Università degli Studi di Milano

Palazzo Feltrinelli

5-7 octobre 2006

Continuo e discreto.

Dall'esperienza percettiva alle costruzioni di razionalità

PERCEPTION ET FORCING

Jean Petitot – EHESS & CREA – Paris

Je remercie beaucoup Rossella et Giuseppe et l'Università degli Studi de Milan pour cette occasion de discussion dans ce lieu magnifique. Je vais parler d'un aspect très limité de l'opposition discret / continu, qui est limité et technique mais important pour les sciences cognitives.

INTRODUCTION

Il y a déjà longtemps (plus de dix ans), en particulier pour le 16$^{\text{th}}$ International Wittgenstein Symposium de 1994, *Philosophy and Cognitive Science*, j'avais introduit un certain nombre de propositions pour *formaliser les jugements perceptifs* au moyen de la théorie des topoï.

La raison en était double :

(i) donner un statut rigoureux à certaines descriptions eidétiques de Husserl, en particulier celles de *Erfahrung und Urteil* et de *Ding und Raum.*

(ii) préciser l'interprétation géométrique de la prédication proposée par Thom.

Le problème posé par les *jugements perceptifs* est difficile parce que la perception a un format géométrique et continu alors que le jugement a un format prédicatif et discret, l'opposition de formats entre géométrique / prédicatif étant l'un des aspects de la dialectique générale continu / discret. Hier, Rossella évoquait Aristote et le fait que temps, espace, corps, mouvements sont des formes du continu alors que le discours est discret. C'est de cela qu'il s'agit. C'est un vieux problème sur lequel on a beaucoup réfléchi, mais les aspects techniques sont récents.

Il se trouve que ces derniers temps des idées théoriques tout à fait analogues, mais complètement non-formalisées, ont été retrouvées par les psychologues cognitivistes (soit un siècle après Husserl !). Il y a eu en particulier un dialogue fort intéressant entre Austen Clark et Zenon Pylyshyn.

Mon plan sera :

1. Les propositions de Clark et Pylyshyn.
2. Husserl précurseur et le problème des jugements perceptifs.
3. La prédication selon Thom.
4. Pourquoi la théorie des topoï est le cadre formel naturel pour la logique des jugements perceptifs.

I. LE DEBAT CLARK/ PYLYSHYN

1. Austen Clark. « Feature-Placing and Proto-objects », 2004

En 2004, dans un article *Feature-Placing and Proto-objects*, Austen Clark dialogua avec Zenon Pylyshyn qui lui-même, dans un article de 2001 *Visual indexes, preconceptual objects, and situated vision* (*Cognition* 80 (2001), 127-158), discutait un article initial de Clark de 2000.

Commençons par l'article d'A. Clark.

Le problème concerne la vision de bas niveau préattentive, de la transduction rétinienne au traitement dans les aires visuelles primaires. Les stimuli correspondant aux diverses modalités sensorielles conduisent à des *qualités sensibles* constituant des espaces de qualités (comme l'espace des couleurs) possédant un certain nombre de dimensions (la construction de ces espaces de qualités par similarités et différences est déjà en soi un problème passionnant et difficile). On appelle *features* les valeurs de ces qualités sensibles. C'est une donnée empirique des neurosciences qu'elles s'organisent en « cortical feature maps » qui sont *topographiques*. Cela signifie que les features sont *spatialement localisées*. Autrement dit, il existe un *format spatial* et, qui plus est, ce format est commun aux différentes modalités sensorielles.

Ce format organise les objets de la perception visuelle au moyen de segmentations, de ségrégations figure-fond, d'extractions de contours, etc. (p. 13).

Le problème théorique posé par ce fait est formulé de la façon suivante par Clark.

> This old picture [that we can describe perception only with feature terms] contains a big mistake, which is still doing damage in neurophysiology. Not only do we need more terms than just feature terms ; we need a totally different *kind* of terms – one which has logical and semantic properties distinct from that of any possible feature term. (p. 5)

Cette « big mistake » est celle qu'évoquait mercredi à Milan Corrado Sinigaglia en disant que la philosophie de l'esprit étudie les facultés cognitives de haut niveau sans se soucier du fait qu'elles se fondent dans des structures de bas niveau très structurées.

> Any solution to this problem [binding, feature integration], I argue, requires a distinction in kind between features and their apparent locations. (p. 6)

> Terms for features and terms for places must play fundamentally distinct and non-interchangeable roles, because otherwise one could not solve the binding problem. (p. 6)

Ceux qui s'intéressent à l'histoire de la philosophie reconnaîtront un aspect du débat Leibniz / Kant. Clark redécouvre le problème kantien de *l'irréductibilité de principe du spatial au conceptuel*.

Il redécouvre aussi, sur la base d'arguments *fonctionnels*, que ce qui compte dans la localisation des traits sont trois opérations fondamentales :

(i) la restriction $S \subset R$ de régions spatiales,

(ii) l'identité de qualités sur des intersections $R \cap S$ de régions spatiales,

(iii) l'identité *cross-modale* des régions spatiales.

Bref, dans la *logique* des jugements perceptifs, il faut « a new kind of term, with a distinct function » (p. 8), « terms like names » (p. 8) – des termes singuliers – pour identifier les localisations.

Cela est nécessaire pour que des jugements puissent porter sur des *individus* car *seule la localisation individue*. D'un côté les qualités sont conceptuelles, génériques et abstraites et *non* individuantes et de l'autre côté, la localisation des traits est « proto-prédicative » et « proto-référentielle » ; toute la difficulté est de mettre les deux ensembles.

Le problème est difficile car sur le plan « linguistique » (le format prédicatif des jugements) la localisation est *déictique*. Elle passe par des *indexicaux* de type « ici », « là » et cela signifie que tout jugement perceptif, même le plus primitif, est *pragmatique* au sens où sa référence ne peut être déterminée que de façon indexicale.

Clark explique alors qu'il faut fonder les jugements perceptifs dans une *forme non-conceptuelle de représentation* correspondant au schéma « appearance of quality Q at region R » (p. 8) où les rôles de Q et de R *ne peuvent pas être échangés*. R identifie indexicalement une localisation et Q attribue une qualité à R.

> I claim that this « appearance of quality *Q* at region *R* » is the form of non-conceptual representation employed in any vertebrate sensory modality that can solve the many properties problem. (p. 8)

Ce sont donc des « ways of filling space » qu'il faut décrire correctement (p. 9). Clark comprend qu'il y a un problème logique qui est d'élaborer des « *features-placing languages* » comportant des indexicaux et des démonstratifs déictiques. Il faut comprendre la logique et la sémantique de ces « features-placing languages » qui existent aussi dans la perception animale (p. 11), et sont donc non conceptuels, proto-prédicatifs.

Un tel langage est pauvre, sans descriptions définies, sans quantification, avec des énoncés de base du genre « ici c'est rouge », «là c'est froid ».

> The prototypical sentence indicates the incidence of a feature in some demonstratively identified space-time region. (p. 9)

Les *données élémentaires* en sont des (r, q) $r \in R$, $q \in Q$ et Clark remarque que ce « pairing principle » est à l'origine de la relation sujet / prédicat dans les jugements :

> Specification of the content of an act of sense requires pairs of the form $([q_1, \ldots, q_n], [r_1, \ldots, r_m])$ and (I argue) the pairing principle is analogous to the tie between subjects and predicates. (p. 11)

Ainsi

> Space-time provides a simple and universally available principle of organization (p. 16)

et les langages de *features-placing* font référence à des proto-objets :

> [The reference to proto-objects is] preconceptual, direct, and derived from the causal mechanisms of perceptual processing. (p. 21)

Ces descriptions de Clark appartiennent à la conception dont nous avons discuté mercredi et qui ne tient pas vraiment compte de la corrélation perception – action, à savoir comme l'expliquait Corrado Sinigaglia que les objets sont des modalités d'action. Mais même dans ce contexte le problème est difficile.

2. Zenon Pylyshyn. « Visual indexes, preconceptual objects, and situated vision », Cognition, 80 (2001) 127-158.

Dans son article de 2001, Zenon Pylyshyn s'accorde avec Clark pour affirmer que la perception et l'action exigent *plus* que des représentations conceptuelles donnant une description des stimulations sensorielles proximales.

En effet de telles représentations conceptuelles reposent par définition sur des catégorisations, des abstractions, des jugements *discrets* qui ne peuvent pas établir de relations *causales directes* avec des *choses individuelles* de l'expérience du monde externe. Pylyshyn redécouvre cette thèse qu'avec des concepts catégorisants qui sont des classes d'équivalence d'une infinité de cas concrets (p. 131) on ne peut pas rejoindre l'expérience vécue.

> Sooner or later the regress of specifying concepts in terms of other concepts has to bottom out. (p. 129)

Il y a donc un problème fondamental de *référence directe* de type *déictique* et *indexical* : « ceci est rouge », référence directe qui est l'inverse d'une connexion causale (théorie causale de la référence).

Zenon Pylyshyn se focalise sur ce caractère indexical de la perception visuelle et introduit l'hypothèse qu'il existe dans le système cognitif des index pointant vers des « visual objects » qui sont des *proto-objets individuels* dans une scène visuelle. Ces proto-objets sont « moins » que de vrais objets 3D (p. 144) et le problème est celui de leur pick out. Il est lié à la localisation mais ne s'y réduit pas :

> The present proposal is that the grouding begins at the point where something is picked out directly by a mechanism that works like a demonstrative. (p. 129)

> [The problem is] to pick out an individual in the world *other* than by finding the tokens in a scene that fall under a particular concept, or satisfy a particular description, or that have the properties encoded in the representation. (p. 130)

> There would have to be a non-descriptive way of picking out the unique object in question. (p. 138)

> The visual system has a mechanism for picking out and accessing individual objects prior to encoding their properties (Burkell & Pylyshyn, 1997). (p. 139)

Zenon Pylyshyn a fait de nombreuses expériences sur le *mouvement* d'objets (MOT, *Multiple object tracing*) pour montrer que c'est la *trajectoire spatio-temporelle* qui garantit l'identité numérique de l'objet. Il insiste beaucoup sur le problème central qu'il n'y a pas seulement localisation mais aussi identité *translocale* le long d'une trajectoire et que *l'on ne peut pas* considérer ces trajectoires comme le déplacement d'un spot attentionnel dans un « large panoramic display » car celui-ci *n'existe pas*.

Sa conclusion est qu'il faut des *assignations d'index non conceptuels* qui constituent un mécanisme primitif pour sélectionner et maintenir l'identité des objets visuels (p. 141) et qui permettent *d'adresser* les objets au sens informatique (p. 150). Bref :

> Sooner or later concepts must be grounded in a primitive causal connection between thoughts and things. (p. 154)
>
> The principle of grounding concepts in perception remains an essential requirement if we are to avoid an infinite regress. (p. 154)
>
> Without such a preconceptual grounding, our percepts and our thoughts would be disconnected from causal links to the real-world objects of those thoughts. (p. 154)
>
> Whithout preconceptual reference we would not be able to decide that a particular description *D* was satisfied by a particular individual (i.e. by *that* individual). (p. 154)

Cela rejoint l'opposition entre « that » (che) et « what » (che cosa) dont parlait hier le Professeur Carlo Sini.

Ce débat Clark / Pylyshyn s'inscrit dans l'un des débats les plus importants actuellement en sciences cognitives, celui des *contenus non conceptuels de la perception dans leur rapport au jugement*.

Dans sa formulation actuelle, le problème a été lancé par Evans (*The Varieties of Reference*, Oxford, Clarendon Press, 1982) qui a introduit des contenus non conceptuels proto-propositionnels comme rapport informationnel à l'environnement dont le grain beaucoup plus fin (format géométrique continu) que le conceptuel (format propositionnel discret), tout en posant par ailleurs que l'expérience consciente par le sujet de tels états informationnels exige du conceptuel. Des spécialistes de la perception comme Peacocke sont d'accord, tout en estimant que les contenus non-conceptuels ne sont pas autonomes. Bermudez pense qu'il y a autonomie mais alors le lien avec les jugements devient un vrai problème. D'autres, comme Mc Dowell (*Mind and World*, Harvard University Press, Cambridge, 1994), pensent que la perception est toujours un *jugement* perceptif, donc conceptuel, et essayent de détruire le « mythe du donné ».

II. PRESENTATION PERCEPTIVE ET REPRESENTATION PROPOSITIONNELLE DANS *ERFAHRUNG UND URTEIL* DE HUSSERL

Les problèmes soulevés dans le débat Clark / Pylyshyn se trouvent déjà élaborés, un siècle plus tôt, de façon plus technique et plus profonde par Husserl.

1. Présentation géométrique et représentation propositionnelle

Les formules atomiques "S est p" que sont les jugements d'attribution de qualités sensibles à des objets spatialement localisés se situent au degré zéro de l'échelle logique. Tant leur syntaxe que leur sémantique sont triviales. Mais cette trivialité évidente disparaît dès que l'on essaye de comprendre les liens qui peuvent exister entre leur structure syntactico-sémantique et la scène perceptive — que nous noterons $<S, p>$ — qu'ils décrivent et dénotent.

La scène perceptive $<S, p>$ correspond à la donnée d'un domaine spatial W_S (l'extension de l'objet S) rempli par une qualité sensible p. Elle est "synthétique", de format géométrique et "présentationnelle" (au sens de l'opposition philosophique et phénoménologique classique entre *Darstellung* (présentation) et *Vorstellung* (représentation)). Au contraire, le jugement prédicatif "S est p" est quant à lui "analytique", de format propositionnel et "représentationnel". Quel rapport il y a-t-il entre ces deux formatages, c'est-à-dire, entre d'un côté le remplissement intuitif d'extensions spatiales par des qualités et d'un autre côté les catégories syntaxiques de la prédication?

Ces problèmes ont été fort peu étudiés par les traditions logico-sémantiques. Il existe pourtant une exception notable, de première importance, celle de Husserl. En particulier dans les extraordinaires réflexions sur l'origine perceptive de la prédication que l'on trouve dans *Erfahrung und Urteil.*

Husserl avait déjà bien distingué entre « ce que nous voyons » et « comment nous voyons ». Il avait montré que nous voyons des particuliers individués entrant en relation dans des états de choses. Ces particuliers sont des extensions spatiales remplies par des moments dépendants (Momente) c'est-à-dire des features (Merkmale). La principale thèse de Husserl à leur sujet est que voir *n'est pas* utiliser des concepts, *n'est pas* juger. Husserl pense que la perception n'est pas propositionnelle, on dirait aujourd'hui « sentence-like » (même au sens d'un « language of thought » à la Fodor). Pour lui, la perception interprète (Auffassung) (au sens de traitement d'information, les synthèses noétiques) les sensations à travers un format géométrique de type « l'extension R est remplie par la qualité Q » (c'est ce qu'a retrouvé Clark). Il anticipe Dretske et sa distinction entre « perceptually articulated information » et « conceptually vehiculated information ». La perception organise et structure noétiquement la hylé sensorielle (qui n'a aucune dimension intentionnelle en tant que telle). D'où le problème ainsi formulé par Barry Smith (Article « Perception » in *Husserl. Cambridge Companion to Philosophy*, 1995, 168-238) :

> What, then, is the relation between the perceptual judgements reported by « see that *p* » and simple, direct perception of particulars ?

Les particuliers apparaissent comme des esquisses, des profils, des aspects (« one-sideness » de la perception), les esquisses sont non-conceptuelles et non judicatives et caractérisent la perception comme *à la fois directe et incomplète*. D'où la problématique de l'horizon de co-donation des esquisses, de l'anticipation perceptive, de la « grammaire » du flux temporel des esquisses, du rôle constitutif des kinesthèses, du tracking d'objets, des trajectoires spatio-temporelles et des « rayons intentionnels » de « l'intentionnalité transversale » (cf. Pylyshyn).

2. Erfahrung und Urteil

Dans cet ouvrage posthume (1939, Husserl ayant disparu en 1938) édité à Prague par son disciple et assistant Ludwig Landgrebe, et dont le sous-titre *Untersuchungen zur Genealogie der Logik* exprime bien les intentions, Husserl cherche à clarifier phénoménologiquement les origines de la prédication. Dans la 2ème section : *La pensée prédicative et les objectivités d'entendement*, Chap. I : *La structure générale de la prédication et la genèse des formes catégoriales les plus importantes*, §§50 sq. (p. 237), il y élabore (entre autres) une théorie des propositions atomiques "S est p" dans le cadre d'une apophantique formelle (i.e. d'une théorie syntaxique) et d'une ontologie formelle (i.e. d'une théorie sémantique comme la méréologie ou la théorie des ensembles). Si sa perspective est "généalogique", c'est parce que, selon lui, la logique formelle classique occulte le problème fondamental *de l'intégration de l'évidence dans le concept logique de vérité*. "Évidence" signifie ici l'immédiateté de la donation des phénomènes dans la présentation perceptive. Elle est constitutive de la vérité au sens des sémantiques logiques et fonde le jugement dans l'expérience anté-prédicative (problème du bottom out de Pylyshyn). Il faut donc une sémantique logique non-conceptuelle fondée sur un schéma de placing-feature à la Clark « appearance of quality *Q* at region *R* ».

Husserl développe donc la thèse que les substrats ultimes sont les particuliers individués à travers lesquels les jugements se connectent à ce qu'il appelle le « sol universel du monde ». Même si elle est « formelle », la logique doit dépendre constitutivement du monde prédonné intuitivement dans l'expérience sensible « antérieurement » à la logique.

> Le caractère formel de l'analytique logique consiste en ce qu'elle ne s'interroge pas sur la qualité matérielle [i.e. perceptive] de ce quelque chose [donné dans la perception], qu'elle n'envisage les substrats qu'en fonction de la forme catégoriale qu'ils prennent dans le jugement.[1]

Dans de nombreux textes (*Recherche logique III*, *Ding und Raum*, *Ideen I*, etc.), Husserl décrit la donnée intuitive primitive de toute perception comme « remplissement » ou « recouvrement » d'une extension spatiale par une qualité sensible.

Comme « jugement catégorique fondé dans la perception »,[2] un jugement prédicatif à contenu perceptif de type "*S* est *p*" est enraciné dans l'expérience ante-prédicative et pré-judicative du monde perceptivement donné et c'est bien cet enracinement — ce qu'il appelle une « fondation » — que Husserl veut thématiser comme tel. Il retrace dans ce dessein la « genèse catégorielle » des catégories logiques "primitives" (sujet / prédicat), genèse qui *convertit* l'unité perceptive synthétique $<S, p>$ d'une extension spatiale substrat *S* délimitée par un bord (contour apparent) et possédant un moment dépendant *p* (qualité sensible donnée par la « synthèse passive » de l'intuition) en l'unité syntaxique analytique de la proposition "*S* est *p*" (déterminée « activement » par la spontanéité de l'entendement).

Tout le problème est ce changement de format $<S, p> \rightarrow$ "*S* est *p*" conduisant, comme l'a redécouvert Clark d'une extension-localisation / qualité à une structure sujet / prédicat.

[1] Husserl [1954], p. 28.

[2] Husserl [1954], p. 79.

Husserl ramène cette conversion d'une présentation perceptive en une représentation propositionnelle à une opération réflexive de *thématisation* et de *typification logique* qui typifie les substrats en thèmes-sujets et les moments dépendants en thèmes-prédicats. Telle est selon lui

> l'origine des premières catégories dites "catégories logiques".[3]

Il y a une « réflexion objectivante », une « conversion d'attitude » menant de l'unité pré-constituée passivement dans la perception à la spontanéité de la forme prédicative, et permettant de passer ainsi de l'expérience perceptive privée à la description d'objets et d'états de choses publics.

Husserl y insiste,

> dans le jugement prédicatif le plus simple, une *double information* est traitée (p. 252)

car *sous* l'information syntaxique catégoriale "sujet / prédicat" concernant les "formes fonctionnelles" des termes de la proposition, il existe une autre information concernant les "formes noyaux" /substrat = indépendance/ et /moment qualitatif = dépendance/. C'est presque mot à mot du Dretske. Selon Husserl, la prédication est un processus basé sur

> le recouvrement des formes noyaux comme matériel syntaxique pour les formes fonctionnelles. (p. 252).

Le monde de l'expérience est un monde typifié (§83, p. 400) où les objets sont saisis selon leur type et *la typification précède la généralité conceptuelle*, l'erreur fondamentale des logicismes étant d'identifier les deux. C'est cette typification logique en catégories syntaxiques des relations synthétiques de dépendance substrats-qualités qu'il s'agit de formaliser, le problème étant, insistons-y, un problème de formalisme logique.

Husserl reprend alors des problèmes d'apophantique formelle et d'ontologie formelle. Par exemple, "S est p et q" signifie que la même extension spatiale est recouverte par les deux qualités, etc.

3. Nécessité d'une approche morphologique

Si l'on veut, au-delà de la description eidétique pure, transformer la description phénoménologique en source de modélisation, il faut alors pouvoir formaliser les

---

[3] Husserl [1954], p. 134.

phénomènes de remplissement qualitatif constitutifs des états de choses <*S*, *p*>. La possibilité de disposer d'une *présentation morphologique d'un schème sensible* <*S*, *p*> qui soit différente de la proposition "*S* est *p*" est absolument nécessaire si l'on veut briser

(i) le cercle vicieux qui affirme que les structures et les propriétés qualitatives du monde sensible n'existent qu'à travers les jugements qui les prédiquent et ne peuvent pas être montrés (présentés) autrement (c'est-à-dire au fond que toute *Darstellung* est toujours-déjà une *Vorstellung*), et

(ii) le caractère tautologique de la définition tarskienne de la vérité : l'énoncé "la neige est blanche" est vrai ssi l'état de choses "la neige est blanche" est réalisé.[4]

Elle permet d'expliquer pourquoi la représentation propositionnelle "*S* est *p*" de la présentation morphologique <*S*, *p*> possède un contenu qui est *intensionnel* à un double titre. D'abord parce qu'il représente l'état de choses sous un certain aspect, celui présenté par <*S*, *p*>. Ensuite parce que les spécificités de l'aspect de <*S*, *p*> (par exemple l'extension exacte de *S*, les valeurs exactes de *p*) *ne sont pas* reflétées dans le jugement "*S* est *p*" : celui-ci fonctionne en fait de façon *indexicale*. Tout jugement perceptif élémentaire ne peut fixer sa référence que de façon pragmatique : le lien entre l'énoncé "*S* est *p*" et la scène perceptive <*S*, *p*> est contrefactuel. Comme nous allons le voir, la sémantique naturelle des jugements perceptifs est donc une sémantique à la Kripke, mais d'un nouveau type.

III. L'INDEXICALITE PRAGMATIQUE DES JUGEMENTS PERCEPTIFS

Comme je l'ai développé en 1994, les jugements perceptifs sont donc *indexicaux*. La spatialité implicite des objets y fonctionne comme fonctionnent les déictiques : elle doit être actualisée par la situation perceptive qui fonctionne en quelque sorte comme un contexte pragmatique. On peut dire aussi *que l'espace modalise la vérité des jugements perceptifs*. Dans un jugement d'attribution de qualité de type "*S* est *p*", on ne dit pas que *S* est un symbole de variable référant à un individu possédant la propriété *p* (ce serait l'approche empiriste par mauvaise abstraction : *S* appartient à l'ensemble des objets *p*). On dit que le symbole *S* est un index qui réfère à un individu d'extension *W* et que *W* est « rempli » par la qualité *p*. Mais l'extension *W* demeurant implicite dans la syntaxe de l'énoncé et n'intervenant qu'au niveau de sa sémantique, on peut dire qu'elle fonctionne de façon indexicale.

---

[4] Pour une critique de cette définition tautologique dans le cadre de la théorie des topoï que nous utilisons plus bas, cf. Moerdijk-Reyes [1991].

IV. LA PREDICATION SELON RENE THOM

L'idée de base permettant de formaliser Husserl est due selon moi à René Thom avec sa théorie de la prédication. Thom avait souligné que, en ce qui concerne les jugements perceptifs, il existe bien un « hiatus infranchissable entre le logique et le morphologique » (ESP, p. 248). Cela est dû au fait que dans l'expression « jugement perceptif » les deux termes renvoient à des univers formels complètement différents : « jugement » à une syntaxe logique de catégories grammaticales, « perceptif » à une géométrie morphologique. Il faut combler ce hiatus.

La formalisation morphologique de la prédication est exposée par Thom dans l'*Esquisse de Sémiophysique* (Chapitre 6. *La dynamique aristotélicienne comme sémiophysique*, F. Axiomes de l'acte, 2. Phrases univalentes). Il y analyse un jugement perceptif de base comme “le ciel est bleu”. Le remplissement de l'extension spatiale W d'un objet S par une qualité sensible (comme une couleur) p appartenant à un genre de qualité G se décrit par une application:

$$\begin{aligned} g : W &\to G \\ w &\to g(w) \end{aligned}$$

qui, à tout point w de W, associe la valeur de la qualité en ce point. En fait, il est naturel, et c'est ce que fait Thom, d'interpréter g comme *une section de la fibration* $\pi : E = W \times G \to W$ de base W et de fibre G qui associe au couple (w, s) d'un point w de la base W et d'un point s de la fibre G le point w. Une section d'une fibration $\pi : E \to W$ est une application $\sigma : W \to E$ qui « relève » π, i.e. telle que $\pi \circ \sigma = 1_W$. La valeur $g(w)$ de g en w est donc considérée comme appartenant à l'exemplaire de G qui est la fibre $\pi^{-1}(w)$ de π au-dessus de w.

La nécessité d'introduire une fibration est fortement soulignée par Thom (en référence à Aristote) :

> C'est pourquoi, en tant que mathématicien, pour définir l'homéomère, je dois multiplier l'espace substrat par un espace invisible, un espace (interne) de qualités — un espace de genre — , pour y définir le bord de ma qualité homéomère.

Dans une certaine mesure, toute la théorie des catastrophes a développé cette idée de base que la façon dont les qualités « secondes » remplissent les extensions (« qualité première ») devait s'interpréter, comme en physique, par des sections de fibrations bien choisies.

Le *remplissement* de S par p se trouve ainsi décrit par la section $g : W \to W \times G$ de π qui associe à tout point w de W, le couple $(w, g(w))$ où $g(w)$ est la valeur de la qualité p en w. La section g décrit donc le remplissement, que nous notons toujours $<S, p>$, i.e. la structure perceptive (évidemment hypersimplifiée).

Le concept géométrique de fibration est neuro-physiologiquement pertinent. Les structures (hyper)colonnaires du cortex (qui permettent d'associer à chaque position rétinienne un élément comme une couleur, une texture, une direction, etc. et donc de définir des *champs rétinotopiques* de tels éléments) constituent des implémentations (discrétisées) de fibrations.

Ce formalisme morphologique permet de schématiser les relations de dépendance unilatérale (les hiérarchies ontologiques) entre les genres. Que l'extension spatiale (qualité « première ») soit ontologiquement première par rapport aux qualités « secondes » se trouve traduit par le fait que, dans la fibration $\pi : E \rightarrow W$, l'extension W est *la base* (qui peut exister de façon indépendante) alors que le genre de qualités G est *la fibre*.

En général l'espace de genre G est en plus *catégorisé* en espèces (en "essences" qualitatives ou *species*,) : les *types* $C_1, ..., C_n$ de couleurs, par exemple par un potentiel $V : G \rightarrow \mathfrak{R}$. Les bassins d'attraction des minima définissent alors les *catégories* (les espèces) de G et les minima fonctionnent comme des *prototypes*. Si $p \subset G$ est une de ces catégories, si ∂p est son bord dans G et si S est le nom de l'entité de substrat W considérée, le jugement perceptif "S est p" s'interprète selon Thom par le fait **que l'image $g(W)$ de la section $g : W \rightarrow W \times G$ est encapsulée dans le cylindre $W \times \partial p$** (cf. ESP, pp. 158 sq. et 205 sq.):

"S est p" est vrai ssi $g(W) \subset W \times \partial p$

Nous avons donc deux CNS de validité pour un énoncé "S est p":

1. La CNS tarskienne : l'énoncé "S est p" est vrai ssi l'état de choses correspondant «S est p» est vérifié («S est p» ne pouvant d'ailleurs être présenté linguistiquement qu'au moyen du jugement "S est p").

(Tarski ne cherche pas à donner un critère de vérité, mais la philosophie analytique en fait un critère).

2. La CNS thomienne : l'énoncé "S est p" est vrai ssi l'image $g(W)$ de la section $g : W \rightarrow W \times G$ est encapsulée dans le cylindre $W \times \partial p$.

(Thom donne un critère de vérité).

La première est logique et prédicative mais "aveugle" (sans intuition remplissante). La seconde est morphologique mais ante-prédicative et pré-judicative. Comment en effectuer la synthèse? Comment penser le lien entre le schématisme géométrique de la perception et la formalisation traditionnelle des jugements en termes de logique formelle? Le problème est délicat car, comme l'avait déjà profondément remarqué Wittgenstein, dans des jugements perceptifs du type "S est p", "X est plus clair que Y", etc., *la spatialisation des qualités n'est pas explicite*.

Dans la CNS de Thom, la vérité est *spatialement localisée* et c'est tout le problème du « hiatus entre le logique et le morphologique ». C'est cela qu'il faut comprendre.

V. La pertinence des concepts de Faisceau et de Topos

L'on voit que si l'on articule ainsi morphologie perceptive et logique judicative *en respectant leur spécificité*, alors le problème devient de formaliser l'analyse husserlienne-thomienne des liens entre un schème morphologique $<S, p>$ (intuition remplissante) et un jugement “*S* est *p*” (intention de signification), et, donc, de faire droit *à la priorité du formatage morphologique* (présentationnel) sur le formatage propositionnel (représentationnel) pour pouvoir ensuite comprendre la conversion faisant passer de l’un à l’autre.

Essayons d'imaginer un chemin menant du signal optique à un jugement en essayant de repérer exactement à quel moment géométrie et logique doivent s'articuler.

1. Le signal doit d'abord être traité, régularisé et segmenté. On connaît des algorithmes très performants : ondelettes de Mallat, modèle variationnel de Mumford-Shah, équations de diffusion anisotropes de Morel, etc. J'en parle en relation avec les modèles de Thom dans ma contribution à l'hommage *Passion des formes*.
2. Les aspects, les profils (Abschattungen, adumbrations) — et en particulier les contours apparents — doivent être reconnus comme des aspects d'objets. On sait que René Thom s'était énormément intéressé à ce problème. C'est une très jolie application de la théorie des singularités. En se situant dans la grassmannienne des projections, il associe un contour apparent (i.e. un lieu singulier avec des singularités) à chaque point de vue et la question de savoir comment les types génériques de contours apparents stratifient l'espace des points de vue est un problème difficile encore non résolu.
3. Mais ce qui doit être transformé en jugement est d'abord un aspect particulier, celui sélectionné par l'observateur. Comme nous l'avons vu, la sélection du point de vue et son changement correspondent à la nature *pragmatique* des jugements perceptifs.
4. C'est donc le remplissement d'une extension spatiale par une qualité sensible, qui constitue bien la donnée primitive, comme René Thom l'a tout de suite formalisée avec la notion de point régulier et de point singulier dès le début de *Stabilité structurelle et Morphogenèse*. C'est elle qu'il faut faire passer du géométrique au logique.

L’idée est alors d’utiliser certains résultats fondamentaux concernant les liens entre géométrie et logique qui ont été découverts dans le cadre de la théorie des catégories (au sens mathématique du terme) et, plus précisément, dans celui de ladite *théorie des topoï*. Très intuitivement, les idées de bases sont les suivantes.[5]

(i) Les remplissements possibles de domaines spatiaux W d'un espace ambiant M par des qualités sensibles — et donc les sections σ qui les modélisent— reposent sur une dialectique *du local et du global* (possibilité de restreindre un recouvrement à un sous-domaine, possibilité de recoller des recouvrements compatibles, etc.) qui est caractéristique de ce que l'on appelle la structure de *faisceau* sur un espace de base M.

(ii) Les opérations formelles catégoriques que l'on peut faire sur des faisceaux — qui sont des objets *géométriques* — sont *exactement parallèles* aux opérations *syntaxiques* que l'on peut faire sur des *symboles* — qui sont des objets *logiques* (c'est cela la grande découverte : elle est due à William Lawvere à la fin des années 60). On dit que la catégorie des faisceaux sur un espace de base M possède la structure de *topos*.

(iii) On peut par conséquent associer à la catégorie des faisceaux sur M *un langage formel* (ce que l'on appelle sa "logique interne"). Dans ce langage logique, une variable x va être interprétée *syntaxiquement* par un faisceau X (par exemple le faisceau des sections d'une fibration $\pi : M \times G \to M$) qui représente *son type logique*. Mais, *sémantiquement*, x sera interprétée comme une *section* particulière de X définie sur un domaine particulier W de M.[6] Cette sémantique très particulière s'appelle la sémantique de Kripke-Joyal des topoï.

Autrement dit, le formalisme "toposique" permet de typifier logiquement les symboles qui réfèrent à des remplissements de domaines spatiaux par des qualités.

C'est exactement le genre de formalisme dont on a besoin pour formaliser la description eidétique de *Erfahrung und Urteil* à partir de la géométrisation de la prédication proposée par Thom.

Il s'agit donc de reprendre l'analyse logique des propositions (et donc les bases mêmes de la sémantique logique) à partir de ce primat du perceptif. Il s'agit de relier au moyen d'une logique géométrique une typification logico-catégorielle et un schématisme morphologique.

---

[5] Pour une introduction à la théorie des topoï, cf. Asperti-Longo [1991] et MacLane-Moerdijk [1992].

[6] Techniquement, il faut tenir compte du fait que, traditionnellement, les sections de faisceaux sont définies sur des *ouverts* de l'espace topologique de base. Mais on peut généraliser cette situation traditionnelle (cf. section VI).

VI. FAISCEAUX, TOPOÏ ET LOGIQUE

1. Remarques préliminaires

1. La théorie des topoï a été inventée et développée par Alexandre Grothendieck et son école dans les années 60 pour résoudre des problèmes très sophistiqués de géométrie algébrique (construction de théories cohomologiques généralisées). Il peut donc paraître étrange de la détourner pour des problèmes cognitifs non mathématiques et qui plus est apparemment élémentaires. Mais en fait si ces problèmes sont traités de façon neurocognitive (ce qui m'intéresse au premier chef, mais dont je ne parle pas ici) ils ne sont plus du tout triviaux et doivent être modélisés avec des outils convenables.
2. La théorie des catégories est certainement la meilleure ontologie formelle dont nous disposions actuellement (par beaucoup d'aspects, elle est supérieure à la théorie des ensembles) et il est donc naturel de s'y placer.
3. Certains spécialistes de la théorie des topoï ont déjà appliqué ces outils à la clarification de certains problèmes sémantiques. Par exemple Gonzalo Reyes (qui a travaillé, avec Eduardo Dubuc, Anders Koch, Ieke Moerdijk et Marta Bunge sur les applications de la théorie des topoï à la *Géométrie différentielle synthétique*) a utilisé ces techniques pour formaliser la théorie kripkéenne des noms propres comme désignateurs rigides.
4. En général, la théorie des topoï est utilisée en logique formelle et en informatique théorique comme un outil pour le λ-calcul typé (cf. par exemple les travaux de John Mitchell, Philip Scott, Giuseppe Longo, etc.). Comme nous allons le voir, quand des variables sont typées par des objets d'un topos, les propriétés catégoriques du topos conduisent à une logique interne (en général intuitionniste) qui est un λ-calcul typé. Dans la mesure où la correspondance de Curry-Howard montre que les formules peuvent être traitées comme des types, les preuves comme des λ-termes et la réduction d'une preuve par élimination de coupures à la réduction d'un λ-terme à sa forme normale, la théorie des topoï est devenue un outil fondamental pour comprendre la sémantique des langages formels, et en particulier des langages de programmation.

Dans ces applications logiques, l'origine (la "généalogie") géométrique des concepts de faisceau et de topos est occultée. Ici, nous utilisons au contraire cette origine géométrique pour clarifier la montée cognitive du morphologique perceptif vers le propositionnel prédicatif.

2. Le concept de faisceau

Pour le concept de faisceau, le concept topologique primitif n'est plus celui de point mais celui *d'ouvert* (ce que Peter Johnstone appelle la "pointless topology").[7]

De façon abstraite, une fibration sur un espace de base M est caractérisée par l'ensemble de ses sections $\Gamma(U)$ sur les ouverts $U \subset M$. C'est un dispositif produisant des sections. Si $s \in \Gamma(U)$ est une section sur U et si $V \subset U$, on peut naturellement considérer la *restriction* $s|_V$ de s à V. Cette restriction est une application $\Gamma(U) \to \Gamma(V)$. Il est évident que si $V = U$ alors $s|_V = s$ et que si $W \subset V \subset U$ et $s \in \Gamma(U)$ alors $(s|_V)|_W = s|_W$ (transitivité de la restriction). On obtient ainsi un *foncteur contravariant* $\Gamma : \mathcal{O}^*(M) \to \mathbf{Ens}$ de la catégorie $\mathcal{O}(M)$ des ouverts de M dans la catégorie **Ens** des ensembles (les objets de $\mathcal{O}(M)$ sont les ouverts de M et les morphismes sont les inclusions d'ouverts).

Réciproquement, soit Γ un tel foncteur — ce que l'on appelle un *préfaisceau* sur M. Pour avoir une chance d'être le foncteur des sections d'une fibration, il est clair que Γ doit satisfaire les deux propriétés caractéristiques suivantes.

(F_1) Deux sections localement égales sont globalement égales. Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de la base M et si $s, s' \in \Gamma(M)$ sont deux sections globales, alors si $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ $\forall i \in$ I on a l'égalité $s = s'$.

(F_2) Une famille de sections s_i définies sur un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ d'un ouvert U et compatibles sur les intersections $U_i \cap U_j$ peut être recollée en une section globale s sur U. Autrement dit si $s_i \in \Gamma(U_i)$ est une famille sur $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ et si les s_i sont compatibles i.e. si $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ quand $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors $\exists s \in \Gamma(M)$ telle que $s|_{U_i} = s_i$ $\forall i \in I$.

Il est remarquable que (F_1) et (F_2) puissent être exprimées de façon purement catégorique. Cela montre en effet que certains des caractères les plus "synthétiques" de l'espace peuvent être décrits dans le cadre de l'ontologie formelle qu'est la théorie des catégories. Par exemple (F_2) dit que la flèche e qui associe à la section s la famille de ses restrictions

$$e : s \to \{s|_{U_i}\}_{i\in I}$$

est l'*equalizer*

---

[7] Dans les sections techniques qui suivent nous traiterons les extensions d'objets comme des ouverts car les concepts géométriques qui nous intéressent ont été définis et étudiés à partir de ce concept primitif. Mais, comme nous l'avons dit, une telle hypothèse n'est pas réaliste puisque la plupart des objets étant délimités par des bords leur extension est fermée.

$$\Gamma(U) \xrightarrow{e} \prod_i \Gamma(U_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \Gamma(U_i \cap U_j)$$

des deux projections p, q correspondant aux inclusions $U_i \cap U_j \subset U_i$ et $U_i \cap U_j \subset U_j$.

Prises comme axiomes pour des préfaisceaux, les propriétés (F_1) et (F_2) définissent une structure plus générale que celle de fibration, nommément celle de *faisceau*. On peut d'ailleurs montrer que si les axiomes (F_1) et (F_2) sont satisfaits alors on peut *représenter* le foncteur section Γ par une structure fibrée généralisée $\pi : E \to M$ (appelée un espace "étalé") de telle façon que $\Gamma(U)$ devienne l'ensemble des sections de π sur U. Mais π n'est plus nécessairement localement triviale comme doit l'être par définition une fibration. La fibre E_x de E en x est la limite inductive :

$$E_x = \lim_{V \subset U \in \mathcal{U}_x} \{(\Gamma(U), \Gamma(V \subset U)\}$$

(où $\mathcal{U}_x$ est le filtre des voisinages ouverts de x). E_x est l'ensemble des *germes* s_x des sections en x. E est la somme des E_x. Si $s \in \Gamma(U)$, elle peut être interprétée comme l'application $x \in U \to s_x \in E_x$. La topologie de E est alors définie comme la plus fine rendant toutes ces sections continues.

Il faut se convaincre que le concept de faisceau n'est pas seulement technique *et formalise des propriétés d'essence — eidétiques, "synthétiques a priori" — de l'intuition pure spatiale*. Il est *a priori* adapté à toutes les situations où

(i) le formatage spatial se ramène essentiellement à un passage de domaines locaux à des domaines globaux par *recollement*, et

(ii) les entités considérées proviennent d'opérations de *remplissement* (filling-in, *Erfüllung*) de tels domaines spatiaux.

C'est le cas dans de très nombreux domaines de la géométrie et de la physique mathématique et c'est pourquoi ce concept y est devenu omniprésent. *Mais tel est aussi le cas de la perception*. Le recollement y intervient de façon constitutive, et cela à un double titre. D'abord parce que le champ visuel lui-même est constitué par le recollement des champs récepteurs des cellules ganglionnaires. Ensuite parce que l'espace global s'obtient par recollements de différents exemplaires du champ visuel contrôlés kinesthésiquement (par les mouvements des yeux, de la tête et du corps). Contrairement à ce qui se passe en géométrie différentielle classique, la notion de recollement n'est pas imposée ici par la nécessité de prendre en compte des fibrations non globalement triviales. Elle est imposée par le câblage de l'architecture (le hardware neuronal).

Quant au remplissement, il correspond dans les aires rétinotopiques du cortex visuel à des fibrations : le système s'obtient en "recollant" par des connexions latérales les "colonnes" qui, au-dessus de chaque position rétinienne codent la fibre appropriée (direction, couleur, texture, etc.).

3. Généralisations.

Il existe de nombreuses généralisations de cette situation de base. La plus connue est celle des topologies de Grothendieck : les recouvrements ouverts y sont définis en termes de "cribles" et le concept de faisceau est généralisé en celui de "site".

Une autre généralisation est celle des "*frames*" et des "*locales*". Les "frames" sont des treillis possédant les propriétés des treillis d'ouverts $\mathcal{O}(X)$, autrement dit des treillis distributifs complets possédant des infs (intersections) finis et des sups (unions) quelconques. Les "locales" sont les objets de la catégorie duale. Dans le cas des espaces topologiques la correspondance est donnée par

$$f : X \to Y \text{ continue} \Rightarrow f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$$

l'image réciproque $f^{-1}(\mathrm{V})$ d'un ouvert de Y étant un ouvert de X.

Les points sont alors définis comme des morphismes $p : A \to 2 = \mathcal{O}(1)$ (dans le cas des espaces topologiques, si $A = \mathcal{O}(X)$, les points correspondent à des vrais points $p : 1 \to X$). Soit $Pt(A)$ l'ensemble des points p de A. Une topologie est définie sur $Pt(A)$ par les sous-ensembles $\varphi(a) = \{p \in Pt(A) \mid p(a) = 1\}$. $\mathcal{O}(Pt(A))$ est la meilleure approximation possible du locale A par un "locale" "spatial".

4. Pertinence du concept de topos

Nous nous sommes restreints au cas le plus élémentaire, celui de relations de recouvrement de domaines spatiaux W par des qualités appartenant à un espace de qualités G. Nous avons vu que ces relations sont géométriquement décrites par des sections de fibrations appropriées.

Les faisceaux de sections prennent en charge l'aspect morphologique du schématisme thomien de la prédication. Mais qu'en est-il de son aspect logique? Nous avons vu que le problème est le suivant. Les jugements portant sur des situations de recouvrement d'un domaine W par des qualités appartenant à un genre G ne font pas intervenir dans leur forme *syntaxique* la localisation de ces qualités. Ils se situent au niveau de G et non pas au niveau de W. La localisation reste implicite, c'est-à-dire *potentielle*. Pour rendre compte de ce caractère potentiel, il faut donc considérer le faisceau des sections Γ des sections de la fibration $\pi : W \times G \to W$ *et le traiter en tant que tel comme une unité syntaxique*. Mais dans le même temps, pour qu'un tel jugement puisse être vrai ou faux il faut — si l'on veut pouvoir appliquer la CNS de Thom et non pas celle de Tarsky — qu'au niveau *de la sémantique*, l'extension des objets considérés devienne *explicite*, autrement dit *s'actualise*.

La réponse naturelle à ces difficultés est de considérer les faisceaux comme des *types* de variables dont les référents sont des *sections* particulières. Or il se trouve que cela est rendu techniquement possible par un lien profond entre la théorie des faisceaux et la logique qui a été découvert par William Lawvere au début des années 70.

Très brièvement exposées les idées directrices sont les suivantes. La catégorie $\mathcal{F}$ des faisceaux sur un espace topologique M possède un certain nombre de propriétés catégoriques fondamentales qui lui confère la structure de *topos*. Or celle-ci *est précisément la structure catégorique permettant d'interpréter un langage des prédicats dans une catégorie d'objets*. Selon Lawvere, cela permet de considérer $\mathcal{F}$ comme un univers du discours dont les objets *sont des entités variables dépendant d'une localisation spatiale U*. Cette dépendance spatiale

(i) est constitutive des valeurs de vérité et possède donc une pertinence sémantique, mais

(ii) elle n'est pas directement visible dans la syntaxe (qui ne concerne que les faisceaux comme types logiques) et n'est donc pas syntaxiquement pertinente.

Or c'est exactement d'un tel formalisme dont nous avons besoin pour formaliser la façon "indexicale" et "pragmatique" dont opère l'extension spatiale dans les jugements perceptifs.

5. Éléments de théorie des topoï

Par définition, un topos $\mathcal{F}$ est d'abord une catégorie cartésienne fermée: il possède des produits fibrés (des pull-backs), un objet terminal — classiquement noté 1 — et des *objets exponentiels* B^A qui permettent *d'internaliser* les ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(A, B)$. Le faisceau B^A est défini de façon évidente en utilisant les restrictions $A|_U$ et $B|_U$ aux ouverts: $B^A(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(A|_U, B|_U)$. Il est appelé le "Hom interne" ou encore le faisceau des germes de morphismes de A vers B.

Il est trivial de vérifier que le foncteur $(\bullet)^A$ est adjoint à droite du foncteur $A \times (\bullet)$. Cela signifie que pour tout objet C de $\mathcal{F}$ il existe un isomorphisme fonctoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(C, B^A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(A \times C, B)$. Par exemple, pour $C = 1$, on obtient $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(1, B^A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(A, B)$. Mais un morphisme $f : 1 \to B^A$ est comme un "élément" de B^A. En fait, si A est un faisceau, un morphisme $s : 1 \to A$ est une section globale de A, c'est-à-dire un élément $s \in A(M)$.

L'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(C, B^A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(A \times C, B)$ est évident dans le topos des ensembles: si f_c est une famille d'applications $f_c : A \to B$ alors elle est équivalente à l'application $f : A \times C \to B$ définie par $f(a, c) = f_c(a)$.

Si l'on considère $C = B^A$ et Id_{B^A}, l'adjonction à droite définit ce que l'on appelle une *co-unité* $\varepsilon : A \times B^A \to B$ telle que pour chaque $f : C \to B^A$ (et donc $1 \times f : A \times C \to A \times B^A$) le morphisme associé $h : A \times C \to B$ soit donné par $h = \varepsilon \circ (1 \times f)$. La co-unité généralise l'application *d'évaluation* $(x, f) \to f(x)$ de la théorie des ensembles.

La catégorie $\mathcal{F}$ possède en outre un *classificateur de sous-objets,* c'est-à-dire un monomorphisme $True : 1 \rightarrow \Omega$ tel que tout sous-objet S d'un objet A (i.e. tout monomorphisme $m : S \rightarrow A$) soit reconstructible par pull-back à partir d'une "fonction caractéristique" $\varphi_S : A \rightarrow \Omega$ de S.

$$\begin{array}{ccc} S & \rightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{True} \\ A & \underset{\varphi_S}{\rightarrow} & \Omega \end{array}$$

Ω est l'ensemble des "valeurs de vérité" du topos $\mathcal{F}$. Ce classificateur "internalise" donc les sous-objets. Il en représente le foncteur. Dans la catégorie des ensembles **Ens**, $\Omega = \{0, 1\}$ correspond aux valeurs de vérité booléennes. C'est le fait que Ω puisse être beaucoup plus compliqué qui fait l'intérêt majeur de la théorie des topoi. Nous allons voir que c'est ce qui permet dans notre cas de *localiser la vérité* conformément à l'idée de Thom.

À partir de ces constructions catégoriques, on peut définir d'autres constructions et donner un sens aux concepts "ensemblistes" d'élément, de propriété et de partie.

1. Par exemple, un morphisme $\vartheta : A \rightarrow \Omega$ est un "prédicat" de A, c'est-à-dire une propriété de ses "éléments généralisés" $a : B \rightarrow A$. On a $\vartheta(a)$ ssi a "appartient" au sous-objet S de A défini par ϑ ($\varphi_S = \vartheta$), i.e. ssi $\varphi_S \circ a = True_B$ avec $True_B : B \rightarrow 1 \rightarrow \Omega$.
2. De même, les parties de A (ses sous-objets) sont définies par $P(A) = \Omega^A$ (et donc $\Omega = P(1)$). Dans la catégorie des ensembles **Ens**, $\Omega = \{0, 1\}$ correspond aux valeurs de vérité booléennes. Il en va tout autrement ici. Le faisceau Ω est défini par $\Omega(U) := \{V \subset U\}$ et $True : 1 \rightarrow \Omega$ par $True(U) : 1 \rightarrow U \in \Omega(U)$, i.e. par l'élément *maximal* de $\Omega(U)$. Cela signifie que:
   (i) la vérité devient *spatialement localisée*,
   (ii) "être vrai sur U" signifie "être vrai partout sur U".

$\Omega(U)$ n'est pas une algèbre de Boole (car le complémentaire d'un ouvert n'est pas un ouvert mais un fermé). C'est une algèbre de Heyting. Ω est donc un faisceau d'algèbres de Heyting.

6. Topoï et logique

Le point fondamental est que l'on peut canoniquement associer à un topos $\mathcal{F}$ une *logique interne,* c'est-à-dire:

(i) un *langage formel* $L_{\mathcal{F}}$ appelé son langage de Mitchell-Bénabou,

(ii) une *sémantique* de type forcing appelée sa sémantique de Kripke-Joyal.

Comme nous l'avons vu, l'idée directrice est qu'un faisceau $X \in \mathcal{F}$ peut être traité comme un *type* pour des variables x qui seront interprétées comme des *sections* s de X, $s \in X(U)$. On obtient donc *à la fois une typification et une localisation spatiale* des variables et c'est exactement ce dont nous avons besoin pour relier la géométrie des sections à une logique du jugement: *la syntaxe des jugements porte sur les types et la sémantique perceptive sur la localisation.* La sémantique concerne donc (dans le cas qui nous occupe ici) les conditions de vérité associées aux phénomènes de recouvrement de domaines spatiaux par des qualités. Ce qui est précisément la façon Thom définit la vérité des jugements perceptifs.

Comme le souligne avec force Andreas Blass dans *Topoi and Computation* :

> The crucial point (…) is that topos theory connects a geometric aspect (at the forefront of the Grothendieck theory) with a logical aspect (at the forefront of the Lawvere-Tierney theory). (p.3)

6.1. Syntaxe

De façon générale, la structure de topos d'une catégorie $\mathcal{F}$ permet de construire récursivement les termes σ du langage $L_{\mathcal{F}}$ comme des *morphismes* entre faisceaux.

Le langage possède des *types*, 1, Ω (type des formules ou valeurs de vérité), des types de base, des types produits d'autres types ΠX_i, un type $P(X)$ de parties pour chaque type X, des variables typées $x : X$ pour chaque type X et des symboles de fonction $f : A \rightarrow B$ entre types. On définit alors récursivement les *termes* typés de façon standard.

1. Il existe un terme unique $* : 1$ de type 1.
2. Si $\tau : A$ et $f : A \rightarrow B$ alors il y a un terme $f(\tau)$.
3. Si $\tau_i : A_i$ alors il y a un terme $\tau = < \tau_i > : \Pi A_i$ et réciproquement si $\tau : \Pi A_i$ on sait définir ses projections $(\tau)_i : A_i$.
4. Si $\varphi(a) : \Omega$ est une formule avec $a : A$ alors il y un terme « partie de A satisfaisant φ » $\{a \mid \varphi\} : P(A)$.
5. Si $\sigma, \tau : A$ alors $\sigma = \tau : A$.
6. Si $\sigma : A$ et $\tau : P(A)$ alors $\sigma \in \tau : \Omega$.

L'interprétation dans un topos se fait alors de la façon suivante.

$* : 1$ est interprété par l'objet terminal 1. Si le terme σ est de type A et est construit à partir de variables libres x_i de types respectifs X_i, il est interprété par un morphisme $\sigma : \Pi X_i \rightarrow A$ qui exprime sa structure. Le fait décisif est que la structure de topos est précisément celle qui permet de définir toutes les structures logiques nécessaires en prenant Ω *comme type pour les formules.*

On définit par exemple les termes $<\sigma, \tau>$ (paire ordonnée), $\sigma = \tau$ (égalité), $f \circ \sigma$ (termes composés), $\phi(\sigma)$ (termes fonctionnels), $\sigma \in \tau$ (appartenance), $\lambda x \sigma$ (λ-termes), ainsi que les quantificateurs. Ces derniers sont les adjoints à droite et à gauche des morphismes "image inverse" $P(f) : P(B) \to P(A)$ (où $P(A) = \Omega^A$ est le faisceau des "parties" de A) canoniquement associés aux morphismes $f : A \to B$.

Donnons quelques exemples.

5. Soient $\sigma : X \to A, \tau : \ Y \to A$ deux termes de même type A. Ils permettent de définir le terme $\sigma = \tau$ de type Ω interprété par:

$$\sigma = \tau : Z = X \times Y \to A \times A \xrightarrow{\delta_A} \Omega$$

où δ_A est la fonction caractéristique du sous-objet diagonal $\Delta : A \to A \times A$. C'est la diagonale qui traduit l'égalité. En théorie des ensembles σ et τ correspondent à des éléments a et b de A et la diagonale correspond aux paires (a, b) t.q. $a = b$.

6. Des termes $\sigma : X \to A$ et $\tau : Y \to \ \Omega^A$ définissent de même un terme $\sigma \in \tau$ de type Ω interprété par (e est le morphisme d'évaluation):

$$\sigma \in \tau : Z = X \times Y \to A \times \Omega^A \xrightarrow{e} \Omega$$

En théorie des ensembles σ correspond à un élément a de A et τ à la fonction caractéristique d'un sous-ensemble de A.

6.2. *Sémantique*

Quant à la sémantique de Kripke-Joyal, c'est une sémantique de type *forcing*. Elle repose sur des règles du type $U \Vdash \varphi(s)$ où U est un ouvert de M, s une section de $X(U)$, x une variable de type X et $\varphi(x)$ une formule. Quant au langage (syntaxe) x est une variable typifiée, mais quant à sa dénotation (sémantique) elle est une section s i.e. un remplissement qualitatif d'une extension spatiale. La relation de forcing $\Vdash$ signifie que l'extension U localisant la vérité dans U valide $\varphi(s)$. Cela signifie que si $x : X$, si $\varphi(x)$ est une formule et si $s \in X(U)$, alors $U \Vdash \varphi(s)$ ssi $s \in \{x \mid \varphi\}(U)$.

Les règles sémantiques naturelles pour les connecteurs logiques, l'implication, la négation et la quantification montrent que la logique interne d'un topos est en général de nature *intuitionniste*. Elles sont données par:

(i) $U \Vdash \varphi(s) \wedge \psi(s)$ ssi $U \Vdash \varphi(s)$ et $U \Vdash \psi(s)$. Cette règle est classique et dit que $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ doivent être toutes deux globalement réalisées sur U.

(ii) $U \Vdash \varphi(s) \vee \psi(s)$ ssi il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de U tel que pour tout i on ait $U_i \Vdash \varphi(s|_{U_i})$ ou $U_i \Vdash \psi(s|_{U_i})$. Cette règle pour la disjonction est intuitionniste. Elle dit que localement sur U au moins l'une des $\varphi(s)$ ou $\psi(s)$ doit être réalisée. Si V (resp. W) est l'union des U_i forçant $\varphi(s|_{U_i})$ (resp. $\psi(s|_{U_i})$), alors $U = V \cup W$ avec $V \Vdash \varphi$ et $W \Vdash \varphi$.

(iii) $U \Vdash \varphi(s) \Rightarrow \psi(s)$ ssi, pour tout $V \subseteq U$, $V \Vdash \varphi(s|_V)$ implique $V \Vdash \psi(s|_V)$.

(iv) $U \Vdash \neg\, \varphi(s)$ ssi il n'existe pas de $V \subseteq U$, $V \neq \emptyset$ tel que $V \Vdash \varphi(s|_V)$ (la négation est intuitionniste car Ω est une algèbre de Heyting et non pas une algèbre de Boole).

(v) $U \Vdash \exists y\, \varphi(s, y)$ (y étant de type Y) ssi il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de U et des sections $\beta_i \in Y(U_i)$ tels que pour tout $i \in I$ on ait $U_i \Vdash \varphi(s|_{U_i}, \beta_i)$.

(vi) $U \Vdash \forall y\, \varphi(s, y)$ ssi pour tout $V \subseteq U$ et $\beta \in Y(V)$ on a $V \Vdash \varphi(s|_V, \beta)$.

Les subtilités de cette forme de sémantique résultent du problème suivant. Dans un topos, on peut interpréter des expressions de type ensembliste comme:

$$\left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \,\middle|\, \varphi(x_i) \right\}$$

définies par $(a_i) \in \left\{ (x_i) \mid \varphi(x_i) \right\}(U)$ ssi $U \Vdash \varphi(a_i)$. Mais on doit s'assurer que de telles expressions définissent des sous-faisceaux. Pour cela, il faut "faisceautiser" les sous-foncteurs intervenant dans de telles constructions.

VI. La structure des jugements perceptifs: combler le hiatus morphologique / logique

Revenons à notre problème thomien-husserlien des liens entre la présentation perceptive $<S, p>$ et la représentation prédicative "S est p". Soit M l'espace et C la fibration (triviale) de base M et de fibre l'espace G des couleurs. Le genre qualitatif G est catégorisé en espèces C_1, C_2, …, C_n. Soit $\mathcal{C}$ le faisceau des sections de C. Aux différentes catégories (au sens banal, non mathématique) C_i, correspondent des sous-faisceaux $\mathcal{C}_i$ de $\mathcal{C}$.

Soit S un *symbole* dénotant un individu. S est un *index* qui, dans chaque situation perceptive (monde possible) $\mathcal{M}$, *sélectionne* son extension $W_S \in \mathcal{O}(M)$ et, pour tout genre pertinent de qualité G, une section $g_S \in \mathcal{C}(W_S)$. Cela signifie que, relativement à G, S s'interprète comme un morphisme $g_S : W_S \to \mathcal{C}$, c'est-à-dire *comme un point de* $\mathcal{C}$ *à valeurs dans* W_S. Soit alors p la catégorie C_i considérée et $\mathfrak{p}$ le sous-faisceau de $\mathcal{C}$ associé. On peut retraduire l'interprétation thomienne (ante-prédicative, pré-judicative) du jugement "S est p" en disant:

"S est p" est vrai ssi $g_S \in \mathfrak{p}(W_S)$.

Le sous-objet $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{C}$ correspond à un prédicat sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire à un morphisme $\varphi_\mathfrak{p} : \mathcal{C} \to \Omega$. $\varphi_\mathfrak{p}$ associe à toute section g de $\mathcal{C}(U)$ l'ouvert maximal V de U sur lequel g est à valeurs dans p. On a alors:

"S est p" est vrai ssi $\varphi_\mathfrak{p}(g_S) = \text{True}$.

On retrouve ainsi l'interprétation ensembliste-prédicative (tarskienne) standard:

"S est p" est vrai ssi $p(S) = \text{True}$, *mais en ayant tenu compte de l'extension spatiale de l'entité S considérée pour localiser la vérité.*

VII. LE PROBLEME DES BORDS D'OBJETS

Nous avons signalé plus haut la difficulté concernant le fait que l'extension des objets perçus est en général *fermée* dans la mesure où les objets sont limités par des bords. Qui plus est, on sait depuis Brentano que les bords ont un statut quelque peu paradoxal. Il y a plusieurs façons de prendre en compte cette difficulté. Nous en évoquerons deux pour conclure.

1. Les co-algèbres de Heyting

Une première idée, due à Lawvere, est d'utiliser des co-algèbres de Heyting. Dans une algèbre de Heyting d'ouverts, la négation $\neg U$ de U est l'intérieur de son fermé complémentaire, c'est-à-dire le plus grand ouvert V tel que $U \cap V = \emptyset$. Dualement, dans une co-algèbre de Heyting de fermés, la négation $\neg F$ de F est la fermeture de son ouvert complémentaire, c'est-à-dire le plus petit fermé H tel que $F \cup H = 1$. On a évidemment $\neg(F \cap H) = \neg F \cup \neg H$, mais seulement $\neg(F \cup H) \subseteq \neg F \cap \neg G$.

On définit alors le bord ∂F de F comme l'intersection $F \cap \neg F = \partial F$. ∂F est donc défini en termes de contradiction logique.

L'opérateur bord satisfait la règle de Leibniz:

$$\partial(F \cap H) = (\partial F \cap H) \cup (F \cap \partial H).$$

Les bords B sont caractérisés par $\partial B = B$ c'est-à-dire par $\neg B = 1$ ou $\neg\neg B = 0$. De façon générale, la double négation $\neg\neg F \subset F$ (la fermeture de son intérieur) est le noyau régulier (le "regular core") de F. On a bien sûr $F = (\neg\neg F) \cup \partial F$.

2. Les fibrations stratifiées

Une autre façon d'introduire les bords dans le formalisme toposique est, de façon très générale, de tenir compte du fait que les remplissements intuitifs d'extensions par des qualités sont *segmentés par des discontinuités qualitatives K*.[8] Les sections de fibration g exprimant ces remplissements sont discontinues le long de K. Par ailleurs il est justifié de faire l'hypothèse que K est un ensemble fini de morceaux de courbes régulières C_i s'arrêtant en des points d'arrêt A_j et se connectant à travers des points multiples T_k (génériquement des points triples) comme des jonctions en T. En effet les meilleurs modèles de segmentation dont on dispose (en particulier le modèle

---

[8] La segmentation est un problème fondamental posé par Husserl à la suite de Stumpf (le fondateur de la Gestalttheorie). Il a connu ces dernières années un approfondissement considérable.

variationnel dit de Mumford-Shah) semblent posséder cette propriété (la conjecture est presque démontrée).

Cela signifie que *K stratifie M*. Les strates de dimension 2 sont les composantes connexes du complémentaire de *K*. Elles sont ouvertes. Ce sont les régions homogènes de remplissement qualitatif. Les strates de dimension 1 sont les morceaux de courbes C_i et les strates de dimension 0 les points singuliers isolés A_j et T_k .

On peut alors reprendre le formalisme faisceautique du recollement de sections locales mais

(i) en considérant des ouverts stratifiés (U, K_U) et en imposant des règles de compatibilité dimensionnelle pour le recollement des strates, et

(ii) en permettant aux sections d'être discontinues le long des strates singulières de K_U.

Qui plus est, pour que le formalisme proposé soit plausible, il faudrait également étendre les formulations "faisceautiques" et "toposiques" aux cas où les fibres des fibrations considérées sont *catégorisées*. La catégorisation pose elle aussi un problème fondamental pour lequel il existe des modèles morphodynamiques.

CONCLUSION

Nous pensons que l'approche proposée ici constitue le formalisme de complexité minimale permettant, et uniquement dans le cas des propositions les plus triviales, de faire explicitement le lien entre perception et prédication en partant des conditions de vérité définies par René Thom. Ces développements formels prouvent qu'il est possible d'articuler le schématisme morphologique sur une sémantique formelle de nature *indexicale* (donc en fait plus pragmatique que proprement sémantique). Dans une telle approche, il apparaît que l'espace fonctionne bien comme une *modalité* dans la mesure où la sémantique des situations où les variables sont à la fois typifiées et localisées est une sémantique modale à la Kripke. Cela permet de réinterpréter le caractère "synthétique a priori" de l'espace.

On voit à quel point les approches cognitives obligent à reproblématiser ce qui avait été trivialisé par l'analytique logique classique. Si on ajoute à cela les problèmes d'implémentation neuronale, on voit que les conditions d'application et de vérité du plus simple des jugements perceptifs se situe à un niveau de profondeur sans aucune mesure avec la tautologie tarskienne et que "le hiatus entre le logique et le morphologique" que René Thom considérait comme "infranchissable" n'est peut-être pas vraiment infranchissable mais est certainement très dur à franchir.

BIBLIOGRAPHIE

ASPERTI, A., LONGO, G., 1991. *Categories, Types, and Stuctures*, Cambridge, MIT Press.

BELL, J., *The Development of Categorical Logic*.

BLASS, A., *Topoï and Computation*.

CLARK, A., 2004. *Feature-Placing and Proto-objects*.

EVANS, 1982. *The Varieties of Reference*, Oxford, Clarendon Press.

HUSSERL, E., 1954. *Erfahrung und Urteil* , *Untersuchungen zur Genealogie der Logik*., Hamburg, Claassen&Goverts.

MAC LANE, S., MOERDIJK, I., 1992. *Sheaves in Geometry and Logic*, New York, Springer.

Mc DOWELL, 1994. *Mind and World*, Harvard University Press, Cambridge.

MOERDIJK, I., REYES, G., 1991. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Berlin, Springer.

PETITOT, J., 1992. *Physique du Sens*, Paris, Editions du CNRS.

PETITOT, J., 1994a. “Phenomenology of Perception, Qualitative Physics and Sheaf Mereology”, *Philosophy and the Cognitive Sciences*, Proceedings of the 16th International Wittgenstein Symposium (R. Casati, B. Smith, G. White eds), Vienna, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 387-408.

PETITOT, J., 1994b. “La sémiophysique : de la physique qualitative aux sciences cognitives”, *Passion des Formes*, à René Thom (M. Porte éd.), 499-545, E.N.S. Editions Fontenay-Saint Cloud.

PETITOT, J., 1995. “Sheaf Mereology and Husserl’s Morphological Ontology”, *International Journal of Human-Computer Studies*, 43, 741-763, Academic Press.

PYLYSHYN, Z., 2001. “Visual indexes, preconceptual objects, and situated vision”, *Cognition*, 80 (2001), 127-158.

THOM, R., 1988. *Esquisse d'une Sémiophysique*, Paris, InterEditions.