Dialoguer avec Gerhard Heinzmann. Archives Henri Poincaré,

4–5 juillet 2022

Approche lautmanienne de la notion de déploiement universel

Jean Petitot
CAMS (EHESS), Paris

Avec Gerhard, j'ai longuement discuté d'Albert Lautman.

J'aimerais aujourd'hui, dans le cadre de cet hommage, présenter une interprétation lautmanienne d'un concept fondamental introduit par René Thom dans les années 1960, celui de *déploiement universel d'une singularité*.

L'existence d'un déploiement universel est un exemple typique de *passage de l'essence à l'existence* et de *montée vers l'absolu* au sens de Lautman. Ce dernier a consacré de magnifiques réflexions aux exemples de revêtement universel d'un espace topologique, de la théorie de Galois et de 1a théorie du corps de classes.

J'ai déjà abordé ce thème lors du colloque "Albert Lautman : philosophie, mathématiques, Résistance", d'octobre 2021 à l'ENS. Gerhard était présent.

L'idée centrale d'Albert Lautman est qu'une intuition intellectuelle est a l'œuvre dans les mathématiques, et que, dans le développement historique de leurs théories, celles-ci actualisent une "dialectique du concept" (en un sens "platonicien").

Cette dialectique "abstraite et supérieure" développe leur unité, dévoile leur réel et détermine leur valeur philosophique.

C'est en tant que *structurales*, dans le mouvement autonome et historique d'élaboration de leurs théories, que les mathématiques réalisent des Idées dialectiques.

À travers ces Idées elles paraissent

> *"raconter, mêlée aux constructions auxquelles s'intéresse le mathématicien, une autre histoire (...) faite pour le philosophe" (p. 28)*
> *"Nous entendons par Idées des schémas de structure." (p. 204)*

Comme dans toute dialectique, ces schémas de structure établissent des liaisons spécifiques entre notions contraires : local/global, intrinsèque/extrinsèque, essence/existence, continu/discontinu/discret (triade), fini/infini, etc. et

> *"la compréhension des Idées de cette Dialectique se prolonge nécessairement en genèse de théories mathématiques effectives." (p. 203)*

La complémentarité entre compréhension conceptuelle et technicité calculatoire, entre tradition métaphysique et innovation mathématique, est essentielle.

L'Idée dialectique de stabilité/instabilité structurelle

J'' aimerais parler de l'*Idée dialectique de stabilité/instabilité structurelles*.

Elle s'incarne dans le schéma de structure suivant :

On considère une classe d'entités $X \in \mathfrak{X}$, l'ensemble $\mathfrak{X}$ possédant une double structure :

1. *topologie* $\mathcal{T}$,
2. *classification* par une *relation d'équivalence* : *type qualitatif* des entités X.

Définition. – *Soit* $X \in \mathfrak{X}$*. On dit que l'entité* X *est* structurellement stable *si toute entité* Y *assez voisine de* X *au sens de la topologie* $\mathcal{T}$ *est équivalente à* X, *i.e.* si la classe d'équivalence $\widetilde{X}$ de X contient un voisinage ouvert (au sens de $\mathcal{T}$) de X.

Soit $U_{\mathfrak{X}}$ le sous-ensemble (par définition *ouvert*) de $\mathfrak{X}$ constitué des $X \in \mathfrak{X}$ *structurellement stables* et $K_{\mathfrak{X}}$ le sous-ensemble *fermé* de $\mathfrak{X}$ constitué des $X \in \mathfrak{X}$ *structurellement instables*.

$K_{\mathfrak{X}}$ est une "morphologie discriminante" qui sépare les classes d'équivalence des X stables de celles des X instables. Ce fermé *géométrise la classification qualitative* interne à $\mathfrak{X}$.

La stabilité structurelle est par définition une propriété relationnelle *extrinsèque* de X. Mais nous verrons que dans certains cas elle peut être définie *intrinsèquement*.

Déformations

Pour étudier le positionnement d'une entité X *instable* dans "l'espace ambiant" $\mathfrak{X}$, on peut "sonder" le voisinage de X au moyen de *familles paramétrées* $(X_w)_{w \in W}$ définies par des champs $\sigma : W \to \mathfrak{X}$.

Le fermé $K_{\mathfrak{X}}$ induit alors par image réciproque un fermé K_W dans l'espace externe W. D'où autant de "sections" de dimension finie de $K_{\mathfrak{X}}$.

Ces (W, K_W) formels ont servi de base à Thom pour ses modèles de morphogenèse *concrète* dans des substrats matériels.

Espaces d'applications différentiables

Le cas le plus simple, mais déjà notablement compliqué, est celui des espaces d'applications différentiables $\mathfrak{F} = C^{\infty}(M, N)$ entre deux variétés différentiables M et N .

Si M est *compacte*, on a la topologie de la convergence uniforme de f et de toutes ses dérivées.

Comme M est compacte, $f(M)$ est compacte dans $\mathbb{R}$, donc bornée. On prend $\|f\| = \max_{x \in M} |f(x)|$. Idem pour les dérivées.

Topologie de Whitney

Si M et N sont quelconques on utilise la topologie de Whitney : topologie de la convergence uniforme sur les compacts avec conditions de stationnarité à l'infini.

Théorème. – *Muni de la topologie de Whitney,* $\mathfrak{F} = C^{\infty}(M, N)$*, est un espace de Baire, autrement dit toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Ensembles *résiduels* et propriétés *génériques*.

Espaces de jets

Une difficulté est que les espaces fonctionnels d'applications différentiables sont des espaces de dimension infinie compliqués sur lesquels on ne peut pas faire directement de la géométrie. Il est donc utile de pouvoir se ramener à des approximations de dimension finie et de voir quelles propriétés qualitatives de stabilité et d'instabilité peuvent se caractériser en dimension finie.

C'est une grande idée reposant sur la notion technique fondamentale de *jet*.

On a là un bel exemple de la façon dont la *compréhension* d'une Idée dialectique se réalise par des innovations mathématiques *techniques*.

Soit $f : M \to N$, $a \in M$ et $b = f(a)$. $(x_1, \ldots, x_m)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ coordonnées locales en a et $b = f(a)$.
f correspond à la donnée de n fonctions $y_i = f_i(x)$ des m variables $x = (x_j)$.

On veut définir le *développement de Taylor* de f en a.

La dérivée d'ordre 1 = matrice *jacobienne* $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$.

La dérivée seconde = système des n hessiens $\left(\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a)\right)$, etc.

Mais, sauf pour le jacobien, les dérivées ne sont pas *intrinsèques*.

C'est pouruoi Charles Ehresmann a introduit la notion de *jet*.

La propriété pour deux fonctions f et g d'avoir le même développement de Taylor en a jusqu'à un certain ordre k est une propriété d'équivalence invariante par changement de coordonnées locales. La classe d'équivalence de f est le jet d'ordre k de f en a et se note $j^k f(a)$.

Les $J^k(M,N)_{a,b}$ forment un fibré localement trivial $J^k(M,N)$. Si $f \in C^\infty(M,N)$ on peut alors lui associer son jet d'ordre k, $j^k f$

$$\begin{array}{rcl} j^k f : M & \rightarrow & J^k(M,N) \\ a & \mapsto & j^k f(a) \end{array}$$

Les espaces de jets ont une *géométrie intrinsèque* d'une très grande richesse qui généralise la géométrie de *contact* et la géométrie *symplectique*.

Lautman : local/global

Un point essentiel est que, contrairement aux niveaux de structure analytiques et algébriques, le niveau différentiable ne manifeste aucune solidarité entre le local et le global.

Lautman cite souvent deux exemples très différents de relations local/global :

1. les procédures de prolongement, comme le prolongement analytique, où le local détermine le global,
2. les procédures de recollement, comme le recollement des cartes locales d'une variété différentiable où le local ne détermine pas le global. C'est ce dernier cas qui intervient ici.

La plasticité des $f \in C^\infty(M, N) = \mathfrak{F}$ fait qu'il est vain de chercher à les classifier directement. C'est beaucoup trop compliqué.

1. On classe d'abord les applications *stables*,
2. puis on classe ensuite les applications présentant des "degrés" finis croissants d'instabilité.

La propriété de stabilité structurelle rétablit une certaine forme de solidarité entre le local et le global au niveau différentiable. Mais c'est une solidarité structurelle et non causale complètement différente du prolongement analytique.

Stabilité structurelle, équivalence différentiable et détermination finie

Pour définir la stabilité structurelle des applications différentiables munies de la topologie de Whitney, il faut définir la relation d'équivalence appropriée. Il s'agit de l'*équivalence différentiable*.

$f, g : M \to N$ sont *différentiablement équivalentes* s'il existe des difféomorphismes $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ et $\psi \in \mathrm{Diff}(N)$ tels que $g \circ \varphi = \psi \circ f$, i.e. $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ (i.e. g est conjuguée de f).

Nous allons voir qu'un point important pour l'analyse de la structure *locale* des applications est que f peut être équivalente, *localement* en a, à l'un de ses jets $j^k f(a)$.

On dit alors qu'elle est *déterminée à l'ordre* k en a. Cela signifie que $j^k f$ contient *toute l'information qualitative intrinsèque locale* sur f en a.

Il faut avoir conscience de l'immense complexité du problème. L'action du simple groupe additif de $\mathbb{R}$ sur un espace $\mathbb{R}^n$ correspond déjà à la complexité inouïe des flots des systèmes dynamiques.

Ici on a des groupes de difféomorphismes de dimension infinie agissant sur des espaces fonctionnels de dimension infinie.

Trivialité locale et théorème des fonctions implicites

Un outil essentiel pour analyser la structure *qualitative* de $f : M \to N$ est donc de voir comment on peut la simplifier à équivalence près et la réduire à une "forme normale" typique. On cherche à réduire le type qualitatif à un prototype le plus simple possible.

La forme normale des "bonnes situations" dépend des dimensions respectives m et n de M et de N,
$f : M \to N$, $a \in M$, $f(a) = b$.

(i) $m = n$, f est localement l'identité $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;

(ii) $m < n$, f est localement l'injection canonique $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$;

(iii) $m > n$, f est localement la projection canonique $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$.

f est *localement triviale* si elle est, localement en $(a, f(a))$, différentiablement équivalente à la “bonne situation” de (m, n).

Théorème des fonctions implicites : la trivialité locale ne dépend que de l'application linéaire tangente $D_a f$ de f en a et est réalisée dès que $D_a f : T_a M \to T_{f(a)} N$ *est de rang maximal* : m et n si $m = n$, m si $m < n$ et n si $m > n$.

f est alors déterminée á l'ordre 1 et “linéarisable”. Il s'agit d'un théorème très profond disant que, quelle que soit la série infinie des jets de f, tous les jets d'ordre > 1 peuvent être annulés par changement de coordonnées.

La linéarisation comme schème

La linéarisation est un exemple de ce que Lautman appelait des

"mixtes intermédiaires entre des genres d'être différents.

Il fait remonter philosophiquement cette problématique à celle du schème kantien.

C'est une "forme normale" qui fait passer du qualitatif à l'algébrique (au iinéaire). On va le généraliser.

Par définition, la propriété de stabilité structurelle est une propriété *ouverte*. Une question cruciale est de savoir si elle est en plus *générique*, c'est-à-dire vérifiée sur un ouvert *dense* du $C^\infty(M, N)$ considéré.

Cela est faux pour les dynamiques générales.

Mais c'est vrai pour les f. La démonstration se fait en deux étapes :

1. interpréter les propriétés de stabilité en termes de propriétés de *transversalité* dans les espaces de jets,
2. démontrer que les propriétés de transversalité sont génériques.

La notion de transversalité remonte à la géométrie algébrique italienne de la fin du XIX^e (variétés algébriques en “position générale”).

Soit N de dimension n et N_1 et N_2 deux sous-variétés de dimensions n_1 et n_2. N_1 et N_2 sont *transverses* si en tout $x \in N_1 \cap N_2$ on a $T_x N = T_x N_1 + T_x N_2$.

Remarquons que si N_1 et N_2 sont disjointes, elles sont transverses et que si $n_1 + n_2 < n$, N_1 et N_2 ne sont transverses que si elles sont disjointes.

Si W sous-variété de N, $f \pitchfork W$ si, pour tout $x \in M$ tel que $f(x) \in W$, on a

$$T_{f(x)} N = T_{f(x)} W + D_x f(T_x M).$$

Le théorème fondamental de transversalité de Thom, basé sur le lemme de Sard disant que l'image des valeurs critiques d'une f est de mesure nulle, dit que la transversalité dans les espaces de jets est *générique*.

Théorème de transversalité de Thom. – *Soit W une sous-variété (stratifiée) de l'espace des jets $J^k(M,N)$. L'ensemble T_W des $f \in \mathfrak{F} = C^\infty(M,N)$ dont le k-jet $j^k f$ est transverse sur W est résiduel.*

$f : M \to N$ est une immersion en $x \in M$ si $D_x f$ est de rang maximal $m \leq n$. Un simple calcul dimensionnel permet de savoir quand les immersions sont génériques.

La fibre F de $J^1(M, N)$ est l'espace des matrices jacobiennes $D_x f$. Il est de dimension mn et $J^1(M, N)$ est lui de dimension $m + n + mn$.

Le sous-espace H de la fibre F des matrices A qui ne sont pas de rang maximal m est la fermeture des A de rang $m - 1$. Ce dernier est défini par le fait que tous les (déterminants) mineurs $m \times m$ de A contenant un certain mineur $(m-1) \times (m-1) \neq 0$ s'annulent. Il y en a $n - (m-1) = n - m + 1$. H est donc de codimension $c = n - m + 1$ dans F et décrit ainsi un sous-fibré S de codimension c de $J^1(M \times N)$.

Par définition f est une immersion ssi $j^1 f(M)$ n'intersecte pas S. Mais si $m < n - m + 1$, *i.e.* si $2m \leq n$, cette condition est une condition de transversalité. Le théorème de transversalité implique:

Théorème d'immersion de Whitney. – *Si $n \geq 2m$, les applications $f : M \to N$ sont génériquement des immersions.*

De même que si $n \geq 2m + 1$, les f sont génériquement des immersions injectives et si M est compacte et si $n \geq 2m + 1$, les f sont génériquement des plongements.

Ce sont des théorèmes étonnants. Si n est assez grand relativement à m, aussi loin que soit f d'une immersion (par exemple f constante), elle est infiniment voisine d'une immersion.

La théorie de Morse

À l'autre extrême, celui du cas $n = 1$, on a la théorie de Morse des $f : M \to \mathbb{R}$.

$x \in M$ est un *point critique* de f ssi la $(m \times 1)$-matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$ (le vecteur gradient) $= 0$ en x

Alors $j^1 f(x) \in S_1$ section 0 de $J^1(M, \mathbb{R})$

$\dim\left(J^1\right) = m + 1 + m = 2m + 1$, $\dim(\text{fibre}) = m$,
$\dim(S_1) = m + 1$, $\text{codim}(S_1) = m$.

x point critique *non dégénéré* si le *hessien* de f en x – la matrice symétrique $m \times m$ $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$ – est non dégénéré, i.e. de rang maximal m.

Proposition. – *$x \in M$ est un point critique non dégénéré ssi $j^1 f(x) \in S_1$* (point critique) *et $j^1 f \pitchfork S_1$ en $j^1 f(x)$.*

Le théorème de transversalité donne :

Corollaire. – *Soit* $f : M \to \mathbb{R}$. *Génériquement, tous les points critiques de* f *sont non dégénérés (fonction de Morse).*

Corollaire. – *Génériquement, une fonction* $f : M \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Morse dont toutes les valeurs critiques sont distinctes (fonction de Morse* excellente).

Théorème de Morse. *– Si M est compacte, $f : M \to \mathbb{R}$ est structurellement stable si et seulement si c'est une fonction de Morse excellente*

(i) ses points critiques sont non dégénérés,

(ii) ses valeurs critiques (*i.e.* les valeurs $f(x)$ de f pour x critique) sont distinctes.

La stabilité structurelle est donc générique. Comme elle est ouverte, elle est donc ouverte et dense.

Cela caractérise *intrinsèquement* des entités structurellement stables dont la stabilité structurelle est pourtant *extrinsèque* (situationnelle).

Lautman : propriétés intrinsèques et propriétés induites

Lautman a beaucoup approfondi ces situations où

> *"les propriétés géométriques de relation [entre une entité et un espace ambiant] se laissent (...) exprimer en propriétés algébriques intrinsèques" (p. 58).*

et où il y a la possibilité

> *"de ramener les relations qu'un être mathématique soutient avec le milieu ambiant, en propriétés d'inhérence caractéristiques de cet être" (p. 48),*

Lorsqu'il y a équivalence entre l'extrinsèque et l'intrinsèque :

> *"les mêmes êtres sont étudiables des deux façons et c'est cette rencontre des méthodes qui fait l'unité profonde des mathématiques" (p. 172).*

Les anneaux locaux

Il faut passer de la stabilité à l'instabilité et développer l'analyse *locale* des *singularités* induisant des instabilités.

On passe de la géométrie à l'algèbre.

Notions de *détermination*, de *codimension*, de *modèle transverse* et de *déploiement universel*.

On considère des germes de $f : M \to N$, $a \mapsto f(a) = b$ *instables*. On travaille localement. On peut prendre $a = 0$ et $(x_1, \ldots, x_m)$ des coordonnées locales en 0.

1. Anneau Γ_0 des germes en 0 de fonctions $h : M \to \mathbb{R}$. Anneau *local* (i.e. un anneau commutatif possédant un seul idéal maximal) d'idéal maximal $\mathfrak{m}_0 =$ les $h : M \to \mathbb{R}$ s'annulant en 0. $\mathfrak{m}_0$ est engendré par les (germes) x_i et le germe de h en 0 est dans $\mathfrak{m}_0^k$ si et seulement si h et toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k-1$ s'annulent en 0.
2. Anneau local Γ_b d'idéal maximal $\mathfrak{m}_b$ et morphisme d'anneaux $f^* : \Gamma_b \to \Gamma_0$ défini par la composition avec f qui envoie $\mathfrak{m}_b$ dans $\mathfrak{m}_0$. Il traduit algébriquement la structure locale de f.
3. Anneau local quotient $Q_f(0) = \Gamma_0 / f^*(\mathfrak{m}_b)\,\Gamma_0$, l'*anneau local* de f en 0. Anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_f = \mathfrak{m}_0 / f^*(\mathfrak{m}_b)\Gamma_0$, l'idéal des germes $h : (M, 0) \to \mathbb{R}$ qui s'annulent sur la fibre $f^{-1}(b)$.

Avec des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m)$ en 0 et $(y_1, \ldots, y_n)$ en b, $\Gamma_0(M) \simeq \mathcal{E}_m$ et $\Gamma_b(N) \simeq \mathcal{E}_n$ et on étudie le morphisme d'anneaux locaux $f^* : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ et $Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$.

1. Si $f : (M, a) \to (N, b)$ est une immersion $(m \leq n)$ alors

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m / \mathfrak{m}_m \simeq \mathbb{R}.$$

2. Si $f : (M, a) \to (N, b)$ est une submersion $(m \geq n)$ alors

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m \simeq \mathcal{E}_{m-n}.$$

3. Si f fonction de Morse avec a point critique non dégénéré avec Hessien sous forme normale $H(x) = \sum_{i=1}^{i=m} \varepsilon_i x_i^2$ ($\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, m$), alors

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m / (H)$$

Détermination et codimension

La notion de *détermination*.

Définition. – *On dit que f est déterminée à l'ordre k en a si toute fonction g telle que $j^k g(a) = j^k f(a)$ est équivalente à f localement en a, et si k est le plus petit entier satisfaisant cette propriété.*

La notion de *codimension*.

La *codimension* de f est la dimension du quotient de "l'espace tangent" total $T_f\mathfrak{F}$ par "l'espace-tangent" à la G-orbite de f.

On a des formules pour la calculer explicitement.

Résultat fondamental : f est de détermination finie ssi elle est de codimension finie. Mais le lien entre les deux nombres est *compliqué* (technicité non triviale de la théorie).

Par exemple si f est stable f est de codimension 0 et est donc de détermination finie.

Théorème de Mather. – *Si f est stable, f est déterminée à l'ordre $n+1$ relativement à l'équivalence différentiable (*n est la dimension au but N*).*

Si la codimension est finie, on peut “descendre” dans des espaces de jets de dimension finie où la situation devient *algébrique et calculable*.

1. On ne garde que ce qui est *invariant*.
2. Les *formes normales* sont comme des *schèmes* (cf. plus haut la linéarisation). Ce sont des “types” dont la classe d'équivalence est constituée de “tokens”.

Les formes normales comme "mixtes"

Revenons sur la citation de Lautman sur les

> *"mixtes intermédiaires entre des genres d'être différents et dont la considération est souvent nécessaire pour opérer le passage d'un genre de l'être à un autre genre de l'être" (p. 29).*

Ici, les formes normales font passer du genre de l'être "qualitatif, géométrique, intuitif" au genre de l'être "quantitatif, algébrique, calculatoire".

En éliminant tout le qualitatif possible grâce à des changements de coordonnées, il ne reste plus qu'un squelette algébrique (polynomial).

On va maintenant se focaliser sur les singularités des fonctions *potentiel* $(n = 1)$.

On considère un germe instable de $f : M \to \mathbb{R}$ en un point critique *a dégénéré* (on prend $a = 0$)

Comme 0 point critique $f \in \mathfrak{m}^2$. Mais on peut supposer que $f \in \mathfrak{m}^3$ car les points critiques quadratiques sont stables.

Soit Δ *l'idéal jacobien* engendré par les $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.
La codimension (à droite, i.e. pour $G = Diff\,(M)$, c'est la plus facile à utiliser) de f est $= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}\Delta$.
Proposition. – *f est de détermination finie ssi il existe ℓ tel que $\mathfrak{m}^\ell \subset \Delta$.*

Théorème. *Pour la k-détermination pour l'équivalence différentiable (à droite)*

$$\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}^2\Delta + \mathfrak{m}^{k+2} \Longrightarrow f \text{ est } k\text{-déterminée} \Longrightarrow \mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}\Delta + \mathfrak{m}^{k+2}$$

(subtilité technique : problème des "modules", continua de types différentiables)

Si f k-déterminée, on se situe dans $J^k(m,1)$, on y considère l'orbite $\tilde{f}$ de f puis, si $c = \mathrm{codim}(f)$, une section W de dimension c transverse à $\tilde{f}$ en f.

$W =$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^c$. D'où déploiement f_w de $f_0 = f$, $w \in W$.

Questions :

(i) Tous ces déploiements sont-ils équivalents ?

(ii) Sont-ils stables en tant que déploiements (de germes) $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^c \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^c$.

(iii) Sont-ils universels au sens où tout déploiement f_t de f de base T peut se déduire de f_w par image réciproque d'une application, si possible unique, $\theta : T \rightarrow W$.

Oui. On considère les déploiements transversaux engendrés par une base $h_1, \ldots, h_c$ ($c = \mathrm{codim}(f)$) de $\mathfrak{m}/\Delta$ c'est-à-dire donnés par

$$f_w = f + \sum_{i=1}^{c} w_i h_i.$$

Théorème. – *Tous ces déploiements transversaux de dimension* $c = \mathrm{codim}(f)$ *sont stables, universels et tous équivalents. À équivalence près, il n'existe essentiellement qu'un déploiement universel d'une singularité de codimension finie.*

L'existence d'un déploiement universel est un exemple typique de *passage de l'essence à l'existence* et de *montée vers l'absolu* au sens de Lautman.

Comme je l'ai dit d'emblée, Lautman développe ce thème à propos du revêtement universel, de la classification des surfaces de Riemann, de la théorie de Galois et de 1a théorie du corps de classes.

Il concerne la possibilité

> *"d'éliminer les imperfections de certains êtres mathématiques par passage de ce qu'ils sont primitivement à un idéal de simplicité absolue dont l'existence est impliquée dans l'enchevêtrement même de leur structure" (p. 77).*

Il fait donc partie des procédés de passage de l'Essence (structure) à l'Existence :

> *"comment la structure d'un être imparfait peut parfois préformer l'existence d'un être parfait en lequel toute imperfection a disparu" (p. 28).*

Ce qui intéresse Lautman sont les cas

> *"où l'on voit la structure d'un être s'interpréter en termes d'existence pour d'autres êtres" (p. 29) et*
> *"une structure préformer l'existence d'êtres abstraits sur le domaine que cette structure définit" (p. 97).*

Cette dialectique de l'essence et de l'existence est inséparable de celle *entre le virtuel et l'actuel*.
Le virtuel contient en puissance l'engendrement de son actualisation au moyen d'un nouveau domaine sur lequel sont définies de nouvelles entités.

Ici le virtuel est l'*instabilité*. La stabilité structurelle est un *principe de raison suffisante* (aussi essentiel pour Thom que le principe de causalité) et gouverne l'actualisation du virtuel.

Le potentiel interne instable est un "centre organisateur"

1. qui *engendre son espace externe universel* W,
2. qui déploie l'ensemble de bifurcation K_W classifiant de façon optimale tous les stabilisés possibles à équivalence près.

La codimension est un nombre qui a une double signification : elle mesure le degré d'instabilité interne et donne la dimension de l'espace externe *optimal*.

C'est un exemple magnifique de genèse reposant

> *"sur le double sens de ce nombre, structural et créateur" (p. 104)*

Les exemples favoris de Lautman sont

1. le genre d'une surface de Riemann comme nombre des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes,
2. le nombre de classes d'idéaux d'un corps de nombres,
3. le nombre de représentations irréductibles d'un groupe fini.

Modèles hylémorphistes

Les déploiements universels *abstraits* servent de base chez Thom à des modèles de morphogenèse *concrète* dans des substrats matériels.

Les dialectiques essence/existence et virtuel/actualisastion sont, comme chez Lautman, inséparable de la dialectique métaphysique forme/matière (hylémorphisme),

> *"l'essence d'une forme se réalisant au sein d'une matière qu'elle créerait, l'essence d'une matière faisant naître les formes que sa structure dessine" (p. 95).*

Sur Lautman :

Gerhard Heinzmann, 2016, "The Structuralist Roots of Mathematical Understanding. Early French Structuralism Reconsidered: Poincaré and Lautman", *Foundations of Mathematical Structuralism* (München).

Gerhard Heinzmann, 1987, "La position de Cavaillès dans le problème des fondements en mathématiques, et sa différence avec celle de Lautman", *Revue d'histoire des sciences* , 40-1, 1987, 31-47.

Gerhard Heinzmann et Jean Petitot, 2020, "The Functional Role of Structures in Bourbaki", *The Prehistory of Mathematical Structuralism* (Oxford UP, 2020)

Jean Petitot, 1987, “Refaire le Timée”, *Revue d’Histoire des Sciences*.
https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01130394v2

Emmanuel Barot, Lautman, coll. Ç Figures du savoir È, Les Belles Lettres, Paris, 2009

Le n$^{\circ}$37 de *Philosophiques* (2010) (Jean-Pierre Marquis, ed.) consacré à Lautman.

Sur la théorie des singularités :

René Thom, 1956. "Les Singularités des applications différentiables", *Annales de l'Institut Fourier* + Notes d'Harold Levine sur le cours de 1959 à Bonn.

John Mather, 1968-1971. "Stability of C^∞ Mappings", I–VI.

Alain Chenciner, 1973. “Travaux de Thom et Mather sur la stabilité topologique”, *Séminaire Bourbaki*, 424.

Alain Chenciner, 1980. “Singularités des fonctions différentiables”, *Encyclopædia Universalis*.

Jean Petitot, Compilation
http://jeanpetitot.com/ArticlesPDF/Petitot_Sing.pdf

Avec des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_m)$ en 0 et $(y_1, \ldots, y_n)$ en b, $\Gamma_0(M) \simeq \mathcal{E}_m$ et $\Gamma_b(N) \simeq \mathcal{E}_n$ et on étudie le morphisme d'anneaux locaux $f^* : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_m$ et $Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$.

1. Si $f : (M, a) \to (N, b)$ est une immersion $(m \leq n)$ alors dans des coordonnées locales linéarisant f, f s'écrit $y_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $y_j = 0$ pour $j = m+1, \ldots, n$. Donc $f^*(y_i) = y_i \circ f = x_i$ si $i = 1, \ldots, m$ et $f^*(y_j) = y_j \circ f = 0$ si $j = m+1, \ldots, n$. Donc, $f^*(\mathfrak{m}_n) = \mathfrak{m}_m$, $\mathfrak{m}_f = 0$ et

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m / \mathfrak{m}_m \simeq \mathbb{R}.$$

2. Si $f : (M, a) \to (N, b)$ est une submersion $(m \geq n)$ alors, dans des coordonnées locales linéarisant f, f s'écrit $y_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Donc $f^* (y_i) = y_i \circ f = x_i$ si $i = 1, \ldots, n$. Donc $f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$ est l'idéal de $\mathcal{E}_m$ engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$.

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m \simeq \mathcal{E}_{m-n}.$$

3. Si f fonction de Morse avec a point critique non dégénéré avec Hessien sous forme normale $H(x) = \sum_{i=1}^{i=m} \varepsilon_i x_i^2$ ($\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, m$). Alors $f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m$ est l'idéal principal des fonctions $g \in \mathcal{E}_m$ qui s'écrivent comme produits $g = Hg'$ et

$$Q_f = \mathcal{E}_m / f^*(\mathfrak{m}_n)\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m / (H)$$