporre la questione; infatti, poiché *dx* ha lo statuto simbolico di un numero, il suo stesso statuto simbolico e il suo referente nell'evento diventano da quel momento eterogenei.

In conclusione il *dx* leibniziano è una finzione letterale, strutturata come un numero, che impone un sovvertimento della referenza attraverso una separazione fra significante e significato.

È un infinito-punto nel senso di Badiou. È un simbolo-indice «dimezzato», tagliato in due, ove l'aspetto di indice e l'aspetto di simbolo sono incompatibili.

Per il chiarimento del suo statuto logico-concettuale occorre intrecciare diversi registri di analisi: quello dei posti, quello delle identità simboliche, quello dei referenti concreti, quello dei concetti e quello degli eventi:

– posto: «effetto de-limitante» della costruzione di **R**;
– identità simbolica: *dx*;
– referenti concreti: numeri infinitesimali (inesistenti in **R**);
– concetto: quantità infinitesimale (contradditoria);
– evento: annullarsi di una quantità.

Prima di queste analisi occorre abbozzare in via preliminare le modalità di sviluppo della polemica intorno agli infinitesimi e ricordare come sono stati formalmente tradotti.

1.3. Polemiche e fondazione.

Intorno agli infinitesimi sono venuti a convergere tutti i problemi tradizionali dell'infinito. Qualcosa è stato già anticipato; si vedrà ora meglio come questo processo storico si è chiuso grazie alla rimozione degli infinitesimi stessi. Ci si trova qui di fronte all'esempio piú importante della spaccatura dialettica tra la produzione di un infinito-punto inerente alla costruzione di un reale e l'esigenza della rimozione imposta dalla stabilizzazione del suo uso: una volta affermatosi, ogni metodo rimuove il suo concetto originario e ipostatizza la sua origine nella sua stessa produzione. Questo è, in fondo, il gioco heideggeriano della differenza essere/esistente: la genesi dell'esistente a partire dall'essere è affetta da un residuo che deve essere soggettivamente rimosso e simbolicamente precluso affinché lo stesso esistente prodotto possa autonomizzarsi come tale. Una volta affermatasi (ma non fondata) l'efficacia metodica del calcolo differenziale e integrale, si tratterà di mettere in luce la sua «impurità di origine» (Badiou).

L'atteggiamento di Leibniz verso gli infinitesimi è una posizione *formalista* molto sottile. Privilegiando la struttura formale del linguaggio rispetto alla realtà della referenza, egli considera gli infinitesimi «finzioni ben fondate». Pur fondando un metodo piú conforme all'*ars inveniendi* che non i metodi di esaustione di tipo archimedeo, gli infinitesimi non hanno tuttavia alcuna realtà *effettiva*. Essi non sono che «cose ideali», «finzioni utili per abbreviare e per parlare universalmente».

Occorre separare qui «abbreviare» da «parlare universalmente». Gli infinitesimi permettono davvero di abbreviare i metodi che si basano sul confronto di infiniti, *in quanto assolutizzano il concetto relativo di approssimazione*. Sotto questo profilo, si può sempre evitare di usarli e «al posto dell'infinito o dell'infinitamente piccolo, [si possono prendere] quantità tanto grandi o tanto piccole quanto occorre perché l'errore sia minore dell'errore dato»; e aggiungere, con Leibniz, «che si differisce dallo stile di Archimede solo nelle espressioni, che sono piú dirette nel nostro metodo e piú conformi all'arte di inventare» [Leibniz 1701, ed. 1962 p. 350]. In questa accentuazione del lato pragmatico della questione, l'essenziale è lasciato nell'ombra.

Ma Leibniz ha anche enfatizzato l'aspetto (simbolico) che corrisponde non già ad «abbreviare», ma a «parlare universalmente». È qui che si manifestano insieme la profondità metafisica e il limite di un primato ontologico del linguaggio formale che è rimasto enigmatico fino all'analisi non standard. Per Leibniz infatti gli infinitesimi, benché fittizi, sono delle finzioni «fondate sulla realtà» che non riducono affatto la scienza dell'infinito a una finzione. Al contrario: il calcolo che essi fondano è *sicuro*. A questa garanzia sintattica, a questa sicurezza formale, in breve a questa consistenza di un metodo che prende origine tuttavia da un sovvertimento della referenza e da una spaccatura irriducibile tra significante e significato, Leibniz dà una risposta metafisica e profetica: «Si constata che le regole del finito funzionano nell'infinito come se ci fossero degli atomi (cioè degli elementi assegnabili della natura) benché non ce ne siano affatto visto che la materia è in realtà suddivisa all'infinito; e che viceversa le regole dell'infinito funzionano nel finito, come se ci fossero degli infinitamente piccoli metafisici, benché non se ne abbia affatto bisogno e benché la materia non giunga mai a particelle infinitamente piccole: ma le cose stanno cosí perché tutto è governato dalla ragione, e diversamente non ci sarebbero né scienza né regole, il che non sarebbe affatto conforme con la natura del principio supremo» [*ibid.*].

Sarebbe ben difficile sopravvalutare questo passo. Vi si articolano chiaramente tre livelli.

Il primo è il livello semantico (referenziale): la materia in atto è senza atomi e praticamente senza infinitamente piccoli (il che non è contraddittorio).

Il secondo livello è sintattico (logico): rispetto al linguaggio – cioè rispetto alle regole e non alla sostanza – il finito e l'infinito sono intercambiabili. Sono discernibili all'interno di uno stesso punto di vista, ma divengono formalmente indiscernibili se si cambia punto di vista. Di qui il ruolo del «come se» che attesta il primato ontologico delle regole. In breve, Leibniz relativizza l'opposizione tra finito e infinito. Una struttura infinitaria relativamente a una finitezza iniziale può essere nondimeno suscettibile di regole finitarie. Sul filo della metafora prospettica suggerita dal termine 'punto di vista', si potrebbe quasi dire che per Leibniz l'infinito è una «anamorfosi» del finito.

Il terzo livello è metafisico: quello del principio «supremo» di ragione sufficiente. Questa «caduta» dell'argomentazione non è piú, per noi, molto soddisfacente. Non si potrebbe certamente piú invocare un principio per sostenere la tesi che la ragione formale trascende la realtà. Ma si noti che, parallelamente a questa garanzia metafisica, Leibniz anticipa chiaramente una risposta di altro ordine, cioè quella della costruzione di una estensione $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ che – contenendo numeri sia infinitamente grandi sia infinitesimali – sarebbe tuttavia retta dalle stesse regole di **R**, cioè sarebbe indiscernibile da **R** non come oggetto concreto ma come substrato predicabile.

In conclusione si può dunque affermare che Leibniz sottomette a un chiasma l'evidenza naturale. Egli assolutizza la relatività dei confronti di infiniti («abbreviare») e relativizza l'opposizione tradizionalmente assoluta tra finito e infinito («parlare universalmente»).

La posizione formalista di Leibniz perde ogni acutezza e ogni consistenza quando si ipostatizza in una posizione *realista* che afferma l'esistenza degli infinitesimali. Questa sarà purtroppo la posizione di L'Hôpital nel suo trattato di calcolo differenziale *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* [1696], trattato che serví da vettore pedagogico alle idee leibniziane.

L'Hôpital pone come assioma che due quantità che differiscono di una quantità infinitesimale sono uguali. Ora, siccome ammette pure che le estensioni dei numeri reali ottenute con l'aggiunta d'infinitesimi soddisfano le regole dell'aritmetica (principio di continuità), si trova costretto a negare la conseguenza, banale, che $x+dx=x$ implichi $dx=0$.

Il fatto è che, parallelamente al suo chiarimento logico-concettuale, un uso algebrico coerente dell'infinitesimale esige che si introduca su un'estensione ***R** di **R** una relazione di equivalenza (essere infinitamente vicino) che sia piú debole della relazione di uguaglianza ma che coincida coll'uguaglianza quando è ristretta a **R**. È allora necessaria un'attrezzatura formale e concettuale di cui all'epoca non si disponeva. Come osserva Robinson: «In realtà ciò che mancava a quel tempo era un linguaggio formale che avrebbe reso possibile dare una formulazione precisa e una delimitazione delle leggi [cioè le regole subordinate al "come se" leibniziano] che si supponeva di applicare ugualmente ai numeri finiti e ai sistemi estesi che includono sia numeri infinitamente piccoli sia numeri infinitamente grandi» [1966, p. 266].

L'evidente insostenibilità della posizione realista condusse attraverso critiche sia metafisiche (per esempio Berkeley [1734]) sia matematiche (per esempio Laplace) alla convinzione che il calcolo differenziale era di diritto utilizzabile solo alla condizione di fondarlo su basi differenti. Il primo difensore di questa nuova posizione, che privilegiò a parole il «rigore» e nei fatti la referenza, fu d'Alembert. È questi che introduce il centrale concetto di limite, ritornando all'intuizione «dinamica» dell'infinitesimale (cfr. sopra, p. 449): una quantità è infinitesimale se ha un limite nullo, cioè se si avvicina indefinitamente a zero. Ciò gli permette, a cose fatte, non semplicemente di criticare, ma di rifiutare l'infinitesimale: «Non ci sono affatto nel calcolo differenziale quantità infinitamente piccole...; si tratta unicamente di limiti di quantità finite». «La teoria dei limiti è alla base della vera Metafisica del calcolo differenziale». «Noi dunque non diremo, come tanti geometri, che una quantità è infinitamente piccola né prima che essa si annulli, né dopo che essa si è annullata; poiché cosa vuol mai dire una definizione cosí falsa, cento volte piú oscura di ciò che si vuole definire» [Alembert 1754, p. 987; 1765, p. 542; 1754, p. 987].

Questa sostituzione, violenta ed esplicita, del concetto di limite a quello di infinitesimo, genera una rottura. Rendendo il calcolo *nello stesso tempo* sintatticamente *e* semanticamente consistente elimina la sua «impurità d'origine» ma, per questa via, elimina anche gli agganci che il calcolo aveva in Leibniz con gli altri discorsi. Questo fatto è di grande portata epistemologica. Con d'Alembert il calcolo differenziale si regionalizza e si privatizza. Staccato dal terreno storico che lo governava si autonomizza e, epurato da ogni residuo eterogeneo, diventa capitalizzabile da parte del nuovo potere tecnico-scientifico. Avendo risolto il suo paradosso, suturato il sovvertimento della referenza che lo assillava e stabilizzata la sua intuizione instabile, esso esclude la sua origine (cfr. sopra, p. 451). Ciò è legittimo soltanto se si parte dalla «convinzione» che, al fine di poter essere adeguate alla realtà, le matematiche devono trattare degli oggetti ideali *possibili* soddisfacendo all'adeguatezza di significante-significato-referenza. È tale convinzione che trasforma in evidenza l'opzione ideologica di un feticismo dell'oggetto e della subordinazione del «lavoro» del linguaggio a un esistente la cui realtà è sempre già fissata, *sub specie aeternitatis*. Tutto ciò è assolutamente all'opposto dello «stile» leibniziano che apre il campo dell'esperienza non tanto arricchendo i metodi (le regole del finito funzionano nell'infinito e viceversa) quanto sfruttando le risorse simboliche della scrittura.

In quanto riduce all'immaginario la traduzione simbolica di uno scarto *strutturale* tra il simbolico e il reale, ci si può domandare se il «rigore» preconizzato da d'Alembert e «canonizzato» da Cauchy non segni il momento in cui le matematiche si legano irreversibilmente all'ideologia borghese.

Cauchy fonda rigorosamente l'analisi non soltanto sulla nozione di limite, ma su un calcolo dei limiti. Ciò nonostante non elimina, come d'Alembert, gli infinitamente piccoli e gli infinitamente grandi, piuttosto li reinterpreta e questo gli permette di stabilire un corpus di definizioni, metodi e risultati che costituiscono ancor oggi l'essenziale dell'insegnamento dell'analisi elementare.

Si riportano, come esempio, le sue definizioni d'infinitesimo, di continuità e di derivabilità:

a) «Quando i valori numerici successivi di una stessa variabile decrescono indefinitamente, in modo tale da abbassarsi al di sotto di ogni numero dato, questa variabile diventa ciò che si chiama un infinitamente piccolo o una quantità infinitamente piccola. Una variabile di tal specie ha per limite zero» [1821, ed. 1897 p. 19].

b) Una funzione $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è continua in un intervallo «se, tra questi limiti, un incremento infinitamente piccolo della variabile produce sempre un incremento infinitamente piccolo della funzione stessa» [*ibid.*, p. 43].

c) Una funzione continua $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è derivabile in x se il rapporto di infinitesimi df/dx ha un limite quando questi tendono a zero.

In quest'ultima definizione, df/dx potrebbe essere sostituito col rapporto delle differenze finite $\Delta f/\Delta x$. Robinson osserva al proposito: «Sembra ragionevole concludere... che secondo Cauchy una funzione non raggiungeva il suo limite direttamente, ma solo attraverso espressioni che comportano infinitesimi» [1966, p. 274].

Cauchy rifiuta il «parlare universalmente» leibniziano, cioè il principio formalista di continuità secondo il quale gli infinitesimi soddisfano le regole dei numeri ordinari: «Per quanto riguarda i metodi, ho cercato di dare loro tutto il rigore richiesto nella geometria in modo da non ricorrere mai ai ragionamenti tratti dalla genericità dell'algebra» [Cauchy 1821, ed. 1897 p. II]. La sua «aderenza» all'intuizione dell'infinitesimale è dunque in Cauchy «un non sequitur "logico" e si può dire che comporta un uso inconscio del "principio di continuità", la cui applicazione egli stesso aveva criticato» [Robinson 1966, p. 275].

L'uso del termine 'inconscio' da parte di Robinson è pertinente. Tutto accade infatti come se, qualunque siano le sue ri-problematizzazioni, la nozione di infinitesimo restasse concettualmente pregnante. Da Cauchy, la situazione non è evoluta di molto. Non si deve dimenticare, infatti, che – contrariamente ad altri «lessici», caduti nella dimenticanza – quello infinitesimale appartiene ancor oggi alla pratica matematica piú quotidiana.

È sufficiente d'altronde questa sola ragione pragmatica a giustificare un metodo che ne fonda l'uso. Come osserva Robinson, «è vero che molte opere classiche di Geometria Differenziale sono state fatte nei termini di una vaga nozione di infinitesimi, e la stessa cosa vale per la Meccanica Analitica. Generalmente si crede che tutto questo lavoro potrebbe, se necessario, essere riscritto conformemente al rigore della matematica contemporanea, ma nessuno intraprenderebbe mai nei dettagli un compito del genere. Non è senza interesse il fatto che oggi possiamo giustificare direttamente l'uso degli infinitesimi in tutti questi problemi» [1961, p. 437].

Dopo Cauchy, si deve essenzialmente a Weierstrass e al suo metodo «$\varepsilon - \delta$» (anticipato da Bolzano) la rimozione definitiva dell'infinitesimale. Si consideri per esempio la sua definizione (ormai standard) della continuità: «$f(x)$ è continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo esiste un $\eta > 0$ tale che $|x - x_0| \leq \eta$ implica $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$». Non si fa piú ricorso al lessico infinitesimale. Ma se questa definizione evita gli infinitesimi non solo come infinito attuale, ma anche (come in Cauchy) come infinito potenziale, è perché fa implicitamente ricorso a **R** come totalità (a causa della quantificazione «per ogni ε» e «esiste un η»), cioè a **R** come infinito attuale.

Dopo Weierstrass, i concetti fondamentali dell'analisi sono stati formulati nel suo stile.

Poiché il paradosso dell'infinitesimale è – apparentemente – un aspetto del paradosso generale dell'infinito attuale e siccome quest'ultimo è stato risolto da Georg Cantor, non è senza interesse, per concludere questo excursus storico, ricordare la posizione di Cantor a riguardo dell'infinitamente piccolo.

È noto (cfr. anche l'articolo «Infinito» in questa stessa *Enciclopedia*) che con l'introduzione del concetto di ordinale transfinito Cantor riesce a distinguere nell'infinito due nozioni identiche nel finito: quella di cardinale (potenza) e quella di ordinale (tipo di un insieme bene ordinato). Approfondendo la distinzione fra l'infinito potenziale (che chiama «infinito impropriamente detto») e l'infinito attuale (che chiama «infinito propriamente detto») Cantor rovescia il dogma aristotelico «infinitum actu non datur»: «Ma se si prendono in considerazione le ragioni che avanza Aristotele contro l'esistenza reale dell'infinito (cfr. la sua *Metafisica*, XI, 10), queste possono essere riportate essenzialmente a un presupposto che implica una *petizione di principio*: non ci sono che numeri *finiti*; e deduce ciò perché conosce soltanto numerazioni per i sistemi finiti. Credo tuttavia di avere dimostrato... che si possono praticare numerazioni determinate per tutti i sistemi, sia finiti che infiniti, alla condizione di imporre ai sistemi stessi una legge determinata che ne fa dei sistemi *bene ordinati*... Emerge qui, come una proprietà particolare dei sistemi *finiti*, che il risultato della numerazione, cioè il numero ordinale, è *indipendente* dall'ordinamento effettuato all'occorrenza, mentre per i sistemi infiniti una tale indipendenza *non* si presenta in generale... è precisamente qui e solo qui che si colloca la differenza essenziale fra il finito e l'infinito, differenza certo fondata in natura e che per questo non dovrebbe mai essere dimenticata in nessun modo; tuttavia si potrà, in nome di questa differenza, negare l'esistenza dell'infinito e mantenere quella del finito: se si fa cadere l'una ci si deve necessariamente sbarazzare dell'altra; ma per questa via dove arriveremo?» [Cantor 1883, pp. 554-55].

Ci si può stupire che Cantor, pur avendo una visione cosí acuta della co-implicazione del finito e dell'infinito, rifiuti tuttavia gli infinitesimi senza osservare che, a parte le differenze storiche, la forzatura leibniziana è dello stesso ordine di quella che egli stesso tenta di giustificare: primato ontologico di un lavoro del simbolico su una realtà sempre già costituita. In realtà la sua posizione è abbastanza sottile e in ogni caso non dogmatica: 1) in analisi (Cauchy-Weierstrass) l'infinitesimale è un infinito impropriamente detto (un limite); 2) i tentativi di definire l'infinitesimale come infinito propriamente detto sono falliti; 3) tale definizione può tuttavia essere possibile, ma in futuro.

«Si porrà forse... il problema seguente: dal momento che in questo modo [con la teoria dei transfiniti], si ottiene per il dominio dei numeri reali una estensione determinata verso l'infinitamente grande, non si potrebbero definire con lo stesso successo numeri determinati infinitamente piccoli o, il che è lo stesso, dei numeri finiti che non si confondano coi numeri razionali o irrazionali..., ma che potrebbero essere introdotti tra i numeri reali in ipotetici posti intermedi? La questione della costruzione di tali interpolazioni, per la quale alcuni autori si sono dati molta pena, non può... ricevere risposta chiara che grazie ai nostri nuovi numeri e piú precisamente sulla base del concetto generale di numerale di insiemi bene ordinati; al contrario i tentativi precedenti, per quanto so, da una parte si basano su una confusione errata tra l'infinito impropriamente detto e l'infinito propriamente detto e dall'altra sono stati condotti su una base completamente incerta e barcollante... Le grandezze infinitamente piccole, per quanto io sappia, sono state utilmente sviluppate fino ad oggi *soltanto* sotto la forma dell'infinito impropriamente detto... Al contrario tutti i tentativi tendenti a trasformare con un *coup de force* questi infinitamente piccoli in infinitamente piccoli propriamente detti, dovettero essere infine abbandonati e se ne dovette ammettere la vanità» [*ibid.*, p. 551].

E Fraenkel, discepolo di Cantor, scriveva ancora nel 1928: «Messo alla prova, l'infinitamente piccolo ha completamente fallito». Ma aggiungeva: «Certo è *concepibile* (anche se con buone ragioni lo si può giudicare inverosimile e rimandare a un lontano futuro) che un secondo Cantor dia un giorno un fondamento aritmetico incontestabile a nuovi numeri infinitamente piccoli, che si rivelino utilizzabili in matematica e che possano forse aprire una via piú semplice al calcolo infinitesimale. Ma finché non si sarà fatto qualcosa del genere... bisognerà attenersi all'idea che in nessun modo si può parlare di esistenza matematica – dunque logica – degli infinitamente piccoli, in un senso identico o analogo a quello che si dà agli infinitamente grandi» [1928, pp. 116-17].

È proprio il «concepibile-inverosimile» evocato da Cantor e Fraenkel che l'analisi non standard realizza.

1.4. La reinterpretazione della notazione differenziale.

Rifiutare gli infinitesimi non significa evidentemente rifiutare il calcolo differenziale e integrale. Anzi. Si è dunque giunti a reinterpretare la notazione leibniziana che ne era la pietra angolare.

Per quanto riguarda il simbolo dx che interviene negli integrali $\int f(x)\,dx$, esso è stato reintrodotto nella teoria insiemista della misura fondata all'inizio del secolo da Lebesgue, Kolmogorov, Radon e dalle loro scuole. Per questo aspetto della questione si rimanda ad altri articoli di questa stessa *Enciclopedia*.

Per quanto riguarda la notazione differenziale la sua traduzione si opera nel modo seguente (si veda anche l'articolo «Differenziale» in questa stessa *Enciclopedia*).

Sia $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione reale di n variabili reali $x_1, ..., x_n$. Si supponga che f ammetta derivate parziali $\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n$ in $x^0 \in \mathbf{R}^n$. In notazione infinitesimale, se i dx_i sono incrementi infinitesimali degli x_i e se df è l'incremento infinitesimale corrispondente, df e i dx_i sono legati dalla *formula* fondamentale

$$(1) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\,dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\,dx_n$$

che si tratta di reinterpretare.

Ciò si fa in diverse tappe. x^0 sia l'origine O di $\mathbf{R}^n$ e si cominci col definire la nozione di vettore tangente a $\mathbf{R}^n$ in O. Intuitivamente (cfr. anche la figura 6) un vettore $\mathbf{X}$ tangente a $\mathbf{R}^n$ in O è il vettore velocità in O di una traiettoria $\gamma(t)$ di $\mathbf{R}^n$ passante per O, per esempio per $t=0$, e differenziabile in 0. Siccome $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, le coordinate X_i di $\mathbf{X}$ sono date da

$$(2) \qquad X_i = \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0}$$

Sia allora $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in O. La sua restrizione a γ è una funzione di t, $f(\gamma(t))$, di cui si può calcolare la derivata in t per $t=0$ con la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$(3)\qquad \left.\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(O)\left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=0} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(O)\left.\frac{dx_n}{dt}\right|_{t=0}$$

ossia, per la (2),

$$(4)\qquad \frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Questa formula permette di definire lo spazio – indicato con $T_O\mathbf{R}^n$: spazio tangente a $\mathbf{R}^n$ in O – ove «abitano» i vettori tangenti a $\mathbf{R}^n$ in O. Si può infatti identificare $\mathbf{X}$ con l'operatore di derivazione

$$(5)\qquad \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

che associa a ogni funzione $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ derivabile in O il vettore

$$\mathbf{X}(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = D_X f$$

(derivata di f relativamente a $\mathbf{X}$). $\mathbf{X}$ è un operatore lineare che soddisfa la formula del prodotto:

$$(6)\qquad \mathbf{X}(fg) = f\mathbf{X}(g) + g\mathbf{X}(f).$$

In breve, $T_O\mathbf{R}^n$ è lo spazio vettoriale di dimensione n di base $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$, determinata dalla scelta delle coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbf{R}^n$.

Si indichi con T lo spazio vettoriale $T_O\mathbf{R}^n$ e sia T^* il suo *duale*, cioè lo spazio vettoriale delle forme lineari reali su T (si veda l'articolo «Dualità» in questa stessa *Enciclopedia*).

Si indichi con dx_i l'applicazione di T in $\mathbf{R}$ che associa all'operatore di derivazione

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

la sua i-esima coordinata X_i:

$$(7)\qquad dx_i(\mathbf{X}) = X_i.$$

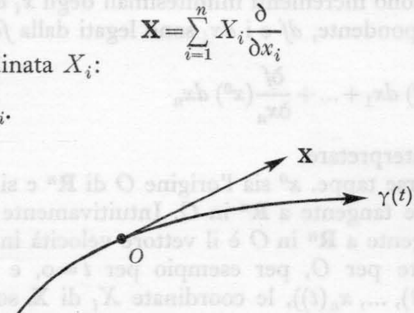

Figura 6.
Vettore tangente.

È banale verificare che dx_i è una forma lineare su T, dunque un elemento di T^*.

Sia $\varphi \in T^*$ e si indichi con φ_i il numero

(8) $$\varphi_i = \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Se $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ è un vettore di T, si ha

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^{n} X_i \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i \varphi_i = \qquad \text{dalla (8)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i dx_i \qquad \text{dalla (7).}\end{aligned}$$

T^* è dunque uno spazio vettoriale di dimensione n, di base $dx_1, \ldots, dx_n$ determinata dalla scelta delle coordinate $x_1 \ldots x_n$ di $\mathbf{R}^n$. Relativamente a questa base le coordinate di uno dei suoi elementi φ sono date dalla (8).

Sia allora $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile nell'origine. Si indichi con df l'applicazione di T in $\mathbf{R}$ che associa al vettore

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

di T il numero

(9) $$df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}(f) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

df è un elemento di T^* e si ha dalla (7)

$$df(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(\mathbf{X})$$

e quindi

(10) $$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

cioè la formula (1).

In questa «traduzione» che lascia invariate le formule ma che trasforma lo statuto delle entità che esse collegano, il differenziale df non è piú un infinitesimo ma una forma lineare sullo spazio degli operatori di derivazione in O.

La descrizione che precede è locale (ristretta a un intorno «infinitesimo» di O). Ciò che è stato indicato con df dovrebbe essere indicato con $df(O)$, differenziale di f in O.

Se f è ovunque derivabile in $\mathbf{R}^n$, si può globalizzare. Si definirà il piano tangente $T_{\mathbf{x}}\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{x}$, il suo duale – detto piano cotangente – $(T_{\mathbf{x}}\mathbf{R}^n)^*$ e il differenziale $df(\mathbf{x})$ di f in $\mathbf{x}$. Siccome si possono «incollare» i piani tangenti (rispettivamente cotangenti) in uno spazio globale $T\mathbf{R}^n$ (rispettivamente $T^*\mathbf{R}^n$) – detto fibrato tangente (rispettivamente fibrato cotangente) – fibrato su $\mathbf{R}^n$ con una proiezione $\pi : T\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (rispettivamente $\pi : T^*\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$) che associa a un vettore tangente (rispettivamente cotangente) a $\mathbf{R}^n$ la sua origine, si vede che, in ultima analisi, il differenziale df di una funzione $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è quello che si chiama una sezione del fibrato cotangente, cioè un'applicazione $df : \mathbf{R}^n \to T^*\mathbf{R}^n$ tale che $\pi \circ df = 1_{\mathbf{R}^n}$ ($1_{\mathbf{R}^n}$ è l'applicazione identica di $\mathbf{R}^n$). A $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, df associa la forma lineare $df(\mathbf{x})$ su $T_{\mathbf{x}}\mathbf{R}^n$.

Si è ben lontani dal df come infinitesimo.

Di fatto questa globalizzazione ha interesse soltanto se non si considera piú uno spazio $\mathbf{R}^n$ ma uno spazio ottenuto «incollando» carte locali identificabili con «pezzi» di $\mathbf{R}^n$. Per costruzione, questi spazi – detti varietà differenziabili – sono localmente identici a $\mathbf{R}^n$ ma in generale globalmente differenti (si veda l'articolo «Curve e superfici» in questa stessa *Enciclopedia*). Nel caso di $\mathbf{R}^n$ il concatenamento dei livelli «degenera» poiché 1) tutti gli spazi tangenti $T_{\mathbf{x}}\mathbf{R}^n$ sono canonicamente isomorfi a $\mathbf{R}^n$: un vettore tangente a $\mathbf{R}^n$ «è» un vettore di $\mathbf{R}^n$, o ancora il fibrato tangente $T\mathbf{R}^n$ «è» il prodotto diretto $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$; 2) la struttura euclidea di $\mathbf{R}^n$ implica un isomorfismo canonico tra $T\mathbf{R}^n$ e $T^*\mathbf{R}^n$. Il differenziale df si riduce dunque a un campo di vettori di $\mathbf{R}^n$ – detto campo di gradienti di f – che associa a $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ il vettore di $\mathbf{R}^n$ di coordinate $(\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n)$.

1.5. L'infinitesimale leibniziano come finzione.

Prima di mostrare (cfr. il § 2) come l'analisi non standard chiarisca lo statuto aritmetico e algebrico dell'infinitesimale leibniziano e come dia consistenza alla dubitativa anticipazione di Cantor (cfr. sopra, p. 456), se ne spiega preliminarmente lo statuto logico-concettuale.

Si riconsiderino le conclusioni di p. 451: prescindendo da ogni feticismo dell'oggetto (cfr. sopra, p. 454), si tratta di dedurre le proprietà logico-concettuali «anormali» del dx leibniziano:

a) è un'identità simbolica che occupa un posto inoccupabile con un «effetto di de-limitazione» per i procedimenti di costruzione dell'insieme $\mathbf{R}$ (infinito-punto);

b) è un simbolo-indice «dimezzato» in cui l'aspetto di indice e l'aspetto di simbolo sono incompatibili;

c) è un significante di cui ogni referente nega il significato;

d) è un simbolo letterale che ha lo statuto sintattico di un numero ma che si riferisce a un evento.

Si tratta di iscrivere nel quadro stesso della logica formale questa finzione e la spaccatura che essa materializza. Si può, d'altronde, ipotizzare che questo scarto tra concetto e logica è universale: l'infinitesimale non ne sarebbe che l'esempio matematico piú rilevante.

Questo significa – nella misura in cui esige un controllo logico-concettuale della contraddizione – che un chiarimento di questo ordine non può basarsi che su una formulazione non classica della logica elementare.

Per una tale presentazione ci si varrà di alcune idee di Hilbert.

Per dimostrare la consistenza dell'aritmetica, Hilbert pensava di poter utilizzare una strategia finitista e aveva approntato a tal fine un metodo di eliminazione dei quantificatori. Poiché le sue speranze sono state spazzate via dal teorema di Gödel, tale metodo, divenuto inutile, è caduto in discredito. Benché talvolta utilizzato ancora in modo sporadico (per esempio da Bourbaki nelle sue prime pagine), esso non è piú che una curiosità storica del «museo immaginario» matematico. Tuttavia, come si vedrà, tale metodo permette in modo molto economico di spiegare lo statuto logico-concettuale dell'infinitesimale.

Hilbert sosteneva la tesi che per «fondare» le matematiche occorresse dimostrare la loro consistenza formale – e innanzitutto la consistenza dell'aritmetica – facendo uso soltanto di una metalogica finita, l'unica che poteva venir considerata come legittima a priori. Ciò pone un immediato problema relativo alla quantificazione. Finché ci si attiene a insiemi finiti, gli enunciati quantificati sono equivalenti a disgiunzioni o congiunzioni finite di enunciati elementari. Se per esempio $F(x)$ è un predicato il cui dominio di definizione è l'insieme finito $A=\{a_1, ..., a_n\}$, l'esistenziale $\exists x F(x)$ è equivalente alla disgiunzione finita $F(a_1)\vee ... \vee F(a_n)$: a_1 soddisfa F, o a_2 soddisfa F, o ecc.; e l'universale $\forall x F(x)$ alla congiunzione finita $F(a_1)\wedge ... \wedge F(a_n)$: a_1 e a_2 e ... e a_n soddisfano F. Le cose vanno diversamente se A è infinito. Quantificare su un insieme infinito non è piú un processo finitista e non può piú, per Hilbert, essere accettato a priori. Occorre dunque essere in grado di eliminare i quantificatori almeno dagli assiomi delle teorie di cui ci si propone di dimostrare la consistenza.

Eliminare i quantificatori non vuol dire vietarli; in tal caso infatti ci si confinerebbe in una logica troppo povera. Vuol semplicemente dire che essi non devono piú essere considerati come nozioni logiche primitive ma al contrario che bisogna derivarli nel quadro di un formalismo che soddisfi le condizioni restrittive di una strategia finitista.

La principale fra queste condizioni restrittive è quella che impone di limitarsi a manipolazioni logiche elementari su enunciati elementari di tipo $F(a)$, $G(a,b)$, ecc. Poiché il procedimento di Hilbert è puramente sintattico, i simboli di individui a, b, ecc. non hanno né condizioni restrittive semantiche, né condizioni restrittive referenziali. Ciò consente a Hilbert di optare per una strategia di estensione dell'universo degli oggetti. Per ogni predicato a un posto $F(x)$ egli introduce – in modo puramente sintattico – un simbolo indicato con $\varepsilon_x F(x)$ (che si noterà qui ε_F per comodità) in cui x diventa una variabile vincolata. Tale ε-termine ε_F è un simbolo di individuo e non un simbolo di variabile: rappresenta l'idea di un individuo che soddisfa F.

Hilbert definisce allora il quantificatore esistenziale con l'equivalenza:

$$(11) \qquad \exists x F(x) \equiv F(\varepsilon_F).$$

L'affermazione 'Esiste un elemento che soddisfa F' equivale all'altra 'L'individuo *ideale* che rappresenta l'idea di un individuo che soddisfa F, soddisfa effettivamente F'.

Si osserverà che in questa definizione – chiave di volta del metodo hilbertiano – un enunciato complesso (quantificato) viene sostituito da un enunciato elementare il quale attesta che un determinato individuo soddisfa una determinata proprietà.

Ora se $F(x,y)$ è un predicato a due posti, $\varepsilon_x F(x,y)$ è un predicato a un posto, con y variabile libera. È dunque possibile formare l'ε-termine $\varepsilon_y \varepsilon_x F(x,y)$, ecc. Siccome la quantificazione universale si riporta per negazione alla quantificazione esistenziale, si possono in tal modo eliminare i quantificatori con l'aggiunta di ε-termini.

Hilbert considera allora il calcolo C_ε, usualmente detto ε-calcolo, costituito dalle parti seguenti:

a) calcolo delle proposizioni (simboli p, q,... di proposizioni e operatori logici di congiunzione $\wedge$, disgiunzione $\vee$, negazione $\sim$);
b) simboli di individui e simboli di variabili;
c) simboli di predicati a n posti;
d) ε-termini corrispondenti;
e) regole standard di deduzione;
f) regola d'introduzione dell'operatore ε:

(12) $F(a) \Rightarrow F(\varepsilon_F)$:

poiché F è un predicato a un posto, se si è dimostrato che un elemento particolare, a, soddisfa F, si può introdurre l'ε-termine ε_F e porre $F(\varepsilon_F)$. Per la (11) questa regola non è nient'altro che la riformulazione della regola classica d'introduzione del quantificatore esistenziale.

(13) $F(a) \Rightarrow \exists x F(x)$.

Quantunque non contenga esplicitamente quantificatori, C_ε è, per la (11), una estensione del calcolo dei predicati CP. Ma...

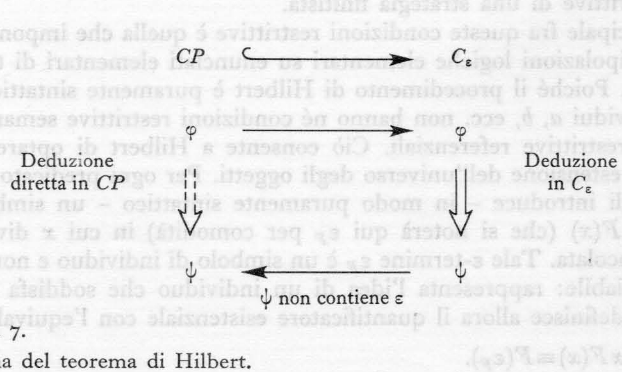

Figura 7.
Schema del teorema di Hilbert.

TEOREMA (Hilbert). *C_ε è una estensione inessenziale di CP. Ciò significa che se φ è una formula di CP e ψ una conseguenza di φ in C_ε, se il simbolo ε non interviene in modo irriducibile in ψ, allora ψ è una conseguenza di φ in CP.* (Cfr. fig. 7).

Questo risultato è di grande importanza perché mostra che i calcoli *CP* e C_ε sono sintatticamente equivalenti e che dunque non c'è alcuna ragione di privilegiare l'uno in rapporto all'altro.

Ma se *CP* e C_ε sono sintatticamente equivalenti, le loro semantiche naturali sono al contrario molto differenti e in particolare per quanto riguarda il problema della referenza.

La semantica del calcolo dei predicati *CP* è infatti puramente estensionale. I «nomi» *a*, *b*, ecc. degli individui sono in essa arbitrari e la quantificazione viene interpretata in termini di «prospezione». Al contrario in C_ε la quantificazione (esistenziale) s'interpreta come una proprietà di *consistenza* di un individuo ideale, di una identità simbolica. Tradizionalmente, si considera l'operatore di Hilbert come un operatore *di scelta*: poiché l'ε-termine ε_F rappresenta, secondo il concetto, l'idea di un elemento che soddisfa *F* e, secondo il referente, un elemento arbitrario che soddisfa *F*, se X_F è l'insieme degli elementi che soddisfano *F*, si può dire che l'operatore ε *seleziona* un elemento arbitrario *a* di X_F come referente di ε_F. Se $F(\varepsilon_F)$ è valido, allora $F(a)$ è valido, *a* soddisfa *F*, X_F è non vuoto ed esiste certamente un elemento che soddisfa *F*.

Tuttavia si vede che se l'equivalenza fondamentale (11) è consistente, ciò non è che a causa dello statuto logico-sintattico ben preciso degli ε-termini. Ipostasi di idee, gli ε-termini sono nello stesso tempo dei simboli secondo il concetto e degli indici secondo il referente. Elementi di codice determinati il cui referente è indeterminato, si può dire che essi sono strutturati come simboli-indice. Proprio a questa intrusione metodica nel campo della logica formale di entità che hanno lo statuto «linguistico» di simboli-indice, l'operatore hilbertiano deve la sua portata epistemologica.

Si prenda allora in considerazione una proposizione *universale* di tipo $\forall x F(x)$. Denotando $\sim F$ con $\tilde{F}$, si hanno le equivalenze

$$(14)\quad \begin{cases} \forall x F(x) \equiv \sim \exists x \tilde{F}(x) & \text{(dualità } \forall \leftrightarrow \exists \text{ tramite la negazione)} \\ \exists x \tilde{F}(x) \equiv \tilde{F}(\varepsilon_{\tilde{F}}) & \text{(per la (11))} \\ \sim \exists x \tilde{F}(x) \equiv \sim \tilde{F}(\varepsilon_{\tilde{F}}) & \end{cases}$$

e, poiché $\sim \tilde{F} = F$,

$$(15)\qquad \forall x F(x) \equiv F(\varepsilon_{\tilde{F}}).$$

Si supponga che $\forall x F(x)$ sia valido in una interpretazione data. L'ε-termine $\varepsilon_{\tilde{F}}$, detto quindi termine-zero (*null term*), esiste sempre per ipotesi ma possiede uno statuto molto particolare. Siccome non esistono elementi che soddisfano $\tilde{F}$, $\varepsilon_{\tilde{F}}$ è infatti proprio un simbolo-indice *senza referente consistente*. La

(15) esprime che *ogni* referente di $\varepsilon_{\tilde{F}}$ *nega* il significato che simbolizza in quanto significante. Un termine-zero è dunque un simbolo-indice «dimezzato» per cui l'aspetto di simbolo e l'aspetto di indice sono incompatibili, è la traccia letterale di una disgiunzione tra significante e significato, una finzione che implica un sovvertimento della referenza.

Dunque l'operatore di Hilbert rende in un certo senso la contraddizione *operatoria*. Mostra che a livello logico-concettuale ogni universale è de-limitato da un «effetto paradossale». E siccome per il teorema di Hilbert i calcoli CP e C_ε sono sintatticamente equivalenti, questi effetti parassitari, queste «impurità di origine», non sono eliminabili che attraverso una censura ideologica che privilegia l'interpretazione estensionale della logica elementare.

Introducendo la nozione intuitiva di «posto» è possibile approfondire queste riflessioni:

1) L'esistenziale $\exists x F(x) \equiv F(\varepsilon_F)$ esprime che il simbolo-indice ε_F è localizzato «al suo posto», cioè che va nel posto determinato dal predicato F che esso stesso indica.

2) L'universale $\forall x F(x) \equiv F(\varepsilon_{\tilde{F}})$ esprime al contrario che il simbolo-indice dimezzato $\varepsilon_{\tilde{F}}$ è *delocalizzato*, che esso «non è al suo posto» o ancora che è «catturato» dal posto del predicato stesso che lo nega. Parallelamente all'interpretazione «statica» di un termine-zero come disgiunzione significante/significato, esiste un'interpretazione «dinamica» che ne fa la traccia letterale di un evento ideale di delocalizzazione o di biforcazione.

Si può dunque sostenere la tesi che, malgrado la sua semplicità, il formalismo hilbertiano è «fondato nella realtà» e materializza nel campo della logica l'eterogeneità tra il simbolico e il reale che è inerente al concetto. Il feticismo della referenza consiste nel banalizzare nell'immaginario ciò che esso può avere di fittizio una volta interpretato, laddove, al contrario, esso iscrive al livello logico-simbolico il funzionamento *dialettico* naturale del concetto.

Si torni ora all'infinitesimale e si prenda in considerazione l'enunciato $F(0)$:

$$(16) \qquad F(0) \equiv \forall y (y \neq 0 \Rightarrow \exists r\ (r > 0 \wedge |y| > r))$$

che, una volta interpretato in $\mathbf{R}$, significa che non esistono infinitesimi: la (16) asserisce infatti che per ogni numero reale y non nullo esiste un numero reale positivo r tale che $|y| > r$ (cioè, y è separato da 0 da una distanza finita). $F(0)$ ha la forma $\forall y G(y)$ e dunque per la (15) è equivalente a $G(\varepsilon_{\tilde{G}})$. Si prenda dunque in considerazione il termine-zero $\varepsilon_{\tilde{G}}$. Poiché G è di forma $A \Rightarrow B$, $\tilde{G}$ sarà di forma $A \wedge \tilde{B}$:

$$(17) \qquad \tilde{G}(y) \equiv (y \neq 0) \wedge \forall r\ (r > 0 \Rightarrow |y| \leq r).$$

$\varepsilon_{\tilde{G}}$ rappresenta dunque *l'idea* di un numero differente da 0 la cui distanza da 0 è minore di qualunque numero strettamente positivo. *Ma questa è proprio la definizione dell'infinitesimale leibniziano.* Di qui:

$$(18) \qquad dx \equiv \varepsilon_{\tilde{G}}.$$

Non deve dunque stupire che si siano individuati a proposito del *dx* leibniziano tutti i tratti caratteristici di un termine-zero. In particolare l'interpretazione di d'Alembert dell'infinitesimale in termini di evento (cfr. sopra, p. 453) non fa che metaforizzare in modo «fisico» l'evento di *biforcazione* attraverso cui il termine-zero *dx* non è *strutturalmente* al suo posto (delocalizzazione).

Una volta che si disponga della finzione *dx*, l'universale (16) equivalente a $G(\varepsilon_{\tilde{G}})$ si traduce con:

(19) $dx \neq 0 \Rightarrow \exists r\,(r > 0 \wedge |dx| > r)$:

ogni infinitesimale è *o nullo o finito*. E questo già si sapeva.

Osservazione: Ciò che precede potrà apparire circolare. Tuttavia non si tratta che di materializzare una de-limitazione di **R** come *totalità*. Ma non solo l'idea paradossale di infinitesimale è, come si è visto, un effetto logico-concettuale *dialettico e pregnante* eliminabile soltanto con una censura ideologica; tale idea permette anche di esprimere *concettualmente* una proprietà strutturale fondamentale di **R** con l'enunciato *negativo* «Non esistono infinitesimi».

Il problema delle determinazioni concettuali negative è senza dubbio cruciale. La sua archeologia porterebbe molto lontano, senz'altro fino al pensiero selvaggio. Come predicare una totalità per cui non si dispone di un procedimento effettivo di costruzione? L'interesse dell'operazione hilbertiana starebbe nell'aver mostrato che enunciati negativi che prescindono dall'esistenza (*come esige il loro concetto*) di entità contraddittorie equivalgono a enunciati quantificati positivi. Evidentemente, dal momento in cui si è avuta a disposizione una costruzione *esplicita* di **R** come infinito attuale, ci si è potuti dispensare da ogni ricorso all'infinitesimale. Ma occorre aver ben chiaro che, facendo ciò, l'analisi si è separata irreversibilmente da ogni terreno ontologico, si è privatizzata e capitalizzata tecnicamente (cfr. sopra, p. 454); essa partecipava infatti della dialettica universale interna al concetto solamente grazie alla struttura del termine-zero.

Se la determinazione del *dx* come termine-zero chiarisce il suo statuto logico-concettuale, tuttavia consente anche di *mediare* la spiegazione del suo statuto aritmetico e algebrico. Se infatti *dx* è un termine-zero, lo è solo relativamente a **R**. Dunque si può sfruttare la disgiunzione che esso fissa fra significante e significato per trovargli un referente (in modo *consistente*) all'«esterno» di **R**. Si ottiene cosí per saturazione delle operazioni una estensione ***R** di **R**. Se ora è possibile convalidare il principio di continuità mostrando che – salvo ad arricchire ***R** – **R** e ***R** sono in qualche modo equivalenti, si sarà condotti, come Leibniz, a *relativizzare* l'opposizione finito/infinito. Relativamente a **R**, *dx* sarà un termine-zero, ma relativamente a ***R** sarà un *segno* (coesione significante/significato). $F(0)$ (si veda la (16)) sarà valido in ***R** per il fatto che è valido in **R**: non ci sono infinitesimi assoluti, ma solo relativi. Se si quantifica su **R** per definire *dx* (si veda la (18)), *dx* può trovare un referente (in modo consistente) in ***R**. Se si quantifica su ***R** per definire *dx*, allora *dx* ridiventa un simbolo-indice «dimezzato», inconsistente relativamente sia a **R** sia a ***R**, e che inoltre ha un referente solo in una estensione ****R** di ***R**. Si può dunque anticipare la struttura di una estensione non standard ***R** di **R**; resta, ovviamente, il problema di mostrare che un'estensione del genere esiste effettivamente.

***R** deve essere ottenuta a partire da **R** per aggiunta di infinitesimi e per saturazione delle operazioni: sarà dunque costituita da tre componenti: 1) l'insieme **R** dei numeri reali, detti, per tale occasione, standard; 2) un insieme μ di infinitesimi che contiene solo 0 come numero standard; dx è il suo simbolo-indice; 3) l'insieme $\mathbf{R}_\infty$ dei numeri «infiniti»; sono gli inversi degli infinitesimi.

Data l'invarianza per traslazione di **R**, la parte finita di ***R**, $^*\mathbf{R}_f = {}^*\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_\infty$, sarà ottenuta associando a ogni $x \in \mathbf{R}$ l'insieme μ degli infinitesimi: $^*\mathbf{R}_f$ è «fibrato» su **R** di fibra in x: l'insieme $x + \mu$ ha come simbolo-indice $x + dx$ (fig. 8).

***R** deve essere «indiscernibile» da **R**, cioè deve possedere esattamente le stesse proprietà di **R** purché queste siano esprimibili in un certo linguaggio di base. In particolare ***R** sarà, come **R**, un corpo ordinato «archimedeo». Ciò non è contraddittorio col fatto che esistono numeri «infiniti» in ***R** (col fatto cioè che ***R** non è archimedeo nel senso stretto del termine). Questo significa che ***R** è archimedeo *non relativamente a* **N**, *ma relativamente a* ***N**, insieme degli interi di **R** che comprende interi «infiniti».

Ogni entità definita a partire da **R** deve essere *automaticamente* (cioè in virtú della stessa costruzione di ***R**) prolungabile a una entità dello stesso ordine definita a partire da ***R**.

È un programma di tal genere che ha portato a termine l'analisi non standard. Come afferma Fenstadt: «Leibniz era dell'idea che gli infinitesimi e il loro calcolo potessero essere giustificati con l'introduzione di un tipo di *elementi ideali* che potevano essere o infinitamente piccoli o infinitamente grandi rispetto ai numeri reali. Ma Leibniz e i suoi successori, in particolare L'Hôpital, non erano in grado di sviluppare in modo consistente un'analisi basata su queste idee. L'introduzione di ***R** realizza invece tutto ciò, ***R** è un'estensione elementare di **R** che possiede le stesse proprietà aritmetiche. E la teoria evita le difficoltà connesse con il tentativo di Leibniz, distinguendo accuratamente ciò che "è uguale" da ciò che "è infinitamente vicino a". Per un infinitesimo dx e un corrispondente dy, abbiamo $f'(x) \sim (dy/dx)$ cosí che $f'(x) = st(dy/dx)$, laddove Leibniz voleva avere $f'(x) = dy/dx$, che è chiedere troppo» [1968, pp. 39-40].

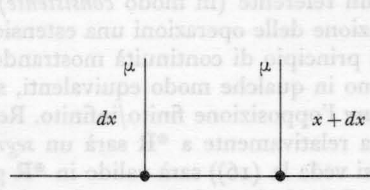

Figura 8.
Schema: la parte finita di ***R**.

Ma l'analisi non standard ha potuto condurre a termine tale programma solo basandosi in modo essenziale sul rapporto che sussiste tra **R** e il linguaggio formale in cui vengono espresse le sue proprietà. Lo studio di tale rapporto tra sintassi (linguaggio formale) e semantica (struttura concreta) è noto in logica sotto il nome di teoria dei modelli.

2. *Elementi di teoria dei modelli.*

2.1. La dialettica sintassi/semantica.

La teoria dei modelli analizza i rapporti esistenti tra una struttura matematica concreta e la sua teoria (nel senso formale del termine), cioè la struttura dell'insieme degli enunciati che essa soddisfa. La teoria dei modelli si poggia su una dialettica sintassi/semantica dove la sintassi rappresenta la parte linguistica e formale e la semantica la parte insiemista e concreta.

Si consideri per esempio il corpo **R** dei numeri reali che si suppone costruito esplicitamente come infinito attuale: viene inteso come un oggetto concreto. Quando poi si dice che **R** è un corpo topologico commutativo, totalmente ordinato, archimedeo e completo, si dice con questo che tale oggetto concreto è dotato di una particolare struttura, anzi, di piú strutture tra loro combinate: 1) di una struttura algebrica definita dalle operazioni di addizione (+) e di moltiplicazione (·); 2) di una struttura di ordine definita dalla relazione d'ordine $<$; 3) da una struttura topologica $\mathcal{C}$.

Come struttura, **R** è dunque la quintupla

$$\mathcal{R} = \langle \mathbf{R}, +, \cdot, <, \mathcal{C} \rangle.$$

Ora, siccome non c'è intuizione che permetta di conoscere questa struttura in modo immediato, per comprenderla si deve spiegarne in modo mediato (cioè con l'ausilio di dimostrazioni) la descrizione predicativa. Si parte da proprietà date per acquisite per giungere, attraverso un certo itinerario deduttivo, ad altre proprietà. Ma poiché la deduzione è puramente sintattica e algoritmica si devono prima tradurre in un linguaggio formale appropriato gli enunciati presi in considerazione. Si introduce cosí una distinzione tra linguaggio formale e struttura concreta, cioè tra sintassi e semantica.

In altri articoli della presente *Enciclopedia* sono trattati gli aspetti specifici della formalizzazione, del calcolo logico, della deduzione. Qui, per «parlare» delle strutture, verrà brevemente delineato il linguaggio L dei predicati composto da:

a) un insieme numerabile di simboli di variabile, x, y, z, ecc.;

b) un insieme numerabile di costanti a, b, c, ecc. che consentono di designare degli elementi strutturalmente distinti come 0, 1, ecc.;

c) il simbolo di uguaglianza;

d) un insieme numerabile di simboli di relazioni (un*arie*, bin*arie*, tern*arie*, ecc.) F, G, P, Q, ecc., che possiedono ciascuna una *arietà* definita;

e) eventualmente un insieme numerabile di simboli di funzione o di operazione;
f) simboli di punteggiatura;
g) connettivi proposizionali $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
h) quantificatori $\exists$, $\forall$.

Tra tutte le catene di simboli di L, ci si restringe alle espressioni ben formate, cioè tipograficamente corrette e che non introducono confusione di variabili nella quantificazione. Vengono chiamate formule (ben formate) di L. Sono definite ricorsivamente a partire dalle formule elementari di base – dette formule atomiche – del tipo $x = y$, $P(x_1, ..., x_n)$, $f(x_1, ..., x_n) = z$ (ove P è una relazione n-aria, f una funzione di n variabili, $x, y, z, x_1, ..., x_n$ delle variabili o delle costanti) mediante la regola che segue:

REGOLA. Se φ e ψ sono delle formule e x una variabile, allora $\sim\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\exists x \varphi$ sono delle formule (a condizione che per $\exists x \varphi$, φ non contenga già una quantificazione su x).

Come è noto, si può definire $\forall$ in termini di $\sim$ e di $\exists$ e i connettivi $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ in termini di $\sim$ e $\wedge$, o di $\sim$ e $\vee$.

Si dicono enunciati le formule senza variabili libere cioè le formule in cui tutte le variabili sono quantificate. Soltanto gli enunciati possono avere un valore di verità una volta interpretati semanticamente.

Per trasformare in calcolo il linguaggio dei predicati occorre disporre da una parte di un insieme di assiomi logici e dall'altra di un insieme di regole di deduzione.

L'insieme degli assiomi comprende 1) gli assiomi del calcolo proposizionale; 2) gli assiomi dell'uguaglianza: l'uguaglianza è una relazione di equivalenza che soddisfa lo schema di assioma di sostituzione

$$(1) \qquad \forall x \forall y\ (x = y \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi')),$$

dove φ è una formula e φ' si ottiene a partire da φ sostituendovi con y un numero arbitrario di occorrenze di x; 3) gli assiomi di particolarizzazione del quantificatore universale e d'introduzione del quantificatore esistenziale:

$$(2) \qquad \forall x \varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)$$

$$(3) \qquad \varphi(a) \Rightarrow \exists x \varphi(x).$$

Quanto all'insieme delle regole di deduzione, esso comprende, fra le altre, le seguenti:

REGOLA DEL «MODUS PONENS». Se φ e $\varphi \Rightarrow \psi$ sono dei teoremi, allora ψ è un teorema.

REGOLA. Se $\varphi \Rightarrow \psi(a)$ è un teorema e se φ non contiene la costante a, allora $\forall x \psi(x)$ è un teorema.

REGOLA. Se $\varphi(a) \Rightarrow \psi$ è un teorema e se ψ non contiene la costante a, allora $\exists x \varphi(x) \Rightarrow \psi$ è un teorema.

Prendendo gli assiomi come teoremi di base si costruisce dunque ricorsivamente, per applicazione ripetuta di queste regole, un insieme di formule di L dette teoremi del calcolo CP dei predicati, o dette ancora formule derivabili, dimostrabili o deducibili, indicate di norma con $\vdash \varphi$. A questi teoremi puramente logici (indipendenti da ogni semantica) si può ricorrere costantemente.

Piú in generale sia Σ un insieme di formule di CP. Si dice che la formula φ è derivabile da Σ e si indica con $\Sigma \vdash \varphi$, se φ può essere ottenuta da una catena deduttiva che fa intervenire come teoremi di base non soltanto gli assiomi di CP ma anche le formule di Σ (o ipotesi). Nella pratica piú che dimostrare $\Sigma \vdash \varphi$ si vorrebbe dimostrare $\vdash \Sigma \Rightarrow \varphi$. Che queste due proprietà siano equivalenti nel caso degli enunciati è contenuto nel teorema seguente:

TEOREMA DI DEDUZIONE (Herbrand, 1928). *Se Σ è un insieme finito di enunciati e se φ è un enunciato, $\Sigma \vdash \varphi$ implica $\vdash \Sigma \Rightarrow \varphi$.*

Osservazione: $\vdash \Sigma \Rightarrow \varphi$ implica $\Sigma \vdash \varphi$ è la regola del *modus ponens* enunciata sopra.

Osservazione: Il teorema di deduzione è falso per le formule in generale.

Si ritorni ora alla semantica. Sia $\mathcal{A} = \langle A, R_1, ..., R_p \rangle$ una struttura definita su un insieme di base A dalle relazioni $R_1, ..., R_p$ (o dalle funzioni e dalle operazioni: com'è noto, se $f: A^n \to A$ è una operazione $f(x_1, ..., x_n) = z$, le si associa la relazione R_f definita da $(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in R_f$ se e solo se $f(x_1, ..., x_n) = x_{n+1}$). Per «parlare» di $\mathcal{A}$ si utilizza il calcolo dei predicati. In L viene selezionato un insieme $R'_1, ..., R'_p$ di simboli di relazione con la stessa arietà rispettivamente di $R_1, ..., R_p$. La corrispondenza biunivoca $R'_i \to R_i$ viene detta una interpretazione di L in $\mathcal{A}$, o anche una semantica.

Ma per poter interpretare gli enunciati di L in $\mathcal{A}$, occorre ancora dare regole per l'interpretazione delle variabili e delle costanti.

Per quanto riguarda le variabili, si introduce la seguente idea fondamentale. Anche se al livello della loro costruzione dal punto di vista insiemistico gli elementi di A non sono degli elementi semplici ma a loro volta degli insiemi (come per esempio nel caso dei numeri reali nella costruzione di Dedekind o delle funzioni di uno spazio funzionale) li si considera come elementi semplici (*Urelemente* o atomi). Nell'universo della teoria degli insiemi che governa l'aspetto semantico, si tronca la gerarchia associata alla relazione di appartenenza al livello degli elementi della struttura presa in considerazione e si pone che le variabili di L sono riferite a questi *Urelemente*.

Si restringe allora la quantificazione agli elementi delle strutture (per esempio viene vietata la quantificazione sui sottoinsiemi di A). Questa restrizione definisce cioè la cosiddetta logica dei predicati del primo ordine. I teoremi fondamentali della teoria dei modelli dipendono in modo essenziale da tale restrizione.

Parlare di una struttura al primo ordine vuol dire dunque considerare di essa soltanto le proprietà formulabili in un linguaggio dalle risorse ben limitate. In rapporto al calcolo dei predicati adattato alla teoria generale degli insiemi (teoria dei tipi alla Russell), questo fatto introduce una rottura. Ma proprio tale rottura offre strumenti per l'indagine del rapporto tra sintassi e semantica.

Per le costanti si adotta la seguente strategia. I simboli di costanti di L sono riferiti a elementi strutturalmente distinti. Per parlare per esempio di $\mathbf{R}$ occorre disporre di simboli che denotino 0 e 1. A seconda della scelta degli elementi distinti, si ottengono teorie non equivalenti. Per esempio la teoria di $\mathbf{R}$ in cui è disponibile, oltre a 0 e 1, anche il simbolo di costante π, è piú ricca della teoria in cui sono disponibili soltanto 0 e 1.

È però una pratica abituale quella d'introdurre un simbolo nuovo ogni volta che viene definito un nuovo elemento. Affinché questa procedura sia sempre lecita, talvolta si conviene di prendere come linguaggio di base relativo a una struttura $\mathcal{A}$ il linguaggio L_A (o $L_{\mathcal{A}}$) ottenuto aggiungendo a L dei «nomi» per *tutti* gli elementi dell'insieme A base di $\mathcal{A}$. L'insieme delle costanti di $L_{\mathcal{A}}$ in generale non è numerabile.

Se si dispone di una interpretazione di L in $\mathcal{A}$ ogni enunciato del primo ordine relativo ad $\mathcal{A}$ è traducibile in un enunciato formale di L e reciprocamente ogni enunciato di L è interpretabile come enunciato del primo ordine relativo ad $\mathcal{A}$.

Dopo avere interpretato L in $\mathcal{A}$, vi si interpreti il calcolo dei predicati. La nozione di base è quella (semantica) di validità di un enunciato.

DEFINIZIONE. *Un enunciato φ di $L_{\mathcal{A}}$ è valido in $\mathcal{A}$ se è vero una volta interpretato.*

DEFINIZIONE. *Se φ è valido in $\mathcal{A}$ (e si indica con $\mathcal{A} \models \varphi$) si dice che $\mathcal{A}$ è un modello di φ.*

Piú generalmente se Σ è un insieme di enunciati e se $\mathcal{A} \models \varphi$ per ogni enunciato φ di Σ, si dice che $\mathcal{A}$ è un modello di Σ. La validità si definisce ricorsivamente in modo evidente.

Si definirà ora la nozione di teoria nel suo doppio aspetto sintattico e semantico.

Lato sintattico: sia Σ un insieme consistente di enunciati, cioè un insieme di enunciati da cui non è possibile derivare una contraddizione; Σ è detta allora una teoria.

DEFINIZIONE. *Si chiama poi teoria di Σ, e si indica con* $\mathrm{Th}(\Sigma)$, *l'insieme degli enunciati derivabili da Σ (cioè la chiusura deduttiva di Σ).*

Verrà indicata con $\mathfrak{M}(\Sigma)$ la classe dei modelli di Σ, cioè la classe delle strutture per cui esiste un'interpretazione di L che rende validi gli enunciati di Σ.

Lato semantico: sia data una struttura $\mathcal{A}$:

DEFINIZIONE. *Si chiama teoria di $\mathcal{A}$, e si indica con* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$, *l'insieme degli enunciati validi in $\mathcal{A}$. Per definizione $\mathcal{A}$ è un modello di* $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

Piú in generale: sia K una classe di strutture dello stesso tipo (cioè definite dagli stessi simboli di costante e dagli stessi simboli di relazione).

DEFINIZIONE. *Si chiama teoria di K e si indica con* $\mathrm{Th}(K)$ *l'insieme degli enunciati validi in ogni struttura $\mathcal{A}$ di K.*

L'analisi del rapporto fra sintassi e semantica consiste per prima cosa nel domandarsi: 1) Dato un insieme di enunciati Σ, che rapporto c'è fra $\mathrm{Th}(\Sigma)$ e $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\Sigma))$, cioè tra l'insieme degli enunciati derivabili da Σ e l'insieme degli enunciati validi in ogni modello di Σ? 2) Data una struttura $\mathcal{A}$, esiste un insieme finito di enunciati Σ tale che $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\Sigma)$ cioè tale che ogni enunciato valido in $\mathcal{A}$ sia derivabile da Σ? Si dice in questo caso che $\mathcal{A}$ e la sua teoria sono finitamente assiomatizzabili. 3) Siano $\mathcal{A} = \langle A, R_i \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, S_i \rangle$ due strutture dello stesso tipo. Si supponga $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$. Ciò vuol dire allora che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono isomorfe? Non necessariamente. Nel caso in cui questo si verifica si dice che la teoria di $\mathcal{A}$ è categorica.

L'idea ingenua che ci si forma del rapporto di adeguazione tra sintassi e semantica indurrebbe a ritenere che, data una struttura concreta $\mathcal{A}$, la sua teoria dovesse essere al tempo stesso categorica e finitamente assiomatizzabile, ovvero che esiste un numero finito di proprietà caratteristiche di $\mathcal{A}$ tali che 1) ogni proprietà di $\mathcal{A}$ è derivabile da queste; 2) ogni struttura che possiede queste proprietà è isomorfa a $\mathcal{A}$.

Nel seguito si vedrà come questa idea sia definitivamente falsa al primo ordine e come esista uno scarto fra sintassi e semantica che può essere analizzato in quanto tale.

Prima di affrontare i teoremi di base che consentono una tale analisi, ecco una prima forma dell'adeguazione fra sintassi e semantica.

Gli enunciati di una teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ si suddividono in due classi: da una parte gli enunciati che dipendono dalla struttura particolare di $\mathcal{A}$ e dall'altra quelli che ne sono indipendenti. In relazione a questi ultimi, si ha innanzitutto la definizione seguente:

DEFINIZIONE. *Un enunciato è detto universalmente valido se è valido in ogni interpretazione.*

Per rispondere alla domanda 1), occorre, prima di analizzare particolari insiemi di enunciati, prendere in considerazione il caso $\Sigma = \varnothing$. $\mathrm{Th}(\Sigma)$ si riduce allora all'insieme dei teoremi di *CP* e $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\Sigma))$ all'insieme degli enunciati universalmente validi (poiché ogni struttura è modello dell'insieme vuoto di enunciati).

Domanda: Quale rapporto c'è fra i teoremi di *CP* e gli enunciati universalmente validi?

Siccome è banale verificare che gli assiomi di *CP* sono universalmente validi e che le regole di deduzione conservano la validità universale, si può mostrare facilmente un primo risultato:

TEOREMA. *Ogni enunciato che è un teorema di CP è universalmente valido: se $\vdash \varphi$, allora $\mathcal{A} \models \varphi$ per ogni struttura $\mathcal{A}$.*

Questo teorema ha per corollario il seguente risultato di base:

TEOREMA DI CONSISTENZA DEL CALCOLO DEI PREDICATI. *CP è consistente cioè* $\Sigma = \emptyset$ *è un insieme consistente di enunciati.*

2.2. I teoremi di base della teoria dei modelli.

I teoremi di base della teoria dei modelli si dividono in due gruppi. Da una parte quelli che dimostrano risultati positivi di compatibilità fra sintassi e semantica e dall'altra quelli che dimostrano risultati negativi di limitazione interna. In generale la restrizione al primo ordine è essenziale.

Teoremi positivi. Il teorema di completezza di Gödel [1930] è il reciproco del teorema di p. 471:

TEOREMA (Gödel, 1930). *Ogni enunciato universalmente valido è un teorema di CP: se* $\mathcal{A} \models \varphi$ *per ogni interpretazione di* φ, *allora* $\vdash \varphi$.

A questo teorema, come è noto, può essere data una forma piú forte:

TEOREMA. *Un insieme di enunciati è consistente se e solo se ammette un modello.*

La dimostrazione classica del teorema di completezza è troppo tecnica per essere anche soltanto abbozzata in questa sede [il lettore è rimandato, per esempio, a Bell e Slomson 1969 e Robinson 1963]. Piú oltre se ne darà una versione diversa.

Eccone comunque alcune conseguenze fondamentali: si può già dare risposta a domande come la 1) di p. 471.

PROPOSIZIONE. Sia Σ un insieme consistente di enunciati e sia K una classe di strutture dello stesso tipo. Si ha:

1) $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\Sigma)) = \mathrm{Th}(\Sigma)$
2) $\mathfrak{M}(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\Sigma))) = \mathfrak{M}(\Sigma)$
3) $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}(\mathrm{Th}(K))) = \mathrm{Th}(K)$.

Un'altra conseguenza del teorema di completezza è il teorema fondamentale di esistenza dei modelli:

TEOREMA DI COMPATTEZZA. *Sia* Σ *un insieme di enunciati. Se ogni sottoinsieme finito* Σ_f *di* Σ *ammette un modello, allora* Σ *ammette un modello.*

Dimostrazione: Se Σ non ammettesse un modello, sarebbe inconsistente per il teorema presentato sopra. Un Σ_f sarebbe allora inconsistente e perciò senza modello. Contraddizione.

Osservazione: Si vedrà nel seguito come rendere costruttiva questa dimostrazione astratta.

COROLLARIO. Sia Σ una teoria. Una struttura $\mathcal{A}$ può essere immersa in un modello di Σ se e solo se ogni sottostruttura finita di $\mathcal{A}$ può essere immersa in un modello di Σ.

Un'altra conseguenza del teorema di completezza ha una maggiore rilevanza epistemologica. Come osservano Bell e Slomson [1969, pp. 65-66], dopo Kreisel [1967, p. 153], la funzione essenziale del calcolo dei predicati è di provare a «catturare» sintatticamente non tanto la nozione di enunciato universalmente valido, quanto quella di enunciato logicamente valido, cioè valido in ogni interpretazione, incluse le interpretazioni in ogni universo della teoria degli insiemi (universi che *non* sono insiemi). Va sottolineato come a priori l'insieme degli enunciati logicamente validi contenga quello degli enunciati che sono teoremi del calcolo *CP* dei predicati e sia contenuto in quello degli enunciati universalmente validi. Il teorema di completezza di Gödel afferma proprio che questi tre insiemi sono identici.

Teoremi di limitazione. Il piú noto è certamente il teorema di incompletezza [Gödel 1931], che si richiama qui nelle linee essenziali. Anzitutto: un linguaggio *L* (non necessariamente del primo ordine), in cui si esprime l'identità, viene usualmente detto sufficientemente potente se è in grado di esprimere l'aritmetica elementare. Il risultato gödeliano si può allora esprimere cosí: 1) se si richiede che l'insieme degli assiomi specifici di un sistema formale sia decidibile (ossia che sia sempre possibile decidere *in modo effettivo* – cioè con mezzi puramente costruttivi – per ogni formula (ben formata) del linguaggio in questione se si tratta o meno di un assioma), allora non può esistere un sistema formale del primo ordine (e neanche di ordine superiore) consistente e sufficientemente potente nel quale tutti gli enunciati veri della matematica, esprimibili nel sistema, siano teoremi; 2) la consistenza (o non-contraddittorietà) di un sistema del primo ordine (e neanche di ordine superiore) consistente e sufficientemente potente non può venir dimostrata entro il sistema stesso. Da questa stessa formulazione segue immediatamente che, per sistemi di ordine superiore al primo, viene meno quella forma di adeguazione della sintassi alla semantica di cui si è parlato sopra.

Ma pure al primo ordine sussiste uno scarto tra sintassi e semantica che concerne la questione della categoricità. Sussiste infatti, per teorie al primo ordine, il seguente teorema:

TEOREMA (Löwenheim-Skolem, prima versione [cfr. Löwenheim 1915; Skolem 1920]). *Sia Σ una teoria che possiede un modello infinito. Se Σ è finito, Σ ha un modello per ogni cardinale infinito. Se Σ è infinito di cardinale α, Σ ha un modello per ogni cardinale $\geq \alpha$.*

Questo teorema è qui decisivo: è infatti il teorema generale di esistenza dei modelli non standard: esistono modelli della teoria (al primo ordine) di **R** per ogni cardinale superiore alla potenza del continuo.

Sotto il profilo generale il teorema di Löwenheim-Skolem mostra che teorie che ammettono modelli infiniti (cioè la maggior parte delle teorie interessanti) sono non categoriche in quanto due strutture con cardinali differenti non sono isomorfe: la risposta alla domanda 3) di p. 471 è in generale negativa. Occorre di conseguenza relativizzare la nozione di categoricità.

DEFINIZIONE. *Sia α un cardinale. Una teoria Σ è detta α-categorica se tutti i modelli di Σ di cardinale α sono isomorfi.*

Alcuni teoremi classici sono teoremi di α-categoricità.

Si consideri per esempio la teoria Σ_D degli insiemi densamente ordinati senza primo ed ultimo elemento. Se $\mathcal{A} = \langle A, < \rangle$ è un insieme totalmente ordinato, la proprietà di densità esprime che per ogni coppia (x, y) di elementi di $\mathcal{A}$ tale che $x<y$, esiste un elemento intermedio $x<z<y$.

TEOREMA (Cantor, 1895). *Σ_D è $\aleph_0$-categorica (ove $\aleph_0$ è la potenza del numerabile).*

COROLLARIO. Tutti gli insiemi numerabili $\mathcal{A} = \langle A, < \rangle$ densamente ordinati senza primo ed ultimo elemento sono isomorfi a $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$.

Osservazione: È possibile dimostrare che Σ_D non è α-categorica per $\alpha > \aleph_0$.

Si consideri ora la teoria Σ_{CC} dei corpi commutativi algebricamente chiusi. I modelli di Σ_{CC} soddisfano un numero *infinito* di assiomi: quelli finiti dei corpi commutativi e, per ogni $n \in \mathbf{N}$, l'assioma τ_n che esprime che ogni polinomio di grado n possiede una radice.

Osservazione: È possibile mostrare che non si può ricondurre l'insieme infinito dei τ_n a un insieme finito. La proprietà di essere algebricamente chiuso *non è*, per un corpo, una proprietà del primo ordine, o ancora, la teoria Σ_{CC} *non è* finitamente assiomatizzabile (cfr. sopra, p. 471).

Dato un corpo commutativo K si può mostrare o che per ogni $x \in K$, $x \neq 0$ si ha $nx \neq 0$ per ogni intero $n \in \mathbf{N}$: si dice allora che K è di caratteristica 0; o che esiste un piú piccolo numero primo p tale che $px = 0$ per ogni $x \in K$: si dice allora che K è di caratteristica p. Ogni corpo di caratteristica 0 (come $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$) è una estensione di $\mathbf{Q}$ e ogni corpo di caratteristica p è un'estensione del corpo finito $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$ degli interi modulo p. $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{F}_p$ sono detti corpi primi (cfr. l'articolo «Divisibilità» in questa stessa *Enciclopedia*).

Osservazione: La proprietà σ_p di essere di caratteristica p è, per un corpo, una proprietà del primo ordine. Al contrario la proprietà σ_0 di essere di caratteristica 0, che risulta la congiunzione infinita $\bigwedge\limits^{p} (\sim \sigma_p)$, *non è* del primo ordine.

Sia allora Σ_{CC_p} (rispettivamente Σ_{CC_0}) la teoria dei corpi algebricamente chiusi di caratteristica p (rispettivamente di caratteristica 0).

TEOREMA (Steinitz, 1910). *Le teorie Σ_{CC_p} e Σ_{CC_0} sono α-categoriche per ogni cardinale $\alpha > \aleph_0$.*

COROLLARIO (caratterizzazione di $\mathbf{C}$). Ogni corpo algebricamente chiuso di caratteristica zero avendo la potenza del continuo è isomorfo al corpo $\mathbf{C}$ dei numeri complessi.

Osservazione: È possibile mostrare che Σ_{CC_0} non è $\aleph_0$-categorica.

Il concetto di α-categoricità si è rivelato abbastanza potente per consentire una classificazione delle teorie. Infatti si ha il profondo risultato dovuto a Morley che risolve una congettura di Łoś:

TEOREMA (Morley, 1964). *Se una teoria è α-categorica per un cardinale $\alpha > \aleph_0$, essa è β-categorica per ogni cardinale $\beta > \aleph_0$.*

COROLLARIO. Esistono soltanto tre possibilità per una teoria che ammette modelli infiniti: *a)* è α-categorica per ogni cardinale α infinito; *b)* è α-categorica solo per $\alpha = \aleph_0$; *c)* è α-categorica per ogni $\alpha > \aleph_0$ senza esserlo per $\aleph_0$.

2.3. «Indiscernibilità» dei modelli e completezza.

In un certo qual senso le proprietà del primo ordine sono *elementari*. Il tema di questo approccio all'analisi non standard è quello: 1) del rapporto che esiste tra una struttura concreta e la sua teoria al primo ordine; 2) dell'analisi delle estensioni $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ che ne sono «indiscernibili». Tali estensioni esistono soltanto se Th($\mathbf{R}$) non caratterizza $\mathbf{R}$. E questo già è noto proprio per il teorema di Löwenheim-Skolem (cfr. sopra, p. 473).

È dunque naturale interrogarsi sulla relazione di equivalenza che ricopre l'«indiscernibilità» di due strutture. Si tratta della cosiddetta equivalenza elementare. Intuitivamente due strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dello stesso tipo sono elementarmente equivalenti se hanno la stessa teoria al primo ordine: $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$. Ma occorrono alcune precauzioni per il fatto che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ non hanno necessariamente le stesse costanti.

DEFINIZIONE 1. *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due strutture dello stesso tipo con insiemi di base rispettivamente A e B. Sia N un sottoinsieme di $A \cap B$. $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono dette elementarmente equivalenti relativamente a N se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno la stessa teoria relativamente a L_N, cioè se soddisfano gli stessi enunciati purché questi abbiano le loro costanti in N.*

Questa definizione si divide in due sottodefinizioni (2 e 3).

DEFINIZIONE 2. *$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono dette elementarmente equivalenti (si scrive $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$) se sono elementarmente equivalenti relativamente all'insieme delle loro costanti strutturali (per esempio 0 e 1 per ogni corpo).*

È chiaro che la relazione di equivalenza elementare è una relazione di equivalenza.

PROPOSIZIONE (banale). Se $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, allora $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ($\simeq$ indica l'isomorfismo).

Osservazione: Se reciprocamente $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ implica $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, ciò significa che la teoria di $\mathcal{A}$ è categorica (cfr. sopra, p. 471).

DEFINIZIONE 3. *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due strutture dello stesso tipo tali che $\mathcal{A}$ sia una sottostruttura di $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$).* (Si può, al solito, supporre piú generalmente che $\mathcal{A}$ sia immersa in $\mathcal{B}$ mediante un'iniezione $j : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ che conserva le strutture e identifica $\mathcal{A}$ e $j(\mathcal{A})$). *Si dice che $\mathcal{B}$ è una estensione elementare di $\mathcal{A}$ – e si scrive: $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ – se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono elementarmente equivalenti relativamente ad A.*

Questa nozione cruciale è stata introdotta da Tarski e Vaught.

PROPOSIZIONE (banale). Se $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$, allora $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

PROPOSIZIONE. Se $\mathcal{A}$ è una struttura finita, tutte le sue estensioni elementari sono banali (cioè isomorfe a $\mathcal{A}$).

Le nozioni di equivalenza elementare e di estensione elementare sono nozioni semantiche di origine sintattica. Sono legate in modo essenziale al linguaggio di base; inoltre sono molto *meno fini* della relazione di isomorfismo, puramente semantica. Ma proprio per questo permettono una prima classificazione delle strutture e delle loro teorie.

La nozione chiave per la teoria dei modelli non standard è, infine, quella di estensione elementare. Tale nozione è piú forte di quella di equivalenza elementare. Dire infatti $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ non significa semplicemente $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Vuol dire invece che le proprietà strutturali di *tutti* gli elementi di $\mathcal{A}$ sono conservate per estensione a $\mathcal{B}$, o ancora che nell'estensione a $\mathcal{B}$ nessun nuovo elemento viene a sostituirsi a un elemento di $\mathcal{A}$ facendolo «scadere» da una proprietà del primo ordine.

Si considerino per esempio le strutture d'ordine $\mathcal{A} = \langle \mathbf{N} \setminus (0), < \rangle$ e $\mathcal{B} = \langle \mathbf{N}, < \rangle$. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Se $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, allora $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ (cfr. p. 475). Ma $\mathcal{B}$ non è una estensione elementare di $\mathcal{A}$. Infatti, quando si passa da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, l'elemento 1, che è il primo elemento di $\mathcal{A}$ (proprietà del primo ordine) si trova «soppiantato» dall'elemento 0 di $\mathcal{B}$. L'enunciato $\forall x \ (x \geq 1)$ che è un enunciato di L_A non vale piú in $\mathcal{B}$. Il che non impedisce che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ siano isomorfi. Ciò significa semplicemente che l'isomorfismo cosí definito è incompatibile coll'immersione $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Il fatto che nessun elemento di $\mathcal{A}$ debba trovarsi «scaduto» da una delle sue proprietà fornisce un criterio per le estensioni elementari, che permette di restringersi a una sottoclasse di enunciati.

Applicando proprio tale criterio si può dimostrare il seguente risultato assai significativo:

TEOREMA. $\langle \mathbf{Q}, < \rangle \preccurlyeq \langle \mathbf{R}, < \rangle$.

Era già noto (teorema di Cantor: cfr. sopra, p. 474) che la teoria Σ_D degli insiemi densamente ordinati senza primo e ultimo elemento è $\aleph_0$-categorica e che dunque ogni modello numerabile di Σ_D è isomorfo a $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$. Si vede ora che $\langle \mathbf{R}, < \rangle$ – che non può essere isomorfo a $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$ poiché non numerabile – è un'estensione elementare di $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$. Ciò mostra in particolare che la proprietà fenomenologica primaria di $\mathbf{R}$, quella di essere un continuo, non è una proprietà del primo ordine (cioè elementare) della sua struttura d'ordine. (Si veda anche, a questo proposito, l'articolo «Continuo/discreto» in questa stessa *Enciclopedia*).

Il concetto di estensione elementare precisa lo scarto sintassi/semantica enunciato dal teorema di Löwenheim-Skolem. La precedente formulazione del teorema può venir scomposta nei due enunciati seguenti:

TEOREMA (Löwenheim-Skolem, *downward*). *Sia Σ un insieme di enunciati di L di cardinale α che ammette un modello infinito di cardinale $\geq \alpha$; se α è infinito, Σ ha un modello di cardinale α, altrimenti Σ ha un modello di cardinale $\aleph_0$.*

Osservazione: Come corollario, si ottiene immediatamente che esistono modelli numerabili della teoria al primo ordine dei numeri reali. Quando comparve sulla scena matematica, questo straordinario risultato è stato classificato come un paradosso. In realtà, mostra semplicemente la forza della restrizione al primo ordine.

Rilevante all'esistenza dei modelli utilizzati dall'analisi non standard è poi, direttamente, il secondo enunciato:

TEOREMA (Löwenheim-Skolem, *upward*). *Sia Σ una teoria di cardinale α. Se Σ ha un modello infinito, ha un modello per ogni cardinale infinito $\beta \geq \alpha$.*

Dimostrazione, nelle linee essenziali [per i dettagli si veda ad esempio Bell e Slomson 1969, pp. 81-82]: si utilizzerà in modo specifico la nozione di estensione elementare: sarà sufficiente mostrare che se $\mathcal{A}$ è una struttura infinita di cardinale α – in cui il linguaggio L è interpretato – $\mathcal{A}$ possiede estensioni elementari per ogni cardinale $\beta \geq \alpha, \rho$, ove ρ è il cardinale del linguaggio L, cioè il cardinale dell'insieme dei simboli di L.

A questo scopo, sia $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ relativamente a L_A e $\beta \geq \alpha, \rho$. Sia B un insieme di cardinale β. Si formino poi gli insiemi di enunciati $K_1 = \{a \neq b\}$ per $a \in A$, $b \in B$, i quali esprimono che A, base di $\mathcal{A}$, e B sono disgiunti; e $K_2 = \{b_1 \neq b_2\}$ per $b_1, b_2 \in B$ con $b_1 \neq b_2$, i quali esprimono che elementi di B distinti sono distinti. Sia $\Sigma' = \Sigma \cup K_1 \cup K_2$. Σ' è di cardinale β ed è consistente. Se non lo fosse, esisterebbe un insieme finito $\Sigma'_f = \Sigma_f \cup K_{1f} \cup K_{2f}$ da cui si deriva una contraddizione. $K_{1f} \cup K_{2f}$ non può essere vuoto in quanto Σ_f ammette un modello $\mathcal{A}$ e pertanto è consistente. Siano $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m$ le costanti di $K_{1f} \cup K_{2f}$. Poiché $\mathcal{A}$ è infinita, si può riferire $b_1, ..., b_m$ a m elementi distinti di A e distinti da $a_1, ..., a_n$. Σ'_f è dunque consistente in quanto ammette $\mathcal{A}$ come modello. Contraddizione. Dunque Σ' è consistente. Per il teorema di completezza (cfr. sopra, p. 472), ammette un modello $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ è di cardinalità β, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e poiché $\mathcal{B}$ è un modello di Σ, teoria di $\mathcal{A}$ relativamente a L_A, $\mathcal{A} < \mathcal{B}$.

COROLLARIO. Esistono modelli non standard di **R**.

Le nozioni di equivalenza elementare e di estensione elementare consentono anche di definire certe proprietà strutturali delle teorie che generalizzano quelle di categoricità. È naturale, infatti, chiedersi quali teorie posseggano la proprietà per cui tutti i loro modelli sono «indiscernibili». A seconda che si scelga l'equivalenza elementare o l'estensione elementare, si ottengono due distinte nozioni di «completezza» di una teoria.

DEFINIZIONE. *Una teoria Σ è detta completa se tutti i suoi modelli sono elementarmente equivalenti.*

PROPOSIZIONE. Sia $\mathcal{A}$ una struttura: $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ è completa.

COROLLARIO (Lindenbaum). Ogni teoria ammette una estensione completa.

La proprietà di completezza, apparentemente semantica, è equivalente in realtà, per il teorema di completezza, a una proprietà sintattica. Si ha infatti il seguente teorema:

TEOREMA. *Una teoria Σ è completa se e solo se, per ogni enunciato φ, è sia $\Sigma \vdash \varphi$, sia $\Sigma \vdash \sim\varphi$.*

Dire che una teoria Σ è completa significa dunque affermare che la sua chiusura deduttiva Σ^* è completa nel senso di massimale: non è possibile aggiungerle alcun enunciato senza abolirne la consistenza. Il teorema appena enunciato fornisce un utile strumento per mostrare che certe teorie *non* sono complete.

Esempio.

La teoria dei corpi commutativi (anche algebricamente chiusi) non è completa. Infatti la caratteristica di un corpo (che è una proprietà del primo ordine se essa è diversa da zero: si veda l'osservazione a p. 474) non è derivabile dagli assiomi dei corpi.

È dunque opportuno disporre di un *criterio* efficace che assicuri che una teoria *è* completa.

TEOREMA (Łoś-Vaught, 1954). *Se Σ è una teoria senza modelli finiti e α-categorica per un cardinale α infinito, Σ è allora completa.*

Osservazione: Questo risultato mostra proprio che la nozione di completezza è un indebolimento di quella di categoricità.

COROLLARIO. La teoria Σ_D degli insiemi con ordine denso senza primo e ultimo elemento è completa.

Dimostrazione: Teorema di Cantor (cfr. sopra, p. 474).

COROLLARIO. $\langle \mathbf{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbf{R}, < \rangle$.

COROLLARIO. Le teorie Σ_{CC_0} e Σ_{CC_p} dei corpi algebricamente chiusi di caratteristica 0 e p sono complete.

Dimostrazione: Teorema di Steinitz (cfr. sopra, p. 474).

Osservazione: Già si è visto che ogni corpo algebricamente chiuso di caratteristica 0 avente la potenza del continuo è isomorfo a $\mathbf{C}$.

Si constata ora che ogni corpo K algebricamente chiuso di caratteristica 0 è elementarmente equivalente a $\mathbf{C}$. Se dunque si dimostra una proprietà del primo ordine per $\mathbf{C}$, automaticamente essa è dimostrata per K, per esempio per le chiusure algebriche dei corpi di funzioni razionali. Si tratta di un caso particolare (principio di Lefschetz) di un principio generale di trasferimento la cui importanza epistemologica è stata sottolineata da Robinson: «L'uso di linguaggi formali ci permette di studiare simultaneamente intere classi di teoremi laddove la pratica matematica ordinaria si deve limitare ai singoli teoremi considerati uno per uno. In particolare, in alcuni casi, diventa possibile dimostrare che se un teorema di una data classe è vero per una struttura di un certo tipo è vero anche per una struttura di tipo diverso ad essa collegata. Chiameremo *principi di trasferimento* risultati del genere. Anzi, il classico principio di dualità della geometria proiettiva può essere considerato come un teorema metamatematico di questo tipo. Il carattere logico di questo principio, però, è cosí immediato che la sua scoperta non ha reso necessaria formalizzazione alcuna» [1963, trad. it. p. 52].

La nozione di completezza che si deve a Robinson e che viene associata non piú all'equivalenza elementare ma alla estensione elementare è piú sottile in quanto quest'ultima non è una relazione di equivalenza.

DEFINIZIONE. *Una teoria Σ è detta $\mathfrak{M}$-completa (completa rispetto ai modelli) se per ogni inclusione $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ di modelli di Σ, $\mathcal{A}\preccurlyeq\mathcal{B}$.*

La $\mathfrak{M}$-completezza può essere ricondotta alla completezza se si prendono in considerazione i linguaggi L_A.

DEFINIZIONE. *Sia $\mathcal{A}$ una struttura di base A. Si chiama diagramma di $\mathcal{A}$ (e si scrive $\mathrm{D}(\mathcal{A})$) l'insieme degli enunciati atomici e delle negazioni di enunciati atomici di L_A che sono validi in $\mathcal{A}$.*

Una struttura $\mathcal{B}$ è un modello di $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ se e solo se contiene una sovrastruttura isomorfa ad $\mathcal{A}$.

TEOREMA (definizione sintattica della $\mathfrak{M}$-completezza). *Una teoria Σ è $\mathfrak{M}$-completa se e solo se per ogni modello $\mathcal{A}$ di Σ la teoria $\Sigma\cup\mathrm{D}(\mathcal{A})$ è una teoria completa di L_A.*

Osservazione: Benché fortemente correlate, le nozioni di completezza e di $\mathfrak{M}$-completezza hanno ciascuna il loro specifico interesse. Si consideri per esempio la teoria $\Sigma=\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ in cui $\mathfrak{M}=\langle\mathbf{N}, <\rangle$ (teoria degli insiemi numerabili con ordine discreto e con primo elemento). Essendo la teoria di una struttura, essa è completa. Ciò nonostante l'esempio dell'estensione non elementare $\langle\mathbf{N}\setminus(0), <\rangle\subset\langle\mathbf{N}, <\rangle$ mostra che essa non è $\mathfrak{M}$-completa.

Dualmente, si vedrà tra breve che la teoria dei corpi algebricamente chiusi è $\mathfrak{M}$-completa. Ora (si veda l'esempio a p. 478) essa non è completa.

L'accoppiamento dei teoremi sulla definizione sintattica della $\mathfrak{M}$-completezza (cfr. sopra) e sulle condizioni di completezza di una teoria (p. 478) fornisce un criterio per mostrare che una teoria *non è* $\mathfrak{M}$-completa. Ma è opportuno disporre anche di un criterio che permetta di mostrare che una teoria *è* $\mathfrak{M}$-completa. Tale criterio è stato introdotto da Robinson. Esso si basa sull'idea che per sapere se una teoria è completa, basta verificarlo per una classe abbastanza ristretta di enunciati [cfr. *ibid.*, p. 117]. È in questo modo che si è potuto dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA. *La teoria Σ_{CC} dei corpi algebricamente chiusi è $\mathfrak{M}$-completa.*

Che la teoria dei corpi algebricamente chiusi sia $\mathfrak{M}$-completa è dato qui come un risultato. Sotto il profilo storico si tratta però dell'origine concettuale della nozione di $\mathfrak{M}$-completezza. Introducendo quest'ultima, Robinson si era proposto infatti di tradurre nei termini puramente metamatematici della teoria dei modelli la proprietà di chiusura algebrica dei corpi e di farne un paradigma per le teorie algebriche in generale.

D'altronde il teorema or ora enunciato non è altro che una riformulazione metamatematica di una delle chiavi di volta della geometria algebrica, cioè il *Nullstellensatz* di Hilbert (cfr. gli articoli «Geometria e topologia» e «Invariante» in questa stessa *Enciclopedia*). Ora, la definizione di base della geometria algebrica è quella di varietà algebrica. Sia K un corpo. Le varietà algebriche su K sono i sottoinsiemi di K^n definiti dall'annullarsi di sistemi di polinomi $f_1, ..., f_n \in K[x_1, ..., x_n]$. Se V è una varietà di K^n definita dai polinomi $f_1, ..., f_p$, è chiaro che ogni polinomio f appartenente all'ideale $\mathfrak{J} = (f_1, ..., f_p)$ di $K[x_1, ..., x_n]$ generato da $f_1, ..., f_p$ è identicamente nullo su V. V è dunque definita dall'ideale $\mathfrak{J}$. Se $\mathfrak{J} = K[x_1, ..., x_n]$ è l'ideale improprio di $K[x_1, ..., x_n]$, V è vuota poiché $1 \in \mathfrak{J}$ e 1 non si annulla mai. Il problema è allora di sapere se *ogni* ideale proprio definisce una varietà non vuota.

TEOREMA (*Nullstellensatz*). *Se K è algebricamente chiuso ogni ideale proprio $\mathfrak{J}$ di $K[x_1, ..., x_n]$ ammette uno zero.*

Dimostrazione (nelle linee generali): Occorre mostrare che se $V = \emptyset$ (dove V è la varietà definita dall'annullamento di $\mathfrak{J}$) allora esistono dei polinomi $g_1, ..., g_p \in K[x_1, ..., x_n]$ tali che

$$\sum_{i=1}^{p} g_i f_i = 1$$

ove $f_1, ..., f_p$ generano $\mathfrak{J}$.

1) Se $V = \emptyset$, allora $V_{K'} = \emptyset$ per ogni estensione K' di K ove $V_{K'}$ è la varietà di K'^n definita dagli stessi polinomi di V (estensione del corpo degli scalari). È possibile supporre K' algebricamente chiuso. Siccome $V = \emptyset$ è una proprietà del primo ordine, 1) è una conseguenza diretta della $\mathfrak{M}$-completezza di K_{CC}.

2) Se $V_{K'} = \emptyset$ per ogni estensione K' di K, $\mathfrak{J}$ è improprio: $1 \in \mathfrak{J}$ o ancora esistono $g_1, ..., g_p \in K[x_1, ..., x_n]$ tali che

$$\sum_{i=1}^{p} g_i f_i = 1.$$

Se $\mathfrak{J}$ fosse proprio, $\mathfrak{J}$ sarebbe contenuto in un ideale massimale $\mathfrak{M}$ di $K[x_1, ..., x_n]$. Ora, il quoziente $K' = K[x_1, ..., x_n]/\mathfrak{M}$ è un'estensione di K. Sia a_i, $i = 1, ..., n$, l'immagine in K' del polinomio x_i. Siccome $f_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, ..., p$, il punto $(a_1, ..., a_n)$ di K'^n è un punto di $V_{K'}$. Dunque $V_{K'} \neq \emptyset$. Contraddizione.

Si vede che l'essenziale della dimostrazione è proprio la $\mathfrak{M}$-completezza di Σ_{CC}.

Cosí la teoria dei corpi algebricamente chiusi è $\mathfrak{M}$-completa, cioè completa per l'estensione elementare, anche se non è completa, cioè non è completa per l'equivalenza elementare. A prima vista può sembrare paradossale. In realtà non si deve dimenticare che se l'estensione elementare è una relazione essenzialmente piú forte di quella di equivalenza elementare nella misura in cui è relativa ai linguaggi L_A e non al linguaggio L, è nello stesso tempo piú debole nella misura in cui considera solo coppie di modelli di cui l'uno è l'estensione dell'altro. Ora, ogni corpo è una estensione di un corpo primo, $\mathbf{Q}$ per la caratteristica 0 e $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ per le caratteristiche finite p. Due corpi di cui l'uno è l'estensione dell'altro hanno dunque necessariamente la stessa caratteristica. Si è visto sopra (p. 478) che l'indeterminazione della caratteristica è proprio il solo ostacolo alla completezza di Σ_{CC}.

Il rapporto fra quanto si è dimostrato a p. 478 circa la teoria dei corpi commutativi, e circa i corpi algebricamente chiusi di caratteristica 0 oppure p, e infine a p. 479 circa la $\mathfrak{M}$-completezza dei corpi algebricamente chiusi, si basa dunque sull'esistenza dei corpi primi. Tutto ciò è immediatamente generalizzabile.

DEFINIZIONE. *Sia Σ una teoria. Un modello $\mathcal{A}$ di Σ è detto primo se ogni modello di Σ possiede una sottostruttura isomorfa a $\mathcal{A}$.*

TEOREMA (criterio del modello primo). *Se Σ è una teoria $\mathfrak{M}$-completa che possiede un modello primo, è allora completa.*

Dimostrazione: Sia $\mathcal{A}_p$ il modello primo di Σ e $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ due modelli. Esistono un $\mathcal{A}_{1p} \subseteq \mathcal{A}_1$ e un $\mathcal{A}_{2p} \subseteq \mathcal{A}_2$ tali che $\mathcal{A}_{1p} \simeq \mathcal{A}_p \simeq \mathcal{A}_{2p}$. Siccome Σ è $\mathfrak{M}$-completa, $\mathcal{A}_{1p} \preccurlyeq \mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_{2p} \preccurlyeq \mathcal{A}_2$. Dunque $\mathcal{A}_{1p} \equiv \mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_{2p} \equiv \mathcal{A}_2$. E siccome $\mathcal{A}_{1p} \simeq \mathcal{A}_p \simeq \mathcal{A}_{2p}$, $\mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2$.

COROLLARIO. Le teorie Σ_{CC_0} e Σ_{CC_p} sono complete.

Dimostrazione: Σ_{CC_0} e Σ_{CC_p} sono $\mathfrak{M}$-complete poiché Σ_{CC} è $\mathfrak{M}$-completo. Σ_{CC_0} ammette per modello primo la chiusura algebrica $\overline{\mathbf{Q}}$ del corpo primo $\mathbf{Q}$ e Σ_{CC_p} ammette per modello primo la chiusura algebrica $\overline{\mathbf{F}}_p$ del corpo $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Analogamente si può mostrare:

TEOREMA. *La teoria Σ_{D} degli insiemi con ordine denso senza primo ed ultimo elemento è $\mathfrak{M}$-completa.*

COROLLARIO. $\langle \mathbf{Q}, < \rangle \prec \langle \mathbf{R}, < \rangle$.

COROLLARIO. Σ_{D} è completa.

Dimostrazione: Σ_{D} ammette $\langle \mathbf{Q}, < \rangle$ per modello primo.

Si vede cosí prendere forma una teoria coerente delle teorie stesse, almeno delle teorie algebriche. Dopo i primi lavori pionieristici, quest'analisi del rapporto sintassi/semantica si è arricchita in modo considerevole e ha portato a profondi risultati. Per esempio è degno di nota, fra i tanti, il seguente:

TEOREMA. *Sia Σ una specificazione della teoria dei corpi che sia completa e $\aleph_1$-categorica, allora Σ o è la teoria Σ_{CC_0}, o è la teoria Σ_{CC_p}, o è la teoria di un corpo particolare.*

Una delle conseguenze piú fruttuose della problematica della completezza è stata lo sviluppo di una metamatematica dell'algebra. Passando dall'algebra alla logica si è mostrato che certe nozioni algebriche erano generalizzabili in nozioni puramente logiche; passando dalla logica all'algebra si è mostrato che certi teoremi classici erano essenzialmente piú di natura logica che algebrica. Questo era, ad esempio, il caso dell'interpretazione dei teoremi di Steinitz e di Cantor in termini di completezza, del principio di Lefschetz in termini di principio di trasferimento e del *Nullstellensatz* in termini di $\mathfrak{M}$-completezza.

Come ha osservato Robinson: «Spesso in algebra ci si imbatte in concetti alla cui base stanno idee fondamentali che, anche se vaghe, sembrano avere un raggio di applicazione piú generale di quanto appaia dalle definizioni concrete... Capita spesso inoltre che in un solo concetto si trovino riunite piú idee fondamentali. Concetti del genere, una volta che ci si muova in contesti piú generali, possono cosí spezzarsi in piú nozioni come anche in ambiti diversi essere passibili di interpretazioni diverse» [1963, trad. it. p. 168].

Il carattere metamatematico di questo approccio è evidente in quanto fa uso esplicito della nozione di deducibilità, malgrado che questa si possa ridefinire in termini di teoria dei modelli [cfr. *ibid.*, p. 169]. Va osservato che una delle traduzioni piú importanti di nozioni algebriche in un quadro metamatematico è quella di «chiusura algebrica» in termini di $\mathfrak{M}$-completamento (o «completamento rispetto ai modelli»). Definire quest'ultima nozione è pressoché immediato. Si dimostra infatti [*ibid.*, pp. 136-37] che per ogni insieme di enunciati K (non vuoto e non contraddittorio) non può esistere a meno di equivalenze piú di una estensione K' di K che sia al contempo $\mathfrak{M}$-completa e $\mathfrak{M}$-consistente relativamente a K (K' si dice $\mathfrak{M}$-consistente se ogni modello M' di K' è modello del diagramma D di un modello M di K): questo insieme K', *se esiste,* è detto appunto $\mathfrak{M}$-completamento di K [*ibid.*, p. 157]. In modo «naturale» ci si interroga allora circa l'esistenza di $\mathfrak{M}$-completamenti per teorie in generale: si cerca cioè un correlato della nozione di «chiusura algebrica» per strutture per le quali una nozione di chiusura non è emersa in modo naturale. Uno dei piú importanti successi di questa strategia è stato il chiarimento concettuale della risoluzione (da parte di Artin e Schreier, 1927) del diciassettesimo problema di Hilbert (dimostrare la congettura: una funzione razionale definita positiva è *sempre* una somma di quadrati di funzioni razionali) nei termini di $\mathfrak{M}$-completamenti [in particolare, *ibid.*, pp. 254-66]. Infine: una strategia del genere non risulta piú applicabile nel caso di teorie algebriche sempre piú fondamentali e meno semplici (la piú fondamentale e meno semplice è forse la teoria dei gruppi): ciò conduce allora a indebolire dapprima la nozione di $\mathfrak{M}$-completezza e quindi quella stessa di validità (teoria del *forcing* sviluppata, tra gli altri, dallo stesso Robinson). Queste piú recenti ricerche non possono venir affrontate qui: si termina quindi il riepilogo di alcuni risultati di completezza associati alla «indiscernibilità» e si passa a delineare un metodo *esplicito* di costruzione di estensioni elementari, cioè di modelli non standard.

2.4. Metodo degli ultraprodotti.

Finora si dispone solo di un teorema di esistenza (Löwenheim-Skolem) dei modelli non standard: ma per lavorare entro tali modelli occorre anche un metodo uniforme di costruzione. Si è rivelata particolarmente efficace la cosiddetta tecnica degli ultraprodotti. Se ne daranno i lineamenti essenziali, rimandando a testi specifici [per esempio Bell e Slomson 1969] per i dettagli.

Il metodo degli ultraprodotti è un metodo semantico di costruzione di modelli a partire da modelli già disponibili. Com'è noto, il modo piú semplice di costruire strutture è quello che consiste nel considerare prodotti diretti. Perché non percorrere anche qui questa via? La difficoltà sta nel fatto che la classe $\mathfrak{M}(\Sigma)$ dei modelli di Σ non ha nessuna ragione a priori di essere chiusa rispetto all'operazione di prodotto diretto (per esempio il prodotto diretto di due corpi non è *mai* un corpo). È dunque necessario «raffinare» la nozione di prodotto diretto. L'idea fondamentale – dovuta a Łoś – consiste nel lavorare nel prodotto

$$\mathcal{A}_I = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

indebolendovi la nozione di validità in una nozione di validità «quasi-ovunque» (q.o.), cioè relativizzando tale nozione assoluta a un «opportuno» insieme D di parti dell'insieme I degli indici. Il problema diventa allora quello di sapere a quali condizioni su D il «prodotto» degli $\mathcal{A}_i$ relativi a D è ancora un modello di Σ.

Sia dunque D un insieme di parti di I. Si indebolisce la nozione di identità su

$$A_I = \prod_{i \in I} A_i$$

ponendo che gli elementi $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ e $\mathbf{b} = (b_i)_{i \in I}$ di A_I sono equivalenti ($\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$) se il sottoinsieme $U \subset I$ degli i tali che $a_i = b_i$ appartiene a D. Si vuole che la relazione $\sim$ sia una relazione di equivalenza: 1) $\sim$ deve essere riflessiva: $\mathbf{a} \sim \mathbf{a}$ per ogni $\mathbf{a} \in A_I$. Ciò esige che $I \in D$; 2) $\sim$ deve essere simmetrica: se $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$, allora $\mathbf{b} \sim \mathbf{a}$. Ciò è vero qualunque sia D; 3) $\sim$ deve essere transitiva: se $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \sim \mathbf{c}$, allora $\mathbf{a} \sim \mathbf{c}$. Siano $U = \{i \in I \mid a_i = b_i\}$, $V = \{i \in I \mid b_i = c_i\}$ e $W = \{i \in I \mid a_i = c_i\}$. Per ipotesi $U, V \in D$: è banale verificare $U \cap V \subseteq W$. Si vuole che $U, V \in D$ implichi *sempre* $W \in D$. Ciò esige: 1) se $U, V \in D$, allora $U \cap V \in D$: D è chiuso per le intersezioni finite; 2) se $Z \in D$ e $Z \subseteq W$, allora $W \in D$: D è chiuso per estensione.

D'altra parte la relazione $\sim$ non deve essere una equivalenza banale su A_I (cioè si deve evitare che tutti gli elementi risultino equivalenti). Ciò esige $\varnothing \notin D$.

DEFINIZIONE. *Sia I un insieme. Un filtro su I è un insieme non vuoto D di parti di I tale che:*

a) $\emptyset \notin D$,

b) se $U, V \in D$, *allora* $U \cap V \in D$,

c) se $U \subseteq V$ *e se* $U \in D$, *allora* $V \in D$.

Dunque si è mostrato:

PROPOSIZIONE. Se D è un filtro su I, $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Sia dunque D un filtro: si denoti con $A_D = A_I/D$ il quoziente di A_I per la relazione di equivalenza $\sim$, cioè l'insieme delle classi di equivalenza $\dot{\mathbf{a}}$, di elementi $\mathbf{a} \in A_I$.

Sia R_I una relazione n-aria di $\mathcal{A}_I$. Le viene allora associata la relazione «relativizzata» $R_{D\,\text{q.o.}}$ che è soddisfatta solo se R_I è soddisfatta «quasi-ovunque».

DEFINIZIONE. $(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n) \in R_{D\,\text{q.o.}}$ *se e solo se* $U = \{i \in I \mid (a_{1,i}, ..., a_{n,i}) \in R_i\} \in D$.

PROPOSIZIONE. $R_{D\,\text{q.o.}}$ è compatibile con la relazione $\sim$: se $(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n) \in R_{D\,\text{q.o.}}$ e se $\mathbf{a}_k \sim \mathbf{b}_k$ per $k = 1, ..., n$, allora $(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n) \in R_{D\,\text{q.o.}}$.

Dimostrazione: Sia $U_k = \{i \in I \mid a_{k,i} = b_{k,i}\}$ e sia $V = \{i \in I \mid (b_{1,i}, ..., b_{n,i}) \in R_i\}$. Si vuol mostrare $V \in D$. Ma $U \cap U_1 \cap ... \cap U_n \subseteq V$ e $U, U_1, ..., U_n \in D$ per ipotesi. Per la definizione di filtro, $V \in D$.

La relazione $R_{D\,\text{q.o.}}$ passa dunque al quoziente e definisce una relazione R_D su A_D.

COROLLARIO. Se $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di strutture di un certo tipo e se D è un filtro su I, la struttura $\mathcal{A}_D = \mathcal{A}_I/D$ è una struttura dello stesso tipo.

Resta da analizzare a quali ulteriori condizioni su D, $\mathcal{A}_D$ sarà un modello di Σ se le $\mathcal{A}_i$ sono modelli di Σ. Si deve ora «relativizzare» la nozione di validità.

DEFINIZIONE. *Sia φ un enunciato del linguaggio L associato al tipo di struttura considerato. Si dice che φ è quasi ovunque valido in $\mathcal{A}_I$ e si scrive:* $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$ *se* $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in D$.

Il problema è ora di sapere a quali condizioni su D la validità quasi ovunque su $\mathcal{A}_I$ si identifica con la validità su $\mathcal{A}_D$:

(1) $\qquad \mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$ se e solo se $\mathcal{A}_D \models \varphi$.

Il ragionamento è per induzione sulla complessità degli enunciati.

a) Sia $a = b$ un enunciato atomico di L interpretato come $a_i = b_i$ in $\mathcal{A}_i$, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ in $\mathcal{A}_I$ e $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{b}}$ in $\mathcal{A}_D$. $\mathcal{A}_D \models a = b$ se e solo se $\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{b}}$ se e solo se $\mathbf{a} \sim \mathbf{b}$ se e solo se $\{i \in I \mid a_i = b_i\} \in D$ se e solo se $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} a = b$.

b) Sia $R(a_1, ..., a_n)$ un enunciato atomico di L interpretato come $(a_{1,i}, ..., a_{n,i}) \in R_i$ in $\mathcal{A}_i$, $(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n) \in R_I$ in $\mathcal{A}_I$ e $(\dot{\mathbf{a}}_1, ..., \dot{\mathbf{a}}_n) \in R_D$ in $\mathcal{A}_D$. $\mathcal{A}_D \models R(a_1, ..., a_n)$ se e solo se $(\dot{\mathbf{a}}_1, ..., \dot{\mathbf{a}}_n) \in R_D$ se e solo se $(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n) \in R_{D\,\text{q.o.}}$ se e solo se

$\{i\in I \mid (a_{1,i}, ..., a_{n,i})\in R_i\}\in D$ se e solo se $\{i\in I \mid \mathcal{A}_i \models R(a_1, ..., a_n)\}\in D$ se e solo se $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} R(a_1, ..., a_n)$.

c) Sia $\varphi = \psi\wedge\chi$ una congiunzione di enunciati. Siano $U=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i\models\psi\}$, $V=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i\models\chi\}$ e $W=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i\models\psi\wedge\chi\}$. $\mathcal{A}_D\models\varphi$ se e solo se $\mathcal{A}_D\models\psi$ e $\mathcal{A}_D\models\chi$ se e solo se (per ipotesi di induzione) $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\psi$ e $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\chi$ se e solo se $U, V\in D$. D'altra parte $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\varphi$ se e solo se $W\in D$. Ma $W=U\cap V$. Ora, essendo D un filtro, $U, V\in D$ se e solo se $U\cap V\in D$.

d) Sia $\varphi=\exists x\, \psi(x)$ un enunciato esistenziale. Si supponga $\mathcal{A}_D\models\varphi$. Ciò significa che esiste un $\dot{\mathbf{a}}\in\mathcal{A}_D$ tale che $\mathcal{A}_D\models\psi(\dot{\mathbf{a}})$. Sia $\mathbf{a}=(a_i)_{i\in I}$ l'elemento di $\mathcal{A}_I$ corrispondente al simbolo di costante che denota $\dot{\mathbf{a}}$. Per ipotesi di induzione $\mathcal{A}_D\models\psi(\dot{\mathbf{a}})$ se e solo se $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\psi(\mathbf{a})$ se e solo se $U=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i\models\psi(a_i)\}\in D$. D'altra parte $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\varphi$ se e solo se $V=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i\models\varphi\}\in D$. Ma $U\subseteq V$. Siccome D è un filtro, $V\in D$ e dunque $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\varphi$.

Reciprocamente si supponga $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\varphi$. Ciò significa $V=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i\models\varphi\}\in D$. Sia $i\in V$. Esiste un elemento α_i di A_i tale che $\mathcal{A}_i\models\psi(\alpha_i)$. Sia $\mathbf{a}$ un elemento di A_I tale che $a_i=\alpha_i$, se $\mathcal{A}_i\models\varphi$ e tale che a_i sia qualunque se non $\mathcal{A}_i\models\varphi$. L'esistenza di un tale $\mathbf{a}$ è garantita dall'assioma della scelta. Siccome $V\subseteq W=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i\models \psi(a_i)\}$ per costruzione, $V\in D$ implica $W\in D$ cioè $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\psi(\mathbf{a})$. Ma per ipotesi di ricorrenza $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\psi(\mathbf{a})$ se e solo se $\mathcal{A}_D\models\psi(\dot{\mathbf{a}})$. Dunque $\mathcal{A}_D\models\varphi$.

e) Sia infine $\varphi=\sim\psi$ un enunciato negativo. $\mathcal{A}_D\models\varphi$ se e solo se non $\mathcal{A}_D\models\psi$ se e solo se (per ipotesi di ricorrenza) non $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\psi$ se e solo se $U=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i\models\psi\}\notin D$. Reciprocamente $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\varphi$ se e solo se $V=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i\models\sim\psi\}\in D$. Ma siccome sia $\mathcal{A}_i\models\psi$, sia $\mathcal{A}_i\models\sim\psi$, $U=I\setminus V$. (U e V sono complementari). Per soddisfare la (1) occorre dunque che D goda della proprietà supplementare:

(2) Per ogni $U\subseteq I$, $U\in D$ se e solo se $I-U\notin D$.

DEFINIZIONE. *Si chiama ultrafiltro su I un filtro che possiede la proprietà* (2).

Si è dunque dimostrato il risultato fondamentale:

TEOREMA [Łoś 1955]. *Se D è un ultrafiltro su I, per ogni enunciato* φ*:*

(3) $\mathcal{A}_D\models\varphi$ *se e solo se* $\mathcal{A}_I\underset{\text{q.o.}}{\models}\varphi$.

DEFINIZIONE. *Se D è un ultrafiltro su I,* $\mathcal{A}_D$ *si chiama l'ultraprodotto degli* $\mathcal{A}_i$. *Se* $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}$ *per ogni* $i\in I$, $\mathcal{A}_D$ *si chiama una ultrapotenza di* $\mathcal{A}$. [Cfr. Keisler 1965 per un riassunto del metodo degli ultraprodotti].

COROLLARIO. Se $\mathcal{A}_D$ è un ultraprodotto di modelli di Σ, $\mathcal{A}_D$ è un modello di Σ.

Dimostrazione: Sia φ un enunciato di Σ. Esso è valido in tutti gli $\mathcal{A}_i$. Dunque $\{i\in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\} = I$. Siccome D è un filtro $I\in D$ e dunque $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi$. Per il teorema di Łoś, $\mathcal{A}_D \models \varphi$.

Si consideri il caso di un'ultrapotenza $\mathcal{A}_D$ di $\mathcal{A}$. Un elemento $\mathbf{a}\in A_I$ può essere considerato come quell'applicazione $\mathbf{a} : I\to A$ che è definita da $i\mapsto a_i$. Per tale ragione si utilizzerà talvolta una notazione funzionale $f : I\to A$ e s'indicheranno con f, g, ecc. gli elementi di A_I o di A_D. Sia $a\in A$ e $f_a : I\to A$ la funzione costante $f_a(i)=a$. L'applicazione $a\to f_a$ è una immersione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}_D$. Se infatti $f_a=f_b$ in $\mathcal{A}_D$, $f_a\sim f_b$ in $\mathcal{A}_I$ e $U=\{i\in I \mid f_a(i)=f_b(i)\}\in D$. Se $a\neq b$, $U=\varnothing$. Ora, $\varnothing\notin D$ poiché D è un filtro e dunque $f_a\neq f_b$ in $\mathcal{A}_D$. In breve, $\mathcal{A}_D$ è una estensione di $\mathcal{A}$.

COROLLARIO. Se $\mathcal{A}_D$ è un'ultrapotenza di $\mathcal{A}$, l'estensione $\mathcal{A}\hookrightarrow\mathcal{A}_D$ è elementare: $\mathcal{A}\preccurlyeq\mathcal{A}_D$.

Dimostrazione: Sia $\varphi(a_1, ..., a_n)$ un enunciato di L_A ove le costanti a_k sono interpretate come f_{a_k} in $\mathcal{A}_D$ e $f_{a_k}(i)$ in $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}$. Per il teorema di Łoś, $\mathcal{A}_D\models\varphi(a_1, ..., a_n)$ se e solo se $\mathcal{A}_I \underset{\text{q.o.}}{\models} \varphi(a_1, ..., a_n)$ se e solo se $U=\{i\in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi(f_{a_1}(i), ..., f_{a_n}(i)\}\in D$. Ma $U=\{i\in I \mid \mathcal{A}\models\varphi(a_1, ..., a_n)\}$ e dunque $U=\varnothing$ o I. Siccome $\varnothing\notin D$, $U\in D$ se e solo se $U\neq\varnothing$ se e solo se $\mathcal{A}\models\varphi(a_1, ..., a_n)$.

Per il teorema di Łoś, si ha dunque a disposizione un metodo uniforme di costruzione di estensioni elementari. A priori questo metodo è molto potente poiché si possono scegliere arbitrariamente sia l'insieme di indici I sia l'ultrafiltro D. Resta però il problema di sapere se si possono ottenere in questo modo estensioni elementari in senso proprio: nulla assicura ancora che l'ultrapotenza $\mathcal{A}_D$ non sia isomorfa ad $\mathcal{A}$.

Siccome esiste un rapporto tra un ultrafiltro D e l'ultraprodotto o l'ultrapotenza $\mathcal{A}_D$, la struttura delle estensioni elementari cosí ottenute dipende da quella di D. Si analizza allora la struttura degli ultrafiltri. Ne esistono due tipi fondamentali. È chiaro, anzitutto, che se $U\subseteq I$, $U\neq\varnothing$ l'insieme $F_U=\{V\subseteq I \mid U\subseteq V\}$ delle estensioni di U è un filtro su I.

DEFINIZIONE. *Un filtro D è detto principale se D è di tipo F_U per $U\subseteq I$.*

PROPOSIZIONE. Un ultrafiltro D su I è principale se e solo se $D=F_{\{x\}}$ per $x\in I$.

Gli ultrafiltri principali sono senza interesse, in quanto conducono a estensioni elementari banali:

TEOREMA. *Sia $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ una famiglia di strutture dello stesso tipo e D un ultrafiltro principale su I. Allora l'ultraprodotto $\mathcal{A}_D$ è isomorfo a una delle $\mathcal{A}_i$. In particolare se $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}$ per ogni i, l'ultrapotenza $\mathcal{A}_D$ è isomorfa a $\mathcal{A}$.*

Affinché il metodo sia fecondo, si debbono dunque considerare ultrafiltri non principali.

DEFINIZIONE. *Un ultrafiltro non principale è detto libero.*

Si tratta di sapere a quale condizione su I esistono degli ultrafiltri liberi.

PROPOSIZIONE. Se I è un insieme finito, tutti i suoi ultrafiltri sono principali.

Si dovrà quindi prendere I infinito.

Notazione: Se I è un insieme infinito si indichi con F_∞ l'insieme delle parti U di I complementari di parti finite. Essendo I infinito, tutti gli elementi U di F_∞ sono infiniti. È banale verificare che F_∞ è un filtro (filtro di Fréchet di I).

PROPOSIZIONE. Se I è un insieme infinito esistono su I degli ultrafiltri liberi. Questi ultimi sono i raffinamenti massimali del filtro F_∞.

Osservazione: Non solo esistono ultrafiltri liberi su I se I è infinito, ma ne esistono anche «tanti». Se I è di cardinale $\alpha \geq \aleph_0$, $\mathcal{P}(I)$ è di cardinale 2^α e l'insieme degli insiemi di parti di I è di cardinale 2^{2^α}. Ci sono dunque al massimo 2^{2^α} filtri su I, a fortiori al massimo 2^{2^α} ultrafiltri, a fortiori al massimo 2^{2^α} ultrafiltri liberi. Ora,

TEOREMA (Tarski). *Se I è di cardinale $\alpha \geq \aleph_0$, esistono 2^{2^α} ultrafiltri liberi su I.*

Affinché il metodo degli ultraprodotti possa fornire delle estensioni elementari in senso proprio occorre che I sia infinito e che l'ultrafiltro D sia libero. Ma occorre anche, per ciò che riguarda $\mathcal{A}$, che $\mathcal{A}$ sia una struttura infinita. Si ha infatti la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE. Se D è un ultrafiltro (libero o principale) e se $\mathcal{A}$ è una struttura finita, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_D$.

Questo risultato non si estende agli ultraprodotti. Dunque, al fine di ottenere estensioni elementari in senso proprio col metodo degli ultraprodotti, è necessario considerare strutture infinite e ultrafiltri liberi. Ma ciò non è ancora *sufficiente*. Da qui si aprono due strategie. La prima consiste nell'esibire, nel caso particolare preso in considerazione, un elemento $\dot{\mathbf{a}} \in \mathcal{A}_D$ tale che $\dot{\mathbf{a}} \notin \mathcal{A}$.

Esempio.

Sia $\mathfrak{N}$ l'insieme $\mathbf{N}$ degli interi dotato della sua struttura naturale. Siano $I = \mathbf{N}$ e $D \supset F_\infty$ un ultrafiltro libero su I. Si consideri l'ultrapotenza $^*\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_D = \mathfrak{N}^{\mathbf{N}}/D$. Un elemento di $^*\mathfrak{N}$ è semplicemente una classe di equivalenza di applicazioni $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, gli elementi di $\mathfrak{N}$ corrispondendo alle applicazioni costanti. Sia $\dot{\mathbf{a}} \in {}^*\mathfrak{N}$ l'elemento rappresentato dalla funzione $f(n) = n$. Sia $p \in \mathbf{N}$ un intero qualunque. $V_p = \{n \in \mathbf{N} \mid f(n) > p\} = \{n \in \mathbf{N} \mid n > p\}$ ha complemento finito: $V_p \in F_\infty \subset D$, cioè $V_p \in D$. Dunque per ogni $p \in \mathbf{N}$, $\dot{\mathbf{a}} > p$ è valido in $^*\mathfrak{N}$: $\dot{\mathbf{a}}$ è un elemento di $^*\mathfrak{N}$ che non appartiene a $\mathfrak{N}$. L'estensione elementare $\mathfrak{N} \prec {}^*\mathfrak{N}$ è non-banale: $^*\mathfrak{N}$ è un modello non standard dell'aritmetica.

Tale esempio è qui di importanza capitale per il fatto che, essendo $\dot{\mathbf{a}}$ un intero «infinito», il suo inverso, nell'ultrapotenza $\mathbf{R}_D$, sarà *infinitesimale*.

La strategia di cui si è appena visto un esempio è «viziata» però dal fatto di non essere generalizzabile. Se si vuole disporre di teoremi generali di esistenza di ultrapotenze che siano estensioni elementari in senso proprio, è dunque necessario raffinare l'analisi della «dialettica» fra $\mathcal{A}$ e D. Questa strategia alternativa che in particolare consente di ottenere risultati sulla cardinalità delle ultrapotenze è troppo tecnica per essere qui abbozzata [cfr. per esempio Bell e Slomson 1969].

Oltre a consentire la costruzione esplicita delle estensioni elementari, il metodo degli ultraprodotti fornisce anche una tecnica molto potente di dimostrazione nella teoria dei modelli. Permette per esempio: 1) di ri-dimostrare in modo semantico certi teoremi di base; 2) di dimostrare facilmente che certe proprietà non sono del primo ordine; 3) di disporre di nuovi criteri di completezza.

Riguardo al punto 1), si dimostrano i due teoremi fondamentali di completezza e di compattezza già presentati sopra (p. 472).

TEOREMA DI COMPATTEZZA (Tarski-Scott-Morel). *Un insieme di enunciati Σ ammette un modello se e solo se ogni sottoinsieme finito Δ di Σ ammette un modello.*

Dimostrazione: Sia $I=\mathcal{F}(\Sigma)$ l'insieme delle parti finite Δ di Σ. Per ogni $\Delta \in I$ esiste per ipotesi un modello $\mathcal{A}_\Delta$ di Δ. Sia $\Delta \in I$ e $\Delta^*=\{\Delta' \in I \mid \Delta \subseteq \Delta'\}$.

L'insieme F delle Δ^* è un insieme di sottoinsiemi non vuoti di I che possiede la proprietà che l'intersezione di un numero finito di suoi elementi è sempre non vuoto. Se infatti $\Delta_1^*, \ldots, \Delta_n^* \in F$, $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \in \Delta_1^* \cap \ldots \cap \Delta_n^*$. Ciò implica che F è estendibile a un filtro e dunque a un ultrafiltro D. Sia $\mathcal{A}_D$ l'ultraprodotto $\left(\prod_{\Delta \in I} \mathcal{A}_\Delta\right)/D$.

Sia ora φ un enunciato di Σ. $\{\varphi\}=\Delta_0 \in I$ e $\mathcal{A}_{\Delta_0} \models \varphi$. Dunque $\mathcal{A}_\Delta \models \varphi$ se $\Delta_0 \subseteq \Delta$. Siccome $\Delta_0^*=\{\Delta \in I \mid \Delta_0 \subseteq \Delta\} \subseteq \{\Delta \in I \mid \mathcal{A}_\Delta \models \varphi\}$ e $\Delta_0^* \in D$, $\{\Delta \in I \mid \mathcal{A}_\Delta \models \varphi\} \in D$. Si ha dunque $\mathcal{A}_D \models \varphi$. $\mathcal{A}_D$ è un modello di ogni enunciato di Σ cioè un modello di Σ.

COROLLARIO (teorema di completezza). *Un insieme di enunciati Σ è consistente se e solo se ammette un modello.*

Dimostrazione: Se Σ è consistente, ogni sottoinsieme finito di Σ è consistente e ammette dunque un modello. Per il teorema di Tarski-Scott-Morel Σ ammette un modello.

Quanto al punto 2) si dimostra che le proprietà di un corpo di essere di caratteristica 0 oppure di essere algebricamente chiuso, *non sono* delle proprietà del primo ordine.

PROPOSIZIONE. La teoria dei corpi di caratteristica 0 non è finitamente assiomatizzabile.

Dimostrazione: Si supponga che il fatto di essere di caratteristica o sia un enunciato σ_0 (al primo ordine) della teoria dei corpi. Per ogni numero primo p sia K_p un corpo di caratteristica p. Sia D un ultrafiltro libero sull'insieme (infinito) dei numeri primi P e sia K l'ultraprodotto $K = \prod_{p\in P} K_p/D$. Per il teorema di Łoś K è un corpo. K non può essere di caratteristica $p \in P$. Infatti la proprietà σ_p d'esser di caratteristica p essendo del primo ordine, $U_p = \{q \in P \mid K_q \models \sigma_p\} = \{p\} \notin D$ poiché D è libero. Dunque K è di caratteristica o. Si ha allora $K \models \sigma_0$ e, per il teorema di Łoś, $\prod_{p\in P} K_p \underset{\text{q.o.}}{\models} \sigma_0$. Contraddizione: σ_0 non è del primo ordine.

Nello stesso spirito si può dimostrare la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE. La teoria dei corpi algebricamente chiusi (di caratteristica o oppure p) non è finitamente assiomatizzabile.

Riguardo al punto 3), si indicherà soltanto come si possano caratterizzare col metodo degli ultraprodotti sia l'equivalenza elementare sia l'estensione elementare e dedurne nuovi criteri. Per esempio:

TEOREMA [Keisler 1962]. *Due strutture dello stesso tipo sono elementarmente equivalenti se e solo se hanno ultrapotenze isomorfe.*

Osservazione: La dimostrazione di Keisler fa intervenire l'ipotesi generalizzata del continuo. Kochen ha mostrato come farne a meno utilizzando il metodo detto degli ultralimiti (catene infinite di estensioni elementari ottenute da ultrapotenze).

2.5. Strutture di ordine superiore e metodo degli allargamenti di Robinson.

Il metodo degli ultraprodotti (si veda l'esempio di p. 487) permette di ottenere *esplicitamente* delle estensioni elementari in senso proprio ***R** di **R** che 1) contengono degli infinitesimi; 2) sono al primo ordine «indiscernibili» da **R**.

Ciò «risolve» a livello aritmetico-algebrico il paradosso dell'infinitesimale leibniziano. Ma non è ancora sufficiente a fondarne una «dottrina», che meriti il nome di analisi non standard.

Infatti nell'estensione ***R** di **R** si è tenuto conto solo dell'universo degli *Urelemente*. Se $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è per esempio una funzione, nulla assicura a priori che sia prolungabile in una funzione $^*f: {^*\mathbf{R}} \to {^*\mathbf{R}}$ che svolga in rapporto a ***R** il ruolo che svolge f in rapporto a **R**. Ma l'analisi si basa proprio sullo studio di entità come le funzioni e degli «spazi» che esse costituiscono. Per parlare di analisi non standard occorre dunque disporre di modelli non standard di **R** a cui *tutte* le entità dell'analisi siano automaticamente estendibili con un metodo uniforme. Ciò impone di arricchire considerevolmente il dominio degli *Urelemente* e di prendere in considerazione – senza pertanto «uscire» dal primo ordine – quelle che si chiamano strutture di ordine superiore.

Si parte dall'insieme $U_0 = \mathbf{R}$ che verrà detto la base della struttura di ordine superiore e si costruisce progressivamente un insieme $\mathcal{U}$ che svolge il ruolo di universo del discorso per **R**, cioè per l'analisi (reale). Sia $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbf{R}$ e sia $U_1=\mathbf{R}\cup\mathcal{P}(\mathbf{R})=U_0\cup\mathcal{P}(U_0)$. Si definisce in modo analogo U_2 con $U_2=U_1\cup\mathcal{P}(U_1)$, ecc. Si pone: $\mathcal{U}=\bigcup_{i=0}^{\infty}U_i$.

Tutte le entità dell'analisi sono elementi di $\mathcal{U}$. Una relazione n-aria su $\mathbf{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ ed è un elemento di $\mathcal{U}$; una funzione $f:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}$ si può identificare, al solito, con una relazione $(n+1)$-aria; una funzione $f:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^p$ è un insieme di p relazioni $(n+1)$-arie, ecc. $\mathcal{U}$ contiene tutte le relazioni definite su $\mathbf{R}$, tutte le funzioni, tutte le relazioni di relazioni, tutte le famiglie di funzioni indicizzate da un insieme di $\mathcal{U}$, ecc. In breve, $\mathcal{U}$ è proprio un «universo del discorso» per l'analisi (reale).

Sia $\mathcal{L}=L_{\mathcal{U}}$ il linguaggio ottenuto a partire dal linguaggio L dei predicati del primo ordine per aggiunta dei simboli della teoria degli insiemi e di simboli di costanti per tutti gli elementi di $\mathcal{U}$. Si è cosí introdotta una differenza importante: non si utilizza piú L per parlare di un insieme omogeneo A di *Urelemente* ma per parlare dell'insieme eterogeneo di *Urelemente* $\mathcal{U}$ che costituiscono l'«universo» delle costruzioni insiemiste basate su A. In particolare, è ora consentito quantificare sui sottoinsiemi di A, sui sottoinsiemi dell'insieme dei sottoinsiemi di A (per esempio filtri), sulle applicazioni, sulle funzioni, ecc.

Benché ciò faccia uscire dal primo ordine relativamente ad A, si resta nel primo ordine relativamente a $\mathcal{U}$. Il prezzo che si deve pagare per tale estensione è doppio.

Le quantificazioni diventano, come si dice usualmente, limitate, cioè relative a un dominio specificato. Si consideri per esempio l'enunciato che esprime che $\mathbf{R}$ è archimedeo. Non è possibile formalizzarlo $\forall x(x\neq 0\Rightarrow\forall y\exists n(|nx|>|y|))$ poiché cosí facendo si quantificherebbe su tutti gli elementi di $\mathcal{U}$ e non su $\mathbf{R}$ e su $\mathbf{N}$. Al contrario, è possibile formalizzarlo con

$$\forall x(x\in\mathbf{R}\wedge x\neq 0\Rightarrow\forall y(y\in\mathbf{R}\Rightarrow\exists n(n\in\mathbf{N}\Rightarrow|nx|>|y|)))$$

ossia, abbreviando, con

$$\forall x\in\mathbf{R}(x\neq 0\Rightarrow\forall y\in\mathbf{R}\,\exists n\in\mathbf{N}(|nx|>|y|))$$

dove tutte le quantificazioni sono limitate.

Ma si deve tenere conto anche della eterogeneità di $\mathcal{U}$. Poiché i simboli di variabile di $\mathcal{L}$ si riferiscono a tutti gli elementi di $\mathcal{U}$, se non si prendessero delle precauzioni si otterrebbero enunciati che «mescolano» le entità (per esempio «La funzione seno è un numero primo» o «Tutti i filtri dividono $\sqrt{2}$») e per ciò stesso non interpretabili. Per evitare tali confusioni, è ormai abituale stabilire una gerarchia dei tipi di entità e stratificare gli enunciati relativamente a questa gerarchia. Si porrà che gli elementi dell'insieme A base di $\mathcal{U}$ sono di tipo 0, che una relazione binaria i cui argomenti sono di tipo 0 è di tipo (0, 0), ecc. (definizione ricorsiva), e si autorizzeranno soltanto le formule «stratificate» per le quali ci sia coerenza dei tipi.

Una volta prese queste precauzioni sintattiche si può mostrare che *tutti i risultati della teoria del primo ordine restano validi per* $\mathcal{U}$.

È quindi lecito applicarli. Sia $\Sigma=\mathrm{Th}\,\mathcal{U}$ l'insieme degli enunciati di L

validi in $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}$ è un modello di Σ che viene detto modello o universo standard, si dice modello non standard ogni estensione elementare e in senso proprio $^*\mathfrak{U}$ di $\mathfrak{U}$.

Per maggiore comodità si continuerà ad indicare con $^*\mathbf{R}$ un universo non standard dell'analisi.

Ma ciò che è essenziale è il fatto che, ormai, ogni entità ϑ costruita a partire da $\mathbf{R}$ ammette per costruzione (automaticamente e in modo uniforme) una estensione non standard $^*\vartheta$ dello stesso tipo, costruita a partire da $^*\mathbf{R}$ e che possiede le stesse proprietà del primo ordine di ϑ. Per esempio $^*\mathbf{R}$ è archimedeo relativamente a $^*\mathbf{N}$ poiché l'enunciato

$$\forall x \in \mathbf{R}(x \neq 0 \Rightarrow \forall y \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{N}(|nx| > |y|))$$

essendo valido in $\mathbf{R}$ è valido automaticamente in $^*\mathbf{R}$:

$$\forall x \in {}^*\mathbf{R}(x \neq 0 \Rightarrow \forall y \in {}^*\mathbf{R}\ \exists n \in {}^*\mathbf{N}(|nx| > |y|)).$$

Ma la manipolazione degli «universi» non standard esige ancora una precauzione essenziale. Infatti l'insieme $\mathfrak{U}$ è gerarchizzato dalla relazione insiemista di appartenenza $\in$. La stessa cosa avviene per $^*\mathfrak{U}$. Ma in $^*\mathfrak{U}$ esiste anche la relazione $^*\!\in$ che è l'estensione della relazione ristretta a $\mathfrak{U}$. Ora, le relazioni $^*\!\in$ e $\in$ di $^*\mathfrak{U}$ non sono identiche. $\mathfrak{U}$ è, per costruzione, «completo» relativamente a $\in$. Ma $^*\mathfrak{U}$ non è «completo» relativamente a $^*\!\in$. Si preciserà ora questa difficoltà che per molto tempo ha costituito un ostacolo a una dottrina coerente degli «universi» non standard.

Sia $\mathfrak{U}$ l'universo di base A e $\mathfrak{U} < {}^*\mathfrak{U}$ una estensione elementare (in senso proprio). Gli elementi di $^*\mathfrak{U}$ si dividono in due classi. Da una parte quelli di $\mathfrak{U}$ (considerato come immerso in $^*\mathfrak{U}$), detti entità standard. Dall'altra quelli di $^*\mathfrak{U} - \mathfrak{U}$, detti entità non standard. Se $\vartheta \in \mathfrak{U}$ è una entità standard di $^*\mathfrak{U}$, si continuerà spesso con l'indicarla con ϑ (invece che con $^*\vartheta$).

Sia ϑ un elemento di $\mathfrak{U}$. Essendo $\mathfrak{U}$ una gerarchia insiemista, ϑ è in generale un insieme (eccetto quando ϑ è un *Urelement* della base A). Ora, come entità standard di $^*\mathfrak{U}$, ϑ è anche un insieme. Ma ciò non implica che ϑ sia un insieme standard (cioè che ϑ sia composto solo da elementi standard). Si supponga per esempio che $A = \mathbf{R}$, e che ϑ sia un intervallo $[a, b]$. L'entità standard ϑ di $^*\mathfrak{U}$ che possiede la stessa denotazione $[a, b]$ è composta non soltanto dai numeri reali standard $x \in [a, b]$, ma anche dai numeri reali non standard $x + \xi$ ove $x \in]a, b[$ e ξ è infinitesimale. Piú in generale: se gli elementi di $\vartheta \in \mathfrak{U}$ sono definiti in $\mathfrak{U}$ dalla formula $a \in \vartheta$, questa formula, interpretata in $^*\mathfrak{U}$, definisce gli elementi standard $a \,^*\!\in \vartheta$ di $\vartheta \in {}^*\mathfrak{U}$. Ma gli elementi di $^*\vartheta \in {}^*\mathfrak{U}$ sono definiti in $^*\mathfrak{U}$ dalla formula $a \in {}^*\vartheta$. Ora, quest'ultima *non è* identica alla formula $a \,^*\!\in \vartheta$. Sussiste il seguente risultato banale:

PROPOSIZIONE. Se ϑ è finita, allora $^*\vartheta = \vartheta$ (come insieme).

Osservazione: Per non fare un uso continuo degli aggettivi standard e non standard, si adotterà la regola seguente: le entità e le proprietà standard saranno citate senza tale qualificativo. Le entità e le proprietà non standard corrispondenti saranno precedute da un $*$. Un insieme $*$-finito di ${}^*\mathfrak{U}$ sarà per esempio un insieme di cardinale $\alpha \in {}^*\mathbf{N}$, ecc.

Il problema è dunque che se $\mathfrak{U}$ è «l'universo di discorso» di base A, ${}^*\mathfrak{U}$ non è in generale l'universo del discorso di base ${}^*A$: relativamente a $\in$, ${}^*\mathfrak{U}$ è «incompleto», esso non contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi che lo costituiscono. Si dice che ${}^*\mathfrak{U}$ è un modello non regolare nel senso di Henkin [1949; 1950].

Si consideri per esempio una estensione elementare stretta $\mathbf{R} \prec {}^*\mathbf{R}$. Come sottoinsieme (nell'«universo» globale della teoria degli insiemi preso in considerazione) di ${}^*\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ è perfettamente definito. Come entità standard di ${}^*\mathfrak{U}$, $\mathbf{R}$, denotato dallo stesso simbolo della base $\mathbf{R}$ di $\mathfrak{U}$, è l'insieme dei numeri $x+\xi$ ove $x \in \mathbf{R}$ (standard) e ξ è o nullo o infinitesimale. È possibile perciò dire che $\mathbf{R}$ (relativamente a ${}^*\mathfrak{U}$) è l'insieme dei numeri reali finiti. Ma questo insieme non ha nessun equivalente nella base $\mathbf{R}$ di $\mathfrak{U}$. Se infatti ne avesse uno, poiché l'inclusione stretta $\mathbf{R} \subset {}^*\mathbf{R}$ in ${}^*\mathfrak{U}$ «ridiscende» in $\mathfrak{U}$, si otterrebbe una inclusione stretta $F \subset \mathbf{R}$, ove F sarebbe l'insieme dei numeri «finiti» di $\mathbf{R}$ (standard): è chiaro che una tale espressione è senza significato. Ciò conduce alla seguente definizione fondamentale: sia X un $*$-insieme (cioè un elemento di ${}^*\mathfrak{U}$). Si indichi con $\hat{X}$ l'insieme dei suoi $*$-elementi. $\hat{X} = \{x \,{}^*\!\in X\}$. Tra i sottoinsiemi di $\hat{X}$ ci sono i suoi $*$-sottoinsiemi, cioè gli $\hat{Y}$ per $Y \,{}^*\!\subseteq X$ con $Y \in {}^*\mathfrak{U}$. Ma in generale ce ne sono anche degli altri.

DEFINIZIONE. *Sia $X \in {}^*\mathfrak{U}$ un $*$-insieme e $\hat{X}$ l'insieme dei suoi $*$-elementi. Un sottoinsieme di X è detto interno se è della forma $\hat{Y}$ per un $*$-sottoinsieme Y di X; altrimenti è detto esterno. Poiché tutte le entità sono assimilabili a sottoinsiemi, si parlerà dunque di entità interne e esterne di ${}^*\mathfrak{U}$.*

L'opposizione interno/esterno è decisiva nella misura in cui assicura la consistenza del metodo dei modelli non standard di ordine superiore attraverso la regola di quantificazione seguente:

PRINCIPIO DI QUANTIFICAZIONE NEGLI UNIVERSI NON STANDARD. Gli enunciati della teoria Σ di $\mathfrak{U}$ sono validi, una volta trasferiti a ${}^*\mathfrak{U}$, soltanto se la quantificazione vi è ristretta alle entità interne.

Osservazione: Tale principio non è, per essere precisi, un «principio» poiché, per costruzione, esso è sempre assicurato. È piuttosto una regola euristica *concettualmente* necessaria per evitare paradossi. Infatti permettersi di quantificare non solo sugli *Urelemente* della base ma anche su una gerarchia di insiemi e di sottoinsiemi fa correre il rischio di *confondere* in ${}^*\mathfrak{U}$ le relazioni $x \in X$ e $x \,{}^*\!\in X$ cosí come anche $X \subseteq Y$ e $X \,{}^*\!\subseteq Y$.

Esempio.

Sia ${}^*\mathbf{N}$ un modello non standard di $\mathbf{N}$. Sia φ l'enunciato del primo ordine di L che esprime che ogni sottoinsieme di $\mathbf{N}$ ha un primo elemento. Questo enunciato è valido in $^*\mathbf{N}$. Ora, sia $^*\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}$ l'insieme degli interi «infiniti». È chiaro che esso non potrebbe comportare primi elementi poiché se α è «infinito», $\alpha-1$ è ancora «infinito». Apparentemente, una contraddizione. Ma essa si trasforma in teorema se si fa uso della regola euristica su accennata.

TEOREMA. *Il sottoinsieme $^*\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}$ di $^*\mathbf{N}$ è un sottoinsieme esterno.*

Si dànno alcuni criteri per riconoscere entità interne:

a) Se X è standard, allora X è interno.
b) Se X è un insieme standard di cui tutti gli $*$-elementi sono standard (in particolare se X è finito, per la proposizione di p. 491), tutti i suoi $*$-sottoinsiemi sono interni.

Ma il criterio piú efficace afferma che se X è già interno tutti i suoi sottoinsiemi definibili in $\mathfrak{L}$ sono interni. Piú specificatamente:

c) TEOREMA (criterio di internalità). *Sia X un $*$-insieme di $^*\mathfrak{U}$ e $Y\subseteq\hat{X}$. Y è interno se e solo se esistono una formula $\varphi(y_1, ..., y_n, x)$ di $\mathfrak{L}$ e degli $a_1,...,a_n\in{}^*\mathfrak{U}$ tali che $Y=\{x\in X\,|\,\varphi(a_1, ..., a_n, x)\}$.*

Infine, per concludere questa esposizione della teoria elementare dei modelli, si indica un tipo particolare di modelli non standard (individuati da Robinson) di cui si farà uso nel seguito.

Si consideri su $\mathbf{R}$ la relazione binaria $R(x, y)\equiv x<y$. R possiede la proprietà seguente: se essa ammette una «soluzione» per un numero finito di elementi del suo dominio, essa ammette una «soluzione comune», cioè: se $x_1, ..., x_n\in\mathbf{R}$, esiste un $y\in\mathbf{R}$ tale che $x_1<y, ..., x_n<y$. Affermare che esistono in una estensione $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ numeri «infiniti» significa proprio dire che esiste una «soluzione» di R «comune» a tutti gli elementi del suo dominio standard. Onde la generalizzazione:

DEFINIZIONE. *Sia R una relazione binaria di $\mathfrak{U}$ di dominio D_R. Si dice che R è concorrente se $\forall x_1, ..., \forall x_n\in D_R\,\exists y(R(x_1,y)\wedge...\wedge R(x_n,y))$ è sempre valido in $\mathfrak{U}$ (qualunque sia n).*

DEFINIZIONE. *Un modello non standard $^*\mathfrak{U}$ di $\mathfrak{U}$ è un allargamento se per ogni relazione concorrente R di $\mathfrak{U}$, l'enunciato $\exists y\,{}^*\!\in D_{*R}\forall x\in D_R(R(x,y))$ è valido in $^*\mathfrak{U}$.*

TEOREMA. *Ogni universo $\mathfrak{U}$ ammette degli allargamenti.* (È possibile mostrare che si possono ottenere degli allargamenti $^*\mathfrak{U}$ come ultrapotenze di $\mathfrak{U}$ imponendo delle ulteriori condizioni sull'ultrafiltro D).

Dimostrazione (Robinson): Si introduce per ogni relazione concorrente R di $\mathfrak{U}$ un nuovo simbolo α_R (destinato a denotare la «soluzione» comune di $\forall x\in D_R R(x,y)$). Sia $\wedge_R$ l'insieme di enunciati $\{R(a, \alpha_R)\}_{a\in D_R}$ e sia $\Sigma_C = \Sigma\bigcup\bigcup_{R\in C}\wedge_R$ (ove C è l'insieme delle relazioni concorrenti di $\mathfrak{U}$ e Σ la teoria di $\mathcal{U}$ relativamente a $\mathfrak{L}$). Un allargamento di $\mathcal{U}$ è per definizione un modello di Σ_C. Per i teoremi di completezza e di compattezza, è sufficiente mostrare che ogni sottoinsieme di Σ_C della forma $\Sigma_f = \Sigma \cup \wedge_f$ (dove $\wedge_f$ è un sottoinsieme finito di $\bigcup_{R \in C} \wedge_R$) ammette un modello. Si consideri un tale $\wedge_f$. È un insieme finito di enunciati $R_i(a_j, \alpha_i)$ (dove $\alpha_i = \alpha_{R_i}$). Ma per ogni i, essendo R_i concorrente ed essendo gli a_j in numero finito, α_i è riferibile a un elemento di $\mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ è dunque un modello Σ_f: Σ_C ammette un modello.

Gli allargamenti sono dei modelli non standard «abbastanza grossi» da far sí che l'opposizione interno/esterno sia nello stesso tempo operatoria e uniforme. Esistono in particolare «abbastanza» entità non standard come è mostrato dai due risultati seguenti:

PROPOSIZIONE. Sia $^*\mathcal{U}$ un allargamento di $\mathcal{U}$ e $X \in \mathcal{U}$ un insieme infinito. $^*X$ ammette un $*$-elemento non standard.

PROPOSIZIONE. Sia $^*\mathcal{U}$ un allargamento di $\mathcal{U}$ e $X \in \mathcal{U}$ un insieme infinito. $\hat{X}$ ammette un sottoinsieme esterno.

Il fatto che in un allargamento *tutte* le relazioni concorrenti ammettano una «soluzione globale» è una proprietà molto forte. In particolare, se X è un insieme infinito di $\mathcal{U}$, la relazione $x \in y$ (ove y è un sottoinsieme finito di X) è concorrente. Dunque esiste in $^*\mathcal{U}$ un insieme $*$-finito che contiene X: ogni entità infinita di $\mathcal{U}$ può essere immersa in una entità $*$-finita (dello stesso tipo) di $^*\mathcal{U}$. Ciò è cruciale per comprendere la «relativizzazione» dell'opposizione finito/infinito.

3. *Analisi non standard.*

A questo punto si dispone di abbastanza strumenti per mostrare come l'analisi possa essere riformulata nello stile di Leibniz. Non si tratta però in questa sede di dare un'esposizione teorica dei risultati ottenuti con questo metodo; ci si limiterà dunque ad illustrare con qualche esempio come l'uso di modelli non standard [per le basi dell'analisi non standard cfr. Robinson 1961 e 1966; Machover e Hirshfeld 1969; Luxemburg 1973] di **R** consenta:

a) di semplificare considerevolmente i concetti di base dell'analisi classica e della topologia generale;
b) di chiarire concettualmente certe intuizioni paradossali;
c) di «riportare» l'infinito al finito;
d) di fornire una rappresentazione per alcune costruzioni molto astratte.

Tali diversi risultati si collocano a livelli di difficoltà eterogenei. Nei casi semplici saranno ripresentati i risultati classici. In quelli piú complessi verranno supposti acquisiti.

Ma prima di arrivare ad essi, ecco un risultato *negativo*.

3.1. La limitazione interna dell'analisi non standard.

A priori, poiché un modello non standard (d'ora in poi abbreviato n. s.) $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ è un'estensione elementare (in senso proprio) e poiché la sua teoria fa intervenire il simbolo supplementare $*$, si potrebbe credere che l'analisi n. s. sia una teoria «piú forte» dell'analisi standard. Nulla di tutto ciò. Sia $\mathfrak{S}$ il sistema formale che codifica la pratica dell'analisi standard: $\mathfrak{S}$ è essenzialmente il linguaggio della teoria degli insiemi (teoria dei tipi) dotato dei suoi assiomi, dello schema di induzione e dell'assioma della scelta. Sia $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ il sistema formale che codifica la pratica dell'analisi n. s.: $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ è esteso in modo essenziale grazie all'aggiunta del nuovo simbolo $*$, del rafforzamento dello schema d'induzione e dell'assioma della scelta, dell'assioma affermante che i modelli n. s. sono estensioni elementari, di quello affermante che tali estensioni sono estensioni proprie, di quello, infine, che definisce gli allargamenti. Kreisel [1969] ha mostrato il seguente risultato di limitazione:

TEOREMA. *L'estensione $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ di $\mathfrak{S}$ è inessenziale (conservativa): ogni formula di $\mathfrak{S}$ derivabile da $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ è derivabile da $\mathfrak{S}$.*

Questo risultato, se mostra che l'analisi n. s. si riduce a una «riformulazione» dell'analisi s., non limita tuttavia per nulla la sua portata euristica e strategica. È proprio a questa che sono dedicate le pagine seguenti.

3.2. $^*\mathbf{N}$ e $^*\mathbf{R}$.

Sia $^*\mathbf{N}$ un modello n. s. di $\mathbf{N}$. ($\mathbf{N} \prec {}^*\mathbf{N}$ può essere ottenuto come ultrapotenza dall'esempio di p. 487). Per il teorema di p. 493 il sottoinsieme $^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ degli interi «infiniti» (infiniti relativamente a $\mathbf{N}$) di $^*\mathbf{N}$ è esterno. La stessa cosa accade per $\mathbf{N}$.

Poiché $\mathbf{N}$ e $^*\mathbf{N}$ hanno la stessa teoria, per distinguerli si ricorre al loro tipo d'ordine. Siccome l'enunciato «Non esistono interi fra n e $n+1$» è del primo ordine, è valido in $^*\mathbf{N}$. $\mathbf{N}$ è dunque un segmento iniziale di $^*\mathbf{N}$ (tutti gli elementi di $^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ sono maggiori di tutti gli elementi di $\mathbf{N}$, sono cioè infiniti).

Si consideri su $^*\mathbf{N}$ la relazione $a \sim b$ se e solo se $|a-b| \in \mathbf{N}$. È una relazione di equivalenza che scompone $^*\mathbf{N}$ in classi di equivalenza (la classe individuata da 0 è $\mathbf{N}$ tutto intero). Sia G_a la classe di equivalenza di $a \in {}^*\mathbf{N}$. G_a è un intervallo. Se infatti $a \sim b$ (cioè $b \in G_a$) e $a < c < b$, allora $a \sim c \sim b$ (cioè $c \in G_a$). Se $a \in {}^*\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$, G_a ha il tipo d'ordine $\omega^* + \omega$ di $\mathbf{Z}$. L'ordinale α di $^*\mathbf{N}$ è dunque di tipo $\alpha = \omega + (\omega^* + \omega)\vartheta$, dove ϑ è un ordinale dipendente da $^*\mathbf{N}$. (Come d'uso, si è indicato con ω il tipo d'ordine – l'ordinale – di $\mathbf{N}$; ω^* è il tipo dell'ordine inverso).

Sussiste il teorema:

TEOREMA (Henkin, Kemeny). *ϑ è denso senza primo ed ultimo elemento.*

Per avere una descrizione piú fine di $^*\mathbf{N}$, si può considerare una ultrapotenza $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}/D$ (dove D è un ultrafiltro libero su $I = \mathbf{N}$) e studiare come i numeri di tipo $*f(a)$ (in cui $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ è una funzione standard) si distribuiscono in $*\mathbf{N}$. L'idea è di raggruppare fra di loro gli elementi di $\mathbf{N}_\infty = *\mathbf{N} \setminus \mathbf{N}$ che sono reciprocamente accessibili [cfr. Puritz 1972] mediante le $*f$ e di leggere nella struttura di $\mathbf{N}_\infty$ certe proprietà dell'ultrafiltro D associato a $*\mathbf{N}$. Ma non si approfondirà qui tale punto.

Si consideri ora la struttura di un modello n. s. $*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$. Si osservi anzitutto che $\mathbf{R}$ può essere ottenuto a partire da un modello n. s. di $\mathbf{Q}$. Sia infatti $*\mathbf{Q}$ un allargamento di $\mathbf{Q}$. In primo luogo nella estensione $*\mathbf{Q}$ di $\mathbf{Q}$ tutte le «sezioni» di $\mathbf{Q}$ – cioè le coppie (D_1, D_2) di sottoinsiemi di $\mathbf{Q}$ tali che $D_1 < D_2$ – sono «riempite»: se $D_1 < D_2$ è una sezione, esiste un $y \in *\mathbf{Q}$ tale che $D_1 < y < D_2$. Infatti la relazione «$x \in D_1 \cup D_2$ e esiste un y tale che $x < y$ se $x \in D_1$ o $y < x$ se $x \in D_2$» è banalmente concorrente. Ammette dunque una «soluzione globale» in $*\mathbf{Q}$ poiché $*\mathbf{Q}$ è un allargamento.

Sia allora $*\mathbf{Q}_f$ l'insieme degli elementi finiti di $*\mathbf{Q}$ cioè l'insieme degli $x \in *\mathbf{Q}$ tali che esiste un $y \in \mathbf{Q}$ con $|x| < |y|$. $*\mathbf{Q}_f$ è un sottoanello del corpo $*\mathbf{Q}$. Non è un corpo poiché esso contiene degli infinitesimi i cui inversi sono «infiniti». Sia μ l'insieme degli infinitesimi di $*\mathbf{Q}$. È facile verificare che μ è un ideale di $*\mathbf{Q}_f$ (la differenza di due infinitesimi è infinitesimale e il prodotto di un infinitesimo per un numero finito è infinitesimale).

PROPOSIZIONE. $\mathbf{R} \simeq *\mathbf{Q}_f/\mu$.

Dimostrazione: Per costruzione, $*\mathbf{Q}_f/\mu$ «completa» $\mathbf{Q}$, cioè «riempie» le sue lacune. D'altra parte $\mathbf{Q}$ è denso in $*\mathbf{Q}_f/\mu$. $\mathbf{R}$ è il solo corpo ordinato completo nel quale $\mathbf{Q}$ sia denso.

Sia dato ora un modello n. s. $*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$. $*\mathbf{R}$ è un corpo ordinato che non è archimedeo relativamente a $\mathbf{N}$ ma che è archimedeo relativamente a $*\mathbf{N}$. Come già si è detto, è equivalente affermare che $\mathbf{R}$ è archimedeo e che $\mathbf{R}$ non contiene infinitesimi. $*\mathbf{R}$ contiene dunque infinitesimi relativamente a $\mathbf{R}$, ma non relativamente a $*\mathbf{R}$.

Sia $*\mathbf{R}_f$ l'anello degli elementi finiti di $*\mathbf{R}$ e μ l'ideale di $*\mathbf{R}_f$ costituito dagli infinitesimi di $*\mathbf{R}$. Si ha allora la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE. $*\mathbf{R}_f/\mu \simeq \mathbf{R}$.

Dimostrazione: Sia dato un $x \in *\mathbf{R}_f$ e si indichi con $\tilde{x} = x + \mu$ la sua classe di equivalenza. $\tilde{x}$ contiene uno e uno solo reale standard $\mathrm{st}(x)$.

a) Se $\mathrm{st}(x)$ esiste è unico. Siano dati infatti $y, z \in \mathbf{R} \cap \tilde{x}$ e si supponga $y \neq z$. Allora $|y - z| \notin \mu$, cioè y e z non sono equivalenti. Contraddizione. $y = z$.

b) $\mathrm{st}(x)$ esiste. Si consideri infatti $a \in \tilde{x}$. Sia a standard e allora si conclude. Sia a non standard e si divida $\mathbf{R}$ in due classi D_1 e D_2: $D_1 = \{y \in \mathbf{R} \mid y < a\}$ e $D_2 = \{y \in \mathbf{R} \mid y > a\}$. D_2 è non-vuota poiché x è finito per ipotesi. D_1 è non-vuota poiché se $|a| < m$, $-m \in D_1$. In più $D_1 < D_2$. (D_1, D_2) è dunque una sezione di Dedekind che definisce un numero reale $r \in \mathbf{R}$. Occorre mostrare che $r \in \tilde{x}$. Si supponga per esempio che $r = \max D_1$ (la dimostrazione è la stessa per

$r=\min D_2$). Siccome a non è standard, $a-r>0$. Se $a-r\notin\mu$, esiste un $\delta>0$ tale che $a-r\geq\delta$. In questo caso $a>r+(\delta/2)$ e dunque $r+(\delta/2)\in D_1$ e $r<\max D_1$. Contraddizione. $a-r\in\mu$, cioè $r\in\tilde{a}=\tilde{x}$.

È banale verificare che la biiezione st : $^*\mathbf{R}_f/\mu\to\mathbf{R}$ è un morfismo di corpi.

DEFINIZIONE. *Si chiama parte standard di* $x\in{}^*\mathbf{R}_f$ *e la si indica con* ^0x *il numero reale* st(x).

DEFINIZIONE. *Se* $x\in{}^*\mathbf{R}$, *si chiama monade di* x, *e si indica con* $\mu(x)$, *il traslato* $x+\mu$ *dell'ideale* μ *degli infinitesimi (monade di* o*).*

Osservazione: Si ritrova proprio la struttura di $^*\mathbf{R}$ anticipata a p. 465.

PROPOSIZIONE. I sottoinsiemi $\mathbf{R}, {}^*\mathbf{R}_f, {}^*\mathbf{R}_\infty=\mathbf{R}\setminus{}^*\mathbf{R}_f, \mu(x)$ di $^*\mathbf{R}$ sono tutti esterni.

Dimostrazione: Se $\mathbf{R}$ fosse interno, $\mathbf{N}=\mathbf{R}\cap{}^*\mathbf{N}$ lo sarebbe relativamente a $^*\mathbf{N}$. Ciò è escluso dal teorema *c*) di p. 493. La stessa cosa accade per $^*\mathbf{R}_f$ poiché $\mathbf{N}={}^*\mathbf{R}_f\cap{}^*\mathbf{N}$. Poiché $^*\mathbf{R}_\infty$ è il complementare di $^*\mathbf{R}_f$ è esso stesso interno. Quanto a $\mu(x)$ si supponga che esista un $a\in{}^*\mathbf{R}$ tale che $\mu(a)$ sia interno. Allora $\mu=\mu(a)-a$ sarebbe interno cosí che $^*\mathbf{R}_\infty=\mu^{-1}$.

Si dànno ora alcune indicazioni sulla struttura non piú di $^*\mathbf{R}_f$ ma di $^*\mathbf{R}$. Sia G_x la cosiddetta galassia di un elemento $x\in{}^*\mathbf{R}$, cioè $G_x=\{y\in{}^*\mathbf{R}\mid |x-y|\in\mathbf{R}\}$. La galassia di o, G_0, è l'anello $^*\mathbf{R}_f$. Si può considerare il gruppo additivo ordinato delle galassie $^*\mathbf{R}/G_0$ e inoltre il gruppo additivo ordinato delle monadi $^*\mathbf{R}/\mu$; si indichi con $^*\mathbf{R}^+$ il gruppo moltiplicativo ordinato degli elementi strettamente positivi di $^*\mathbf{R}$. Due elementi $x,y\in{}^*\mathbf{R}^+$ sono detti dello stesso ordine di grandezza se il loro quoziente è finito ma non infinitesimale: $(x/y)\in G_0\setminus\mu$. L'ordine di grandezza è una relazione di equivalenza. Si indichi con $R_a=R(a)$ la classe d'equivalenza di $a\in{}^*\mathbf{R}^+$: ponendo $y=1$, si vede che R_1 è esattamente la parte positiva di $G_0\setminus\mu$. R_1 è un sottogruppo moltiplicativo ordinato di $^*\mathbf{R}^+$. Il gruppo moltiplicativo ordinato quoziente $^*\mathbf{R}^+/R_1$ è detto gruppo di valutazione di $^*\mathbf{R}$. Sussiste il teorema seguente:

TEOREMA (Zakon).

1) $^*\mathbf{R}/G_0\simeq{}^*\mathbf{R}^+/R_1$.
2) $^*\mathbf{R}/G_0$ *e* $^*\mathbf{R}^+/R_1$ *sono divisibili, non archimedei, con ordine denso e totalmente incompleti (vi esistono delle lacune in ogni intervallo aperto).*
3) $^*\mathbf{R}/G_0$ *è d'ordinale* $\vartheta^*+1+\vartheta$ *in cui* ϑ *è l'ordinale che definisce il tipo di ordine* $\alpha=\omega+(\omega^*+\omega)\vartheta$ *di* $^*\mathbf{N}$ (cfr. sopra, p. 495, il teorema di Henkin e di Kemeny).

COROLLARIO. Siano δ, $^*\delta$, δ_G e δ_μ gli ordinali rispettivi di $\mathbf{R}$, $^*\mathbf{R}$, $G_0={}^*\mathbf{R}_f$ e μ.

1) $^*\delta=\delta_G(\vartheta^*+1+\vartheta)\qquad\delta_G=\delta_\mu\delta\qquad\delta_\mu=\delta_G\vartheta+1+\delta_G\vartheta^*$.
2) $^*\mathbf{R}$, μ e $^*\mathbf{R}_f=G_0$ sono totalmente incompleti e non archimedei.

3.3. Elementi di analisi classica.

L'analisi n. s. permette di riformulare in modo intuitivo («geometrico» relativamente alla «fibrazione» di $^*\mathbf{R}$ operata dalle monadi) i concetti e i teoremi dell'analisi classica. Eccone alcuni esempi.

Successioni. Sia $S=(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di numeri reali.

DEFINIZIONI. 1) *Si dice che S è limitata se esiste un $M\in\mathbf{R}$ tale che $|s_n|<M$ per ogni $n\in\mathbf{N}$.* 2) *Si dice che S ammette s come limite* ($\lim s_n=s$) *se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un $N\in\mathbf{N}$ tale che $n>N$ implica $|s_n-s|<\varepsilon$.* 3) *Si dice che $s\in\mathbf{R}$ è un punto limite (o punto di accumulazione) di S se per ogni $\varepsilon>0$ e per ogni $N\in\mathbf{N}$ esiste un $n>N$ tale che $|s_n-s|<\varepsilon$.*

Queste definizioni classiche sono formulate nello stile Cauchy-Weierstrass. Ma una successione S di numeri reali è un'applicazione $S:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$; essa si estende dunque automaticamente a un modello n. s. $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$ in una successione $*$-numerabile $^*S: {}^*\mathbf{N}\to{}^*\mathbf{R}$. Si denoterà ora con ω un intero infinito qualunque di $^*\mathbf{N}_\infty={}^*\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}$.

PROPOSIZIONE. La successione $S=(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è limitata se e solo se s_ω è finito per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$.

Ne è agevole la dimostrazione.

PROPOSIZIONE. $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ se e solo se $s_\omega\simeq s$ per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$ (dove $x\simeq y$ denota «x e y sono infinitamente vicini»).

Dimostrazione: Si supponga $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ e si voglia mostrare che per ogni $\varepsilon>0$ ($\varepsilon\in\mathbf{R}$) e per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$, $|s_\omega-s|<\varepsilon$. $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ si esprime, come si è detto sopra, con l'enunciato:

(1) $\qquad \forall\varepsilon>0\quad \exists N\in\mathbf{N}(n>N\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon)$

Dato $\varepsilon>0$, sia N l'intero standard di cui la (1) afferma l'esistenza. L'enunciato

(2) $\qquad n>N\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon$

è valido in $\mathbf{R}$ e dunque in $^*\mathbf{R}$. Siccome $\omega>N$ per ogni $N\in\mathbf{N}$, $|s_\omega-s|<\varepsilon$.

Viceversa, si supponga $s_\omega\simeq s$ per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$. Siano $\varepsilon>0$ ($\in\mathbf{R}$) e $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$. L'enunciato

(3) $\qquad \forall n(n>\omega\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon)$

è valido in $^*\mathbf{R}$. Esso non è definito in $\mathbf{R}$ a causa della costante ω. Ma l'enunciato

(4) $\qquad \exists w\,\forall n(n>w\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon)$

è definito in **R** e valido in ***R**. È dunque valido in **R** ove può essere riscritto con $\exists N\,\forall n(n>N\Rightarrow|s_n-s|<\varepsilon)$.

Nello stesso spirito, si può dimostrare anche la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE. I punti limite di S sono le parti standard ${}^0s_\omega$ degli s_ω finiti.

Banalizzazione del teorema di Bolzano-Weierstrass. Un importante teorema sulle successioni è quello di Bolzano-Weierstrass. Esso afferma che se una successione è limitata, allora ammette un punto limite. Tale teorema è fondamentale nella misura in cui si nota che è alla base della nozione di compattezza in topologia generale (cfr. oltre, p. 503). La sua dimostrazione nello stile Cauchy-Weierstrass è elementare ma non è affatto banale, non deriva cioè direttamente dalle definizioni.

Se invece si prendono come nuove definizioni le caratterizzazioni n. s. presentate sopra (pp. 498-99), questo teorema diventa banale.

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS. *Se una successione è limitata, essa ammette un punto limite.*

Dimostrazione: Se S è limitata, s_ω è finito per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$. Sia dato un $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$, $s={}^0s_\omega$ è un punto limite di S.

Generalmente molti risultati si «banalizzano» nella analisi n. s. riconducendoli a proprietà puramente insiemistiche delle monadi.

Il criterio di convergenza di Cauchy. Il celebre criterio di convergenza di Cauchy afferma che una successione converge se la differenza dei suoi termini si annulla all'infinito. Eccone una dimostrazione n. s.

TEOREMA. *Una successione* $S=(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *converge se e solo se* $\lim\limits_{n,m\to\infty}(s_n-s_m)=0$.

Dimostrazione: $\lim\limits_{n,m\to\infty}(s_n-s_m)=0$ si riformula in termini n. s. nell'enunciato

$$s_\mu\simeq s_\nu \tag{5}$$

per tutti i $\mu,\nu\in{}^*\mathbf{N}_\infty$. Si supponga che S converga e abbia limite s. $s_\omega\simeq s$ per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$ e dunque la (5) è valida. Viceversa si supponga che essa sia valida. Se si mostra che per ogni $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$, s_ω è finito, allora tutti gli s_ω hanno la stessa parte standard s e S converge verso s. Sia dunque $\omega\in{}^*\mathbf{N}_\infty$ e si supponga s_ω infinito. Si consideri l'insieme $A=\{n\in{}^*\mathbf{N}\,|\,|s_\omega-s_n|<1\}$. A è un insieme interno. Ma $A={}^*\mathbf{N}_\infty$ poiché 1) essendo s_ω infinito ed essendo s_n finito per $n\in\mathbf{N}$, $A\subset{}^*\mathbf{N}_\infty$; 2) se $\rho\in{}^*\mathbf{N}_\infty$, $s_\omega\simeq s_\rho$ per ipotesi e dunque $|s_\omega-s_\rho|<1$. Ora per il teorema di p. 493 ${}^*\mathbf{N}_\infty$ è esterno. Contraddizione. s_ω è sempre finito e S converge verso ${}^0s_\omega$.

Continuità. Sia data una funzione $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. Essa si prolunga automaticamente a una funzione ${}^*f:{}^*\mathbf{R}\to{}^*\mathbf{R}$.

PROPOSIZIONE. f è continua in x_0 se e solo se $x\simeq x_0$ implica ${}^*f(x)\simeq f(x_0)$.

Dimostrazione: Per definizione f è continua in x_0 se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, cioè (nello stile Cauchy-Weierstrass) se l'enunciato

$$(6) \qquad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall x(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

è valido. Se f è continua in x_0, poiché la (6) è valida in **R**, è valida in ***R**. Sia dato un $x\in {}^*\mathbf{R}$ tale che $x\simeq x_0$. $|x-x_0|<\delta$ per ogni $\delta>0$ ($\delta\in\mathbf{R}$) e dunque $|{}^*f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>0$ ($\varepsilon\in\mathbf{R}$) cioè ${}^*f(x)\simeq f(x_0)$.

Viceversa, se per ogni $x\simeq x_0$ ($x\in {}^*\mathbf{R}$) ${}^*f(x)\simeq f(x_0)$, per $\varepsilon>0$ e $h\in\mu$ l'enunciato

$$(7) \qquad \forall x(|x-x_0|<h \Rightarrow |{}^*f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

è valido in ***R**. La (7) non è definita in **R** a causa della costante h. Ma l'enunciato

$$\exists h\,\forall x(|x-x_0|<h \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

è definito in **R** e valido in ***R**. Di conseguenza è valido in **R**.

Osservazione: Questa proposizione permette di «visualizzare» (e dunque di rendere concettualmente intuitiva) la proprietà non intuitiva di continuità. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ è continua se per ogni $x\in\mathbf{R}$ ${}^*f(\mu(x))\subseteq\mu(f(x))$, cioè se ${}^*f$ rispetta la «fibrazione» di ***R** operata dalle monadi (cfr. fig. 9).

Derivabilità. PROPOSIZIONE. f è derivabile in x_0 se tutti i quozienti

$$\frac{{}^*f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

in cui $x\in\mu(x_0)$ hanno la stessa parte standard (indicata con $f'(x_0)$: derivata di f in x_0).

Dimostrazione: f è derivabile in x_0 se il limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (=f'(x_0))$$

esiste. La dimostrazione è analoga a quella della proposizione di p. 498.

PROPOSIZIONE. Se f è derivabile in x_0, essa è continua in x_0.

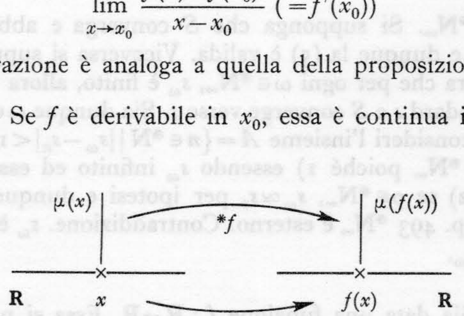

Figura 9.
«Visualizzazione» della continuità.

Dimostrazione: Per ogni $x \simeq x_0$, $x \neq x_0$, ${}^*f(x) \simeq f(x_0)$ poiché ${}^*f(x) - f(x_0) \simeq$ $\simeq f'(x_0)(x-x_0)$.

Osservazione: La derivata è dunque in un certo senso proprio il quoziente df/dx; ma poiché tale quoziente può essere n. s., di fatto viene identificata con la sua parte standard. È contraddittorio imporre che il quoziente di due infinitesimi sia sempre standard. Proprio tale inconsistenza è all'origine della rimozione dell'infinitesimale leibniziano.

Differenziali. A questo punto si può riprendere la caratterizzazione del dx leibniziano come simbolo-indice «dimezzato» che era all'origine del chiarimento logico-concettuale del paradosso dell'infinitesimale. Sia dx il simbolo-indice associato all'insieme μ degli infinitesimi di ${}^*\mathbf{R}$. Siccome $\mu \cap \mathbf{R} = (0)$, dx non può riferirsi che a 0 in $\mathbf{R}$: dx è cosí «dimezzato» relativamente a $\mathbf{R}$. Ma relativamente a ${}^*\mathbf{R}$ è un simbolo-indice consistente analogo a una costante per quel che concerne il simbolo e analogo a una variabile per quel che concerne l'indice.

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile in x_0. Sia $df = {}^*f(x_0 + dx) - f(x_0)$. Poiché i quozienti di infinitesimi df/dx hanno tutti la stessa parte standard, è possibile separare l'aspetto-simbolo e l'aspetto-indice del dx e supporre indifferentemente che dx è o un infinitesimo particolare o un simbolo di variabile per gli elementi di μ.

3.4. Topologia generale.

Alla fine del XIX secolo e all'inizio del XX lo studio di spazi molto differenti, e in particolare degli «spazi» di funzioni, ha condotto ad astrarre e ad assiomatizzare il concetto di topologia o meglio il concetto di intorno. Si dànno qui per noti i necessari riferimenti metrici e topologici (si veda l'articolo «Geometria e topologia» in questa stessa *Enciclopedia*). Sia X uno spazio topologico. Sia $\mathcal{F}(x)$ l'insieme degli intorni di $x \in X$. È facile verificare che $\mathcal{F}(x)$ è un filtro. In generale, tale filtro non ammette un piú piccolo elemento (non è principale). Quando x varia, i filtri $\mathcal{F}(x)$ non sono indipendenti. Se U è un intorno di x, U è infatti un intorno di ogni punto y «abbastanza vicino» a x: per ogni $U \in \mathcal{F}(x)$ esiste un $V \in \mathcal{F}(x)$ tale che $U \in \mathcal{F}(y)$ per ogni $y \in V$.

A partire dalla nozione di topologia molte altre nozioni s'impongono pressoché da sole. Si dirà per esempio che un punto x è isolato se il filtro dei suoi intorni è l'ultrafiltro principale $\mathcal{F}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U\}$. Si dirà che la topologia $\mathcal{T}$ è separata se è sempre possibile «separare» due punti differenti, cioè se per tutti gli $x \neq y$ esistono intorni disgiunti $U \in \mathcal{F}(x)$ e $V \in \mathcal{F}(y)$ di x e y. Si dirà che una successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di punti di X converge verso x (ammette x come limite) se per ogni intorno aperto $U \in \mathcal{F}(x)$ esiste un $N \in \mathbf{N}$ tale che per ogni $n > N$, $x_n \in U$. Si dirà che x è un punto limite di $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se per ogni intorno aperto $U \in \mathcal{F}(x)$ e per ogni $N \in \mathbf{N}$ esiste un $n > N$ tale che $x_n \in U$. Si dirà che un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici è continua se l'immagine reciproca di ogni aperto di Y è un aperto di X, ecc.

Si vedrà come tutte queste nozioni di base cosí come i teoremi caratteristici ai quali dànno luogo siano riformulabili in modo puramente insiemistico nell'analisi n. s.

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e si consideri un allargamento dell'universo di base X. $\mathcal{T}$ è un insieme di sottoinsiemi di X. Sia $^*\mathcal{T}$ la sua estensione n. s.; essendo $^*\mathcal{T}$ una entità standard, i suoi elementi sono interni.

Sia $x \in X$ e $\mathcal{F}_x$ il filtro degli intorni (aperti) di x. La nuova entità che il modello n. s. consente di introdurre e di maneggiare è essenzialmente la monade di x.

DEFINIZIONE. *Sia $x \in X$. La monade $\mu(x)$ di x è l'intersezione degli $^*U$ per $U \in \mathcal{F}_x$: $\mu(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_x} {}^*U$.*

In generale non esistono intorni di x «piú piccoli» (questo è un altro modo di dire che il concetto fondamentale dell'analisi è quello di limite). Ma si vedrà che in $^*X$ esistono «$*$-intorni» piú piccoli di tutti gli intorni di x in X. Ciò permetterà di ragionare «insiemisticamente» riportando le proprietà «infinitesimali» in X a proprietà «finite» in $^*X$.

LEMMA FONDAMENTALE. *Se $^*X$ è un allargamento di $(X, \mathcal{T})$ e se $x \in X$, esiste un $V \in {}^*\mathcal{T}$ tale che $x \in V \subset \mu(x)$.*

Dimostrazione: Si consideri la relazione binaria di dominio $\mathcal{T}$, $R(U, V)$: «$x \in V \subseteq U$». Poiché l'intersezione di un numero finito di aperti contenente x è un aperto contenente x, $R(U, V)$ è concorrente. Ammette dunque una «soluzione globale» $V \in {}^*\mathcal{T}$ tale che $x \in V \subseteq {}^*U$ per *ogni* $U \in \mathcal{T}$, $x \in U$. Siccome $\mu(x) = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ x \in U}} {}^*U$, $x \in V \subset \mu(x)$.

Ecco ora la caratterizzazione degli aperti.

PROPOSIZIONE. U è aperto se e solo se $^*U$ contiene la monade di ciascuno dei suoi punti.

Dimostrazione: Se U è aperto, per ogni $x \in U$, $U \in \mathcal{F}_x$ e dunque $\mu(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_x} {}^*U \subset {}^*U$. Viceversa, sia $x \in {}^*U$. Siccome $\mu(x) \subset {}^*U$, l'enunciato $\exists V \in \mathcal{F}_x (V \subset U)$ è valido in $^*X$. È dunque valido in X. U è un intorno di x, dunque di ciascuno dei suoi punti, dunque aperto.

COROLLARIO. F è chiuso se per ogni $x \notin F$, $\mu(x) \cap {}^*F = \varnothing$.

DEFINIZIONE. *Se A è un sottoinsieme qualunque di X, si dice che un punto $x \in X$ è aderente a A se ogni intorno di x interseca A. Si chiama aderenza di A e si indica con $\bar{A}$ l'insieme dei punti aderenti ad A: essa è la chiusura di A cioè l'intersezione (che è un chiuso) dei chiusi contenenti A.*

Si ha allora la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE. Sia $A \subset X$, $x \in \bar{A}$ se e solo se $\mu(x) \cap {}^*A \neq \varnothing$.

Ecco, sempre a titolo d'esempio, la caratterizzazione della proprietà di separazione.

PROPOSIZIONE. La topologia $\mathcal{T}$ su X è separata se e solo se le monadi di due punti differenti sono sempre disgiunte.

COROLLARIO. Se X è separato, ogni punto $x \in {}^*X$ appartiene al massimo a una monade. Se $x \in \mu({}^0x)$ si dice che ${}^0x$ è la parte standard di x.

Si caratterizza infine per un punto la proprietà di essere isolato. Un punto $x \in X$ è isolato se e solo se $\mu(x)=\{x\}$. Ma Robinson ha dato una caratterizzazione piú forte.

TEOREMA. *x è isolato se e solo se la sua monade $\mu(x)$ è interna.*

Si riesamini ora il tema della compattezza cui ci si era accostati in riferimento alla banalizzazione del teorema di Bolzano-Weierstrass. Gli insiemi compatti sono gli insiemi chiusi che soddisfano la proprietà che ogni successione di punti ammette un punto limite. Intuitivamente, essi sono degli spazi abbastanza «finiti» da non consentire di «collocarvi» un insieme numerabile di punti senza «accumularli» in qualche parte. Vista la loro importanza, la tendenza è stata di caratterizzarli con una proprietà di finitezza della loro topologia (dei loro aperti) e dimostrare a posteriori un analogo del teorema di Bolzano-Weierstrass. L'analisi n. s. banalizza a sua volta la loro definizione e la loro proprietà caratteristica.

DEFINIZIONE. *Uno spazio topologico separato $(X, \mathcal{T})$ è detto compatto se da ogni ricoprimento di X con degli aperti è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.*

DEFINIZIONE. *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Un punto x di ${}^*X$ è detto quasi standard (q. s.) se appartiene alla monade di un punto standard. Si indichi con ${}^*X_{\text{q.s.}}$ l'insieme dei punti quasi standard di ${}^*X$: ${}^*X_{\text{q.s.}}=\bigcup_{x\in X}\mu(x)$.*

TEOREMA (caratterizzazione n. s. della compattezza). *Sia X uno spazio separato, X è compatto se e solo se ${}^*X={}^*X_{\text{q.s.}}$ cioè se e solo se ogni punto non standard è quasi standard.*

Dimostrazione: Si supponga che X sia compatto e che esista un $x \in {}^*X$ che non sia quasi standard. Per ogni $y \in X$ esiste dunque un aperto $y \in U$ tale che $x \notin {}^*U$. Sia $\mathcal{U}=\{U_\nu\}$ l'insieme degli $U \in \mathcal{T}$ tali che $x \notin {}^*U$. $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto, è possibile estrarre un ricoprimento finito $U_1, \dots, U_k$. Ma poiché $U_1 \cup \dots \cup U_k = X$ è un enunciato del primo ordine, ${}^*U_1 \cup \dots \cup {}^*U_k = {}^*X$. Ora $x \notin {}^*U_1 \cup \dots \cup {}^*U_k$. Contraddizione. Ogni punto di ${}^*X$ è quasi standard.

Viceversa si supponga X non compatto. Esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X tale che per ogni sottoricoprimento finito $\mathcal{U}_f$, $\cup\mathcal{U}_f \neq X$. Si consideri la relazione $R(U, y)$: «$U \in \mathcal{U}$, $y \in X$, $y \notin U$». Essa è concorrente. Poiché ${}^*X$ è un allargamento, essa ammette una «soluzione globale» $x \in {}^*X$: per *ogni* $U \in \mathcal{U}$,

$x \notin {}^*U$. *x non è* quasi standard poiché se $y \in X$, esiste un $U \in \mathcal{U}$ tale che $y \in U$ e siccome $x \notin {}^*U$, $x \notin \mu(y)$.

COROLLARIO. Un sottoinsieme K di X è compatto se e solo se ogni punto di ${}^*K$ appartiene alla monade di un punto di K.

La proprietà classica per un compatto di essere chiuso si riconduce a banali proprietà insiemistiche delle monadi.

PROPOSIZIONE. Sia X uno spazio separato, se $K \subset X$ è compatto, K è chiuso.

Dimostrazione: Come si è visto sopra, K è chiuso se e solo se, per ogni $x \notin K$, $\mu(x) \cap {}^*K = \emptyset$. Sia dunque dato un $x \notin K$ e si supponga che esista un $y \in \mu(x) \cap {}^*K$. Siccome K è compatto esiste uno $z \in K$ tale che $y \in \mu(z)$. Si ha dunque $y \in \mu(x) \cap \mu(z)$ cioè $\mu(x) \cap \mu(z) \neq \emptyset$ e $x \notin K$ e $z \in K$ cioè $x \neq z$. Siccome X è separato si dovrebbe ottenere $\mu(x) \cap \mu(z) = \emptyset$. Contraddizione. $\mu(x) \cap$ $\cap {}^*K = \emptyset$ per ogni $x \notin K$ e K è chiuso.

Si banalizzi ora il teorema di Bolzano-Weierstrass. In modo analogo a quanto si è fatto a p. 499, dapprima si mostra:

PROPOSIZIONE. Sia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di punti di X (separato): x è un punto limite di $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ se e solo se esiste un $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$ tale che $x_\omega \in \mu(x)$.

COROLLARIO (teorema di Bolzano-Weierstrass). Se X è compatto ogni successione ammette un punto limite.

Dimostrazione: Sia $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di punti di X e sia $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$ un intero infinito. Siccome X è compatto, x_ω è quasi standard: esiste un $x \in X$ tale che $x_\omega \in \mu(x)$. Per la proposizione esposta sopra, x è un punto limite di $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Osservazione: La caratterizzazione n. s. della compattezza «banalizza» la definizione standard nella misura in cui riduce il livello (nella gerarchia dei tipi) delle entità messe in gioco. Come osservano Machover e Hirshfeld, «se i punti (e gli $*$-punti) sono pensati come oggetti di tipo 0, gli insiemi di punti come oggetti di tipo 1 e le famiglie di tali insiemi come oggetti di tipo 2, allora la definizione standard di compattezza è un enunciato universale-esistenziale che comporta oggetti di tipo 2 e che fa uso della nozione di oggetto finito di tipo 2 ("per ogni ricoprimento aperto di A esiste un sottoricoprimento finito"). D'altra parte, la caratterizzazione non standard è formulata come un enunciato universale-esistenziale che comporta soltanto oggetti di tipo 0. È tutto molto semplice da usare e da visualizzare. La maggior parte delle dimostrazioni che comportano argomenti di compattezza è piú diretta, semplice e naturale quando vengono usati i metodi non standard» [1969, pp. 30-31].

Questi pochi esempi di topologia generale sono sufficienti a mostrare la portata euristica e pedagogica dell'approccio n. s. Prima di ampliare ulteriormente le loro applicazioni, si delineano alcune problematiche a cui si aprono in modo naturale.

Prima di tutto è chiaro come la nozione di monade definita a partire dai filtri di intorni possa estendersi a un filtro qualunque.

Sia $\mathcal{F}$ un filtro su un insieme X composto di entità di un tipo dato σ. Si chiamerà monade di $\mathcal{F}$ e si noterà con $\mu(\mathcal{F})$ la $*$-entità di tipo (σ) definita da $\mu(\mathcal{F}) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} {}^*U$.

A partire da questo punto, è possibile proporsi una teoria generale delle monadi [cfr. Luxemburg 1969]. Ecco alcune indicazioni.

Si generalizza il lemma fondamentale di p. 502: $\mu(\mathcal{F})$ è la riunione dei $V \in {}^*\mathcal{F}$ tali che $V \subset \mu(\mathcal{F})$. Si generalizza la caratterizzazione del teorema delle monadi interne (p. 503):

TEOREMA (Luxemburg). *Sia $\mathcal{F}$ un filtro su X, e sia ${}^*\mathcal{U}$ un allargamento dell'universo $\mathcal{U}$ cui appartiene X. La monade $\mu(\mathcal{F})$ è interna se e solo se $\mathcal{F}$ è principale.*

Dato un insieme Ω qualunque (interno o esterno) di entità di ${}^*\mathcal{U}$ di tipo (σ), sia $\mathcal{F}_\Omega$ il filtro degli insiemi A di entità di tipo σ di $\mathcal{U}$ tali che $\Omega \subseteq {}^*A$. Si chiama monade discreta di Ω e si indica con $\mu_\mathrm{d}(\Omega)$ la monade del filtro $\mathcal{F}_\Omega$. $\mu_\mathrm{d}(\Omega)$ è un modo di rappresentarsi l'allargamento $\mathcal{U} < {}^*\mathcal{U}$.

Si indichi con M_σ l'insieme «completo» delle entità di tipo σ di $\mathcal{U}$. μ_d è un operatore definito sull'insieme $\mathcal{P}({}^*M_\sigma)$ delle parti di ${}^*M_\sigma$.

PROPOSIZIONE. L'operatore μ_d è un operatore di chiusura:

1) $\mu_\mathrm{d}(\varnothing) = \varnothing$ e $\mu_\mathrm{d}({}^*M_\sigma) = {}^*M_\sigma$.
2) Per ogni $\Omega \subseteq {}^*M_\sigma$, $\Omega \subseteq \mu_\mathrm{d}(\Omega)$.
3) $\mu_\mathrm{d}(\mu_\mathrm{d}(\Omega)) = \mu_\mathrm{d}(\Omega)$ (idempotenza).
4) $\mu_\mathrm{d}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \mu_\mathrm{d}(\Omega_1) \cup \mu_\mathrm{d}(\Omega_2)$ (distributività rispetto alle riunioni finite).

Ora, in modo molto generale, se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico l'operatore α definito su $\mathcal{P}(X)$ e che associa a ogni sottoinsieme $A \subseteq X$ la sua aderenza $\bar{A}$ è un operatore di chiusura. Viceversa si mostra che se α è un operatore di chiusura su $\mathcal{P}(X)$, esso definisce una topologia su X attraverso i chiusi $\alpha(A)$.

L'operatore μ_d definisce dunque una topologia su M_σ per la quale $\Omega \subset M_\sigma$ è chiuso se Ω è la monade di un filtro.

DEFINIZIONE. *Si chiama S-topologia la topologia definita da μ_d.*

Poiché la S-topologia non è caratterizzata che dall'allargamento $\mathcal{U} < {}^*\mathcal{U}$, la sua analisi permette di studiare anche quest'ultimo. Ecco, per esempio, la caratterizzazione topologica delle entità standard.

PROPOSIZIONE (Luxemburg). Sia $\Omega \subset {}^*M_\sigma$. Ω è standard se e solo se Ω è nello stesso tempo S-aperto e S-chiuso.

Un'altra problematica che emerge naturalmente è la seguente.

Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico si possono definire le monadi $\mu(x)$ dei punti di X. Viceversa ci si può proporre di dotare X di una struttura «monadica» e di analizzare il rapporto di tale struttura con una struttura topologica.

Tale strategia è pertinente nella misura in cui si constata che nozioni topologiche sofisticate e apparentemente non naturali divengono cosí molto naturali. A tal proposito si ricordano brevemente alcuni risultati di Puritz [1976]. Sia dato un insieme X e, per ogni $x \in X$, si consideri la «monade» $x \in \mu(x)$ che rappresenta a priori i punti di $^*X$ «infinitamente vicini» a $x \in X$. Tale struttura è detta quasi monadica e viene indicata con φ. Sotto quali condizioni assiomatiche una data struttura φ è equivalente a quella di una topologia?

PROPOSIZIONE. Sia φ una struttura quasi monadica su X. Sono equivalenti le condizioni:

1) φ soddisfa l'assioma φ_2: per ogni $x \in X$, $\mu(x)$ è la monade di un filtro, e φ è equivalente a una pretopologia $\mathcal{T}$ su X. Si dirà allora che φ è monadico.

2) φ soddisfa inoltre l'assioma φ_3: per ogni $y \in {}^*X$, $y \in \mu(x)$ implica ${}^*\mu(y) \subseteq \subseteq \mu(x)$, e la pretopologia $\mathcal{T}$ è una topologia.

3) φ soddisfa inoltre l'assioma φ_4: per ogni $y \in {}^*X$, $y \notin \mu(x)$ implica ${}^*\mu(y) \cap \cap \mu(x) = \varnothing$ e la topologia $\mathcal{T}$ è regolare.

4) φ soddisfa inoltre l'assioma φ_5: per ogni $y, z \in {}^*X$, ${}^*\mu(y) \cap {}^*\mu(z) = \varnothing$ implica che esiste un $u \in {}^*X$ tale che $y \in {}^*\mu(u)$ e $z \in {}^*\mu(u)$, e la topologia $\mathcal{T}$ è normale.

Osservazione (definizioni): 1) si dice che una topologia $(X, \mathcal{T})$ è regolare se, per ogni $x \in X$, gli intorni chiusi di x generano il filtro degli intorni $\mathcal{F}_x$; 2) si dice che una topologia $(X, \mathcal{T})$ è normale se la proprietà di separazione è valevole non soltanto per i punti ma per i chiusi in generale: se A e B sono dei chiusi disgiunti di X si può «separarli» con degli aperti $U \supset A$ e $V \supset B$ disgiunti.

Osservazione (sul simbolo ${}^*\mu$): ${}^*\mu$ è una estensione di μ che non si può supporre acquisita a priori poiché le $\mu(x)$ non sono standard. Essa viene definita nel modo seguente. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su X. È naturale dire che $\mathcal{F}$ converge verso $x \in X$ se $\mu(\mathcal{F}) \subseteq \mu(x)$. Sia allora $x \in X$ e sia $\mathcal{D}_x$ l'insieme degli ultrafiltri convergenti verso x. Poiché $\mathcal{D}_x$ è una entità standard, si applica a ${}^*X$. Sia allora $\mathcal{G}$ un $*$-filtro. La sua parte standard ${}^0\mathcal{G}$, insieme degli $U \subseteq X$ tali che ${}^*U \in \mathcal{G}$, è un filtro su X. Se $y \in {}^*X$ allora si pone ${}^*\mu(y) = \bigcup_{\mathcal{G} \in {}^*\mathcal{D}_y} \mu({}^0\mathcal{G})$. Poiché la costruzione delle monadi è stabile per riunione, ${}^*\mu(y)$ è sempre una monade di un filtro. Ma è possibile avere per x standard $\mu(x) \neq {}^*\mu(x)$.

L'interesse di tale approccio è che è possibile indebolire naturalmente la nozione di struttura monadica in quella di struttura quasi monadica che soddisfa l'assioma (piú debole di φ_2) φ_1: per ogni x, $\mu(x)$ è una quasi monade.

DEFINIZIONE. *Sia $x \in {}^*X$, la monade discreta $\mu_d(x)$ è la monade dell'ultrafiltro $\mathcal{U}_x = \{U \subseteq X \mid x \in {}^*U\}$. Si indichi con $\equiv$ l'equivalenza definita su ${}^*X$ da $x \equiv y$ se e solo se $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ (e dunque $\mu_d(x) = \mu_d(y)$). Un sottoinsieme $\Omega \subseteq {}^*X$ è detto saturato o quasi monadico se è saturato per l'equivalenza $\equiv$: per tutti gli $x, y \in {}^*X$, $x \in \Omega$ e $x \equiv y$ implica $y \in \Omega$.*

Sia φ una struttura quasi monadica su X. Si indichi con $\tau_\varphi(x)$ (rispettivamente $\rho_\varphi(x)$) l'insieme dei filtri di X (rispettivamente degli ultrafiltri) convergenti verso x. Si definisce il filtro $\mathfrak{N}_x$ degli «intorni» di x come l'intersezione dei filtri di $\tau_\varphi(x)$ (e di $\rho_\varphi(x)$). Sia $\mathfrak{U}$ l'insieme degli insiemi di ultrafiltri su X. φ definisce un'applicazione $\rho_\varphi : x \mapsto \rho_\varphi(x)$ di X in $\mathfrak{U}$.

PROPOSIZIONE. L'applicazione $\rho_\varphi : X \to \mathfrak{U}$ soddisfa le proprietà: P_0) per ogni $x \in X$ l'ultrafiltro principale $\mathfrak{F}_x = \{U \subseteq X \mid x \in U\}$ appartiene a $\rho_\varphi(x)$; P_1) un filtro $\mathfrak{F}$ su X converge verso x se e solo se l'insieme $\mathfrak{U}_\mathfrak{F}$ degli ultrafiltri che raffinano $\mathfrak{F}$ è incluso in $\rho_\varphi(x)$.

Le strutture di convergenza su X definite da un'applicazione $\rho : X \to \mathfrak{U}$ che soddisfa gli assiomi P_0) e P_1), sono state introdotte (nel quadro della topologia generale standard) da Choquet col nome di pseudotopologie. Si tratta in tal caso di una nozione sofisticata che diviene molto naturale nella sua formulazione n. s.

COROLLARIO. Se φ è una struttura quasi monadica, ρ_φ è una pseudotopologia.

È possibile mostrare anche il risultato piú forte:

TEOREMA (Puritz). *La corrispondenza $\rho : \varphi \to \rho_\varphi$ è una biiezione tra le strutture quasi monadiche su X e le pseudotopologie su X.*

3.5. Continuità e continuità uniforme.

È esemplare anche come le nozioni di base di continuità e di continuità uniforme si riformulino nell'analisi n. s.

Continuità. Sia data una funzione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici. La definizione di Cauchy della continuità può cosí essere generalizzata.

DEFINIZIONE. *f è detta continua in $x \in X$ se, per ogni intorno aperto V di $f(x)$, esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U) \subseteq V$. f è dunque continua su tutto X se l'immagine inversa di ogni aperto di Y è un aperto in X.*

TEOREMA (caratterizzazione n. s. della continuità). *Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici è continua in $x \in X$ se e solo se $^*f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$. f è dunque continua su X se rispetta la «fibrazione» operata dalle monadi.*

Dimostrazione: Si supponga che f sia continua in x. Per ogni intorno aperto V di $f(x)$ esiste un intorno aperto U di x tale che $f(U) \subseteq V$. Dunque $^*f(\mu(x)) \subseteq {}^*f(^*U) \subseteq {}^*V$ e $^*f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x)) = \bigcap_{V \in \mathfrak{F}_{f(x)}} {}^*V$.

Viceversa si supponga $^*f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$. Per il lemma fondamentale di p. 502 esiste un $*$-aperto U di $^*X$ tale che $x \in U \subset \mu(x)$. $^*f(U) \subset \mu(f(x))$ poiché $^*f(\mu(x)) \subset \mu(f(x))$ e dunque $^*f(U) \subset {}^*V$ per ogni intorno aperto V di $f(x)$.

L'enunciato $\exists U(x\in U)\forall V(f(x)\in V)(f(U)\subseteq V)$ è dunque un enunciato del primo ordine definito in X e valido in $^*X$. Di conseguenza esso è valido in X.

Questa caratterizzazione n. s. della continuità consente per esempio di banalizzare il risultato classico per cui l'immagine di un compatto in una applicazione continua è compatta.

PROPOSIZIONE. Sia $f: X\to Y$ un'applicazione continua e sia K un compatto di X. L'immagine $f(K)$ di K è compatta in Y.

Dimostrazione: È sufficiente mostrare che se z è un punto di $^*f(K)$ esiste un punto y di $f(K)$ tale che $z\in\mu(y)$. Ma se $z\in{}^*f(K)$, esiste un $x\in{}^*K$ tale che $z={}^*f(x)$. Siccome K è compatto per ipotesi, esiste un $u\in K$ tale che $x\in\mu(u)$. Poiché f è continua, $^*f(\mu(u))\subseteq\mu(f(u))$ e dunque $^*f(x)=z\in\mu(f(u))$.

Continuità uniforme. Si consideri il caso in cui X e Y siano spazi metrici, con distanza rispettiva $\xi(x, y)$ e $\zeta(x, y)$. L'usuale definizione di continuità suona cosí: $f: X\to Y$ è continua se l'enunciato

$$(1)\qquad \forall x,y\in X\ \forall\varepsilon>0\exists\eta>0(\xi(x,y)<\eta\ \Rightarrow\ \zeta(f(x), f(y))<\varepsilon)$$

è valido. Dunque l'η di cui la (1) afferma l'esistenza dipende da x. Quando esiste una η che non è dipendente da x cioè quando f soddisfa l'enunciato

$$(2)\qquad \forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall x,y\in X(\xi(x,y)<\eta\ \Rightarrow\ \zeta(f(x),f(y))<\varepsilon)$$

si dice che la continuità di f è uniforme. Questa nozione piú restrittiva di continuità è facilmente interpretabile in termini n. s.

TEOREMA (caratterizzazione n. s. della continuità uniforme). *$f: X\to Y$ è uniformemente continua se e solo se per tutti gli $x,y\in{}^*X$ (e non soltanto per tutti gli $x,y\in X$) $x\simeq y$ implica $^*f(x)\simeq{}^*f(y)$.*

Dimostrazione: Si supponga f uniformemente continua e siano $x,y\in{}^*X$ tali che $x\simeq y$. Essendo l'enunciato (2) valido in X, esso è valido in $^*X$ limitando la quantificazione su ε e η agli elementi interni – e dunque standard – di $^*\mathbf{R}$. Siccome $\xi(x,y)<\eta$ per ogni $\eta>0$ poiché $x\simeq y$, $\zeta({}^*f(x), {}^*f(y))<\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>0$ e dunque $^*f(x)\simeq{}^*f(y)$.

Reciprocamente si supponga che, per tutti gli $x, y\in{}^*X$, $x\simeq y$ implichi $^*f(x)\simeq{}^*f(y)$. Sia $\varepsilon>0$. L'enunciato

$$\exists\eta>0\ \forall x,y\in X(\xi(x,y)<\eta\ \Rightarrow\ \zeta(f(x),f(y))<\varepsilon)$$

è valido in $^*X$. Essendo definito in X, è valido in X.

Questa caratterizzazione n. s. della continuità uniforme consente di banalizzare il risultato classico per cui una funzione continua su uno spazio compatto è uniformemente continua.

PROPOSIZIONE. Sia $f: X\to Y$ un'applicazione continua. Se X è compatto, f è uniformemente continua.

Dimostrazione: Siano infatti $x, y \in {}^*X$ tali che $x \simeq y$. Siccome X è compatto, esiste per il teorema di p. 503 un elemento standard $z \in X$ tale che $x \simeq y \simeq z$. Siccome f è continua, per i teoremi della caratterizzazione n. s. della continuità ${}^*f(x) \simeq {}^*f(y) \simeq {}^*f(z)$ e f è uniformemente continua.

Un errore di Cauchy. Sia ora $F = (f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di funzioni $f_n: X \to Y$ tra spazi metrici (di distanze ξ e ζ). Si dice che la successione F converge verso f se, per ogni $x \in X$, la successione $F(x) = \{f_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ di punti di X converge verso $f(x)$, cioè se F soddisfa l'enunciato:

(3) $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ (n > N \Rightarrow \zeta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$.

L'intero N, di cui la (3) afferma l'esistenza, dipende in generale da x. Quando esiste un N che non dipende da x, cioè quando F soddisfa l'enunciato:

(4) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \ \forall x \in X (n > N \Rightarrow \zeta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$

si dice che F converge uniformemente verso f.

Un celebre errore di Cauchy consistette nell'aver creduto di dimostrare che una successione convergente di funzioni continue convergesse a una funzione continua. L'analisi dei controesempi condusse alla restrizione della convergenza alla convergenza uniforme.

La riformulazione n. s. permette di vederne chiaramente il perché.

Dapprima si caratterizza (cfr. il teorema di p. 508) la convergenza uniforme.

PROPOSIZIONE. Una successione $F = (f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente verso f se e solo se per ogni $y \in {}^*X$ e per ogni $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$, ${}^*f(y) \simeq f_\omega(y)$.

Osservazione: La successione $F = (f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge verso f se e solo se per ogni $x \in X$, $f_\omega(x) \simeq f(x)$ (cfr. sopra, p. 498).

TEOREMA. *Se la successione di funzioni continue $F = (f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente verso f, f è continua.*

Dimostrazione: Si deve mostrare che se $x \in X$ e $y \in {}^*X$, $y \simeq x$ implica ${}^*f(y) \simeq f(x)$. Sia dunque $y \in {}^*X$ tale che $y \simeq x$. Siccome f_ω è continua, ${}^*f_\omega(y) \simeq f_\omega(x)$. Siccome F converge a f, $f_\omega(x) \simeq f(x)$. Siccome F converge uniformemente a f, ${}^*f(y) \simeq {}^*f_\omega(y)$ per la proposizione appena riportata. Dunque ${}^*f(y) \simeq {}^*f_\omega(y) \simeq f_\omega(x) \simeq f(x)$. Se F non converge uniformemente, non si ha necessariamente ${}^*f(y) \simeq {}^*f_\omega(y)$ e non si può dunque concludere.

3.6. Localizzazione.

Se $(X, \mathcal{C})$ è uno spazio topologico, la monade $\mu(x)$ di un punto $x \in X$ è un sottoinsieme (in generale esterno) di ${}^*X$ che svolge il ruolo di intorno infinitesimale di x. Essa «cattura» per costruzione le proprietà locali di X in x. Ciò permette di ridurre considerevolmente la complessità della nozione di «locale» che rappresenta uno dei punti cruciali della matematica moderna. Si consideri per esempio una funzione f definita su X. «Localizzare» f in x

vuol dire considerare la sua restrizione a un intorno «infinitesimale» di x in X. Siccome tale nozione è inconsistente in analisi standard, si è stati condotti a definire la «localizzazione» di f in x – che viene chiamata germe di f in x – con modalità molto sofisticate. Sia $\mathfrak{F}$ uno spazio di funzioni su X. Si definisce prima una relazione d'equivalenza (dipendente da x e da $\mathfrak{T}$) su $\mathfrak{F}$: $f, g \in \mathfrak{F}$ sono equivalenti $(f \sim g)$ se esiste un intorno aperto U di x sul quale le restrizioni $f|U$ e $g|U$ di f e g coincidono. Si definisce poi il germe di f in x come la classe d'equivalenza di f.

Ma se si considera un allargamento $^*X$ di X, è naturale definire il germe di f in x come la funzione n. s. $^*f|\mu(x)$. Definiti in tal modo, i germi diventano funzioni nel senso classico del termine, cioè di dominio ben determinato. È facile verificare che esiste una biiezione tra gli insiemi di germi standard e n. s.

Ciò ha permesso, per esempio a Robinson [1969*a*], di dare una dimostrazione n. s. molto economica del teorema della teoria dei germi di funzioni analitiche che generalizza il *Nullstellensatz* di Hilbert (cfr. p. 480).

Una forma del *Nullstellensatz* afferma che per K corpo algebricamente chiuso, se $V_{\mathfrak{J}}$ è la varietà di K^n definita da un ideale $\mathfrak{J} = (f_1, ..., f_p)$ dell'anello di polinomi $K[x_1, ..., x_n]$ e se V_ψ è la varietà di K^n definita dal polinomio $\psi \in K[x_1, ..., x_n]$, l'inclusione di varietà $V_{\mathfrak{J}} \subset V_\psi$ implica che una potenza intera ψ^k di ψ appartenga a $\mathfrak{J}$.

Si consideri l'anello $\mathcal{G}$ dei germi all'origine delle funzioni analitiche $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$. Se φ è un germe di $\mathcal{G}$ (o una famiglia o un ideale) si definisce la sua varietà V_φ come il germe all'origine dell'insieme $f^{-1}(f(0))$ in cui f è un rappresentante qualunque di φ (che, come si è detto, è una classe di equivalenza). Il teorema che Robinson *ri*-dimostra è il seguente:

TEOREMA (*Nullstellensatz* di Rückert). *Siano $\varphi_1, ..., \varphi_p, \psi$ dei germi di $\mathcal{G}$. Sia $\mathfrak{J}$ l'ideale di $\mathcal{G}$ generato da φ_i per $i = 1, ..., p$. L'inclusione di varietà $V_{\mathfrak{J}} \subset V_\psi$ implica che una potenza intera ψ^k di ψ appartenga a $\mathfrak{J}$.*

Nella formulazione n. s. i germi φ_i e ψ divengono funzioni n. s. sulla monade $\mu(0)$ di $\mathbf{C}^n$ e le varietà $V_{\mathfrak{J}}$ e V_ψ dei sottoinsiemi di $\mu(0)$.

Robinson mostra allora che è possibile rimodellare la dimostrazione di questo teorema [cfr. Robinson 1969*b*, pp. 140 sg.] su quella classica del *Nullstellensatz*, che è la seguente. Si supponga che $\mathfrak{J}$ escluda tutte le potenze di ψ. Esiste un ideale $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I}$ *massimale* rispetto a questa proprietà. Si mostra che $\mathfrak{I}$ è un ideale *primo*. Sia K' l'anello di integrità quoziente di $K[x_1, ..., x_n]$ rispetto a $\mathfrak{I}$. Poiché K' è d'integrità, ammette un corpo di frazioni $\tilde{K}$ che è una estensione di K. Il punto essenziale è che l'immagine $(\xi_1, ..., \xi_n)$ nel corpo $\tilde{K}$ di $(x_1, ..., x_n)$ è un punto generico di $\mathfrak{I}$, nel senso che per ogni $f \in K[x_1, ..., x_n]$, $f \in \mathfrak{I}$ equivale a $f(\xi_1, ..., \xi_n) = 0$. In particolare $f_i(\xi_1, ..., \xi_n) = 0$ per $i = 1, ..., p$. Ma $\psi(\xi_1, ..., \xi_n) \neq 0$. L'inclusione $V_{\mathfrak{J}} \subset V_\psi$ non è dunque valida in $\tilde{K}^n$. Essa è a fortiori non valida nella chiusura algebrica di $\tilde{K}$. La $\mathfrak{M}$-completezza della teoria dei corpi algebricamente chiusi implica che essa non è valida in K.

Per dimostrare nello stesso modo il *Nullstellensatz* di Rückert, occorre interpretare la nozione di punto generico nel caso dei germi generici di funzioni analitiche. Si ha allora il teorema seguente:

TEOREMA (Robinson). *Sia $\mathfrak{J}$ un ideale primo di $\mathcal{G}$. Esiste un punto* $(\xi_1, ..., \xi_n)$ *della monade* $\mu(0)$ *di* $\mathbf{C}^n$ *tale che per ogni germe* $\varphi \in \mathcal{G}$, $\varphi \in \mathfrak{J}$ *equivale a* $\varphi(\xi_1, ..., \xi_n) = 0$.

3.7. La relativizzazione dell'opposizione finito/infinito.

Già piú volte si è detto che uno dei principali interessi dell'analisi n. s. è stato quello di «riportare» l'infinito al finito. Si daranno ora alcuni esempi di questa «dialettica» cosí chiaramente anticipata da Leibniz. Tutto ciò è di notevole importanza epistemologica. Molti dei profondi risultati dell'analisi moderna consistono nel generalizzare al caso infinito un certo numero di proprietà classiche del caso finito. L'analisi n. s. mostra che in generale esistono casi $*$-finiti che sono «eccellenti approssimazioni» dei casi infiniti: perciò, come diceva Leibniz, «le regole del finito funzionano nell'infinito» e ciò in linea di principio. Lo schema generale di tali chiarimenti concettuali dei casi infiniti è del tipo schematizzato nella figura 10. Si delineano alcuni esempi.

Misura dei numeri reali. Se X è un insieme finito, la misura di un sottoinsieme A di X è evidente: è sufficiente dividere il numero di elementi di A per il numero di elementi di X. Quando X è infinito, come $\mathbf{R}$, il problema è molto piú delicato. Esso conduce alla teoria della misura. Ora se si considera la misura classica dx su $\mathbf{R}$ (misura di Lebesgue), ci si scontra con un certo numero di «paradossi» semantici (e non logici). Per esempio la misura dell'insieme $\mathbf{Q}$ dei razionali è nulla benché $\mathbf{Q}$ sia denso in $\mathbf{R}$. A fortiori la probabilità di trovare un numero reale dato scegliendo un numero reale a caso è nulla laddove spontaneamente (semanticamente) si è portati a pensarla non come nulla ma come infinitesimale.

Appare dunque naturale domandarsi se non sia possibile costruire una misura n. s. ν su $\mathbf{R}$ tale che 1) la misura di un numero sia un infinitesimo fissato; 2) la misura di un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ si ottenga – come nel caso finito – sommando le misure dei suoi elementi; 3) la parte standard di ν sia la misura dx.

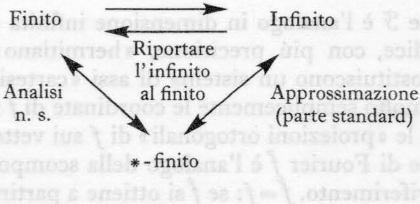

Figura 10.

Le regole del finito funzionano nell'infinito.

Tale questione è stata risolta da Bernstein e Wattenberg [1969]. Qui ci si limita a ricordare che in un allargamento ogni insieme infinito ammette una estensione $*$-finita. L'idea è quella di considerare, in un allargamento $^*\mathbf{R}$ di $\mathbf{R}$, una estensione $*$-finita $\mathcal{R}$ di $\mathbf{R}$ e di definire la misura ν come nel caso finito. Perché la parte standard di ν sia la misura di Lebesgue, s'imporrà a $\mathcal{R}$ una condizione di ripartizione uniforme.

Teoria di Fourier. Sia T il cerchio dei numeri reali modulo 2π. Una funzione $f: T \to \mathbf{C}$ è una funzione reale a valori complessi periodica di periodo 2π. Tra queste funzioni ne esistono di privilegiate, le funzioni trigonometriche e^{inx} $(n \in \mathbf{Z})$. La teoria di Fourier (analisi armonica) consiste nell'approssimare le funzioni $f: T \to \mathbf{C}$ con una sovrapposizione «di armoniche» e^{inx}. I passaggi sono i seguenti.

Per $n \in \mathbf{Z}$ si definisce il coefficiente di Fourier $\hat{f}(n)$ di rango n di f con l'integrale

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Si ottiene un'applicazione $\hat{f}: \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ che si chiama trasformata di Fourier di f.

Si definisce la serie di Fourier $\tilde{f}$ di f come la serie

$$\tilde{f} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Si mostra che nello spazio $\mathcal{F}$ delle funzioni considerate (in realtà, spazio di classi di equivalenza di funzioni uguali «quasi ovunque»), il numero

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f\bar{g}\, dx$$

è un prodotto scalare per cui il sistema delle «armoniche» $h_n = e^{inx}$ è un sistema ortonormato completo. Ciò significa:

1) per ogni $n \in \mathbf{Z}$, h_n ha norma 1: $\langle h_n, h_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{inx} e^{-inx}\, dx = 1$;

2) per $n \neq m$, le h_n sono ortogonali: $\langle h_n, h_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = 0$;

3) ogni funzione $f \in \mathcal{F}$ è una combinazione lineare $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{inx}$ $(a_n \in \mathbf{C})$: $\tilde{f} = f$.

Ciò significa che $\mathcal{F}$ è l'analogo in dimensione infinita di uno spazio «euclideo» (o come si dice, con piú precisione, «hermitiano») $\mathbf{C}^n$ di dimensione finita in cui le h_n costituiscono un sistema di assi «cartesiani». I coefficienti di Fourier $\hat{f}(n)$ sono molto semplicemente le coordinate di f rispetto a tale sistema di riferimento, cioè le «proiezioni ortogonali» di f sui vettori unitari h_n: $(\hat{f}(n) = \langle f, h_n \rangle)$ e la serie di Fourier $\tilde{f}$ è l'analogo della scomposizione classica di un vettore in un dato riferimento. $\tilde{f} = f$: se $\hat{f}$ si ottiene a partire da f, reciprocamente f si riottiene a partire da $\hat{f}$ (formula di inversione).

Sullo spazio $\hat{\mathfrak{F}}$ delle funzioni $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ si definisce anche un prodotto scalare con $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n)\bar{\hat{g}}(n)$. Si dimostra allora la formula di Parseval, che afferma che i prodotti scalari $\langle f, g \rangle$ sono gli analoghi dei prodotti scalari in dimensione finita: $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n)\bar{\hat{g}}(n)$.

Questi risultati classici non sono banali, ma lo diventano nel caso finito. Per $p \in \mathbf{N}$, si consideri lo spazio

$$T_p = \left\{ 0, \frac{2\pi}{p}, \ldots, \frac{2\pi(p-1)}{p} \right\}.$$

Sia $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ l'insieme degli interi modulo p. Si traduce allora nel modo seguente il discorso di prima:

$$x \in T \to \frac{2\pi l}{p} \in T_p$$

$$n \in \mathbf{Z} \to k \in \mathbf{Z}_p$$

$$e^{inx} = h_n(x) \to e^{(2i\pi/p)\,kl} = h_k\left(\frac{2\pi l}{p}\right)$$

$$(f : T \to \mathbf{C}) \to (f : T_p \to \mathbf{C})$$

$$\hat{f}(n) \to \hat{f}(k) = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} f\left(\frac{2\pi l}{p}\right) e^{-(2i\pi/p)\,kl}$$

$$f(x) \to f\left(\frac{2\pi l}{p}\right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}_p} \hat{f}(k)\, e^{(2i\pi/p)\,kl}$$

$$\langle f, g \rangle \to \langle f, g \rangle = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} f\left(\frac{2\pi l}{p}\right) \bar{g}\left(\frac{2\pi l}{p}\right)$$

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \to \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \sum_{k \in \mathbf{Z}_p} \hat{f}(k)\, \bar{\hat{g}}(k)$$

Secondo Luxemburg [1972] è allora possibile ritrovare la teoria standard di Fourier approssimandola con un caso $*$-finito la cui teoria deriva direttamente dal caso (banale) finito. Infatti: se T_p è una «pessima» approssimazione di T, $^*T_\omega$ (in cui $^*T$ è un allargamento di T e $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$ un intero n. s. infinito) è al contrario una «ottima» approssimazione di T. Infatti se ω è «abbastanza grande» – cioè se ogni intero standard divide ω – $^*T_\omega$ ammette T come parte standard. Sia $f \in \mathfrak{F}$, e si indichi con $^*f_\omega$ la restrizione di $^*f$ a $^*T_\omega$. Se si applica alle $^*f_\omega$ la teoria finita e se si prendono le parti standard, si ritrova la teoria classica.

Analisi spettrale. Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n, per esempio su $\mathbf{C}$, e sia T un operatore lineare su E, cioè un'applicazione lineare $T : E \to E$.

Se $(e_1, ..., e_n)$ è una base di E (cioè un sistema massimale di vettori linearmente indipendenti) e se $T(e_i)$ è di coordinate t_i^j relativamente a tal base, la matrice $n \times n$ $(t_i^j) = A_T$ caratterizza T. Se infatti $x \in T$ è di coordinate (x^i), $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$, $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i T(e_i)$ poiché T è lineare, $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} t_i^j e_j$: $T(x)$ è di coordinate $T(x)^j = \sum_{i=1}^{n} x^i t_i^j$.

L'analisi spettrale classica di T (o di A_T) consiste nell'esprimere T come una somma di operatori lineari di omotetia definiti su sottospazi di E. Piú precisamente, si cercano i vettori $x \in E$ tali che esiste un $\lambda \in \mathbf{C}$ che soddisfa l'espressione $T(x) = \lambda x$ (il trasformato di x per T è omotetico di x). Se accade questo si dice che λ è un valore proprio o autovalore di T e che x è un vettore proprio o autovettore di T. Dire che λ è un valore proprio significa che il nucleo dell'operatore $(T - \lambda I)$ (dove I è l'operatore identico su E) non è ridotto a (0) o ancora che $T - \lambda I$ non è invertibile (cioè non è un automorfismo lineare di E). Per ciò è necessario e sufficiente che il determinante $D(\lambda)$ della matrice, $n \times n$, $A_T - \lambda I$ (dove I è la matrice unità) sia nullo.

$D(\lambda) = 0$, equazione di grado n in λ a coefficienti complessi, è detta equazione caratteristica di T. Poiché $\mathbf{C}$ è algebricamente chiuso, essa ammette n radici $\lambda_1, ..., \lambda_n$ distinte o coincidenti. Nel caso generico le λ_i sono distinte: a ogni λ_i corrisponde allora, salvo omotetie, un solo vettore proprio: esiste una «retta» E_i di E sulla quale T si riduce all'omotetia λ_i. Se $T_i = T|E_i$, allora T è la «somma» dei T_i.

Nel caso in cui essa ammetta radici coincidenti (caso non generico) si mostra (teorema di Jordan) che la decomposizione spettrale di T ha ancora un senso. Si chiama spettro di T l'insieme delle λ_i.

Osservazione: Si suppongano le λ_i distinte e si prenda per base di E la base – dipendente da T – composta di vettori propri h_i corrispondenti ai valori propri λ_i. Con questa base, la matrice A_T di T diventa diagonale:

$$A_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

L'analisi spettrale è dunque la ricerca di una base (vettori propri) «adattata» a T nella quale A_T diventi la piú semplice possibile.

Lo sviluppo dell'accoppiamento fra algebra e analisi, ma soprattutto quello della meccanica quantistica, conduce a generalizzare l'analisi spettrale a operatori definiti su spazi vettoriali di dimensione infinita (numerabile). Tra questi spazi si sono privilegiati quelli che generalizzano la struttura dei $\mathbf{C}^n$ (cioè che soddisfano le proprietà elencate sopra alle pp. 512-13): sono i cosiddetti spazi di Hilbert. Sono spazi H di dimensione infinita su $\mathbf{C}$, dotati di un prodotto scalare $\langle f, g \rangle$ (e dunque di una norma $\|f\| = \langle f, f \rangle$ e di una metrica $d(f, g) = \|f - g\|$) topologicamente completi rispetto alla metrica e che possiedono una base completa di vettori unitari ortogonali (cfr. del resto l'articolo «Calcolo» nel vol. II, pp. 444-45, di questa stessa *Enciclopedia*). Essi sono stati introdotti da Hilbert per risolvere (tra l'altro) un problema di esistenza di minimo che era stato utilizzato implicitamente e senza dimostrazione da Riemann: dati uno spazio metrico E di dimensione infinita, un elemento f di E e un sottospazio lineare F di E, esiste un elemento g di F la cui distanza da f sia minima, o ancora la distanza d di f da F, $d = \min_{g \in F} d(f,g)$ è raggiunta effettivamente da un elemento g di F? Se E è uno spazio di Hilbert l'esistenza di g è immediata: è sufficiente prendere per g il «piede della perpendicolare» abbassata da f su F (teorema della proiezione ortogonale).

Si è dunque giunti a estendere l'analisi spettrale dalla dimensione finita agli operatori in spazi di Hilbert. Appaiono a questo punto parecchie complicazioni. Per esempio:

a) I sottospazi lineari di H non sono necessariamente chiusi e un operatore lineare non è necessariamente continuo.

b) Occorre distinguere tra i valori propri λ di T tali che esiste un $x \in H$ che soddisfa $T(x) = \lambda x$ e gli elementi dello spettro di T, insieme dei λ tali che $T - \lambda I$ non è invertibile. Che $T - \lambda I$ non sia invertibile infatti non implica piú necessariamente che il nucleo di $T - \lambda I$ contenga un vettore non nullo.

c) Lo spettro di T può possedere parti continue.

Seguendo Robinson [1966, cap. VII] si indicherà come la relativizzazione dell'opposizione finito/infinito in analisi n. s. permette di «riportare al finito» l'analisi spettrale di operatori lineari «non troppo patologici», cioè compatti e autoaggiunti. Si consideri, preliminarmente, un allargamento $*H$ di H. Sia T un operatore lineare. Si considerino i numeri N (eventualmente infiniti in senso standard) che soddisfano $\|T(x)\| \leq N\|x\|$ per ogni $x \in H$. L'estremo inferiore degli N si chiama norma di T, indicata con $\|T\|$. Essa può essere infinita (in senso standard).

DEFINIZIONE. *Si dice che T è limitato se $\|T\|$ è finita.*

Se T è limitato, T è continuo.

PROPOSIZIONE. T è limitato se e solo se $*T$ trasforma ogni punto finito di $*H$ in un punto finito, cioè se l'insieme $*H_f$ dei punti finiti di $*H$ è stabile per $*T$.

Dimostrazione (Robinson): Se T è limitato, allora $\|*T(x)\| \leq \|T\|\,\|x\|$ è valido per ogni x di $*H$. Se $\|x\|$ è finita, $\|*T(x)\|$ è finita. Viceversa si supponga che $*H_f$ sia stabile per $*T$ e che T non sia limitato. Esiste una successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di punti di H di norma finita (per esempio 1) tale che la successione $(T(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ non è limitata. Come si è visto a p. 498, esiste un intero n. s. infinito $\omega \in *\mathbf{N}_\infty$ tale che $\|*T(x_\omega)\|$ sia infinita: $*T(x_\omega) \notin *H_f$. Ora siccome $\|x_\omega\| = 1$, $x_\omega \in *H_f$ e dunque $*T(x_\omega) \in *H_f$. Contraddizione. T è limitato.

Sussiste anche la proposizione seguente:

PROPOSIZIONE. T è limitato se e solo se la monade $\mu(o)$ degli infinitesimi di $^*H$ è $^*T$-stabile.

DEFINIZIONE. *Si dice che T è compatto o completamente continuo se, per ogni sottoinsieme limitato B di H, $\overline{T(B)}$ è compatto.*

Si può allora dimostrare quest'altra proposizione:

PROPOSIZIONE. T è compatto se e solo se trasforma i punti finiti di $^*H$ in punti quasi standard (cioè se trasforma $^*H_f$ in $^*H_{q.s.}$).

COROLLARIO. Se T è compatto, è limitato.

DEFINIZIONE. *Si dice che T è autoaggiunto se, per tutti gli $x, y \in H$, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$. Ciò implica che $\langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}$ è reale.*

Si consideri dunque un operatore compatto e autoaggiunto T. Per analizzare T si considererà essenzialmente un'approssimazione $*$-finita di H e ad essa si restringerà $^*T$; si applicherà poi a tale restrizione l'analisi spettrale classica (caso finito) per ritornare infine a T. I passaggi – nei tratti essenziali – sono i seguenti. Sia $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una base ortonormale di H. $(e_n)_{n\in{}^*\mathbf{N}}$ è una base ortonormale di $^*H$. Sia $\omega \in {}^*\mathbf{N}_\infty$ un intero infinito fissato e H_ω il sottospazio di $^*H$ di base $(e_1, \ldots, e_\omega)$. H_ω è di dimensione $*$-finita. È dunque possibile trasferirvi la teoria classica.

Sia $P_\omega : {}^*H \to H_\omega$ il proiettore di $^*H$ sul suo sottospazio H_ω che associa al punto $x = \sum_{n\in{}^*\mathbf{N}} x_n e_n$ di $^*H$, il punto $x = \sum_{n=1}^{\omega} x_n e_n$ di H_ω. P_ω è interno e di norma 1. Sia $T_\omega = P_\omega {}^*T P_\omega$ il trasformato di $^*T$ mediante P_ω. $\|T_\omega\| \leq \|T\|$ poiché $\|P_\omega\| = 1$. T_ω è autoaggiunto poiché T e P_ω lo sono. Esso è un operatore interno su $^*H$.

PROPOSIZIONE. T_ω è compatto (cioè trasforma $^*H_f$ in $^*H_{q.s.}$).

Poiché T_ω invia H_ω in H_ω, è possibile considerare la sua restrizione T' a H_ω. T' è un'approssimazione di T definita su uno spazio $*$-finito. Trasferendo al caso n. s. la teoria classica degli operatori autoaggiunti, si può concludere che esistono dei valori propri $\lambda_1, \ldots, \lambda_\omega$ distinti o coincidenti (che si possono supporre di valore assoluto crescente) e dei vettori propri $v_1, \ldots, v_\omega$ (che si possono supporre di norma 1) che soddisfano la $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ cioè

$$\begin{cases} \langle v_i, v_i\rangle = \|v_i\| = 1 & i = 1, \ldots, \omega \\ \langle v_i, v_j\rangle = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ciò significa che i (v_i) costituiscono una base ortonormata di H_ω diagonalizzante T' (questo è possibile per il fatto che T' è autoaggiunto, cioè «simmetrico»).

$T'v_i = \lambda_i v_i$ implica $|\lambda_i| \leq \|T'\| \leq \|T\|$ e siccome T è compatto e dunque limitato, i valori propri λ_i sono *finiti*.

Robinson [1966] dimostra allora i due seguenti risultati elementari.

PROPOSIZIONE. Se $\lambda_i \notin \mu$ (dove μ è la monade degli infinitesimi di $\mathbf{R}$), il vettore proprio v_i è quasi standard.

PROPOSIZIONE. Se $\lambda_i \notin \mu$, la dimensione dell'autospazio H_i per λ_i (H_i è il sottospazio generato dai vettori propri v_j corrispondenti a λ_i) è finita.

Lo spettro di T' si scompone dunque in due parti, una parte infinitesimale e una parte non-infinitesimale che corrisponde alla situazione classica. Se si ordinano i valori propri λ_i in una successione strettamente crescente (senza ripetizioni) $\nu_1, \ldots, \nu_\delta$ ($\delta \leq \omega$) di valori propri distinti e quindi i rispettivi autospazi $H'_1, \ldots, H'_\delta$ e i rispettivi proiettori $P'_1, \ldots, P'_\delta : H_\omega \rightarrow H'_1, \ldots, H'_\delta$, si ha per trasferimento del teorema classico di decomposizione spettrale:

a) $H_\omega = \bigoplus_{l=1}^{l=\delta} H'_l$

b) $I = \sum_{l=1}^{l=\delta} P'_l$

c) $T' = \sum_{l=1}^{l=\delta} \nu_l P'_l$

Occorre ora «ritornare» da T' (definito su H_ω approssimazioni di H) a T (definito su H). Sia $x = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n e_n$ un punto di H. La successione $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ si prolunga a una successione $(x_n)_{n \in {}^*\mathbf{N}}$ che definisce un punto ${}^*x = \sum_{n \in {}^*\mathbf{N}} x_n e_n$ di ${}^*H$. La proiezione $P_\omega({}^*x) = \sum_{n=1}^{\omega} x_n e_n$ appartiene a H_ω e alla monade $\mu(x)$ di x. Poiché T_ω è «compatto», $T'(P_\omega({}^*x))$ è q. s. Sia ${}^0T'$ la sua parte standard. In tal modo si definisce un operatore su H.

TEOREMA. ${}^0T' = T$.

Dimostrazione: Si deve mostrare ${}^0(T'P_\omega({}^*x)) = T(x)$. Ma $T'P_\omega({}^*x) = P_\omega {}^*TP_\omega({}^*x)$ e $P_\omega({}^*x) \simeq x$. Dunque ${}^*TP_\omega({}^*x) \simeq {}^*T(x) = T(x)$ e $P_\omega {}^*TP_\omega({}^*x) \simeq P_\omega T(x) = T(x)$.

È quindi lecito «ritornare» da T' a T prendendo le parti standard. Se λ_i è un valore proprio non infinitesimale, ${}^0\lambda_i$ (che esiste poiché λ_i è finito) è valore proprio di T e ${}^0v_i$ (che esiste poiché v_i è q. s.) è vettore proprio di T di valore proprio ${}^0\lambda_i$. Se $\nu_1, \ldots, \nu_\delta$ sono i valori propri senza ripetizione, se W è l'insieme degli indici 1, ..., δ che corrispondono ai valori propri non infinitesimali, ${}^0H'_l$ la parte standard di H'_l, H_0 l'ortogonale in H della somma $\bigoplus_{l \in W} {}^0H'_l$, e P_0 (rispettivamente P_l) il proiettore di H su H_0 (rispettivamente ${}^0H'_l$), si ottiene la decomposizione spettrale.

TEOREMA (Robinson). 1) $H = H_0 \oplus \bigoplus_{l \in W} {}^0H'_l$

2) $I = P_0 + \sum_{l \in W} P_l$

3) $T = \sum_{l \in W} {}^0\nu_l P_l$

Si conclude questa riconsiderazione della teoria degli operatori, accennando alla risoluzione che Robinson ha dato del problema di Halmos e Smith.

TEOREMA (Robinson). *Sia T un operatore limitato su H tale che un polinomio in T sia compatto. Allora T lascia invariante almeno un sottospazio lineare chiuso di H non banale (cioè differente da* (0) *e da H).*

Tale teorema è un esempio importante di dimostrazione di una congettura con metodi n. s. [cfr. Robinson 1966, pp. 195-200].

Teoria di Galois. Sia K un corpo e L un'estensione algebrica, separabile e normale (cioè di Galois) di K. Ciò significa 1) che tutti gli elementi di L sono algebrici su K cioè sono soluzioni di equazioni a coefficienti in K, 2) che se un polinomio irriducibile (cioè non scomponibile in modo non banale nel prodotto di due polinomi) $P \in K[x]$ ha una radice in L, esso si scompone su L in prodotto di fattori del primo grado. Se il grado di L su K (cioè la sua dimensione come spazio vettoriale su K) è finito, il teorema centrale della teoria di Galois afferma:

TEOREMA DI GALOIS. *Il gruppo $G(L/K)$ degli automorfismi del corpo L, che lasciano invariati gli elementi di K, classifica le estensioni intermedie $K \subset F \subset L$: c'è una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi normali di $G(L/K)$ e i corpi intermedi F. Ad F si associa il sottogruppo degli elementi $\vartheta \in G(L/K)$ che lasciano invariati gli elementi di F e a un sottogruppo H di $G(L/K)$ si associa il corpo degli invarianti comuni a tutti i $\vartheta \in H$. Ad L corrisponde il sottogruppo banale $\{1\}$ e a K l'intero gruppo $G(L/K)$.*

Tale teorema non vale piú quando il grado di L su K è infinito (e perciò in particolare per l'estensione $\mathbf{Q} \subset \bar{\mathbf{Q}}$ ove $\bar{\mathbf{Q}}$ è la chiusura algebrica dei razionali). Affinché esso valga ancora, occorre limitarsi ai sottogruppi di $G = G(L/K)$ chiusi rispetto a una topologia definita intrinsecamente, detta topologia di Krull. Questa topologia è definita prendendo come sistema fondamentale di intorni dell'elemento neutro 1 l'insieme dei sottogruppi di G di indice finito. Poiché la topologia è compatibile con la struttura di gruppo, tale sistema definisce, per traslazione, un sistema fondamentale di intorni per ogni elemento di G.

La topologia di Krull può essere ottenuta in modo n. s. trasferendo la teoria finita a un'approssimazione $*$-finita della teoria infinita.

Si supponga che l'estensione galoisiana $K \subset L$ sia di grado infinito. La relazione binaria $R(x, y)$ dove x e y sono estensioni intermedie «$K \subset x \subset y \subset L$ e x e y sono finiti e normali» è concorrente. Essa ammette quindi in un allargamento $^*K$ di K una «soluzione globale» $^*K \subset \Phi \subset {}^*L$.

Per costruzione, $^*F \subset \Phi$ per ogni estensione finita normale $K \subset F \subset L$. Siccome $\cup F = L$, e $F \subset {}^*F$, $L \subset \Phi$. Φ è perciò una estensione $*$-finita di $^*K$ che è una estensione di L. Per trasferimento è possibile applicare il teorema di Galois a $^*K \subset \Phi$ a condizione di restringersi alle entità interne.

Sia $^*G_\Phi = G(\Phi/{}^*K)$ il gruppo di Galois dei $^*K$-automorfismi interni di Φ.

I sottogruppi normali interni di $^*G$ classificano i sottocorpi interni di Φ che sono delle estensioni di $^*K$.

Sia $\vartheta \in {}^*G_\Phi$. ϑ è la restrizione a Φ di un elemento di $^*G$. Siccome L è unione di estensioni normali finite, $\vartheta L = L$. Si pone ${}^0\vartheta = \vartheta L$. ${}^0\vartheta \in G$. Si definisce cosí un morfismo ${}^*G_\Phi \to G$ il cui nucleo è l'insieme delle $\vartheta \in {}^*G_\Phi$ che lasciano L invariante. Sia F un'estensione intermedia $K \subset F \subset L$. ${}^*F \cap \Phi$ è un'estensione (interna) intermedia ${}^*K \subset {}^*F \cap \Phi \subset \Phi$. Sia ${}^*G_F$ il sottogruppo (interno) di ${}^*G_\Phi$ corrispondente a ${}^*F \cap \Phi$ per il teorema di Galois e sia ${}^0G_F = \{{}^0\vartheta\}_{\vartheta \in {}^*G_F}$. ${}^0G_F$ è un sottogruppo normale di G.

Si definisce cosí un'applicazione $\gamma : F \to {}^0G_F$ tra le estensioni intermedie F e i sottogruppi di G. Si tratta ora di caratterizzare l'immagine di γ.

Sia $\vartheta \in {}^*G$. Sia $\vartheta | L = {}^0\vartheta$ (questa notazione è compatibile con la notazione precedente). Se $S \subset {}^*G$, sia ${}^0S = \{{}^0\vartheta\}_{\vartheta \in S}$. Sussiste allora il teorema seguente:

TEOREMA (Robinson). *Un sottogruppo normale H di G è nell'immagine di γ se e solo se ${}^0({}^*H) = H$.*

Questo teorema, che caratterizza i sottogruppi di G che classificano le estensioni intermedie $K \subset F \subset L$, permette di ritrovare la topologia di Krull per la quale essi sono chiusi. [J. P.].

Alembert, J.-B. Le Rond d'

1754 «Différentiel», in *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres. Mis en ordre et publié par M. Diderot... et quant à la Partie Mathématique, par M. d'Alembert...*, Briasson, David, Le Breton, Durand, Paris 1751-65, vol. IV, pp. 985-89.

1765 «Limite (Mathémat.)», *ibid.*, vol. IX, p. 542.

Badiou, A.

1969 *La subversion infinitésimale*, in «Cahiers pour l'analyse», n. 9, pp. 118-37.

Bell, J. L., e Slomson, A. B.

1969 *Models and Ultraproducts. An Introduction*, North-Holland, Amsterdam.

Berkeley, G.

1734 *The Analyst; or, a Discourse addressed to an Infidel Mathematician*, Tonson, London (trad. it. Fondazione Giorgio Ronchi, Firenze 1971).

Bernstein, A. R., e Wattenberg, F.

1969 *Non-standard measure theory*, in W. A. J. Luxemburg (a cura di), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, New York, pp. 171-85.

Cantor, G.

1883 *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, in «Mathematische Annalen», XXI, pp. 545-91.

Cauchy, A.-L.

1821 *Cours d'Analyse*, Imprimerie Royale, Paris; ora in *Œuvres complètes*, serie II, tomo III, Gauthier-Villars, Paris 1897.

Fenstadt, J. E.

[1968] *Non-standard Models for Arithmetics and Analysis*, in *Proceedings of the 15th Scandinavian Congress (Oslo)*, Springer, Berlin 1970, pp. 30-47.

Fraenkel, A. A.

1928 *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin 1928³.

Gödel, K.

1930 *Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls*, in «Monatshefte für Mathematik und Physik», XXXVII, pp. 349-60.

1931 *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme*, in «Monatshefte für Mathematik und Physik», XXXVIII, pp. 173-98 (trad. it. in E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Milano 1961).

Henkin, L.

1949 *The completeness of the first order functional calculus*, in «Journal of Symbolic Logic», XIV, pp. 159-66.

1950 *Completeness in the theory of types*, in «Journal of Symbolic Logic», XV, pp. 81-91.

Keisler, H. J.

1962 *Ultraproducts and elementary classes*, in «Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings», serie A, n. 64, pp. 477-95.

1965 *A survey of ultraproducts*, in Y. Bar-Hillel (a cura di), *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 1964 International Congress*, North-Holland, Amsterdam, pp. 112-26.

Kreisel, G.

1967 *Informal Rigour and Completeness Proofs*, in I. Lakatos (a cura di), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, pp. 138-86.

1969 *Axiomatizations of Non-standard Analysis that are Conservative Extensions of Formal Systems for Classical Standard Analysis*, in W. A. J. Luxemburg (a cura di), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, New York, pp. 93-106.

Leibniz, G. W.

1701 *Memoire de M. Leibniz touchant son sentiment sur le calcul différentiel*, in «Journal de Trévoux»; ora in *Mathematische Schriften*, vol. V, Olms, Berlin 1962.

L'Hôpital, G.-F.-A. de

1696 *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie Royale, Paris.

Łoś, J.

1955 *Quelques remarques, theorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres*, in Th. Skolem e altri, *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, North-Holland, Amsterdam, pp. 98-113.

Löwenheim, L.

1915 *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, in «Mathematische Annalen», LXXVI, pp. 447-470.

Luxemburg, W. A. J.

1969 *A General Theory of Monads*, in *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, New York, pp. 18-86.

1972 *A non-standard analysis approach to Fourier analysis*, in W. A. J. Luxemburg e A. Robinson (a cura di), *Contributions to Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, pp. 15-39.

1973 *What is non-standard analysis?*, in «The American Mathematical Monthly», LXXX, pp. 38-67.

Machover, M., e Hirshfeld, J.

1969 *Lectures on Non-standard Analysis*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York.

Puritz, C.

1972 *Skies, constellations and monads*, in W. A. J. Luxemburg e A. Robinson (a cura di), *Contributions to Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, pp. 215-43.

1976 *Quasi monadic spaces; a non-standard approach to convergence*, in «Proceedings of the London Mathematical Society», serie III, XXXIII, pp. 230-50.

Robinson, A.

1961 *Non-standard analysis*, in «Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings», serie A, n. 64, pp. 432-40.

1963 *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, North-Holland, Amsterdam (trad. it. Boringhieri, Torino 1974).

Robinson, A.
1966 *Non-Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam.
1969a *Compactifications of Groups and Rings and Non-Standard Analysis*, in «Journal of Symbolic Logic», XXXIV, pp. 576-87.
1969b *Germs*, in W. A. J. Luxemburg (a cura di), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, New York, pp. 138-49.
Skolem, Th.
1920 *Logisch-Kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze, nebst einem Theorem über dichte Mengen*, Dybwad, Kristiania.

Sviluppatosi nell'ambito del **calcolo** (cfr. anche **numero** e **modello**), con motivazioni provenienti sia dalla matematica «speculativa» (cfr. **matematiche**) sia dalla **scienza** applicata (in particolare dalla **fisica**), l'infinitesimale si è rivelato come il **concetto** piú duttile per trattare matematicamente il **moto**, ma al tempo stesso come una **idea** portatrice di contraddizioni (cfr. **opposizione/contraddizione** e anche **dialettica**) a lungo non risolte. Presente con varie modalità in piú di un settore della matematica (cfr. ad esempio **curve e superfici**, **differenziale**, **funzioni**, **variazione** e anche **geometria e topologia** e **invariante**), al pari della nozione di **infinito** cui naturalmente rimanda, ha rappresentato una sfida appassionante per epistemologie e metafisiche rivali (cfr. **conoscenza**, **metafisica**, **filosofia/filosofie**).

Apparentemente eliminato col chiarimento dei problemi concettuali inerenti all'opposizione **continuo/discreto**, l'infinitesimale è riemerso ad esempio nel contesto dell'indagine dei linguaggi formali (cfr. **formalizzazione**), ambito specifico della **logica** (cfr. anche **deduzione/prova**). Nel quadro della teoria dei modelli in particolare (cfr. **teoria/modello** e anche **strutture matematiche**) si sono potuti esplicitare i problemi connessi con l'impiego della notazione infinitesimale nel ragionamento matematico e di conseguenza si è potuto rendere conto delle specifiche proprietà dell'infinitesimale come **simbolo** (cfr. anche **codice**, **segno**). L'infinitesimale si è cosí trasformato da paradosso in **metodo** (la cosiddetta analisi non standard) di notevole interesse euristico ed espositivo.