

# Géométrie de contact et champ d'association dans le cortex visuel

Yannick TONDUT et Jean PETITOT \*

## Résumé

Dans cet article, nous présentons un modèle géométrique du processus d'intégration des contours dans le système visuel, c'est-à-dire de la reconstruction des contours globaux à partir de leur représentation distribuée dans le cortex. Le traitement des contours dans le cortex visuel débute dans l'aire  $V1$ , où le signal rétinien est analysé par des neurones dont les champs récepteurs possèdent une préférence orientationnelle. Nous considérons deux niveaux d'organisation de l'architecture fonctionnelle de l'aire  $V1$  : la *rétinotopie* et la *structure columnaire*. Nous montrons que l'organisation columnaire peut être modélisée par une structure géométrique fondamentale, celle de *fibration*. Cette fibration est munie d'une structure géométrique supplémentaire, dite *structure de contact*. Or l'équivalent discret de cette entité continue est analogue à un mécanisme proposé récemment par Field, Hayes et Hess pour rendre compte d'expériences psychophysiques sur l'intégration des contours : le *champ d'association*. Du point de vue physiologique, les *connexions horizontales* découvertes dans le cortex visuel pourraient implémenter ce schéma local d'association. Des équivalents discrets de la structure de contact se retrouvent également dans certains modèles importants du traitement des contours, notamment ceux de Zucker et de Grossberg.

---

\*CREA, Ecole Polytechnique, 1 rue Descartes, 75005 PARIS. e-mail : petitot@poly.polytechnique.fr

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation du cortex visuel primaire</b>	<b>4</b>
2.1	Architecture du cortex visuel primaire . . . . .	4
2.1.1	Rappels . . . . .	4
2.1.2	Signification de la redondance . . . . .	6
2.1.3	Critiques du modèle de Hubel et Wiesel et architectures alternatives	7
2.2	Le modèle mathématique . . . . .	7
2.2.1	Introduction . . . . .	7
2.2.2	Une modélisation de la rétinitopie corticale . . . . .	8
2.2.2.1	Insuffisance d'une modélisation euclidienne . . . . .	8
2.2.2.2	L'implémentation neuronale d'une topologie . . . . .	9
2.2.2.3	Le champ visuel comme variété . . . . .	10
2.2.3	L'implémentation de la structure différentiable . . . . .	11
2.2.3.1	Implémentation des espaces tangents et cotangents . . . . .	11
2.2.3.2	L'implémentation effective . . . . .	13
2.2.4	Le concept de fibration . . . . .	14
2.2.4.1	Motivation . . . . .	14
2.2.4.2	Définition d'un espace fibré . . . . .	14
2.2.4.3	Le fibré de contact . . . . .	16
2.2.4.4	Le fibré de contact comme espace de jets . . . . .	17
2.2.5	Utilisation de la notion de fibration en théorie de la vision . . . . .	18
2.2.5.1	Justification . . . . .	18
2.2.5.2	Le modèle proposé . . . . .	19
2.2.5.3	Une modélisation alternative : fibrés vectoriels et connexions . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Le problème de l'intégration des contours</b>	<b>20</b>
3.1	Motivation . . . . .	20
3.2	La structure de contact . . . . .	21
3.3	Le point de vue psychophysique . . . . .	23
3.3.1	Aspects psychophysiques de l'intégration des contours . . . . .	25
3.3.2	Le modèle du champ d'association, sa formalisation mathématique	26
3.3.2.1	Présentation du champ d'association . . . . .	26
3.3.2.2	Une version discrétisée de la structure de contact . . . . .	28
3.3.2.3	Interprétation . . . . .	30
3.3.2.4	Comparaison avec d'autres données . . . . .	32
3.3.2.5	Remarques complémentaires . . . . .	32
3.4	La question de l'implémentation physiologique . . . . .	33
3.4.1	Introduction . . . . .	33
3.4.2	Les connexions horizontales implémentent la structure de contact	33

3.4.2.1	Connexions horizontales et champ d'association . . . .	33
3.4.2.2	Signification géométrique . . . . .	35
3.5	Conclusion . . . . .	36
<b>Bibliographie</b>		<b>38</b>

# 1 Introduction

Les contours sont l'un des éléments fondamentaux de la vision des mammifères. La psychologie en témoigne, et aussi les neurosciences : le cortex visuel primaire est en effet constitué entre autres de neurones dont les champs récepteurs sont adaptés à la détection locale des bords de l'image rétinienne et, partant, des contours des objets. Cependant, cette découverte est en même temps la source d'une interrogation : comment le cerveau parvient-il à reconstituer les contours complets à partir de cette représentation initiale distribuée sur un nombre considérable de neurones ?

Faute d'en savoir davantage, on s'est contenté jusqu'à ces dernières années de faire reposer la tâche de l'intégration des contours sur des étapes ultérieures, encore largement inexplorées, du traitement visuel. Néanmoins, les neurophysiologistes ont continué de découvrir des faits nouveaux concernant l'aire  $V1$ , et ce que nous en savons aujourd'hui nous oblige à repenser les possibilités de ce remarquable outil de calcul cortical, en particulier dans le domaine du traitement des contours.

L'idée germinale du présent article est que le traitement réalisé par le cortex visuel est de nature fondamentalement *géométrique*, mais géométrique en un sens non trivial, très différent de celui de la géométrie euclidienne traditionnelle.<sup>1</sup>

Notre démarche consiste à confronter les résultats expérimentaux récents à de telles structures qui, selon nous, sont pertinentes pour la compréhension du système visuel parce qu'elles ont été élaborées pour comprendre comment des *calculs locaux* (et même ponctuels) peuvent engendrer des *formes globales*.

## 2 Modélisation du cortex visuel primaire

### 2.1 Architecture du cortex visuel primaire

#### 2.1.1 Rappels

L'objet du présent article n'est pas une présentation de l'architecture fonctionnelle du cortex. Rappelons cependant que, depuis les travaux pionniers de Hubel, Wiesel et Mountcastle, l'exploration de la structure spatiale et fonctionnelle du cortex visuel primaire a révélé trois principes d'organisation remarquables : la rétinotopie, l'organisation en colonnes, et la structuration en couches.<sup>2</sup>

L'ensemble des cellules d'une même couche traitant une position rétinienne donnée<sup>3</sup> est rassemblé dans une hypercolonne, qui est un barreau vertical, dont la section hori-

---

<sup>1</sup>Cf. Petitot [1996].

<sup>2</sup>Pour des ouvrages de référence, voir en particulier Hubel [1988], Buser et Imbert [1987], Nicholls et al. [1990].

<sup>3</sup>Une précision s'impose ici : par position rétinienne, on n'entend pas un point mathématique, qui n'a aucune signification biologique, mais une petite partie de la rétine de l'ordre de grandeur du champ récepteur d'une cellule moyenne. Deux cellules seront considérées comme associées à une même position rétinienne si leurs champs récepteurs ont leurs centres à peu près confondus (en ce sens que leur interdistan-  
ce est faible par rapport au diamètre des champs récepteurs) et se recouvrent sur l'essentiel de leur

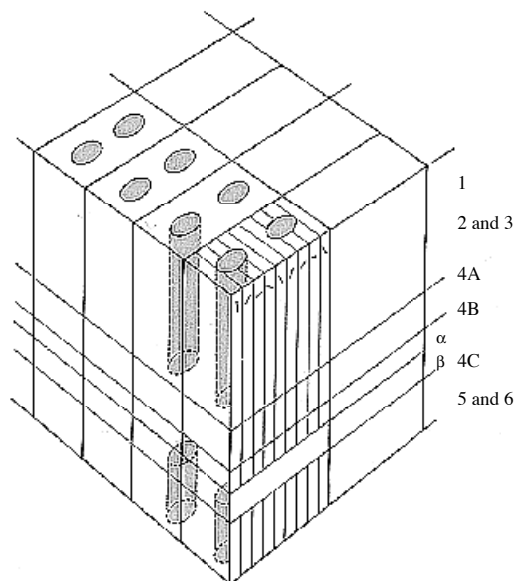


Figure 1: Schéma d'une hypercolonne de l'aire V1 (d'après Hubel et Livingstone).

zontale est approximativement, chez le singe, un carré d'environ 0,8 mm de côté, pour les couches 2 et 3. Une hypercolonne traverse toute l'épaisseur du cortex et contient toute la machinerie nécessaire à l'analyse "primaire" d'une partie du champ visuel, dont la taille varie d'un demi degré de côté en fovéa jusqu'à 8 degrés en périphérie (cf. figure 1). Partant d'une cellule donnée, on est assuré de rencontrer des cellules dont le champ récepteur n'intersecte pas celui de la cellule initiale en se déplaçant horizontalement sur une distance de l'ordre de deux hypercolonnes.

Par rapport à la structure columnaire, la rétinotopie correspond à un autre niveau d'organisation, à une échelle d'observation différente. A ce niveau de résolution, la structure interne des hypercolonnes n'est plus pertinente. Elles jouent le rôle de "points" <sup>4</sup> dans la carte rétinienne que constitue le cortex visuel primaire. Idéalement, à chaque point du champ visuel est associé l'ensemble des orientations possibles d'une barre passant par ce point, l'ensemble des taux de dominance oculaire possibles en ce point, l'ensemble des longueurs d'onde possibles d'un stimulus en ce point, et peut-être d'autres paramètres (direction du mouvement, courbure, disparité binoculaire, etc.).<sup>5</sup>

En particulier, en ce qui concerne les colonnes d'orientation, de nombreuses expériences, depuis celles d'Hubel et Wiesel, ont montré que les neurones de même orientation

---

surface. C'est le cas des cellules rencontrées lors d'une pénétration normale au sein d'une même couche corticale.

<sup>4</sup>Au sens précis, seul valable dans le domaine physique, où un point est ce qui n'a pas de parties, ou dont on ne considère pas les parties. Nous y reviendrons par la suite.

<sup>5</sup>Pour des précisions plus techniques sur ces différents paramètres, en particulier la détection de courbure, voir par exemple Dobbins et al. [1987], Zucker et al. [1988], Wiesel et Gilbert [1989].

préférentielle sont regroupés en colonnes “perpendiculaires” à la surface du cortex et que, lors d’une pénétration “horizontale”, l’orientation préférentielle des cellules rencontrées varie de façon remarquablement régulière, presque continue, et toujours dans le même sens. La vitesse d’évolution de l’orientation varie selon la direction de pénétration. Au maximum, elle varie par sauts de 10 degrés tous les 50 à 100  $\mu$ , en moyenne. On obtient typiquement un éventail directionnel complet de 180 degrés pour une distance horizontale de l’ordre de 1 à 2 mm selon les espèces.

Sur des intervalles de plusieurs millimètres, on constate, sans pouvoir les prévoir, des inversions du sens de variation de l’orientation. Par ailleurs, la linéarité de la séquence orientationnelle est parfois interrompue par un saut brutal de plusieurs dizaines de degrés, souvent accompagné d’un changement du sens de variation. On appelle fracture un tel événement. L’ordonnement régulier des colonnes orientationnelles n’est donc valable que pour des régions relativement limitées du cortex visuel. Les techniques optiques ont montré que les groupes de cellules de préférence orientationnelle similaire constituent des sortes de taches discontinues, révélant une organisation plus complexe que celle des colonnes de dominance oculaire.

Hubel et Wiesel ont proposé un modèle simplifié d’arrangement des colonnes d’orientation, directement inspiré de celui des colonnes de dominance oculaire : les colonnes sont organisées en tranches (“slabs”) parallèles; l’orientation est constante au sein d’une même tranche et varie à peu près linéairement dans la direction perpendiculaire. Dans ce modèle, les deux systèmes de tranches (dominance oculaire et orientation) sont transverses l’un par rapport à l’autre.

Quoi qu’il en soit des critiques adressées à ce point de vue, l’idéalisations associant rétinotopiquement à chaque “point” de la rétine l’ensemble des directions du plan, servira de point de départ à la modélisation que nous proposons.

### 2.1.2 Signification de la redondance

Une des limitations apparentes du modèle précédent vient de ce que la représentation corticale du signal visuel est largement redondante. Nous avons vu que tous les neurones situés à la verticale d’un point de la surface corticale possèdent à peu près la même préférence orientationnelle et des champs récepteurs qui se superposent sur une grande partie de leur surface. Ainsi, un stimulus orienté en un point ne va pas exciter un unique neurone dans une hypercolonne de l’aire  $V1$  (ce que suppose le modèle idéalisé), mais l’ensemble des neurones dont la préférence orientationnelle est voisine et dont le champ récepteur intersecte la zone stimulée. Leur décharge est d’autant plus intense que la proximité orientationnelle et la fraction concernée du champ récepteur sont grandes.

Le stimulus sera donc représenté dans l’aire  $V1$  par un “pattern” d’activation d’un ensemble de neurones. Cette redondance permet en particulier *une plus grande finesse* dans la représentation de l’orientation et de la position spatiale du stimulus : un petit déplacement de celui-ci sera sans effet sensible sur un neurone donné mais sera observable à l’échelle de la population. On parle de codage par population : *la résolution du réseau est supérieure à celle des détecteurs individuels* (cf. Snippe et Koenderink [1992]). Ainsi le “grain” de la représentation corticale du champ visuel n’est sûrement pas le

point grossier correspondant à la taille d'une hypercolonne (peut-être n'excède-t-il pas, au niveau de la fovéa, la taille d'un photorécepteur rétinien). Ni l'augmentation de la taille des champs récepteurs dans le cortex par rapport aux stades antérieurs du système visuel, ni l'indifférence des cellules "complexes" (majoritaires dans l'aire V1) à la position du stimulus, ne se traduisent donc par une perte d'information spatiale et une moindre précision de la représentation. Dès lors, représenter l'ensemble des paramètres du stimulus au-dessus de chaque point (mathématique) de la carte rétinotopique est une bien meilleure approximation de la réalité que ne le laisse penser le modèle simplifié des hypercolonnes.

### 2.1.3 Critiques du modèle de Hubel et Wiesel et architectures alternatives

Le modèle de Hubel et Wiesel a été assez tôt contesté, certains auteurs (Seelen, Braitenberg et Braitenberg) faisant remarquer que les résultats expérimentaux étaient compatibles avec d'autres formes d'organisation spatiale. En particulier, des arguments théoriques concernant le développement postnatal du cortex visuel (Linsker [1986]) ou la minimisation de la longueur du câblage cortical (Durbin et Mitchison [1990]) allaient plutôt dans le sens d'une organisation "en soleil" ("pinwheel") : la carte orientationnelle présenterait des points singuliers (centres d'orientation) autour desquels l'orientation varierait de façon continue avec l'angle. L'ensemble des orientations (soit  $180^\circ$ ) serait alors représenté par un disque complet ( $360^\circ$ ), soit dans le sens des aiguilles d'une montre, soit en sens opposé.

Plus récemment, les nouvelles techniques d'observation *in vivo* ont confirmé cette dernière hypothèse (Bonhoeffer et Grinvald [1991], [1993]). Les centres d'orientation ont été observés, à raison de 1,2 par  $\text{mm}^2$  chez le chat (aire 18). A leur voisinage, la préférence orientationnelle varie très brutalement. Les centres adjacents sont parfois reliés par des lignes de fracture à travers lesquelles ont également lieu des sauts dans la variation continue de l'orientation.

Cependant, nous nous appuyons sur la représentation de Hubel et Wiesel, qui demeure une référence dans la littérature. Mais le modèle mathématique que nous proposons permet de prendre en compte ces nouvelles données anatomiques. Notre modélisation se veut fonctionnelle, et plusieurs types d'anatomie sont donc compatibles avec elle.

## 2.2 Le modèle mathématique

### 2.2.1 Introduction

Nous proposons maintenant une première modélisation du fonctionnement du cortex visuel au moyen des outils de la géométrie différentielle. Nous essaierons de montrer que cette modélisation est "naturelle" dans la mesure où les structures biologiques qui nous intéressent présentent des analogies avec des phénomènes bien connus des physiciens et que c'est justement la modélisation de ceux-ci qui a motivé la conception des objets mathématiques que nous utilisons.

Ce travail approfondit certains aspects des modélisations proposées dans Koenderink [1988], [1990], Hoffman [1989] et Petitot [1995], [1996], en les confrontant systématiquement aux données neurophysiologiques.

## 2.2.2 Une modélisation de la rétinotopie corticale

### 2.2.2.1 Insuffisance d'une modélisation euclidienne

Des cellules ganglionnaires jusqu'au cortex, le système visuel apparaît comme une succession de représentations de l'espace qu'est la surface de la rétine.<sup>6</sup> Ces représentations sont "lisibles" par un observateur parce qu'elles sont rétinotopiques. On pourrait alors penser que, comme la surface rétinienne elle-même, chacune des représentations du champ visuel peut être considérée en première approximation comme une simple portion du plan, par exemple un disque. Certes, cette représentation est "discrétisée" et inhomogène, elle présente même des "trous" (dont le plus important est la tache aveugle). Mais la modélisation physique a coutume de s'abstraire de ce genre d'imperfections.

Cependant, lorsqu'on y regarde de plus près, on constate qu'il existe une différence beaucoup plus fondamentale entre une des représentations du champ visuel, par exemple celle fournie par les cellules ganglionnaires, et une partie du plan euclidien : c'est le fait qu'il n'existe pas de moyen "naturel" de comparer les activités de deux cellules éloignées. Deux cellules ganglionnaires voisines ont des champs récepteurs qui se recouvrent. Au plan physiologique, ceci résulte du fait que, par le biais des connexions entre cellules intermédiaires (horizontales, bipolaires et amacrines), leur état est influencé par un certain nombre de photorécepteurs communs. En revanche, deux cellules éloignées n'ont en commun aucune structure biologique. Sur le plan de la modélisation, ceci se traduit par le fait *qu'il n'y a pas*, dans la rétine, de structure géométrique en dehors des cellules et de leurs connexions locales. Au contraire, dans le plan euclidien, il existe une structure intrinsèque qui permet de se déplacer entre deux points arbitraires : les translations. On peut ainsi comparer deux parties distantes du plan, alors que cela n'a aucun sens de comparer deux champs récepteurs ganglionnaires qui ne se recouvrent pas.

Autrement dit, l'espace euclidien possède une structure globale qui en fait un espace homogène (le groupe des automorphismes de la structure euclidienne y agit transitivement) alors que l'espace rétinien est essentiellement obtenu *par recollement de domaines locaux* (champs récepteurs).

On rencontre le même phénomène à chacun des niveaux de représentation successifs de l'espace rétinien : deux cellules dont les champs récepteurs ne s'intersectent pas "s'ignorent" l'une l'autre. Les connexions longues du système visuel relient des niveaux de traitement successifs, et les connexions transverses, au sein d'un même niveau, sont de courte portée. Telle était du moins la conception qui dominait au début des années 80.

---

<sup>6</sup>Nous ne nous préoccupons pas ici de binocularité. Nous parlerons donc indifféremment de surface de la rétine et de champ visuel pour désigner la partie externe des deux rétines, décrite en termes objectifs, donc assimilée à une portion de plan.



Schématiquement, chacun des niveaux de représentation de l'espace rétinien apparaît donc comme un assemblage de champs récepteurs, qui se recouvrent localement, mais dont l'ensemble ne possède pas de structure géométrique simple. Or cette idée de passage du local au global est fondamentale en mathématiques : depuis longtemps déjà, les mathématiciens se sont intéressés aux propriétés des espaces définis par un "recollement" de structures locales simples (c'est-à-dire semblables à une partie d'espace euclidien), et ont cherché à étendre à ces espaces généralisés les puissants outils du calcul différentiel. Ils ont introduit à cet effet le concept de variété différentiable.<sup>7</sup>

### 2.2.2.2 L'implémentation neuronale d'une topologie

Nous allons maintenant nous demander si les représentations successives du champ visuel peuvent être modélisées comme des variétés différentiables. Il est tentant, comme l'ont fait certains des auteurs intéressés par la contrepartie biologique des structures abstraites du traitement visuel, de voir les champs récepteurs d'un niveau donné comme des cartes locales, dont l'espace rétinotopique serait le recollement ("gluing"). On pourrait ainsi parler de "variété" rétinienne, genouillée ou corticale. Nous pensons que cette intuition mérite d'être approfondie, mais qu'elle ne suffit pas à garantir un parallélisme entre une entité biologique considérée du point de vue fonctionnel et une structure mathématique répondant à une définition précise.

Nous estimons, avec Koenderink ([1984], pp. 35-36), que la mise en correspondance précise de l'ordre fonctionnel des activités neuronales avec l'ordre spatial (la topologie) du champ visuel objectif, vu comme une portion de plan, est un problème extrêmement difficile, dont la résolution nécessiterait une connaissance très fine des activités neuronales et de leurs corrélations.<sup>8</sup> Koenderink a montré qu'un tel isomorphisme est possible : une géométrie intrinsèque de l'espace visuel peut être construite à partir des seules relations fonctionnelles auxquelles le système a accès (et non de celles constatées par l'observateur extérieur, qui projette la spatialité de sa propre vision sur les cartes rétinotopiques). Le système visuel est constitué par *le recollement de domaines locaux (champs récepteurs) dont l'agencement spatial est codé par les corrélations temporelles des signaux circulant dans les fibres nerveuses associées.*<sup>9</sup> Ainsi cette information numérique (la seule disponible pour le système visuel lui-même) contient la structure spatiale de l'espace constitué par recollement : c'est en effet un résultat mathématique que la structure d'intersection de tout recouvrement d'un espace est caractéristique de sa topologie (cohomologie de Čech).<sup>10</sup> Koenderink et ses collaborateurs

---

<sup>7</sup>Il n'est pas pertinent ici de définir rigoureusement le concept technique de variété différentiable : voir par exemple l'entrée "Variétés différentiables" de l' *Encyclopædia Universalis*, ainsi que, par exemple, Spivak [1974], Arnold [1978] ou Abraham et Marsden [1978]. Rappelons simplement qu'une variété différentiable est un espace localement isomorphe à un espace euclidien standard à travers des systèmes de coordonnées locales, les changements de coordonnées locales étant des applications différentiables.

<sup>8</sup>Un premier pas expérimental dans ce sens vient d'être effectué par Meister et ses collaborateurs ([1995]).

<sup>9</sup>Rappelons à ce propos que les fibres du nerf optique sont les axones des cellules ganglionnaires de la rétine.

<sup>10</sup>Plus précisément, si  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement (ouvert) d'une variété  $M$ , on lui associe

ont montré, par simulation, comment une telle structure peut être mise en place au cours du développement du système visuel (Toet et al. [1987]).

### 2.2.2.3 Le champ visuel comme variété

Bien que nous soyons conscients de ces difficultés, notre propos ici n'est pas la construction d'une topologie intrinsèque sur l'espace visuel. Nous nous intéressons à une étape ultérieure, qui est la mise en place d'une *géométrie* sur cet espace topologique, toujours dans une perspective fonctionnelle et opérationnelle. Nous pensons que la notion de variété permet de saisir plusieurs aspects fondamentaux du fonctionnement du système visuel, c'est-à-dire :

1. l'aspect local du traitement de l'information rétinienne,
2. la “mise au format interne” du signal lumineux par les cellules de la rétine,
3. l'analyse géométrique du signal lumineux effectuée par les couches ultérieures.

En résumé, l'implémentation de la structure différentiable de l'espace rétinotopique ne peut sans doute pas se comprendre par une simple mise en correspondance trait pour trait entre structures mathématiques et biologiques. Mais cela n'empêche pas que les cartes neuronales du champ visuel puissent être, au plan fonctionnel, assimilables à une variété.

En effet, ce qui importe pour le système visuel, ce n'est pas tant de pouvoir repérer un point de la surface de la rétine que de pouvoir *traiter* le signal lumineux en ce point. A chaque instant, le signal lumineux peut être vu comme une fonction réelle  $I(x, y)$  définie en chaque point du champ visuel (l'intensité lumineuse qu'il reçoit). Le traitement du signal consiste essentiellement à effectuer la convolution  $I * P$  de  $I$  par le profil récepteur des champs récepteurs. Dans cette perspective “opérationnelle”, munir l'espace rétinotopique d'une structure de variété n'est rien d'autre qu'effectuer sur le signal lumineux une analyse géométrique, c'est-à-dire le traiter *comme une observable*. C'est précisément la fonction des cellules des premières étapes du système visuel (ganglionnaires et genouillées) : elles mettent le signal rétinien dans un format interne qui, au niveau cortical, permet de calculer les caractéristiques géométriques locales de ce signal (en particulier ses dérivées successives). Dans cette perspective, les profils récepteurs étudiés par Marr ([1982]) apparaissent comme des opérateurs différentiels analysant localement le signal.<sup>11</sup>

---

une structure combinatoire  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  (un complexe simplicial appelé le “nerf” de  $\mathcal{U}$ ) en considérant les intersections  $U_i \cap U_j$ ,  $U_i \cap U_j \cap U_k$ , etc. qui sont *non vides*.  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  caractérise dans une certaine mesure la structure de  $M$ . L'hypothèse de Koenderink est que, pour  $M$ =le champ visuel et  $\mathcal{U}$ =le recouvrement de  $M$  par les champs récepteurs des cellules ganglionnaires,  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  est encodé dans les corrélations temporelles des signaux des fibres du nerf optique.

<sup>11</sup>Si  $D$  est un opérateur différentiel et  $g$  une gaussienne, on a l'identité remarquable  $D(g * I) = Dg * I$ . Autrement dit, filtrer (lisser)  $I$  par  $g$  et lui appliquer  $D$  constitue la même opération que de filtrer  $I$  au moyen du filtre  $Dg$ . Le cas analysé par Marr pour les cellules ganglionnaires correspond à  $D = \Delta$  (laplacien) et est l'une des origines de la théorie des ondelettes. On connaît des cellules du cortex visuel dont le profil récepteur  $P$  combine des dérivées partielles de gaussiennes jusqu'à l'ordre 4.

Ces opérateurs calculent à partir d’une moyenne spatiale pondérée (lissage gaussien) du signal lumineux. Dès lors, à l’intérieur du domaine de définition d’un tel opérateur de moyenne (qui n’est autre que le champ récepteur du neurone correspondant), les détails du signal sont perdus pour le système. En ce sens, ces domaines sont traités comme des points : le système n’est pas capable d’assigner une valeur à un point (mathématique) de l’espace rétinotopique, mais simplement à un petit domaine qui l’entoure. C’est seulement au niveau de ces domaines que la séparabilité de l’espace rétinotopique est assurée.

Selon le cas, nous devons voir les champs récepteurs tantôt comme des cartes locales (lorsque nous devons comparer deux profils récepteurs dont les domaines se recouvrent), tantôt comme des points (lorsque nous devons parler de la valeur d’une observable ou de ses dérivées). C’est en fait la notion *d’échelle* qui permet de rendre compte de la double nature des champs récepteurs : un champ récepteur est un point vu à une certaine échelle, c’est-à-dire un point “flou”, de taille finie. En effet, dès les photorécepteurs, le signal visuel subit une discrétisation : deux points (mathématiques) de la rétine sont indistinguables pour le système visuel s’ils correspondent au même photorécepteur. Les cellules ganglionnaires intègrent les signaux de plusieurs photorécepteurs, et le signal en sortie de cette couche cellulaire est à une échelle plus grande, et ainsi de suite dans les différentes aires du cortex. A chaque étape, l’échelle est fixée par la taille moyenne des champs récepteurs. Nous avons vu au § 2.1.2 qu’elle pouvait également être raffinée.

Ainsi, le système visuel traite simultanément le signal à plusieurs échelles : ce qui, à une échelle donnée, est un domaine spatial (relevant du calcul local) devient, à une échelle plus grande, un “point” (de taille finie, mais non analysable, donc relevant du calcul infinitésimal). Pour manipuler ces versions multiples, à différentes échelles, d’un même signal initial, les modélisateurs ont introduit le formalisme de *l’espace d’échelle* (scale-space), obtenu en ajoutant aux deux coordonnées spatiales traditionnelles une troisième, l’échelle. On suppose alors que celle-ci varie continûment. On généralise à cet espace les opérations du calcul différentiel (voir par exemple Florack et al. [1992] et Hamy [1997]). C’est un cas instructif où la biologie, à l’exemple de la physique, inspire, en faisant retour sur le modèle mathématique, une nouvelle théorie : *la géométrie différentielle multi-échelle*.

### 2.2.3 L’implémentation de la structure différentiable

#### 2.2.3.1 Implémentation des espaces tangents et cotangents

Le concept de variété a précisément été introduit pour fournir une classe d’espaces généralisés où il soit possible de faire de la géométrie différentielle. Puisque l’on dispose autour de chaque point d’un voisinage assimilable à une portion d’espace euclidien, on peut transporter sur la variété toutes les opérations de la géométrie différentielle euclidienne qui sont *locales*. Koenderink ([1988]) propose l’idée selon laquelle l’espace tangent en un point pourrait être implémenté par une colonne corticale au-dessus de ce point (par “colonne corticale”, Koenderink désigne plutôt ce que l’on appelle hypercolonne) : chacune des cellules de la colonne représente un vecteur tangent, et les

connexions intracolumnaires permettent de réaliser les opérations d'addition vectorielle et de multiplication scalaire.

Les notions classiques de vecteurs tangent et cotangent (la notion duale) se généralisent facilement aux variétés différentiables, par exemple en termes de coordonnées locales. Ainsi, si une courbe a pour équation locale  $(x_1(t), \dots, x_m(t))$ , son vecteur tangent s'écrira  $(X_1(t), \dots, X_m(t)) = (\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_m}{dt})$ . Si  $\varphi$  est une observable que l'on dérive le long de la courbe, on aura alors :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \left( \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (\varphi) = X(\varphi).$$

En ce sens, les vecteurs tangents peuvent être interprétés comme des opérateurs de dérivation sur les observables.

Les formes différentielles  $\omega$  sont les entités duales des vecteurs tangents (vecteurs cotangents) : ce sont des formes linéaires sur les vecteurs tangents. Si  $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  est un vecteur tangent,  $\omega(X)$  sera un nombre dépendant linéairement à la fois de  $X$  et de  $\omega$ . Si  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$  est la base de l'espace tangent en  $x$  associée aux coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , la base duale de l'espace cotangent est notée  $(dx_1, \dots, dx_n)$ . On a donc  $dx_j (\frac{\partial}{\partial x_i}) = \delta_{ji}$  (où  $\delta_{ji}$  est le symbole de Kronecker = 1 si  $i = j$  et = 0 sinon) et si  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$  on a :

$$\omega(X) = \sum_{i,j=1}^n \omega_j X_i \delta_{ji} = \sum_{i=1}^n \omega_i X_i.$$

Si  $\varphi$  est une observable, on lui associe la forme différentielle  $d\varphi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j$ . On a alors :

$$d\varphi(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} X_i = X(\varphi).$$

Considérons alors une cellule dont le profil récepteur est une (approximation de) gaussienne  $g$ . Elle agit sur le signal  $I$  par convolution :

$$A = g * I, \text{ où } g(x, y, s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} e^{-\frac{x^2+y^2}{4s}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} e^{-\frac{r^2}{4s}}.$$

Mais, comme nous l'avons vu, une propriété fondamentale de la convolution est son comportement vis-à-vis de la dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial x}(u * v) = \frac{\partial u}{\partial x} * v = u * \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Il en résulte qu’une cellule de profil récepteur  $\frac{\partial g}{\partial x}$  a pour activité :

$$A' = \frac{\partial g}{\partial x} * I = g * \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g * I).$$

Si l’on considère le profil récepteur  $g$  comme opérant sur une carte locale (son champ récepteur), de sorte que l’activité  $A = g * I$  représente l’observable  $I$  dans un système de coordonnées locales, alors le profil  $\frac{\partial g}{\partial x}$  opérant sur  $I$  produit la dérivée directionnelle  $\partial_X I$  (avec  $X = \frac{\partial}{\partial x}$ ) dans le système de coordonnées vectorielles associé.

Lorsqu’un niveau supérieur aura besoin de connaître la dérivée du signal dans la direction  $X$  au point considéré, il pourra y avoir accès en comparant les signaux  $A$  et  $A'$ . Ce type de procédure doit évidemment être précâblé dans le système, ce qui permet de réaliser des “routines” automatiques pour calculer des caractéristiques géométriques du signal : une cellule ne “représente” pas intrinsèquement une dérivée, elle ne prend cette signification que par comparaison de son activité avec celle d’autres cellules au sein d’une même procédure commandée par le niveau supérieur.

### 2.2.3.2 L’implémentation effective

Au vu des données neurophysiologiques présentées ci-dessus, nous ne pouvons ni confirmer ni infirmer l’hypothèse d’une implémentation des espaces tangents et cotangents de l’espace rétinien. Elle semble en fait poser plusieurs problèmes :

1. S’il est avéré qu’au sein d’une hypercolonne, les directions des vecteurs du plan sont systématiquement représentées, il n’en est pas de même pour leurs longueurs.
2. Même si l’implémentation de la structure vectorielle (addition et multiplication scalaire) est théoriquement possible, elle requerrait des connexions nombreuses et systématiques au sein des colonnes, qui, à notre connaissance, n’ont pas été observées.
3. Comme nous le verrons, les colonnes d’orientation semblent avoir pour fonction principale la représentation des contours. Or la notion de vecteur tangent à une courbe en un point dépend du choix d’un paramétrage, alors que la direction de la tangente est une grandeur intrinsèque.

Au vu de ces problèmes, nous préférons (voir Hoffman [1989] et Petitot [1996]) considérer qu’au-dessus de chaque point de l’espace visuel est représenté non pas l’espace des vecteurs tangents, mais plus simplement *l’ensemble des directions tangentes possibles*. Biologiquement, ceci semble plus plausible : nous avons vu que l’ensemble des directions du plan est représenté au-dessus de chaque “point” (au sens opérationnel) de l’espace rétinotopique; d’autre part, contrairement à l’espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ , l’ensemble des directions des droites du plan ne possède pas de structure vectorielle, ce qui évite un problème d’implémentation neuronale.

L'ensemble des directions des droites du plan (ou ensemble des éléments de contact, cf. plus bas §3.2) est un espace, bien connu des mathématiciens, appelé la droite projective réelle  $\mathbb{P}^1$ . De dimension 1 alors que l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$  est de dimension 2,  $\mathbb{P}^1$  a aussi une géométrie plus riche. Au plan anatomique, l'organisation "en soleil" des colonnes d'orientation mise en évidence grâce aux techniques d'observation récentes (cf. plus haut §2.1.3) fournit une représentation plus conforme à la topologie de  $\mathbb{P}^1$  que l'organisation colonnaire proposée par Hubel et Wiesel.

## 2.2.4 Le concept de fibration

Pour poursuivre notre modélisation, nous devons introduire le concept fondamental de *fibration* (ou d'espace fibré).

### 2.2.4.1 Motivation

La notion de fibré a été introduite par les mathématiciens pour des raisons profondes qui se sont révélées fondamentalement pertinentes pour la physique : comment traiter un processus qui associe à chaque point d'un espace  $M$  une entité d'un certain type  $F$  (un scalaire, un vecteur, un covecteur, un tenseur, une direction, une phase, un nombre quantique, une couleur, une texture, etc.), dépendant de ce point ? Une première solution consiste à modéliser ce processus par une fonction, le résultat étant appelé champ (d'entités du type  $F$ ) sur l'espace  $M$ . Mais, dans certains cas, il est préférable de considérer qu'en chaque point de  $M$  on dispose de l'ensemble complet des valeurs de  $F$ . Par exemple, en théorie quantique des champs (théories de jauge), l'espace interne d'une particule dépend du point où elle se trouve. Ou, dans un domaine technique plus concret, en chaque pixel d'un écran d'ordinateur est représenté l'ensemble de l'espace des niveaux de gris ou des couleurs (de 1 à 3 octets). La notion d'espace fibré permet de modéliser ces situations.

L'architecture fonctionnelle du cortex visuel primaire, que nous avons résumée plus haut, fait de la notion de fibration un outil naturel pour relier rétinotopie et structure colonnaire. Pourtant, rares sont les auteurs à avoir utilisé cette modélisation : elle est centrale chez Hoffman ([1985], [1989]) et Petitot ([1993], [1996]), et abordée de façon plus marginale par Koenderink ([1988], Koenderink et van Doorn [1987]). Nous nous proposons dans ce qui suit de donner une présentation simplifiée de la théorie des fibrés et de montrer qu'elle permet une modélisation adéquate des hypercolonnes du cortex visuel primaire. Notre objectif est de rester aussi près que possible des faits anatomiques et fonctionnels évoqués plus haut.

### 2.2.4.2 Définition d'un espace fibré

Intuitivement, un fibré est constitué par un espace de base  $M$  (une variété différentiable) et, par la donnée, "au-dessus" de chacun de ses points, d'une même variété  $F$ , appelée fibre. L'espace total  $E$  du fibré (l'ensemble des fibres "recollées" les unes aux autres) n'est pas forcément, globalement, un simple produit cartésien  $M \times F$ . C'est un recollement de produits cartésiens  $U_i \times F$  définis sur des domaines locaux  $U_i$  (des

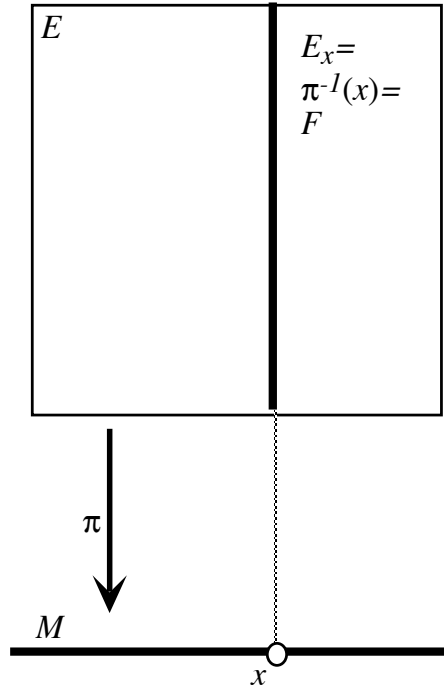


Figure 2: Schéma d'une fibration.

ouverts) de la base  $M$ . Cette trivialité locale n'a jusqu'ici intéressé les géomètres que pour traiter les situations où la base  $M$  n'est pas un espace globalement trivial  $\mathbb{R}^n$  mais une variété pouvant être non simplement connexe et posséder de l'homotopie et de l'homologie. Dans notre cas, il y a trivialité globale, mais *la structure locale est imposée par la neurophysiologie de l'architecture fonctionnelle*. Formalisons ces intuitions.

On appelle espace fibré (ou fibration) un quadruplet  $(E, M, F, \pi)$  tel que :

1.  $E$ ,  $M$  et  $F$  sont des variétés différentiables, appelées respectivement espace total, base et fibre type du fibré.
2.  $\pi : E \rightarrow M$  est une application différentiable surjective, appelée projection structurale du fibré.
3. Toutes les images réciproques  $E_x = \pi^{-1}(x)$  (où  $x \in M$ ) sont isomorphes à  $F$ .  $E_x$  est appelée fibre au-dessus du point  $x$ . (Cf. figure 2).
4. Pour tout point  $x \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $\pi^{-1}(U)$  soit difféomorphe au produit  $U \times F$  muni de la projection canonique  $\pi : U \times F \rightarrow U$ ,  $(x, q) \mapsto x$  (trivialité locale). (Cf. figure 3).

On appelle indifféremment fibration l'espace  $E$  ou la projection  $\pi$ . On appelle *section* de la fibration une application différentiable qui relève  $\pi$  i.e. qui associe à tout point  $x$

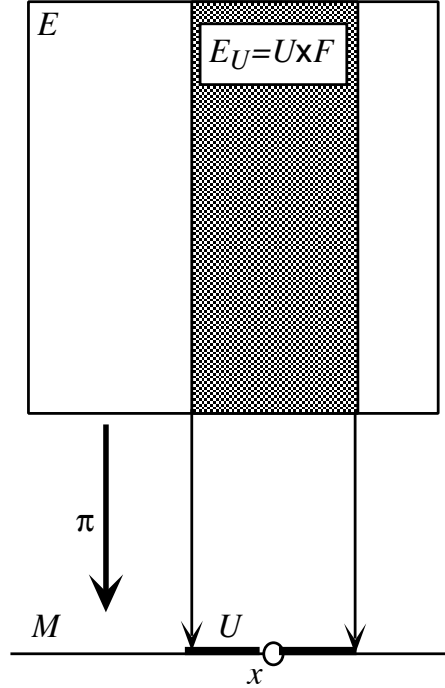


Figure 3: Trivialité locale d'une fibration.

de la variété de base  $M$  un élément de la fibre  $E_x$ . Si  $s : M \rightarrow E$  est une section, on a donc :  $\pi \circ s = Id_M$ . (Cf. figure 4).

### 2.2.4.3 Le fibré de contact

Nous considérons, en chaque point  $a$  de la variété  $M$ , non pas l'espace vectoriel tangent  $T_aM$  (qui conduit à la notion de fibré tangent de la variété), mais l'ensemble de ses hyperplans (sous-espaces de codimension 1), noté  $C_aM$ . Si  $m = \dim M$ , la structure de  $C_aM$  est celle de l'espace projectif  $\mathbb{P}^{m-1}$ . L'espace total, réunion de ces espaces locaux, sera appelé le *fibré de contact* de la variété  $M$  et noté  $CM$ .

Par souci de simplicité, nous nous placerons désormais dans le cas qui nous intéresse, où la variété  $M$  est de dimension 2. L'ensemble des éléments de contact en  $a$ ,  $C_aM$ , est alors isomorphe à la droite projective  $\mathbb{P}^1$ , ensemble des droites du plan (ou encore ensemble des directions de vecteurs du plan). C'est une variété de dimension 1, donc nous ne devons choisir qu'une coordonnée locale. Munissons par exemple  $M$  de coordonnées locales  $(x, y)$  et le plan tangent  $T_aM$  des coordonnées naturelles associées  $(\xi, \psi)$ . Alors, sur un ouvert ne contenant pas la droite "verticale"  $\xi = 0$ , une coordonnée locale de  $C_aM$  est  $p = \frac{\psi}{\xi}$  (au voisinage de  $\xi = 0$ , on pourra prendre la coordonnée  $p' = \frac{\xi}{\psi}$ ). Un élément de  $CM$  est donc repéré par les coordonnées  $(x, y, p)$  (ou  $(x, y, p')$ ). On vérifie aisément que les changements de carte associés à ces coordonnées naturelles sur  $CM$  sont des difféomorphismes. Ainsi,  $CM$  est une variété de dimension 3.

Si l'on note  $\pi$  la projection naturelle de  $CM$  sur  $M$ , on voit que  $CM$  est un fibré



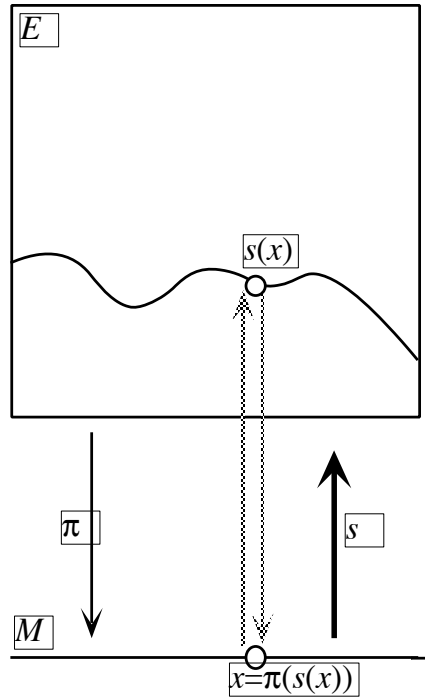


Figure 4: Section d'une fibration.

de base  $M$ , de fibre type  $\mathbb{P}^1$  et de projection structurale  $\pi$ . au-dessus de chaque point de la variété de base (localement assimilable à une portion de plan) se trouve, dans le fibré de contact, l'ensemble des directions des droites du plan (cet ensemble est donc ici la fibre). Se donner une section de ce fibré consistera donc à associer à chaque point une telle direction (ou orientation, pour utiliser un vocabulaire qui nous rapproche du système visuel). Un cas particulier de section est obtenu en choisissant, au-dessus de chaque point d'une courbe tracée sur la variété de base, la direction de la tangente à cette courbe en ce point. C'est cette idée que formalise le paragraphe suivant.

#### 2.2.4.4 Le fibré de contact comme espace de jets

Le fibré de contact peut être interprété en termes *d'espaces de jets*. L'idée de jet généralise la notion classique de développement de Taylor en un point et lui confère une signification géométrique intrinsèque. Plaçons nous dans le cas le plus simple, celui des fonctions réelles sur  $\mathbb{R}$ . Le jet d'ordre 1 d'une telle fonction  $f$ , noté  $j^1 f(x)$ , sera caractérisé par la donnée de l'abscisse du point considéré  $x$ , de la valeur de la fonction  $f$  en ce point  $y = f(x)$ , et de la valeur de sa dérivée  $p = f'(x)$ . Ce dernier nombre est la pente de la droite tangente au graphe de  $f$  en  $(x, f(x))$ . Si l'on considère  $a = (x, y)$  comme point du plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , cette droite n'est autre qu'un élément de contact du plan au point  $a$ . Inversement, à tout élément de contact du plan en un point, on peut associer l'ensemble des fonctions dont le graphe est tangent à l'élément en ce point, c'est-à-dire un 1-jet de courbe en ce point.

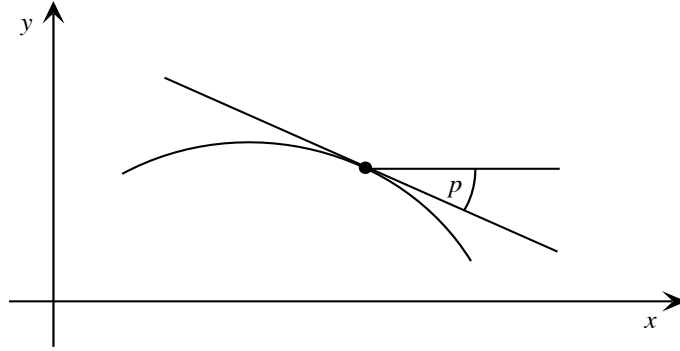


Figure 5: Une courbe plane et sa tangente en un point définissent un 1-jet.

L'identification précédente est purement locale, de sorte qu'elle s'étend aux variétés en choisissant une carte. Ainsi le fibré des éléments de contact est également le fibré des 1-jets des courbes  $C^1$  (i.e. une fois différentiables) tracées sur la variété. En effet, d'après le théorème des fonctions implicites, toute courbe  $\gamma$  est localement un graphe (sauf aux points singuliers à tangente verticale) et, en un point donné  $a$ , le 1-jet associé ne dépend pas du choix des coordonnées puisque la définition de la tangente est intrinsèque. Nous noterons ce 1-jet, un peu abusivement,  $j^1\gamma(a)$  (pour une définition rigoureuse du fibré des  $k$ -jets de sous-variétés de dimension  $s$ , voir par exemple Gamkrelidze [1991]). Le fibré des 1-jets sera désigné par  $J^1M$  aussi bien que par  $CM$ . (Cf. figure 5).

Les espaces de jets sont fondamentaux (en particulier en physique) car ils ramènent des calculs infinitésimaux à des calculs *ponctuels*. La contrepartie de ce bénéfice est l'augmentation du nombre des variables : au lieu de considérer le plan muni des coordonnées  $(x, y)$ , et de calculer  $y' = \frac{dy}{dx}$ , on se place dans l'espace à trois dimensions  $(x, y, p)$  (qui est un espace des phases projectivisé) sur lequel on impose la relation  $y' = p$  (l'idée remonte à Hamilton).

## 2.2.5 Utilisation de la notion de fibration en théorie de la vision

### 2.2.5.1 Justification

Nous allons maintenant montrer en quoi l'idée de fibration permet de saisir certains aspects essentiels du traitement visuel cortical.<sup>12</sup> L'intuition de la pertinence de ce modèle peut être guidée par les descriptions de certains spécialistes du cortex visuel :

“What the cortex does is map not just two but many variables on its two-dimensional surface. It does so by selecting as the basic parameters the two variables that specify the visual field coordinates (distance out and up

<sup>12</sup>Un intérêt remarquable du modèle du système visuel comme fibration est qu'il possède une contrepartie en termes de description phénoménologique de la perception. Cf. Petitot [1993], [1995].

or down from the fovea), and on this map it engrafts other variables, such as orientation and eye preference, by finer subdivisions.” (Hubel [1988], p. 131)

Etant donnée la modélisation de l’espace visuel comme variété de dimension 2, le problème se pose de la prise en compte des variables dites secondaires : l’orientation, la dominance oculaire, la couleur, la direction du mouvement (et d’autres éventuellement). Nous avons vu que l’ensemble des valeurs possibles de ces variables est représenté dans chaque hypercolonne corticale. Nous savons qu’une hypercolonne couvre un petit domaine du champ visuel, que nous avons traité comme une carte. Ainsi, elle peut être modélisée comme le produit cartésien de cet ouvert par les espaces dans lesquels évoluent les variables secondaires.

### 2.2.5.2 Le modèle proposé

Nous avons vu que l’espace dans lequel varie l’orientation est adéquatement modélisé par la droite projective  $\mathbb{P}^1$ . Dans le présent travail, nous ne nous intéressons pas aux couches inférieures (5 et 6), et nous modélisons l’aire  $V1$  comme un fibré dont la base correspond à la couche 4 et les fibres aux couches supérieures (2 et 3). La modélisation d’une hypercolonne comme produit cartésien (du type  $M \times \mathbb{P}^1$ ) nous fournit une trivialisatation locale d’un fibré dont la base est la variété rétinotopique  $M$  et la fibre type le produit des espaces de paramètres secondaires. La projection structurale est implémentée par les connexions verticales au sein de l’hypercolonne.<sup>13</sup>

Le “fibré  $V1$ ” aura donc pour fibre type l’espace  $\mathbb{P}^1$  des orientations, ce qui l’identifie au fibré de contact de la variété  $M$ . Le fait que ce fibré soit également le fibré des 1-jets (ponctuels) des courbes tracées sur la variété  $M$  explique pourquoi une structure de ce type est nécessaire à l’intégration des contours. L’avantage de l’espace des jets sur la variété de base du point de vue du traitement des contours est *la représentation ponctuelle d’une information locale* : sur la variété bidimensionnelle, déterminer la direction de la tangente à un contour en un point nécessite de comparer les valeurs de la courbe dans un voisinage de ce point (on pourra par exemple approximer la tangente par une corde entre deux points de la courbe assez proches). En vue de calculs ultérieurs, le système peut accéder directement à cette information géométrique comme à une simple

---

<sup>13</sup>Un problème vient de ce que plusieurs cellules du cortex répondent en réalité à un même stimulus élémentaire en un point du champ visuel. Nous avons déjà discuté cette question plus haut (§2.1.2) et invoqué le principe d’un codage par population : l’orientation et la position du stimulus ne sont pas indiquées par la décharge d’une cellule mais par l’activité d’un ensemble de cellules. Il en résulte, comme nous l’avons vu, une plus grande précision du codage du stimulus : on est plus proche du principe d’une fibre au-dessus de chaque point (mathématique) que dans le modèle où une seule cellule par hypercolonne répond à une orientation donnée. En contrepartie, l’anatomie, qui nous avait fourni l’intuition initiale d’une structure fibrée, ne reflète plus exactement cette fibration “fonctionnelle”. Cette dernière a pour “échelle” (au sens, défini plus haut, où l’échelle est le diamètre des entités traitées comme des points, et donc ici celui des fibres), non la largeur du champ récepteur agrégé d’une hypercolonne, mais le “grain” du codage de l’espace par populations.

valeur numérique dans l'espace des jets. On évite ainsi un calcul local, coûteux en termes de câblage.

Il est possible d'étendre cette modélisation aux autres variables caractéristiques du signal visuel représentées au sein des hypercolonnes de  $V1$ . Il faut pour cela considérer comme des variétés les espaces dans lesquels varient ces variables :  $[0,1]$  pour le taux de dominance oculaire, le plan projectif  $\mathbb{P}^2$  pour la couleur, le cercle  $S^1$  pour l'ensemble des directions du mouvement (voir à ce sujet Zhang et Wu [1990], Weliki et al. [1996]).  $V1$  se modélise alors comme un fibré de base  $M$ , avec comme fibre type le produit cartésien des espaces de variables secondaires.

Enfin, nous n'avons pas singularisé le rôle des cellules d'accord à la distance. Suivant l'hypothèse proposée par Zucker (Dobbins et al. [1987], [1989], Zucker et al. [1988]), ces cellules pourraient participer à une représentation systématique de la courbure. On disposerait alors, au-dessus de chaque point d'une courbe tracée sur la variété  $M$ , de son développement de Taylor à l'ordre 2, c'est-à-dire de son 2-jet en ce point (voir Gamkrelidze [1991] pour une définition précise). Le cortex visuel serait alors assimilable au fibré des 2-jets des sous-variétés de dimension 1 de  $M$ . Compte tenu de la richesse de la géométrie de cet espace, de nouvelles perspectives de modélisation seraient ouvertes si l'hypothèse de Zucker se trouvait confirmée.

### 2.2.5.3 Une modélisation alternative : fibrés vectoriels et connexions

Nous ne pouvons clore cette section sans mentionner une autre possibilité ouverte par l'utilisation des fibrés en théorie de la vision. Nous avons vu qu'un problème fondamental est celui de la comparaison de grandeurs mesurées en des points distants de la rétine : c'est ce qui nous a amenés à recourir au formalisme des variétés et des fibrés. Or les physiciens utilisent couramment des outils mathématiques permettant de calculer comment varient les grandeurs géométriques lorsque l'on se déplace dans de tels espaces, obtenus par recollement d'ouverts. On peut alors exploiter le formalisme développé pour la physique relativiste : choix de jauge, connexions affines, dérivation covariante, etc. Il y a sans doute là une voie intéressante à explorer.

Ici, le choix que nous avons fait de modéliser l'aire  $V1$  comme fibré de contact ne nous permet pas d'utiliser le formalisme des connexions, adapté aux fibrés vectoriels. En revanche, nous allons voir que le fibré de contact possède une "structure de contact", qui est un outil parfaitement adapté au problème de l'intégration des contours.

## 3 Le problème de l'intégration des contours

### 3.1 Motivation

Jusqu'ici, notre démarche a consisté à proposer un équivalent mathématique des structures neuronales découvertes par les neuro-physiologistes. Dans cette section, notre cheminement sera inverse : nous allons voir comment un problème qui se pose de façon naturelle dans le cadre de la théorie des fibrés est "résolu" par le système visuel. Ceci

constituera une validation de notre modèle, et sera l'occasion de proposer un cadre d'analyse commun pour divers découvertes et modèles apparus ces dernières années.

L'une des fonctions essentielles du système visuel est l'extraction des contours des objets : divers résultats psychophysiques et physiologiques tendent à prouver que les contours font partie des primitives manipulées par le système visuel, et que celui-ci détecte leur présence et calcule leurs caractéristiques dès les premières étapes corticales. Le problème qui se pose est de savoir comment, à partir d'une représentation essentiellement *ponctuelle* de l'information sur la position et l'orientation des lignes et des bords, le système visuel parvient à traiter les entités étendues (*multilocales*) que sont les contours.

Nous avons déjà présenté le fibré des 1-jets (ou fibré de contact) comme un outil naturel pour la représentation des courbes. Nous allons maintenant introduire le formalisme inventé par les géomètres pour relier les contours tracés sur la base de ce fibré et les courbes tracées dans ce fibré lui-même. Nous pourrions constater que ce formalisme, qui exprime rigoureusement le problème de l'intégration des contours, possède une contrepartie psychophysique. Nous spéculerons, pour finir, sur les différentes possibilités d'implémentation corticale de cette structure mathématique.

### 3.2 La structure de contact

L'objet de ce paragraphe est d'introduire une structure géométrique naturelle sur le fibré de contact d'une variété, appelée *structure de contact*. Nous l'abordons par le biais des jets, où sa signification est plus immédiate.

Soit  $\gamma$  une courbe  $C^\infty$  tracée sur la variété  $M$ .  $\gamma$  est une sous-variété de dimension 1 de  $M$ . Considérons l'application  $j^1\gamma : \gamma \subset M \rightarrow J^1M$  qui à tout point de  $\gamma$  associe le 1-jet de  $\gamma$  en ce point. L'image de cette application est une courbe, c'est-à-dire une sous-variété de dimension 1 de  $J^1M$ . Cette courbe, que nous noterons encore  $j^1\gamma$ , est la "relevée" (dite legendrienne) de  $\gamma$  dans  $J^1M = CM$ .  $\gamma$  se déduit de  $j^1\gamma$  par la projection structurale de  $J^1M$  sur  $M$ . On retrouve ainsi la courbe  $\gamma$  à partir de l'ensemble de ses 1-jets, c'est-à-dire comme enveloppe de ses tangentes (cf. figure 6).

Dans l'espace  $J^1M$ , la courbe  $\gamma$  est représentée par  $j^1\gamma$ , de telle sorte que la direction de la tangente à la courbe, information locale dans  $M$ , devient dans l'espace des jets une information ponctuelle.

Pour simplifier l'explication des idées, nous assimilons l'espace des jets au fibré trivial de base le plan  $\mathbb{R}^2$  et d'espace total  $\mathbb{R}^3$  (ce qui est acceptable dans la mesure où l'on se cantonne à une analyse locale). L'avantage de ce fibré vectoriel est que l'espace tangent  $T\mathbb{R}^3$  s'identifie à la variété  $\mathbb{R}^3$  elle-même : tous nos objets vivent dans le même espace.

Supposons maintenant que nous *n'ayons pas accès* à ce qui se passe sur la base, et que nous cherchions à le connaître *uniquement* par l'intermédiaire de ce que nous observons dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Une question cruciale est alors de pouvoir distinguer, parmi toutes les courbes gauches tracées dans cet espace, celles qui résultent du relèvement de courbes continues tracées sur la base, de celles qui ne sont pas de tels relèvements.

Le problème est donc que toutes les sous-variétés de dimension 1 de  $J^1M = \mathbb{R}^3$

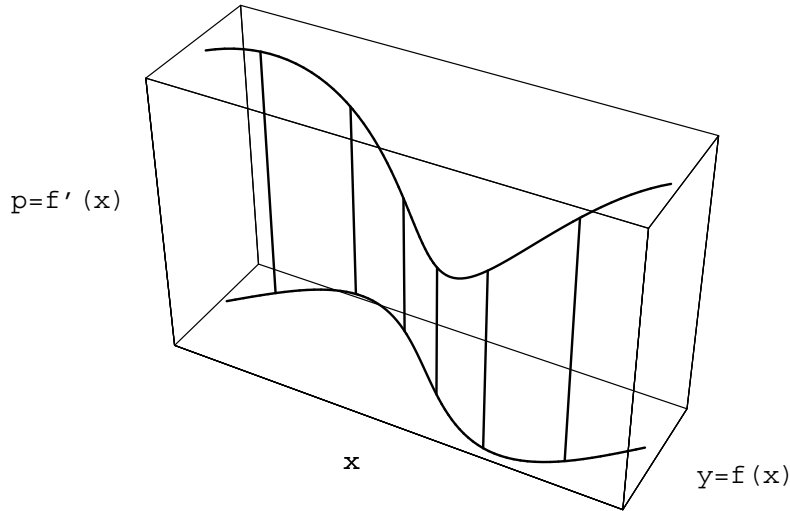


Figure 6: Une courbe plane et sa relevée legendrienne dans le fibré de contact.

ne sont pas, même localement, de la forme  $j^1\gamma$ , c'est-à-dire des relevées legendriennes de courbes tracées sur  $M$ . En particulier, une courbe de  $J^1M$  localement définie par  $y = f(x)$ ,  $p = g(x)$  ne sera de la forme  $j^1\gamma$  que si  $g(x) = f'(x)$ . D'où l'idée de caractériser géométriquement celles des courbes de  $J^1M$  qui s'écrivent localement comme des jets de courbe sur  $M$ .

Ceci se fait en calculant le vecteur tangent d'une courbe du type  $j^1\gamma$  en un point  $X = (x, y, p)$  de  $J^1M$ .  $\gamma$  peut s'écrire localement comme le graphe d'une fonction  $y = f(x)$ . Ainsi, la courbe  $j^1\gamma$  peut être paramétrée par  $x$ , sous la forme :  $X = (x, y, p) = (x, f(x), f'(x))$ . Ceci nous permet de calculer le vecteur tangent  $V$  à la courbe relevée  $j^1\gamma$  : ses coordonnées locales sont  $(1, p = f'(x), p' = f''(x))$ . Dans le fibré tangent à l'espace des jets  $J^1M$ , qui est une variété de dimension 6, ses coordonnées complètes sont donc  $V = (x, y, p, 1, p, p')$ .

On constate que la forme très particulière de ce vecteur  $V$  fait qu'il annule la forme différentielle  $\omega = dy - p dx$  sur  $J^1M$ . En effet, d'après la formule générale  $\omega(X) = \sum \omega_i X_i$ , on a  $\omega(V) = -p \cdot 1 + p + 0 \cdot p' = p - p = 0$ . Or, le noyau d'une forme différentielle sur un espace de dimension 3 est un plan.  $V$  appartient donc à un plan  $C_X$ , hyperplan tangent en  $X$  à  $J^1M$  (cf. figure 7).

Ainsi, les tangentes aux courbes de  $J^1M$  qui sont de la forme  $j^1\gamma$  appartiennent au champ de plans  $C : X \rightarrow C_X$ . Ce champ est appelé *structure de contact* sur  $J^1M = CM$  et la 1-forme différentielle  $\omega$  dont il est le noyau est appelée *forme de contact*. Puisque

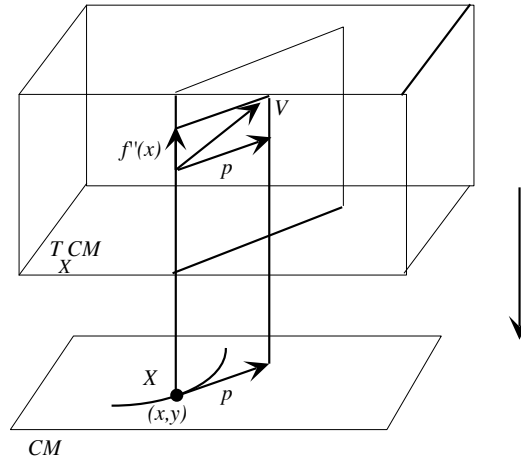


Figure 7: Schéma local du relèvement d'une courbe dans le fibré de contact.

les courbes de la forme  $j^1\gamma$  sont tangentes en tout point à ce champ de plans, on dit que ce sont *des courbes intégrales* de la structure de contact. (Cf. figure 8).

Réciproquement, considérons une courbe  $\Gamma$  de  $J^1M$  et paramétrons la sous la forme  $\Gamma = \{(x, y, p) \mid y = f(x), p = g(x)\}$ . Sur  $\Gamma$ , on a alors  $\omega = (f' - g)dx$  (car  $dy = f'dx$  et  $pdx = gdx$ ). Supposons que cette courbe soit intégrale de la structure de contact, i.e. que  $\omega = 0$  sur  $\Gamma$ . Alors  $f' = g$  et  $\Gamma$  est donc bien de la forme  $j^1\gamma$ .

On voit ainsi que la structure de contact est bien ce qui permet de discriminer les "relevées" de courbes planes parmi les autres courbes.  $\Gamma$  relève  $\gamma$  si, en chacun de ses points, la valeur de la troisième coordonnée  $p$  est égale à la pente de la tangente à  $\gamma$ . Or cette tangente n'est autre que la projection sur  $M$  de la tangente à  $\Gamma$ . Dès lors, en un point  $(x, y, p)$ , une courbe  $\Gamma$  issue d'un relèvement sera caractérisée par le fait que sa tangente en ce point a une projection sur le plan dont la direction est  $p$ . Ceci équivaut au fait que cette tangente appartient au plan vertical dont l'orientation horizontale est  $p$ . Ce plan n'est autre que le plan de contact au point  $(x, y, p)$ .

### 3.3 Le point de vue psychophysique

Nous venons de voir la formulation mathématique du problème de l'identification d'une courbe à partir de ses tangentes. Or ce problème se pose justement au système visuel puisque, comme nous l'avons vu, les contours sont analysés dans  $V1$  par un ensemble de détecteurs de segments orientés. Le cerveau possède donc un mécanisme capable d'intégrer les contours ainsi représentés, tout en évitant de regrouper les éléments n'appartenant pas à un même contour. La psychophysique peut contribuer à l'élucidation de ce processus en étudiant comment sont traitées les configurations correspondant à de

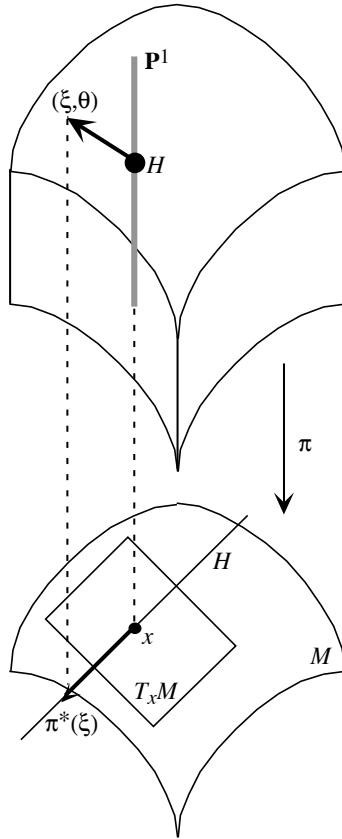


Figure 8: Interprétation de la structure de contact sur le fibré de contact  $CM$ . Soient  $x \in M$  et  $H$  une droite du plan tangent  $T_x M$ .  $H$  correspond à un point de la fibre  $\mathbb{P}^1 = C_x M$  au-dessus de  $x$ . Soit  $(\xi, \theta)$  un vecteur tangent à  $CM$  en  $H$ .  $(\xi, \theta)$  appartient au plan de contact de  $CM$  en  $H$  ssi la projection  $\pi^*(\xi)$  de la composante “horizontale”  $\xi$  est portée par  $H$ .



“bons” contours, par comparaison avec les autres. Nous allons voir que la proximité du problème psychologique et du problème formel permet d’interpréter mathématiquement les données expérimentales.

### 3.3.1 Aspects psychophysiques de l’intégration des contours

Une des plus fameuses lois gestaltistes est la loi (descriptive) dite de “bonne continuation”. Elle affirme que les sujets tendent à percevoir comme appartenant à un objet unique les éléments alignés selon une courbe continue et lisse, et inversement à interpréter les ruptures de continuité ou de dérivabilité comme des indices de séparation. Plusieurs expériences récentes permettent de préciser ce phénomène.

Ainsi, Field, Hayes et Hess ([1993]) ont mis au point un protocole expérimental original. Il consiste à présenter brièvement (en général pendant une seconde) à des sujets une grille composée de 256 éléments orientés (patches de Gabor <sup>14</sup>) tous similaires. Une fois sur deux, la grille contient 12 éléments alignés selon un chemin lisse, les autres éléments étant orientés aléatoirement (cf. figure 9). Dans l’autre moitié des cas, tous les éléments sont orientés au hasard. La tâche consiste pour le sujet à déterminer s’il voit ou non un alignement dans la grille présentée.

Les résultats obtenus révèlent que les sujets perçoivent bien l’alignement dans une grande variété de conditions.

Un point essentiel est que les éléments de la grille sont trop éloignés les uns des autres pour appartenir à un même champ récepteur dans  $V1$ . Or, spontanément, les sujets effectuent le regroupement de ces éléments. Donc un mécanisme automatique qui met en relation plusieurs champs récepteurs doit intervenir. Partant de ce constat, les auteurs suggèrent des prolongements théoriques sur lesquels nous reviendrons.

Dans un domaine voisin, Polat et Sagi ([1993]) se sont intéressés aux phénomènes de facilitation et de suppression dans les tâches de détection de cible. Utilisant, comme Field et ses collaborateurs, des stimuli du type patches de Gabor, ils ont étudié la détection d’un stimulus de faible contraste (cible) lorsqu’il est entouré par deux stimuli de fort contraste (masques), alignés avec lui. Faisant varier la distance entre la cible et les masques, ils ont mis en évidence un effet de facilitation de la détection, pour des distances comprises entre  $2\lambda$  et  $10\lambda$  (où  $\lambda$  est la longueur d’onde des stimuli), donc en dehors du champ récepteur classique.<sup>15</sup> Dans un autre article [1994a], ces auteurs ont comparé différentes configurations de positions et d’orientations relatives des stimuli : la facilitation intervient surtout lorsque l’orientation des trois stimuli coïncide avec celle de leur alignement, en accord avec les résultats de Field et de ses collaborateurs.

Les expériences menées récemment par l’équipe de Westheimer, lors d’une collaboration avec le physiologiste Gilbert (Kapadia et al. [1995], Gilbert et al. [1996]) ont confirmé ces résultats, en les précisant sur certains points. En utilisant de simples barres orientées comme stimuli, les auteurs ont observé une détection facilitée d’une cible de

---

<sup>14</sup>Cf. plus bas la note 16.

<sup>15</sup>En effet, la taille du champ récepteur d’une cellule sélective pour la longueur d’onde  $\lambda$  est typiquement  $2\lambda$ .

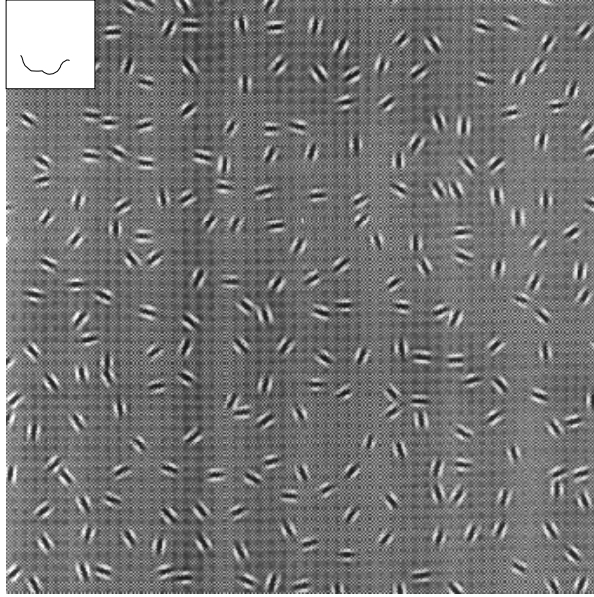


Figure 9: Pop out de patches de Gabor dans l'expérience de Field, Hayes et Hess. Le chemin saillant est indiqué dans le médaillon du coin supérieur gauche.

faible contraste lorsqu'elle est alignée avec une barre similaire de fort contraste. Deux résultats nous intéressent particulièrement :

1. lorsque les deux barres sont parallèles, un très petit écart par rapport à la situation de colinéarité fait décroître rapidement l'effet de facilitation, jusqu'à l'inverser,
2. l'effet de facilitation persiste lorsque l'on modifie l'orientation de la barre inductrice tout en préservant la continuité du chemin constitué par les deux barres; la facilitation décroît avec l'écart d'orientation entre les deux barres (ou, si l'on préfère, avec la courbure du chemin), pour s'annuler au-delà de 30 degrés.

### 3.3.2 Le modèle du champ d'association, sa formalisation mathématique

#### 3.3.2.1 Présentation du champ d'association

Dans l'article déjà cité, Field, Hayes et Hess ([1993]) ont mesuré les variations du taux de détection en fonction des positions spatiales et des orientations relatives des éléments formant le contour. Ils en concluent que la tendance des éléments à être perçus comme alignés peut être résumée par l'existence, autour de chaque élément, d'une région dans laquelle d'autres éléments tendent à être perçus comme groupés. Cette région, baptisée

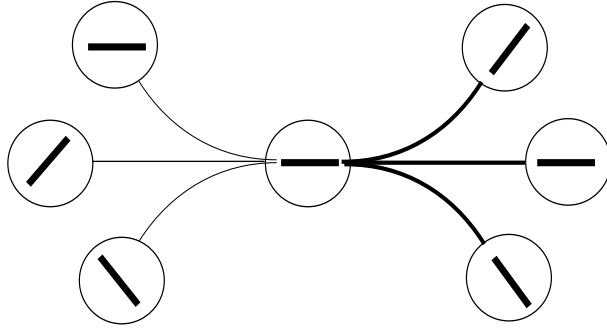


Figure 10: Les conditions d'association d'après Field, Hayes et Hess.

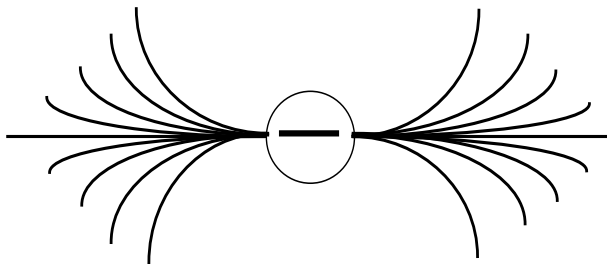


Figure 11: Schéma du champ d'association d'après Field, Hayes et Hess.

*champ d'association* est définie par des conditions conjointes de position et d'orientation. La forme du champ d'association est décrite dans les figures 10 et 11.

Il n'est pas possible de donner avec précision la taille et les paramètres du champ d'association, qui dépendent sans doute des conditions expérimentales. Cependant, et c'est capital, le champ d'association couvre une zone plus étendue qu'un champ récepteur de cellule corticale. Nous y reviendrons lorsque nous nous poserons la question de l'implémentation neuronale. Par ailleurs, le demi angle au sommet du cône que forment les lignes du champ d'association est de l'ordre de 60-70 degrés (au-delà, les sujets semblent incapables de percevoir l'alignement).

Un inconvénient de cette représentation est qu'elle est de type "tout ou rien" : étant donné un élément orienté, un second élément sera perçu comme aligné avec lui si et seulement si il se situe sur une des lignes du champ d'association et si son orientation est tangente à cette ligne. La réalité psychophysique est évidemment plus continue. D'abord, la capacité de détection décroît nettement avec l'angle entre les deux éléments, pour s'annuler vers 80 degrés. De même, il existe une dépendance (étonnamment faible il est vrai) vis-à-vis de la distance entre éléments consécutifs. Enfin, une tolérance est admise quant à la tangence de l'élément à la ligne de champ : la détection reste correcte pour un écart d'environ 15 degrés, et tend à s'annuler pour un écart d'environ 30 degrés.

### 3.3.2.2 Une version discrétisée de la structure de contact

Le champ d'association a pour objet de décider localement si deux éléments orientés peuvent ou non être perçus comme alignés selon une courbe plane. Exprimé dans le formalisme géométrique que nous avons introduit dans la section précédente, ceci revient à considérer deux points du plan et deux droites passant chacune par un des points, et à se demander s'il existe (au moins) une courbe qui passe par les deux points en y admettant les deux droites pour tangentes. Dans le fibré de contact, ceci équivaut à se donner deux points (i.e. deux éléments de contact) dans deux fibres distinctes, et à rechercher s'il existe une courbe (gauche) dans le fibré qui soit une courbe relevée et qui passe par les deux points.

La réponse à ce problème est trivialement positive : il existe toujours une infinité de courbes qui passent par deux points donnés et y ont des tangentes données. A distance finie, le problème géométrique est sans intérêt. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le problème intéressant de recherche d'une courbe à partir de ses tangentes est infinitésimal, et il donne lieu à la structure de contact. Mais justement, et nous y avons insisté, le système visuel n'a pas accès à la structure infinitésimale de l'espace, il est par nature discret. Dès lors, le problème de l'intégration des contours tel qu'il se pose au système visuel ne sera pas adéquatement modélisé par le problème géométrique trivial précédent, mais plutôt par sa version discrétisée. La solution en sera alors *un équivalent discret de la structure de contact*.

Ceci suppose que l'on se donne un pas de discrétisation, un déplacement "élémentaire" : c'est l'approximation, classique en physique, de  $dx$  (variation infinitésimale) par  $\Delta x$  (variation finie). Autrement dit, dans un vocabulaire plus classique en théorie de la vision, nous devons nous placer à une *échelle* particulière. A cette échelle, comme nous

l'avons vu, un domaine dont le diamètre est égal à l'échelle est assimilable à un point, et aucune structure de taille inférieure n'est prise en compte.

Mais quelle échelle choisir pour formaliser le problème de l'intégration ? Le système visuel possède la capacité de traiter le signal rétinien à plusieurs échelles simultanément. Or l'information locale (par exemple la direction de tangence) peut être différente pour chacune d'elles. Ceci est particulièrement visible dans le cas d'un bord fractal. L'intégration des traitements effectués aux différentes échelles reste mal connue, mais Field et ses collaborateurs font une hypothèse intéressante : le système visuel pourrait résoudre le problème de la continuité séparément à chaque échelle.<sup>16</sup> Dès lors, le champ d'association correspond à la solution du problème à une échelle donnée.

Dans notre modèle, cette hypothèse signifie que le pas de discrétisation est fixé. Nous le noterons  $\Delta s$ . Il s'agit d'une discrétisation des coordonnées spatiales, à laquelle il nous faut ajouter celle qui concerne l'orientation,  $\Delta p$ . En effet, pas plus qu'on ne dispose d'une cellule pour chaque point mathématique du plan, on ne dispose d'une cellule orientée pour chaque valeur de l'orientation en un point du champ visuel. La décharge d'une cellule sélective à l'orientation dans l'aire V1 ne donne pas la valeur d'une orientation mais le résultat d'une convolution avec un profil récepteur de largeur finie. L'incertitude qui en résulte se traduit par la largeur de bande de la courbe de sélectivité orientationnelle.

Nous nous plaçons donc dans l'espace à trois dimensions de coordonnées  $(x, y, p)$ , c'est-à-dire dans le fibré de contact. Nous considérons une courbe  $\Gamma$  dans cet espace, définie par les équations <sup>17</sup> :  $y = f(x)$ ,  $p = g(x)$ . Comme nous l'avons vu, cette courbe est la relevée d'une courbe plane si et seulement si l'on a en tout point :  $p = g(x) = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ . Cette équation différentielle définit la structure de contact.

Pour obtenir la version discrétisée de cette équation, considérons la projection  $\gamma$  de  $\Gamma$  sur le plan  $(x, y)$ , d'équation  $y = f(x)$ . Soient deux points  $A$  et  $B$  sur  $\gamma$  qui sont "consécutifs" au sens où  $d(A, B) = \Delta s$  ( $d$  est la distance euclidienne sur le champ visuel <sup>18</sup>). Notons  $\theta$  l'angle que fait le vecteur  $AB$  avec l'axe des abscisses. On a (cf. figure 12) :

$$x_B - x_A = \Delta s \cdot \cos \theta \text{ et } y_B - y_A = \Delta s \cdot \sin \theta.$$

Dans le cadre discret, la tangente à la courbe  $\gamma$  au point  $A$  peut être approximée par la droite  $AB$ , ce qui revient à approximer la dérivée  $f'(x)$  par le rapport  $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = tg\theta$ . Dans le fibré à trois dimensions, l'équation correspondant à la structure de contact au point  $A$  prend la forme discrétisée suivante :

---

<sup>16</sup>C'est une des raisons pour lesquelles ils utilisent dans leur expérience des éléments orientés qui sont "passe-bande" dans le domaine spatial (c'est-à-dire que leur transformée de Fourier est un pic étroit), en l'occurrence des patches de Gabor. A l'inverse, les segments de droite utilisés par d'autres expérimentateurs (par exemple Kapadia et al. [1995]) présentent l'inconvénient de solliciter des cellules sensibles à différentes fréquences spatiales. Cependant, le lien entre échelle et fréquence spatiale reste pour nous à élucider.

<sup>17</sup>Nous choisissons cette forme qui simplifie l'exposé. Les résultats sont identiques pour des courbes qui ne possèdent pas une expression locale de cette forme.

<sup>18</sup>Le système a accès à cette distance via la covariance des décharges neuronales.

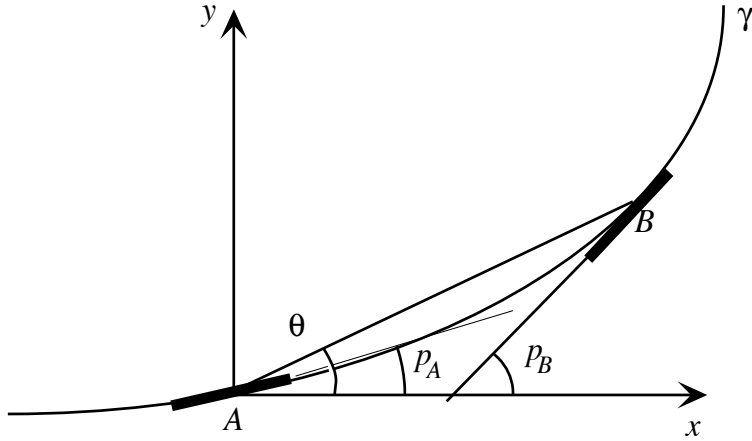


Figure 12: Discretisation de la structure de contact.

$$|p_A - tg\theta| \leq \Delta p.$$

L'inconvénient de cette inéquation est son manque de symétrie : elle ne fait pas intervenir l'orientation au point  $B$ . Remarquons qu'une inégalité similaire peut être écrite en ce point :  $|p_B - tg\theta| \leq \Delta p$ . En sommant ces deux inéquations, on obtient la forme symétrique :

$$|p_A - tg\theta| + |p_B - tg\theta| \leq 2\Delta p. \quad (1)$$

L'avantage de cette dernière forme est qu'elle permet de compenser une mauvaise orientation en l'un des deux points par une orientation en l'autre point très proche de celle du segment qui les joint.

Nous aboutissons alors au résultat espéré lorsque nous représentons graphiquement les éléments orientés consécutifs admissibles (au sens de l'inéquation (1)) à partir d'un élément orienté donné : ils se distribuent selon le schéma de la structure d'association de Field, Hayes et Hess. La valeur à donner au seuil  $2\Delta p$  pour mettre en correspondance les deux schémas est de l'ordre de  $tg(\pi/6)$ . Mieux, notre inégalité rend compte des tolérances constatées expérimentalement lorsque l'on s'écarte légèrement de l'orientation de la ligne de champ.

### 3.3.2.3 Interprétation

Pourquoi recourir à ce formalisme un peu compliqué dans un fibré de dimension 3 alors que le problème de la continuité s'exprime de façon très simple sur la variété de base, qui est de dimension 2 ? La réponse est que, justement, cette variété de base n'est pas implémentée en tant que telle dans le cortex visuel : au-delà du corps genouillé latéral, le

système visuel travaille toujours dans des espaces plus grands (des espaces de phases). Nous avons déjà insisté sur les avantages computationnels que le système trouve à manipuler des objets intrinsèquement locaux, par exemple les tangentes, comme objets ponctuels. La contrepartie est l’agrandissement de l’espace du problème, assorti de l’imposition de contraintes supplémentaires (c’est le principe du formalisme hamiltonien en mécanique classique). C’est ainsi qu’est organisé le cortex visuel primaire : plutôt que de se placer dans le plan visuel et de calculer en chaque point la tangente (opération multilocale), celle-ci est traitée comme troisième coordonnée ; la structure de contact exprime la contrainte qui distingue, parmi les courbes traitées dans l’espace agrandi, celles qui correspondent à des courbes tracées sur la base.

Ceci est bien illustré par le type de stimuli choisi par Field et ses collaborateurs (et par d’autres expérimentateurs). La grille présentée aux sujets est conçue de telle sorte qu’il y a un élément orienté dans chaque case, c’est-à-dire en chaque “point” du champ visuel à l’échelle de la grille. Donc, *dans le fibré discrétisé à cette échelle, le stimulus induit une section* (non continue en général) : il assigne une valeur d’orientation (ou un 1-jet si l’on préfère) en chaque “point”, il sélectionne un élément dans chaque fibre. Donc en se déplaçant dans la base selon un chemin continu, on se déplace dans le fibré selon un chemin, en général discontinu (puisque  $p$  varie aléatoirement).

Lorsque dans deux fibres consécutives sur un tel chemin, les valeurs de l’orientation sont voisines (leur différence est inférieure au pas de discrétisation  $\Delta p$ ), les deux éléments constituent l’amorce d’une courbe continue dans le fibré de contact.<sup>19</sup> Compte tenu du pas de discrétisation assez élevé, la probabilité d’obtenir ainsi à partir d’éléments choisis aléatoirement des courbes longues de plusieurs unités n’est pas faible. Mais, comme nous l’avons vu lors de l’étude mathématique précédente, rares parmi ces courbes sont celles qui sont des *relevées* de courbes planes. Ces dernières vérifient de surcroît la condition  $p = \frac{dy}{dx}$ , c’est-à-dire qu’elles sont intégrales de la structure de contact. Un exemple de courbe continue mais non intégrale de la structure de contact est fourni par l’expérience 2 de l’article de Field, Hayes et Hess, où l’orientation des éléments est choisie orthogonale à celle de la courbe (et varie donc continûment).

En résumé, on peut scinder en deux parties la sélection opérée par la structure de contact :

1. ne retenir que les chemins continus parmi ceux que l’on peut suivre dans le fibré muni d’une section,
2. parmi les chemins continus, sélectionner ceux qui sont des relevés de courbes planes.

---

<sup>19</sup>Ces courbes ne sont en général pas perçues comme continues par le système visuel. Notre point de vue est ici celui du mathématicien, qui voit toutes les courbes tracées dans le fibré. Le sujet, lui, n’a pas accès à la topologie de sa propre aire V1 vue comme variété de dimension 3. Parmi toutes les courbes continues dans cette variété, il ne perçoit comme continues que les courbes correspondant à des relevées de courbes planes : grâce au “filtre” constitué par la structure de contact, le sujet ne perçoit qu’une topologie de dimension 2 alors que son système visuel travaille effectivement en dimension 3.

### 3.3.2.4 Comparaison avec d'autres données

Nous pensons que le modèle du champ d'association tel que nous l'interprétons rend également compte des résultats obtenus par Polat et Sagi, ainsi que par Westheimer. La zone de facilitation induite par un stimulus orienté coïncide dans une large mesure avec le champ d'association. Ce résultat milite en faveur d'une interprétation locale des phénomènes d'intégration à plus grande échelle décrits par Field et ses collaborateurs : la zone de facilitation est la trace locale du mécanisme d'intégration des contours. Dans notre vocabulaire géométrique, nous pourrions dire que cette zone de facilitation matérialise le plan de contact au "point" du fibré associé au stimulus orienté.

Notons cependant que, si les résultats présentés ici sont compatibles du point de vue de l'architecture qualitative des interactions spatiales, les valeurs quantitatives diffèrent. Les variations individuelles jouent sans doute un rôle, de même que les différences entre protocoles expérimentaux (notamment le fait que Westheimer utilise de simples barres plutôt que des patches de Gabor). Cependant, les tolérances angulaires mesurées par Field, Hayes et Hess d'une part (qui observent encore une intégration alors que les orientations des éléments consécutifs diffèrent de plus de  $60^\circ$ ), et Polat et Sagi d'autre part (selon qui aucune facilitation ne subsiste au-delà de  $30^\circ$ ) semblent trop différentes pour ne pas suggérer une autre explication.

Une possibilité est que, au-delà de  $30^\circ$  d'écart entre éléments consécutifs, le mécanisme impliqué dans l'intégration de contour soit de nature indirecte : le principe de facilitation mis en évidence par Polat et Sagi traduirait *une interaction élémentaire entre détecteurs* (nous ne mettons pas derrière ce mot un sens neuronal précis) jusqu'à  $30^\circ$ , et les effets observés au-delà résulteraient d'un enchaînement d'interactions élémentaires. Cette idée est à rapprocher de résultats ultérieurs de Polat et Sagi ([1994b]), mettant en évidence, après entraînement des sujets, des cascades d'interactions spatiales.

### 3.3.2.5 Remarques complémentaires

Un effet important de la discrétisation de la structure de contact est qu'elle induit une *limitation de la courbure* admissible par le système visuel à une échelle donnée. En effet, pour un changement d'orientation supérieur à une soixantaine de degrés, deux éléments consécutifs ne sont plus perçus comme alignés : à l'échelle considérée, la courbe présente une discontinuité de sa tangente. Ceci ne signifie pas qu'il soit impossible de voir les courbes présentant des changements d'orientation plus importants, mais il faut alors mobiliser des échelles plus fines du système visuel. On fait par conséquent intervenir un pas de discrétisation plus petit, et la variation brutale de l'orientation sera divisée en plusieurs variations admissibles. Dans le cas où le problème demeure aux échelles les plus basses, on est en présence d'un coin (discontinuité de la tangente et courbure infinie). Le traitement d'une telle situation mobilise certainement des mécanismes différents dans le système visuel (cellules "end-stopped" notamment).

Enfin, nous avons critiqué l'aspect binaire du modèle du champ d'association : l'association entre deux éléments consécutifs est possible ou impossible, sans moyenne mesure. Or la réalité psychophysique est évidemment plus continue, comme en témoignent les



courbes expérimentales obtenues par les auteurs : l'association est plus ou moins facile (ou, si l'on préfère, plus ou moins probable) selon les positions et les orientations relatives des éléments consécutifs. Nous devons reconnaître que l'inégalité (1) possède le même défaut que le schéma proposé par Field et ses collaborateurs. Cependant, on peut aisément adapter notre formalisme à une version continue ou probabiliste du champ d'association. Plutôt que d'être comparée à un seuil, la fonction  $|p_A - tg\theta| + |p_B - tg\theta|$  peut être vue comme *une mesure de la probabilité d'association entre deux éléments* (versant psychophysique), ou comme l'activation de l'un des deux éléments induite par son homologue (versant plus biologique, que nous abordons maintenant).

## 3.4 La question de l'implémentation physiologique

### 3.4.1 Introduction

Nous n'avons jusqu'ici abordé la question de l'intégration des contours par le système visuel que du seul point de vue psychophysique. Or les résultats obtenus depuis une vingtaine d'années en anatomie et en physiologie permettent d'entrevoir les mécanismes neuronaux qui sous-tendent ces phénomènes. Il faut dire que le tableau classique du fonctionnement de l'aire V1 que nous avons dressé dans la première section a été sérieusement remis en cause dans les années 80. En particulier, avec la découverte de connexions (dites *horizontales* ou *tangentielles*) entre les hypercolonnes de V1, certains spécialistes ont suggéré que les mécanismes d'intégration et de liage entre informations localisées pourraient commencer très tôt dans le système visuel, contrairement à l'opinion majoritaire à l'époque.<sup>20</sup> C'est sur cette question que nous allons nous concentrer pour conclure, sans prétendre refléter exactement la très abondante littérature parue sur ce sujet, mais en restant dans l'optique du modèle que nous avons introduit.

### 3.4.2 Les connexions horizontales implémentent la structure de contact

#### 3.4.2.1 Connexions horizontales et champ d'association

Dans l'article de Field, Hayes et Hess ([1993]) que nous avons déjà largement commenté, les auteurs font part de leurs "spéculations physiologiques" concernant les possibilités d'implémentation du champ d'association. Les connexions tangentielles constituent évidemment un substrat idéal pour ce type d'interactions locales, d'autant qu'elles relient préférentiellement des neurones de propriétés orientationnelles voisines, en conformité avec le schéma du champ d'association. Mieux, certains résultats anatomiques (Fitzpatrick et al. [1993]) et physiologiques (Nelson et Frost [1985], Kapadia et al. [1995]) tendent à montrer que ces connexions s'effectuent préférentiellement le long de l'axe du champ récepteur, c'est-à-dire *selon l'orientation préférée du neurone*. Ceci

---

<sup>20</sup>Voir par exemple Gilbert et Wiesel [1979], [1989], Rockland et Lund [1983], Mitchison et Crick [1982], Grinvald et al. [1994]. Ces travaux ont remis en question la notion traditionnelle de champ récepteur (Gilbert [1992], Gilbert et al. [1996]).

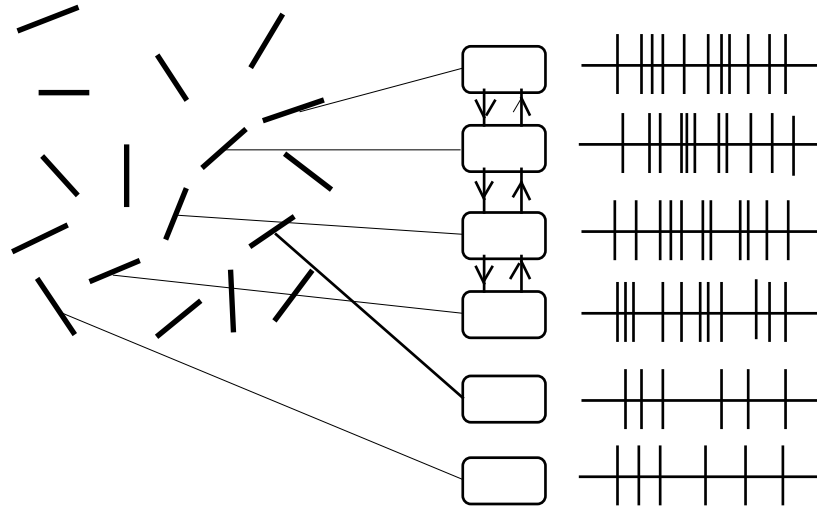


Figure 13: Résumé de l'hypothèse classique appliquée au champ d'association (les flèches verticales représentent les connexions tangentiellles associatives).

correspondrait aux attentes théoriques (Mitchison et Crick [1982]) et renforcerait l'hypothèse du champ d'association. Ce mécanisme suppose des connexions excitatrices dans la direction privilégiée, mais des connexions inhibitrices dans les directions rendant l'association difficile ou impossible (lignes minces de la figure 10) pourraient également jouer un rôle complémentaire.

Selon nous, ce rapprochement peut s'accorder avec les deux modes d'action proposés pour les connexions horizontales. Soit, conformément aux conceptions classiques (que défend par exemple Charles Gilbert), ces connexions ont pour fonction d'élever le taux de décharge du neurone cible (ou de l'abaisser dans le cas des synapses inhibitrices vers les neurones détecteurs de segments non alignés). Alors, un mécanisme de renforcement mutuel entre neurones positionnés sur un alignement pourrait expliquer la saillance observée, car ces neurones déchargeraient davantage que leur homologue détectant un élément du fond, orienté aléatoirement (cf. figure 13). Notons que ce modèle coopératif permet une prédiction, expérimentalement vérifiable : la saillance relative des éléments du contour devrait augmenter avec sa longueur. Dans le même ordre d'idées, un mécanisme de réverbération dans un circuit bouclé (Polat et Sagi [1994b]) pourrait expliquer la saillance accrue des contours fermés (Kovacs et Julesz [1993]).

Soit, selon le paradigme alternatif (issu des travaux de von der Malsburg et Abeles, puis des expériences de Gray et Singer) les neurones de l'alignement synchronisent leurs décharges (éventuellement oscillantes), via les connexions horizontales (cf. figure 14). Si, comme le proposent les défenseurs de cette hypothèse, la cohérence temporelle des décharges se traduit par l'unification des traits que les neurones codent, les éléments alignés selon un contour lisse seront perçus comme un tout, ce qui explique leur détection

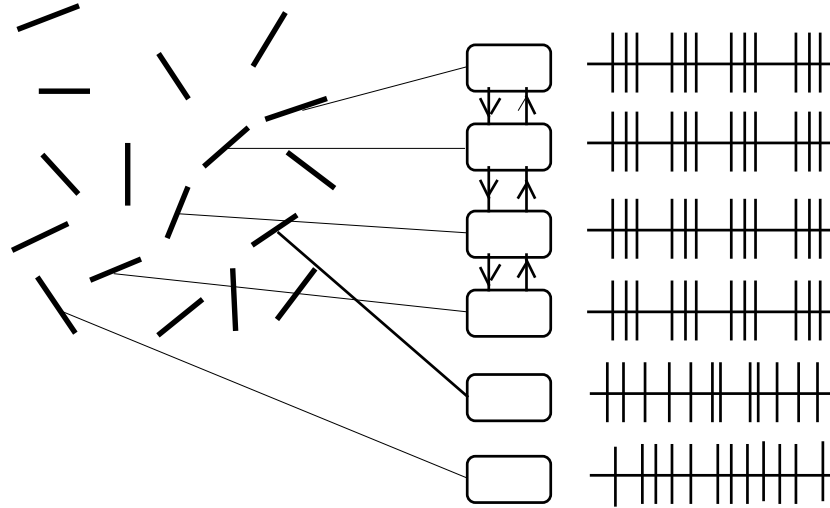


Figure 14: Résumé de l’hypothèse alternative appliquée au champ d’association (les flèches verticales représentent les connexions tangentielles associatives).

plus facile.

### 3.4.2.2 Signification géométrique

Nous avons déjà interprété le champ d’association comme la solution d’un problème géométrique. Si les spéculations précédentes s’avéraient justifiées, les connexions horizontales constitueraient l’implémentation de cette solution, qui serait ainsi “précâblée” dans le système visuel. Pour reprendre la taxinomie de Marr ([1982]), la structure de contact constituerait le niveau computationnel du système, le champ d’association le niveau algorithmique, et les connexions horizontales l’implémentation physique.

La structure du câblage du système visuel correspond en fait à la structure géométrique du monde naturel : les courbes longues et lisses y sont plus fréquentes, et écologiquement plus pertinentes, que les segments courts d’orientation aléatoire. Il est donc avantageux de posséder un système visuel spécialisé dans le traitement de ces courbes, et possédant une géométrie intrinsèque qui leur réponde (cf. Petitot [1990]). Cette mise en relation de la géométrie des connexions du cortex visuel avec celle du monde visuel semble, chez certaines espèces, se réaliser au cours des premiers mois d’expérience visuelle, pendant lesquels les connexions horizontales sont sélectionnées et stabilisées (Löwel et Singer [1992]). Géométriquement, c’est donc à partir d’exemples de courbes relevées qu’est construit le champ de contact du fibré que constitue l’aire V1.

### 3.5 Conclusion

Le champ d'association est l'un des très rares modèles d'intégration des contours issu du milieu des spécialistes de la vision naturelle. Nous en avons proposé une modélisation en termes de géométrie différentielle. Ce type de formalisation se retrouve également dans d'autres modèles, plus nombreux, proposés en vision artificielle. Il serait intéressant de comparer sur ce point la vision naturelle et la vision artificielle parce que les problèmes à résoudre sont les mêmes et que certains concepteurs suggèrent parfois une plausibilité biologique pour leurs algorithmes.

Nous avons vu par exemple que les expériences de Field, Hayes et Hess mettent en évidence la saillance (“pop-out”) des contours suffisamment réguliers dans un environnement aléatoire. Ce phénomène de saillance perceptive a été étudié en vision “computationnelle” par Sha’ashua et Ullman ([1988]). Comme le soulignent ces auteurs, la saillance est susceptible d’avoir un grand intérêt en vision, puisqu’elle permet de concentrer d’emblée les opérations de segmentation et de reconnaissance sur les zones importantes de la scène visuelle.

Une autre comparaison intéressante pourrait être faite avec la théorie développée par Steven Zucker dans deux articles (Zucker et al. [1988], Parent et Zucker [1989]). Pour effectuer la détection des courbes, Zucker propose une estimation grossière de leur structure géométrique en étudiant la compatibilité des tangentes détectées. Cette dernière est évaluée soit directement à partir de l’écart d’orientation entre les tangentes (Parent et Zucker [1989]), soit par l’intermédiaire d’une mesure systématique de la courbure locale au moyen de détecteurs spécialisés <sup>21</sup> (Zucker et al. [1988]).

Le modèle de Zucker est assez riche, et va au-delà du champ d’association tel que nous l’avons modélisé. La comparaison est en revanche possible sur la question de la compatibilité des éléments de droite, c’est-à-dire de leur probabilité d’être tangents à une même courbe, donc d’être “associés”, selon le vocabulaire utilisé jusqu’ici. Partant de la notion de cocircularité, Zucker parvient à un critère de compatibilité des couples de tangentes qui est très proche du champ d’association.

Il serait également intéressant d’étudier les rapports du champ d’association avec le processus de coopération et de compétition utilisé dans les célèbres modèles développés par Grossberg et Mingolla ([1985a], [1985b], [1987]). Ceux-ci introduisent en particulier une coopération entre éléments alignés, matérialisée par des “cellules dipôles” orientées et dotées de champs récepteurs de grande taille, qui sont conçues pour pouvoir prendre en compte les alignements approximatifs. Ainsi, le poids d’un élément orienté dans le champ récepteur d’une cellule dipôle dépend de ses position et orientation relatives. L’ensemble des poids ainsi calculés dessine un *champ de coopération*, dont la forme exacte dépend des paramètres choisis (Grossberg et Mingolla [1985b]). La ressemblance avec le champ d’association de Field, Hayes et Hess ([1993]) est frappante, au point que

---

<sup>21</sup>Dans le système visuel des mammifères, ce rôle pourrait être joué par les cellules à accord de distance (“end-stopped”), ainsi que nous l’avons vu plus haut (voir Dobbins et al. [1987], [1989]). Mais d’autres mécanismes de mesure de la courbure sont envisageables (voir par exemple Koenderink et Richards [1988], Wilson et Richards [1989]).

Lesher et Mingolla ([1993]) y voient un seul et même mécanisme.

Une autre application des modèles de fibration et de structure de contact concerne le problème des *contours subjectifs*. D'essence locale, les mécanismes d'association ont en effet des conséquences sur la forme globale des contours. Celles-ci sont particulièrement intéressantes pour les contours subjectifs extrapolés dans le système visuel à partir de données rétiniennes lacunaires.<sup>22</sup> On peut envisager des principes d'extrapolation en considérant des courbes qui possèdent une signification géométrique naturelle dans le fibré des 1-jets parce qu'elles y sont solutions d'un problème variationnel. Nous y reviendrons dans un autre article.

---

<sup>22</sup>Cf. par exemple Dresp et Grossberg [1997], Petry et Meyer [1987], Mumford [1992].

## Bibliographie

- ALBRECHT D.G., DE VALOIS R.L., THORELL L.G. (1979), Visual cortical neurons : are bars or gratings the optimal stimuli ?, *Science*, vol. 207, pp. 88-90.
- BONHOEFFER T., GRINVALD A. (1991), Iso-orientation domains in cat visual cortex are arranged in pinwheel-like patterns, *Nature*, vol. 353, pp. 429-431.
- BUSER P., IMBERT M. (1987), *Vision*, Hermann.
- DOBBINS A., ZUCKER S.W., CYNADER M.S. (1987), Endstopped neurons in the visual cortex as a substrate for calculating curvature, *Nature*, vol. 329, pp. 438-441.
- DOBBINS A., ZUCKER S.W., CYNADER M.S. (1989), Endstopping and curvature, *Vision Research*, vol. 29, n°10, pp. 1371-1387.
- DRESP B., GROSSBERG S. (1997), Contour integration across polarities and spatial gaps : from local contrast filtering to global grouping, *Vision Research*, vol. 37, n°7, pp. 913-924.
- DURBIN R., MITCHISON G. (1990), A dimensional reduction framework for understanding cortical maps, *Nature*, vol. 343, pp. 644-647.
- ECKHORN R., BAUER R., JORDAN W., BROSCHE M., KRUSE W., MUNK M., REITBOECK H.J. (1988), Coherent oscillations : a mechanism of feature linking in the visual cortex ?, *Biological Cybernetics*, vol. 60, pp. 121-130.
- ENGEL A.K., KÖNIG P., SINGER W. (1991), Direct physiological evidence for scene segmentation by temporal coding, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 88, pp. 9136-9140.
- FIELD D.J. (1987), Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells, *Journal of the Optical Society of America, A*, vol. 4, n°12, pp. 2379-2394.
- FIELD D.J., HAYES A., HESS R.F. (1993), Contour integration by the human visual system : evidence for a local "association field", *Vision Research*, vol. 33, n°2, pp. 173-193.
- FITZPATRICK D., ZHANG Y., SCHOFIELD B.R., MULLY E.C. (1993), Orientation selectivity and the topographic organization of horizontal connections in striate cortex, *Soc. Neurosci. Abstr.*, vol. 19, p 424.
- FLORACK L.M.J., TER HAAR ROMENY B.M., KOENDERINK J.J., VIERGEVER M.A. (1992), Scale and the differential structure of images, *Image and Vision Computing*, vol. 10 n°6, pp. 376-388.
- GAMKRELIDZE R.V. (Ed.) (1991), Geometry 1, *Encyclopædia of Mathematical Sciences*, Springer Verlag, Berlin.
- GILBERT C.D. (1992), Horizontal integration and cortical dynamics, *Neuron*, vol. 9, pp. 1-13.
- GILBERT C.D. (1994), Circuitry, architecture and functional dynamics of visual cortex, in *Higher order processing in the visual system*, Ciba Foundation Symposium 184, pp. 35-62.
- GILBERT C.D., DAS A., ITO M., KAPADIA M., WESTHEIMER G. (1996), Spatial integration and cortical dynamics, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 93, pp.

615-622.

GILBERT C.D., WIESEL T.N. (1979), Morphology and intracortical projections of functionally identified neurons in cat visual cortex, *Nature*, vol. 280, pp. 120-125.

GILBERT C.D., WIESEL T.N. (1989), Columnar specificity of intrinsic horizontal and corticocortical connections in cat visual cortex, *Journal of Neuroscience*, vol. 9, N°7, pp. 2432-2442.

GILBERT C.D., WIESEL T.N. (1992), Receptive field dynamics in adult primary visual cortex, *Nature*, vol. 356, pp. 150-152.

GRAY C.M., SINGER W. (1989), Stimulus-specific neuronal oscillations in orientation columns of cat visual cortex, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 86, pp. 1698-1702.

GRAY C.M., KÖNIG P., ENGEL A.K., SINGER W. (1989), Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties, *Nature*, vol. 338, pp. 334-337.

GRINVALD A., LIEKE E.E., FROSTIG R.D., HILDESHEIM R. (1994), Cortical point-spread function and long-range lateral interactions revealed by real-time optical imaging of macaque monkey primary visual cortex, *Journal of Neuroscience*, vol. 14, n°5, pp. 2545-2568.

GROSSBERG S., MINGOLLA E. (1985a), Neural dynamics of form perception : boundary completion, illusory figures and neon color spreading, *Psychological Review*, vol. 92, pp. 173-211.

GROSSBERG S., MINGOLLA E. (1985b), Neural dynamics of perceptual grouping : textures, boundaries and emergent segmentation, *Perception and Psychophysics*, vol. 38, pp. 141-171.

GROSSBERG S., MINGOLLA E. (1987), The role of illusory contours in visual segmentation, in *The Perception of Illusory Contours*, in PETRY S. et MEYER G.E. eds, Springer, pp. 116-125.

HAMY H. (1997), *Méthodes géométriques multi-échelles en vision computationnelle*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique.

HOFFMAN W.C. (1985), Some reasons why algebraic topology is important in neuropsychology : perceptual and cognitive systems as fibrations, *International Journal of Man-Machine Studies*, vol. 22, pp. 613-650.

HOFFMAN W.C. (1989), The visual cortex is a contact bundle, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 32, pp. 137-167.

HUBEL D.H. (1988), *Eye, Brain and Vision*, Scientific American Library.

KAPADIA M.K., ITO M., GILBERT C.D., WESTHEIMER G. (1995), Improvement in visual sensitivity by changes in local context : parallel studies in human observers and in V1 of alert monkeys, *Neuron*, vol. 15, pp. 843-856.

KOENDERINK J.J. (1984a), Simultaneous order in nervous nets from a functional standpoint, *Biological Cybernetics*, vol. 50, pp. 35-41.

KOENDERINK J.J. (1984b), The structure of images, *Biological Cybernetics*, vol. 50, pp. 363-370.

KOENDERINK J.J. (1988), Operational significance of receptive field assemblies, *Biological Cybernetics*, vol. 58, pp. 163-171.

- KOENDERINK J.J. (1990), The brain as a geometry engine, *Psychological Research*, vol. 52, pp. 122-127.
- KOENDERINK J.J., RICHARDS W.A. (1988), Two-dimensional curvature operators, *Journal of the Optical Society of America*, vol. 5, n°7, pp. 1136-1141.
- KOENDERINK J.J., VAN DOORN A.J. (1987), Representation of local geometry in the visual system, *Biological Cybernetics*, vol. 55, pp. 367-375.
- KOVACS I., JULESZ B. (1993), A closed curve is much more than an incomplete one : effect of closure in figure-ground segmentation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 90, pp. 7495-7497.
- LESHER G.W., MINGOLLA E. (1993), The role of edges and line-ends in illusory contour formation, *Vision Research*, vol. 33, n°16, pp. 2253-2270.
- LINSKER R. (1986), From basic network principles to neural architecture : emergence of orientation columns, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 83, pp. 8779-8783.
- LIVINGSTONE M.S., HUBEL D.H. (1984), Specificity of intrinsic connections in primate primary visual cortex, *Journal of Neuroscience*, vol. 4, n°11, pp. 2830-2835.
- LÖWEL S., SINGER W. (1992), Selection of intrinsic horizontal connections in the visual cortex by correlated neuronal activity, *Science*, vol. 255, pp. 209-212.
- MARR D. (1982), *Vision*, Freeman.
- MITCHISON G., CRICK F. (1982), Long axons within the striate cortex : their distribution, orientation, and patterns of connection, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 79, pp. 3661-3665.
- MUMFORD D. (1992), Elastica and computer vision, in *Algebraic Geometry and Applications*, C. BAJAJ ed., Heidelberg, Springer Verlag.
- NELSON J.I., FROST B.J. (1985), Intracortical facilitation among co-oriented, co-axially aligned simple cells in cat striate cortex, *Experimental Brain Research*, vol. 61, pp. 54-61.
- NICHOLLS J.G., MARTIN A.R., WALLACE B.G. (1992), *From Neuron to Brain*, Sinauer Associates.
- PARENT P., ZUCKER S.W. (1989), Trace inference, curvature consistency, and curve detection, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. II, n°8, pp. 823-839.
- PETITOT J. (1990), Le physique, le morphologique, le symbolique : remarques sur la vision, *Revue de Synthèse*, n° 1-2, pp. 139-183.
- PETITOT J. (1992), *Physique du Sens*, Editions du CNRS.
- PETITOT J. (1993), Phénoménologie naturalisée et morphodynamique : la fonction cognitive du synthétique a priori, *Intellectica*, vol. 17, pp. 79-126.
- PETITOT J. (1995), Sheaf mereology and Husserl's morphological ontology, *Int. J. Human-Computer Studies*, vol. 43, pp. 741-763.
- PETITOT J. (1996), Sheaf merology and space cognition, *La Nuova Critica*, vol. 29, pp. 49-74.
- PETRY S. et MEYER G.E. eds. (1987), *The Perception of Illusory Contours*, Springer.



- POLAT U., SAGI D. (1993), Lateral interactions between spatial channels : suppression and facilitation revealed by lateral masking experiment, *Vision Research*, vol. 33, n°7, pp. 993-999.
- POLAT U., SAGI D. (1994a), The architecture of perceptual spatial interactions, *Vision Research*, vol. 34, n°1, pp. 73-78.
- POLAT U., SAGI D. (1994b), Spatial interactions in human vision : from near to far via experience-dependent cascades of connections, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 91, pp. 1206-1209.
- ROCKLAND K.S., LUND J.S. (1983), Intrinsic laminar lattice connections in primate visual cortex, *Journal of Comparative Neurology*, vol. 216, pp. 303-318.
- SHA'ASHUA A., ULLMAN S. (1988), Structural saliency : the detection of globally salient structures using a locally connected network, *Proceedings of the Second International Conference on Computer Vision*, pp. 321-327.
- SNIPPE H.P., KOENDERINK J.J. (1992), Discrimination thresholds for channel-coded systems, *Biological Cybernetics*, vol. 66, pp. 543-551.
- SPIVAK M. (1974), *A Comprehensive Treatise on Differential Geometry*, Publish or Perish, Boston, Mass.
- TOET A., BLOM J., KOENDERINK J.J. (1987), The construction of a simultaneous functional order in nervous systems, *Biological Cybernetics*, vol. 57, pp. 115-125.
- TS'O D., GILBERT C.D., WIESEL T.N. (1986), Relationships between horizontal interactions and functional architecture in cat striate cortex as revealed by cross-correlation analysis, *Journal of Neuroscience*, vol. 6, n°4, pp. 1160-1170.
- VON DER MALSBERG C., BUHMANN J. (1992), Sensory segmentation with coupled neural oscillators, *Biological Cybernetics*, vol. 67, pp. 233-242.
- WELIKI M., BOSKING W., FITZPATRICK D. (1996), A systematic map of direction preference in primary visual cortex, *Nature*, vol. 379, pp. 725-728.
- WIESEL T.N., GILBERT C.D. (1989), Neural mechanisms of visual perception, in *Neural mechanisms of visual perception*, LAM D.M. et GILBERT C.D. eds, Portfolio Publishing Company, pp. 7-33.
- ZEKI S. (1993), *A Vision of the Brain*, Blackwell Scientific Publications.
- ZHANG J., WU S. (1990), Structure of visual perception, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, vol. 87, pp. 7819-7823.
- ZUCKER S.W., DAVID C., DOBBINS A., IVERSON L. (1988), The organization of curve detection : coarse tangent fields and fine spline covering, *Proc. 2nd Intern. Conf. Comp. Vis.*, IEEE.