

Idéalités mathématiques et réalité objective. Approche transcendantale

Jean PETITOT
Séminaire d'Épistémologie des Mathématiques
École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris
1991

à Jean-Toussaint Desanti
en hommage.

*Neglect of mathematics works injury
to all knowledge, since he who is
ignorant of it cannot know the other
sciences or the things of this world.*

Roger Bacon ¹

Introduction

Le problème du statut objectif des idéalités mathématiques reste encore largement ouvert. Les apories dialectiques bien connues (depuis des siècles sinon des millénaires) que rencontre toute ontologie d'entités abstraites ont conduit les divers courants de l'épistémologie contemporaine à dénier assez radicalement toute réalité aux idéalités (objets, structures et constructions) mathématiques, à justifier philosophiquement une telle dénégation, à négliger le platonisme naïf de la plupart des mathématiciens professionnels (fussent-ils les plus théoriquement géniaux, les plus techniquement inventifs et les plus philosophiquement profonds). À de rares exceptions près, l'épistémologie dominante des mathématiques ne fait plus guère de crédit à des penseurs comme Poincaré, Husserl, Weyl, Borel, Lebesgue, Veronese, Enriques, Cavailles, Lautman, Gonthier, ou le dernier Gödel. Elle n'est pas une épistémologie des *contenus*. Elle possède l'étrange caractéristique de ne faire que peu de droit à ce qu'est la connaissance mathématique *effective*. Elle préfère en ignorer

¹ Cité par Spencer Bloch dans sa présentation de la démonstration de la conjecture de Mordell par Gerd Faltings (*The Mathematical Intelligencer*, 6, 2, 1984).

certaines caractères des plus manifestes plutôt que de modifier ses thèses empiristes et logicistes sur l'ontologie et sur la pensée.

Ces doctrines font peu de cas d'un impératif catégorique que, reprenant le sous-titre du bel ouvrage de Hao Wang *Beyond Analytic Philosophy*, on pourrait formuler ainsi : "Doing Justice to What We Know". Selon nous, la philosophie des sciences n'a pas à préjuger de la philosophie (de l'ontologie, de l'épistémologie, de la métaphysique) pour mesurer à une certaine aune ou forcer à un certain lit de Procuste la réalité scientifique. Elle se doit plutôt de répondre à la question suivante : de quelle philosophie (de quelle ontologie, de quelle épistémologie, de quelle métaphysique) avons-nous besoin pour que la science, quand elle a scientifiquement raison, ait également *philosophiquement* raison ? Ce sont les sciences qui sont ici en position maîtresse et la pensée se doit de reconnaître leur principe de réalité.

Selon nous, aucune philosophie des mathématiques plausible n'est envisageable en dehors d'une doctrine de la science et d'une théorie de la connaissance faisant droit aux *contenus effectifs* des sciences modernes. Or cette essence s'exprime dans les principes eidético-constitutifs du concept transcendantal *d'objectivité*. Et il ne peut pas exister de réponses sérieuses aux problèmes sérieux de philosophie des mathématiques et de philosophie des sciences dans le cadre d'un simple mixte de logique philosophique, de tradition sémantique, de philosophie du langage et de pragmatique qui prétendrait pouvoir tenir lieu de doctrine de l'objectivité. Autant de telles conceptions offrent des réflexions très importantes sur les structures cognitives de la perception, du langage et de l'action, sur le sens commun et sur la phénoménologie du monde sensible, autant, selon nous, elles n'apportent rien de déterminant sur les mathématiques et sur les sciences objectives mathématisées. En témoigne d'ailleurs leur notable incapacité à développer l'auto-réflexion philosophique sur les *contenus* de ces disciplines. Et pourtant, comme le disait Albert Lautman,

"une philosophie des sciences qui ne porterait pas toute entière" sur ces contenus corrélant un "réel physique" à un "réel mathématique" "serait singulièrement dépourvue d'intérêt".²

Dans une perspective eidético-constitutive, nous nous proposons de reparcourir brièvement certains des moments de l'objectivité mathématique. Nous le ferons en dialoguant à chaque fois avec certains auteurs nous paraissant représenter exemplairement certaines conceptions. Nous aborderons les quatre piliers de toute philosophie des mathématiques :

- (i) les actes cognitifs constitutifs de l'activité mathématique ;
- (ii) le statut de la connaissance et de la légalité symbolique ;
- (iii) le problème de la donation et de la réalité des objets et des structures mathématiques ;
- (iv) la nature de l'applicabilité des mathématiques au monde de l'expérience.

L'ayant fait en détail ailleurs, nous n'aborderons pas ici de problèmes mathématiques techniques. En particulier nous ne traiterons pas véritablement des deux points suivants, pourtant cruciaux.

² Lautman [1937-1939].

(i) Le débat sur la légitimité d'une approche non constructive de l'infini et en particulier du continu. Peut-on accorder un crédit à l'ontologie non constructive de la théorie des ensembles ? En dehors des intuitionnistes, de très nombreux auteurs ont insisté sur les exigences prédicativistes et constructivistes (Henri Poincaré, Hermann Weyl, un certain Gödel, Georg Kreisel, Solomon Feferman, ainsi que les néo-intuitionnistes de l'Analyse non standard : Edward Nelson et Pierre Cartier, Georges Reeb et Jacques Harthong). Personnellement, nous sommes assez convaincu par les travaux du dernier Gödel et par ceux de logiciens comme Solovay, Martin, Steel, Moschovakis, Harrington ou Woodin sur la pertinence de l'introduction (non constructive) de *grands cardinaux* pour garantir au continu son lien constitutif avec une ontologie suffisamment riche pour la physique.³

(ii) Nous ne traiterons pas non plus, bien que cela nous tienne particulièrement à cœur, de la façon dont on peut interpréter l'essentiel des théories physiques contemporaines dans une optique transcendantale⁴

Nous nous restreindrons volontairement ici à l'analyse de certaines positions philosophiques concernant les quatre points évoqués plus haut.

I. Neuro-psychologie cognitive des actes mathématiques et ses limites

I.1. *Le matérialisme neuronal*

Les mathématiques étant une activité humaine et une activité éminemment cognitive, il est évidemment normal de s'interroger sur elles en termes psychologiques et neuro-cognitifs. Le psychologisme, tant dénoncé depuis Frege et Husserl par les formalistes et les platoniciens, développe la thèse que les objets mathématiques se réduisent — en ce qui concerne leur réalité — à des états et des processus mentaux. Suivant que les représentations mentales sont elles-mêmes conçues comme réductibles ou non à l'activité neuronale sous-jacente, ce psychologisme prend l'allure d'un réductionnisme matérialiste ou d'un mentalisme fonctionnaliste.⁵

Un exemple particulièrement net de réductionnisme matérialiste est fourni par Jean-Pierre Changeux dans son récent débat *Matière à Pensée* avec Alain Connes.⁶ Certes, s'adressant à un grand public, ce débat est peu technique ; le trait y est souvent forcé et

³ Pour de brèves indications, cf. le § VI.3. Pour des détails, cf. Petitot [1990f].

⁴ Sur ce point, cf. Petitot [1989b], [1990a] et [1990b]. Ce texte d'hommage à Jean-Toussaint Desanti étant un bilan partiel de nos travaux en philosophie des mathématiques ces dix dernières années, nous nous permettrons de renvoyer régulièrement à ces derniers.

⁵ Sur les problèmes du mentalisme fonctionnaliste et de l'épistémologie de la cognition en général, cf. Petitot [1989c], [1989d], [1990c], [1990d].

⁶ Changeux-Connes [1989]. Les renvois à cet ouvrage seront effectués dans le texte.

l'argumentation parfois sommaire. Mais, étant donnée la personnalité des discutants, il possède néanmoins une réelle pertinence.

Nous ne traiterons pas ici de la rhétorique, parfois excessive, dont fait montre ici le biologiste anti-formaliste à l'égard du mathématicien. De toute évidence, il s'agit pour J.P. Changeux, au-delà de la compétence scientifique, c'est-à-dire sur le plan de la tactique académique, de remettre en quelque sorte les mathématiques à leur place. J.P. Changeux n'a jamais caché sa défiance envers les rationalismes cartésiens ou leibniziens faisant des mathématiques “la reine” des sciences (p. 20). Les mathématiques doivent selon lui modérer leur souveraineté, leur prétention à une vérité absolue et à une validité universelle afin de devenir plus humblement, selon les prescriptions de Bacon et de Diderot, “la servante” des sciences naturelles (p.20). Et pour faire renoncer les mathématiques à leur droit d'aînesse, le mieux n'est-il pas encore de “démontrer scientifiquement” que leurs prétentions à l'absolu ne sont que des croyances au fond aussi irrationnelles que les croyances religieuses.

Guidé par cette tactique, J.P. Changeux reparcourt alors les topoï traditionnels des critiques empiristes, matérialistes et nominalistes des mathématiques. Mais il le fait, et c'est là tout l'intérêt de sa démarche, à partir des données actuelles des neurosciences cognitives.

1. Selon les thèses empiristes et constructivistes, les objets mathématiques sont “des êtres de raison” dont la réalité est purement cérébrale (p. 28). Ce sont des “représentations”, donc des objets mentaux existant matériellement dans le cerveau et “identifiables à des états physiques” (neuronaux) (p. 30).

“Les représentations mentales, les objets de mémoire, sont codés dans le cerveau comme des formes, dans le sens de la *Gestalt théorie*, en dépit de l'importante variabilité des synapses qui les stockent” (p. 171).

Leurs contenus objectaux sont réflexivement analysables et l'on peut clarifier axiomatiquement leurs propriétés. Mais cela n'est possible que parce qu'ils possèdent, en tant que représentations mentales, une réalité matérielle (pp. 29-32). Qui plus est, les méthodes d'analyse sont elles-mêmes des “procédures cérébrales” (p. 52).

2. On pourrait chercher à sauver une autonomie du formel en admettant les thèses fonctionnalistes du mentalisme computationnel à la Johnson-Laird, Fodor, Pylyshyn, selon lesquelles les algorithmes du “software” psychologique sont indépendants du “hardware” neuronal où ils s'implémentent : les représentations mentales constitueraient alors un “langage interne” de la pensée possédant toutes les caractéristiques d'un langage formel (symboles, expressions symboliques, règles d'inférence, etc.).⁷ Mais ces thèses rencontrent un “obstacle épistémologique considérable” car

“un algorithme peut-il être identifié à une propriété physique du cerveau ?”
(p. 219).

⁷ Sur ces problèmes, cf. Petitot [1989c] et [1990c] ainsi que leurs bibliographies.

Le cerveau ne peut pas être un ordinateur (une machine de Turing ou de von Neumann) biologique car

“dans le cerveau, le programme et la machine [...] sont, dès les premiers stades du développement, très intriqués avec l'architecture connexionnelle”.

Le cerveau est une machine évolutive.

"Il évolue, selon un modèle darwinien, simultanément à plusieurs niveaux et suivant plusieurs échelles de temps" (p. 221).⁸

3. Bien qu'identifiables à des représentations et à des processus mentaux, les objets et les théories mathématiques ne sont pas pour autant purement privés et de nature solipsiste. Ce sont aussi des représentations communicables, publiques, historiques et culturelles, et à ce titre “laïques” et “contingentes” (p. 35). Ils sont *sélectionnés* par un processus évolutif contingent. Ce sont

“des objets culturels, des représentations publiques d'objets mentaux d'un type particulier, qui se produisent dans le cerveau des mathématiciens et se propagent d'un cerveau à l'autre” (p. 58).

Les mathématiques constituent un *langage* et doivent donc être cognitivement abordées, comme tout autre langage, à partir des théories cognitives de la formation des concepts, des raisonnements, des procédures, de l'apprentissage, etc. (p. 39). Il ne saurait par conséquent y avoir *d'ontologie* des mathématiques : l'historicisme évolutionniste (donc le hasard) vicarie ici la nécessité objective. Leur réalité, leur existence, leur cohérence, leur rigidité “résultent a posteriori de l'évolution” (p. 59).

“La science du ‘pourquoi’ n'est pas Dieu mais la biologie évolutionniste”.

“Le pourquoi de l'existence des mathématiques est *l'Évolution* tant de notre appareil de connaissance que des objets mathématiques eux-mêmes” (p. 63).

4. Évidemment, il existe plusieurs niveaux différents de l'organisation cognitive, des plus concrets (perceptifs) aux plus abstraits (symboliques). Ceux-ci sont réalisés dans l'architecture cérébrale, jusqu'au cortex frontal siège des “architectures neuronales de la raison” (p. 141). Cette complexité hiérarchique joue évidemment un rôle fondamental dans la structuration progressive de l'univers mathématique.

⁸ Nous partageons pleinement ces critiques adressées par Jean-Pierre Changeux aux versions formalistes du fonctionnalisme. Nous pensons que les processus cognitifs doivent effectivement être naturalisés, *physiquement expliqués* et pas seulement *logiquement décrits*. Mais cette *objectivation* n'est possible qu'à travers une reconstruction mathématique (par exemple au moyen de modèles morphodynamiques ou connexionnistes, cf. Petitot [1989c]). C'est d'ailleurs l'une des raisons pour laquelle, comme nous le montrerons plus bas, on ne peut pas réduire l'objectivité mathématique aux actes cognitifs qui en sont les corrélats.

5. La conception évolutionniste de l'épistémologie mathématique conduit à un "darwinisme mental" (p. 116) qui représente une "idée neuve" (p. 165). Le modèle général du darwinisme couple on le sait un générateur de diversité et un système de sélection. À un certain niveau d'organisation (lui-même enraciné dans des niveaux inférieurs), des éléments fonctionnant comme une "matière" se combinent pour engendrer des "formes" (des "variations darwiniennes") du niveau supérieur. Certaines de ces formes sont stabilisées par sélection à partir de leur efficacité fonctionnelle. En ce sens,

"la fonction agit de manière rétroactive sur la transition 'matière-forme'"(p. 146).

Dans l'épigenèse, le darwinisme neural se prolonge ainsi en un darwinisme psychologique portant sur la génération-sélection des représentations (à partir d'un processus de stabilisation sélective de synapses) (p. 153).

6. Cette réalité, purement représentationnelle et communicationnelle, cognitive, neuronale, darwinienne, de l'activité mathématique justifie alors un matérialisme radical dénonçant tout platonisme comme une croyance religieuse. Le réalisme platonicien selon lequel

"les objets mathématiques existent quelque part 'dans l'Univers' indépendamment de tout support matériel et cérébral" (p. 35)

est un "résidu mythique" (p.45) des temps magico-théologiques archaïques, une croyance irrationnelle (p. 68) qui doit être éliminée par "l'ascèse intellectuelle du matérialisme" (p. 45). L'épistémologie matérialiste qui, depuis Galilée, est "victime de l'intolérance" (p. 48) est

"la seule qui paraisse acceptable de la part d'un scientifique averti, honnête avec lui-même" (p.46).

Les objets mathématiques ne peuvent pas exister dans la nature. Or, "exister" signifie, et ne peut signifier que, "exister dans la nature" (p. 63), "préexister dans l'Univers au cerveau du mathématicien" (p. 67), bref exister matériellement en dehors de l'esprit. Les mathématiques sont donc des constructions mentales. Ce que disait déjà Kant :

"Emmanuel Kant, au XVIIIème siècle, soutenait déjà que 'l'ultime vérité des mathématiques se trouve dans la possibilité qu'a l'esprit humain d'en construire les concepts'"(p. 67).

Par une subtile rhétorique, Galilée (qui fut condamné pour avoir haussé les mathématiques au rang d'essence objective de la réalité naturelle) et Kant (qui n'eut de cesse que d'affirmer que les mathématiques constituaient seules le contenu de l'objectivité des sciences "proprement dites") se trouvent ainsi enrôlés sous la bannière d'un matérialisme anti-mathématique.

7. Une telle conception de la réalité des idéalités mathématiques conduit évidemment à une conception "extrêmement pragmatique et concrète" (p. 96) de leur applicabilité. Les mathématiques ne sont pas "le principe organisateur de la matière". Elles ne sont "qu'un

langage approximatif” pour *décrire* celle-ci. Il existe certes des régularités dans la nature, mais celles-ci sont “des propriétés intrinsèques de la nature” et non pas des lois mathématiques (p. 72). Les mathématiques se bornent — et doivent se borner — à fournir des *modèles* (étrangers à la nature) et ceux-ci sont sélectionnés par la communauté scientifique (p. 74) en fonction de leur efficacité et de leur “adéquation à la réalité naturelle” (p. 96). D'ailleurs, comme le montrent plusieurs exemples, une équation mathématique (comme par exemple celle de Hodgkin et Huxley pour l'influx nerveux)

“décrit une fonction. Elle[...] ne permet pas d'expliquer le phénomène”.

Une explication passe par l'identification de la structure sous-jacente (en l'occurrence la structure biologique des canaux à ions sodium et potassium de la membrane des axones) (p. 91)⁹

8. Étant donné cet ensemble “d'évidences”, les épistémologues comme Jean-Toussaint Desanti qui se refusent à identifier “l'appareil de connaissance” et le cerveau ne peuvent évidemment le faire que par “ignorance des neurosciences” (p. 46).

1.2. Le réductionnisme cognitif du psychologisme

Le point de vue de Jean-Pierre Changeux sera sans doute accepté et défendu par la plus grande majorité des scientifiques. Il participe de ce regain spectaculaire de “psychologisme” que développent puissamment les divers courants de l'épistémologie dite “naturalisée” (réduction de l'ensemble des problèmes de la théorie de la connaissance à des problèmes de psychologie cognitive). La plupart de ces courants dénie toute réalité objective aux objets, structures et théories mathématiques pour la raison (évidente) suivante : si exister objectivement signifie exister matériellement dans la nature, alors comment peut-on posséder un accès épistémique (un apprentissage, des croyances, plus, des connaissances) relatif à des entités abstraites externes *sans efficace causal* ? Comme le formule bien Michael Resnik :

“If we have no physical traffic with the most basic mathematical entities and they are not literally the products of our own minds either, how can we learn any mathematics ? How could it even be possible for us to acquire beliefs about mathematical objects ?”.¹⁰

Pour sauver une bien problématique ontologie mathématique on doit alors toujours d'une façon ou d'une autre introduire des facultés cognitives “surnaturelles” de l'ordre d'une

⁹ Cet argument est clairement fallacieux. Les modèles mathématiques des théories physiques opèrent toujours à un certain niveau de réalité. On demande aux équations de Navier-Stokes de déterminer la dynamique de l'écoulement des fluides et non pas leur structure moléculaire qui sera, elle, merveilleusement décrite par les équations de la mécanique quantique. On demande aux équations de Newton et d'Einstein de déterminer les interactions gravitationnelles et non pas la chimie des planètes, etc. Quant à l'explication d'un phénomène par des structures sous-jacentes, elle n'est évidemment plus possible au niveau de la physique fondamentale qui, pourtant, contraint universellement tous les autres univers de réalité (cf. plus bas § II.1).

¹⁰ Resnik [1988] p. 403.

“intuition intellectuelle” (cf. Frege, le Gödel caricatural des anti-platoniciens, etc.). Cela étant clairement incompatible avec une épistémologie naturalisée, un nominalisme matérialiste s'impose de lui-même.

Ce dernier point est essentiel dans le débat actuel. Une thèse fondamentale (liée à ce que l'on appelle la théorie causale de la référence) est qu'aucune connaissance de et aucune référence à des entités abstraites externes n'est en droit envisageable dans la mesure où toute connaissance de et toute référence à une entité externe exige une interaction causale du sujet avec cette entité. Or, par définition, une entité abstraite ne peut être le support de relations causales. Comme l'affirme Philip Kitcher, il est donc impossible que des constructions et des manipulations symboliques

“provide any type of access to abstract reality”.¹¹

Il faut au contraire penser les mathématiques comme une activité symbolique (logico-linguistique et même sémio-narrative : “in certain respects, mathematics is like story-telling”) nous permettant, par une suite d'approximations successives sédimentées dans les traditions, de structurer au moyen d'idéalités notre expérience de façon de plus en plus adéquate.¹² Les mathématiques émergent, par un processus d'idéalisation, de connaissances proto-mathématiques (perceptives, etc.) contraintes par les structures de la réalité mondaine. Véhiculées historiquement et socialement par le patrimoine scientifico-technique de l'humanité, elles progressent comme toutes les autres formations symboliques de cette humanité. Nul n'est donc besoin pour les comprendre d'invoquer un quelconque monde d'idées auquel une incompréhensible intuition intellectuelle nous donnerait un quelconque accès.

Évidemment tout le problème d'une telle argumentation est qu'elle présuppose que l'on sache ce que signifient des concepts comme “réalité extérieure”, “matière”, “causalité”, etc. Or, il est impossible de définir objectivement ces termes de façon autre que mathématique. Et c'est bien là la difficulté (archi-traditionnelle). La croyance à la possibilité de comprendre le concept de réel indépendamment de toute détermination et constitution objectives est une croyance (l'Urdoxa de Husserl) encore plus irrationnelle et archaïque que celle du platonisme naïf.

On voit ainsi qu'il existe une solidarité étroite entre la conception que l'on se fait de la *réalité* des idéalités mathématiques et celle de leur *applicabilité*. Le problème du réalisme mathématique est que, à supposer que les mathématiques décrivent bien des propriétés d'*objets abstraits* réellement existants, comment notre expérience peut-elle alors nous livrer de l'information sur ces idéalités puisque celles-ci sont sans efficace causal ? Il est impossible de développer une ontologie naturaliste d'entités abstraites. Et pourtant une telle ontologie semble être nécessaire dans la mesure où elle est constitutive de l'ontologie physique : les

¹¹ Kitcher [1988] p.527.

¹² Ibid. pp. 528-532.

objets physiques fondamentaux sont avant tout des constructions mathématiques. D'où, selon M. Resnik, l'une des questions majeures de la philosophie des mathématiques :

“How can we retain the advantages of an ontology of abstract entities for mathematics while removing its obvious epistemological disadvantages ?”.¹³

Le problème est clair. Si, comme y insistent les nominalistes (cf. Hartry Field, par exemple, dans *Science without numbers*), il n'existe pas d'idéalités mathématiques possédant le statut de choses, alors quels sont les “truth-makers” des énoncés mathématiques ? Il est consistant de poser avec le second Wittgenstein que les contenus mathématiques sont *prescriptifs* et non pas *descriptifs*, que ce ne sont que des règles d'usage de concepts. Mais dès que l'on abandonne cette position radicale, alors le problème des truth-makers redevient crucial. Comme le rappelle Crispin Wright,

“the traditional platonist answer is that the truth-conditions of pure mathematical statements are constituted by the properties of certain mind-independent abstract objects, the proper objects of mathematical reflection and study”.¹⁴

On connaît d'autres réponses. Pour les intuitionnistes, les énoncés mathématiques se réfèrent à des constructions mentales que l'on doit investiguer avec une logique particulière, reflétant leur caractère constructif.¹⁵ Pour les structuralistes formalistes, les référents des énoncés mathématiques sont des structures, etc.

Mais l'on voit que toutes ces difficultés proviennent du fait que l'on applique aux mathématiques — bien au-delà du rapport entre syntaxe et sémantique propre à la théorie logique des modèles — la conception traditionnelle et générale du rapport *dénotatif* entre un langage et une réalité (théorie de la référence). Ce n'est qu'à partir de là que se pose le problème obsessif et insoluble : qu'est-ce qui rend les énoncés mathématiques vrais (au sens d'une vérité-correspondance) et comment pouvons-nous *connaître* que les énoncés vrais sont vrais (accessibilité épistémique à la vérité).

La conception de la dénotation et de la vérité que l'on choisit commande la conception que l'on se fait de la nature des preuves. Pour le platonisme traditionnel, les démonstrations ne sont que des auxiliaires cognitifs permettant d'accéder à des vérités indépendantes de nous (à contenu ontologique). Selon lui, la vérité “transcende” donc la démonstration. Les intuitionnistes finitistes radicaux comme Wittgenstein et Dummett nient cette thèse : la vérité ne peut pas transcender les démonstrations qui la détermine. Mais alors le problème de l'applicabilité des mathématiques devient incompréhensible. Car, comme le souligne Crispin Wright :

¹³ Cf. Resnik [1988], p. 407.

¹⁴ Wright [1988], p. 426.

¹⁵ Nous parlons ici de l'intuitionnisme classique. On sait en effet, grâce en particulier aux travaux de F.W. Lawvere et de M. Tierney que la logique intuitionniste est la logique interne d'univers d'ensembles munis d'une certaine structure, et en particulier des topoi de Grothendieck (des catégories de faisceaux sur des catégories munies d'une "topologie").

“How is it possible to apply mathematics to statements which concern ordinary things, and how does the credibility which attaches to a pure mathematical statement as a result of proof carry over to its application ?”¹⁶

Face à cette problématique très riche et très diversifiée notre idée directrice sera ici la suivante. Il faut essayer de ne plus penser la question de la réalité et de l'applicabilité des idéalités mathématiques selon l'analogie d'un rapport langage-monde. Dans leur rapport au réel les théories mathématiques ne dénotent pas, pas plus d'ailleurs que les théories physiques où elles s'impliquent. Elles *déterminent* — *légalisent* — des données phénoménales, ce qui est tout à fait autre chose. Certes, la théorie des modèles internalise dans la méta-mathématique un rapport apparemment de type “langage-réalité”. Mais celui-ci est *intra*-mathématique et ne met donc en jeu aucune extériorité. Il reste par conséquent étranger aux questions de réalité et d'applicabilité. Poser ces questions en voulant “redoubler” ce rapport méta-mathématique par un rapport “ontologique” de type “langage (mathématique)-monde (réel)” revient à penser la connaissance en termes de prédication. Or penser la connaissance en termes de prédication, c'est en rester à une tradition métaphysique classique et méconnaître son remplacement par la problématique de l'objectivité.

Nous pensons donc que le problème de la réalité des idéalités mathématiques n'est pas celui de leur réalité en un sens ontologique traditionnel, mais celui de leur réalité *objective* ce qui est, on ne le répètera jamais assez, tout à fait autre chose. La notion de réalité est une *catégorie modale* inséparable d'une doctrine transcendante de la *constitution* des objectivités (cf. Kant) et non pas un concept absolu.

De même, selon nous, le problème de l'applicabilité des idéalités mathématiques n'est pas celui de leur applicabilité à une réalité ontologique du monde, mais celui de leur implication dans l'objectivité physique, ce qui, encore une fois, est tout à fait autre chose.

Dans l'article *Continu et Objectivité*¹⁷ nous avons élaboré techniquement ce point en ce qui concerne certains contenus mathématiques. Nous nous restreindrons ici, nous l'avons dit, à des considérations plus proprement philosophiques.

II. L'antinomie dialectique du nominalisme matérialiste et du réalisme platonicien. Son *Aufhebung objective*.

II.1. L'antinomie

Toutes les thèses psychologues, empiristes, nominalistes et/ou matérialistes (on peut choisir la combinatoire que l'on préfère) analogues à celles que nous venons d'évoquer brièvement semblent s'imposer par leur évidence. Pourtant elles ne résistent pas à un examen approfondi, et cela pour plusieurs raisons.

¹⁶ Ibid. p. 429.

¹⁷ Petitot [1990f].

1. D'abord, elles reposent toutes sur la thèse d'une alternative indépassable, celle d'un dualisme mental/physique, i.e. interne/externe, et sur une préconception de ce qu'est l'objectivité physique du monde externe. La réalité externe y est conçue comme fondée sur une ontologie substantialiste de choses matérielles autonomes (indépendantes de l'esprit) dotées d'une stabilité structurelle suffisante et entretenant entre elles des rapports de causalité (matérielle et efficiente) et d'interaction réciproque. Qui plus est, on admet que cette ontologie substantialiste est, sinon explicable, du moins descriptible par un langage scientifique de description approprié construit à partir de la langue naturelle. On introduit alors différents niveaux d'organisation et on pose (thèse réductionniste) que les niveaux inférieurs expliquent causalement les niveaux supérieurs. Les atomes, les molécules, le génome, les protéines, les neuro-transmetteurs, etc. existeront bel et bien dans la nature, alors que les structures mathématiques comme les nombres ne sauraient évidemment, elles, exister de la même manière puisqu'elles sont le produit d'une évolution symbolique, historique et culturelle, contingente.

On peut résumer cet ensemble d'évidences en disant que la réalité physique matérielle de base y fonctionne métaphysiquement comme une "réalité en soi", comme une réalité indépendante diraient les physiciens. Or, l'hypothèse d'une réalité matérielle en soi, transcendante et indépendante — et qui plus est, d'une réalité indépendante satisfaisant à une ontologie substantialiste de choses — est une hypothèse très problématique. Elle relève d'une croyance tout aussi irrationnelle que les croyances religieuses. Remplacer Dieu et les Idées par la matière et l'évolution n'est jamais qu'un changement de religion métaphysique.

Ce n'est pas évidemment que la réalité en soi n'existe pas. Elle existe certainement comme "fondement" transcendant de la réalité empirique. Le problème est que ce fondement en soi étant par définition cognitivement inaccessible, il ne peut pas être invoqué et utilisé dans une argumentation scientifique. En sciences, il y a en quelque sorte un "écranage" de l'être par le phénomène.¹⁸ C'est pourquoi, puisqu'il faut bien quand même accéder à une vérité au-delà des phénomènes, l'ontologie doit être vicariée par une procédure de constitution d'objectivité.

Comme nous l'avons montré ailleurs¹⁹, il se produit avec les niveaux de réalité physiques le même phénomène qu'avec les niveaux sémantiques dans un lexique. On sait que lorsque l'on veut réduire par définitions successives les termes d'un lexique à des termes sémantiquement plus fondamentaux on en arrive nécessairement à des termes primitifs indéfinissables. Pour continuer l'analyse définitionnelle on est alors contraint de changer de stratégie, de passer d'un point de vue sémantique à un point de vue syntaxique et de définir *implicitement* les concepts primitifs au moyen d'axiomes (c'est-à-dire de règles normant leur usage). Il en va de même pour toute explication matérialiste réductionniste des niveaux de

¹⁸ Cf. Petitot [1988], [1989b].

¹⁹ Petitot [1989b]

réalité. Lorsqu'on en arrive aux niveaux physiques de base, une ontologie substantialiste n'est plus acceptable. À ce niveau basique la physique ne décrit plus un monde substantiel de choses matérielles structurellement stables, causalement reliées et interagissantes.

Nombre de grands physiciens ont insisté là-dessus depuis Hermann Weyl et Niels Bohr. Au niveau fondamental, les phénomènes physiques sont *sans* ontologie sous-jacente. Leur objectivité est d'essence transcendante et, au-delà de la réalité empirique, en ce qui concerne leur dimension théorético-conceptuelle, de contenu *purement mathématique*. On peut montrer, au niveau de la technicité même de leurs contenus physico-mathématiques, que les théories physiques fondamentales (mécanique symplectique, relativité générale, théories quantiques des champs et intégrales de Feynman, théories de jauge, théories des cordes, etc.) confirment la conception transcendante-constitutive (i.e. ni ontologique ni psychologue) de l'objectivité.²⁰ C'est dire, en particulier, que les catégories physiques “dynamiques” de substantialité, de causalité et d'interaction, et les catégories modales de possibilité, de réalité et de nécessité n'y fonctionnent plus de façon absolue (métaphysique, dogmatique) mais, à travers des procédures d'abord de schématisation puis de construction (au sens kantien), comme autant de procédures de détermination mathématique objective des phénomènes. Sauf à en rester à un solipsisme plutôt inconsistant ou à un phénoménisme empiriste assez trivial, le défaut d'ontologie fait que l'objectivation par détermination mathématique vicarie l'ontologie : le contenu objectif des phénomènes ne peut plus être que mathématique.

2. C'est dire que le fait de *l'émergence* de niveaux de réalité supérieurs possédant leur autonomie de structure et leurs lois spécifiques d'organisation, niveaux adéquatement descriptibles au moyen d'un langage de description fondé sur la langue naturelle et corrélé à une ontologie substantialiste, que ce fait, donc, doit être considéré comme un *problème ad quem* (situé à l'horizon de l'explication scientifique) et non pas comme une *donnée a quo*. Une ontologie substantialiste doit être scientifiquement *conquise*.

3. Un des aspects de ce problème concerne la façon dont les points de vue dont nous discutons utilisent de façon essentielle certains concepts dont ils sont pourtant dans l'incapacité de rendre compte. Nous nous bornerons à citer deux exemples : celui du concept d'*espace-temps* et celui du concept de *forme*.

(a) L'espace-temps n'est pas une réalité physique avec laquelle nous entretenons des interactions causales. Comme disait Kant, c'est une *forme* de la réalité (une intuition pure, une condition de la manifestation phénoménale). Si exister signifie exister matériellement dans la nature alors l'espace-temps *n'existe pas*. C'est “donc” une représentation mentale, une intuition non conceptuelle corrélative plutôt du cortex visuel que du cortex frontal. Ce qui

²⁰ Cf. Petitot [1988], [1989b]. Une telle affirmation présuppose évidemment que l'on ne réduise pas le transcendantalisme à Kant, pas plus que l'on ne réduit l'empirisme à Hume ou l'axiomatique à Euclide. Réduire un point de vue à la lettre de l'œuvre de son fondateur, reste le moyen le plus sûr de l'archaïser.

concorde bien avec l'hypothèse que sa détermination mathématique (géométrique) serait de nature exclusivement mentale. Seulement voilà. La conséquence immédiate en est que l'ontologie substantialiste servant de fondement au matérialisme positiviste devrait alors en toute logique être une ontologie *a-spatiale* et *a-temporelle*. Elle devrait donc étayer paradoxalement un idéalisme pur, par exemple un idéalisme monadologique de type leibnizien. Pour elle l'espace-temps devrait être *imaginaire*. Le problème est que :

(i) il serait dès lors impossible d'élaborer une genèse neuronale matérialiste de l'espace-temps puisque les structures cérébrales sont elles-mêmes spatio-temporelles ;

(ii) l'objectivité physique à laquelle il est fait recours comme fondement matérialiste est en dernière instance entièrement construite sur une base spatio-temporelle.

On voit bien la difficulté. Dans ses déterminations physiques les plus basiques, la matière n'est pas substance. Elle s'identifie — depuis Riemann et Clifford — à une *géométrie*, à une géométrie-dynamique, fondée sur la géométrie de l'espace temps. De la relativité générale jusqu'aux théories de jauge contemporaines, à la théorie des supercordes (qui vient de valoir au Congrès international de Kyoto la médaille Fields à Edward Witten, l'un de ses plus éminents spécialistes) et aux étonnants travaux d'Alain Connes sur les applications physiques de la géométrie non commutative, toute la physique moderne confirme le slogan de Clifford : “Physics is Geometry”. Or l'espace-temps n'est pas une réalité en soi. Il est sans contenu ontologique. En faire pour cette raison une apparence, une projection mentale, c'est se condamner à un idéalisme solipsiste. En fait l'espace-temps est une *forme* de *l'objectivité* externe.

Il est selon nous impossible de faire l'économie d'une problématique de type “Esthétique transcendantale” disant que les mathématiques pures permettent, seules, de déterminer les formes de la réalité, que les concepts théoriques des sciences n'ont de contenu *objectif* que pour autant que leur contenu *sémantique* se trouve *construit* — donc éliminé en tant que purement *sémantique* — à partir de telles déterminations et, qu'à ce titre, les mathématiques sont bien *constitutives* de la réalité objective (et non pas, évidemment, de la réalité en soi).

(b) De même, le modèle général du darwinisme utilisé par J-P. Changeux présuppose qu'un générateur de diversité soit à même de produire des formes diversifiées à partir de composants matériels (c'est le cas par exemple de l'expression phénotypique d'un génotype) et que la fonction permette de sélectionner certaines de ces formes. Mais qu'est-ce qu'une forme pour le positivisme matérialiste ? Qu'est-ce que *l'expression* d'un niveau *matériel* “géo” par un niveau *morphologique* “phéno” ? Si exister veut dire exister matériellement dans la nature, les formes n'existent pas ! Certains philosophes l'affirment depuis fort longtemps (cf. les atomistes, Hobbes, etc.) : les formes seraient des *projections* de constructions mentales sur la réalité ; elles seraient simplement découpées par la perception et le langage dans cette réalité physique externe. La plupart des courants cognitivistes actuels

sont “projectivistes” en ce sens.²¹ Or, comme Hilary Putnam l'a bien montré dans son ouvrage *The Many Faces of Realism*, ce projectivisme ôte en fait tout contenu objectif à la réalité du monde sensible. Mais alors, comment le processus sélectif de l'évolution pourrait-il bien avoir été celui d'une adaptation de la vie biologique à des projections mentales de notre espèce humaine ? Le concept d'“exaptation” ne suffit pas à résoudre cette inversion du sens du temps. La biologie évolutionniste impose une objectivité des formes. Mais comment penser cette objectivité ? Cela est impossible en termes physicalistes étroits (c'est même pour cette raison que Kant a dû écrire une troisième Critique). Il est difficile d'attribuer aux formes une causalité matérielle et efficiente. Celles-ci sont néanmoins objectives, naturelles, réelles. Ce sont, qu'on le veuille ou non, des idéalités géométro-dynamiques réalisées dans les *phénomènes*.²²

4. Une autre difficulté insurmontable que rencontrent les conceptions évoquées plus haut découle du fait qu'elles identifient les *objets* aux *actes* cognitifs leur donnant accès. Selon elles, les idéalités mathématiques ne peuvent pas exister parce que :

- (i) l'existence équivaut à une transcendance ontologique, et
- (ii) aucune transcendance ontologique ne saurait être fondée dans l'immanence d'actes cognitifs.

Donc le contenu de réalité des objets mathématiques se réduit aux conditions de leur accès épistémique.

Une telle thèse est évidemment tout à fait soutenable. Mais s'il l'adopte, un scientifique “averti, honnête avec lui-même” doit l'adopter pleinement et en accepter les conséquences. Or, il en est une, traditionnelle et analysée sous plusieurs aspects de Berkeley à Husserl, qui est particulièrement critique, à savoir que la thèse doit être aussi appliquée à la *perception* et que cela conduit, sans aucune échappatoire possible, au *solipsisme*. Autrement dit, le réalisme ontologique quant à une nature matérielle indépendante et en soi, s'il conduit bien à un anti-platonisme psychologisant, conduit aussi, et tout aussi radicalement, à sa propre *inversion* en idéalisme subjectif.

Dans son débat avec Jean-Pierre Changeux, Alain Connes a fort bien argumenté ce point. Au-delà d'une croyance irrationnelle à la réalité du monde matériel externe, qu'est-ce qui *prouve* cette réalité sinon la *cohérence* des perceptions ? Si l'on réduit les mathématiques à n'être qu'un langage et si on leur dénie toute réalité, alors pourquoi ne pas considérer que les objets réels perçus ne sont que

²¹ Cf. Petitot [1989c], [1990c], [1990d] où se trouvent analysées les positions de Jerry Fodor, Zenon Pylyshyn, Ray Jackendoff, Len Talmy et Ronald Langacker, ainsi que des positions plus réalistes comme celle de David Marr.

²² Sur la façon dont la physique moderne et la morphodynamique permettent de prolonger une mécanique des forces en une dynamique des formes, cf. Petitot [1982], [1986b], [1989d] et surtout leurs bibliographies.

“des constructions mentales destinées à rendre compte de certains phénomènes visuels” (p. 41).

Si les mathématiques se réduisent effectivement au cerveau, pourquoi ne pas alors réduire également le monde au cerveau par l'intermédiaire de la perception ? (p. 86).²³

Au-delà de ce que Husserl appelait l'Urdoxa de la “croyance certaine” à la réalité du monde externe dans “l'attitude naturelle”, le dépassement du solipsisme exige par conséquent la possibilité de *fonder des transcendances objectives dans l'immanence des actes assurant leur accessibilité cognitive et épistémique*. Cela présuppose évidemment à son tour que ces transcendances objectives soient bien *objectives* et non pas *ontologiques*. Conçue comme *modalité* de processus constitutifs d'objectivation de phénomènes, la réalité ne possède pas de contenu ontologique en soi.

5. Étant donné que, conformément à la thèse husserlienne, la transcendance du monde commun est le *corrélat* des actes cognitifs et épistémiques y donnant accès, il est tout à fait légitime d'attribuer aux mathématiques un statut de réalité analogue. Un réalisme comme celui d'Alain Connes est donc philosophiquement justifié :

“pour moi, la suite des nombres premiers, par exemple, a une réalité plus stable que la réalité matérielle qui nous entoure” ;

l'infinité des nombres premiers est

“une réalité aussi incontestable que la réalité physique” (pp. 28-29).

Une réalité mathématique indépendante, “brute et immuable”, non réductible aux outils conceptuels qui permettent de l'investiguer, doit être admise (p. 48). Elle est

“tout aussi contraignante mais beaucoup plus stable que la réalité physique, car non localisée dans l'espace-temps” (p. 49).

Évidemment tout le problème est alors de ne pas retomber dans les apories millénaires d'un platonisme naïf.

II.2. L'Aufhebung objective de l'antinomie “nominalisme matérialiste / réalisme platonicien”

Pour sortir de l'antinomie dialectique opposant un nominalisme matérialiste à un réalisme platonicien, il faut préalablement poser le problème de la réalité des idéalités mathématiques en termes *d'objectivité* et non plus en termes *d'ontologie*. Il devient en effet alors possible d'exhiber des *critères* d'objectivité. Alain Connes souligne avec insistance trois d'entre eux, effectivement fondamentaux (sur lesquels nous reviendrons plus bas).

²³ Dans le débat, J.-P. Changeux repousse ce parallèle entre mathématiques et perception comme une “métaphore”.

1. La possibilité de *classifier* exhaustivement les objets définis par une axiomatique. Par exemple, pour chaque nombre premier et chaque entier positif n il existe un et un seul corps fini de caractéristique p et de cardinal p^n et l'on obtient ainsi tous les corps finis. On connaît de même la classification complète des corps localement compacts (\mathbb{R} , \mathbb{C} , les corps p -adiques et leurs extensions algébriques, les corps de séries formelles sur les corps finis). De même une suite ininterrompue de travaux géniaux (de Galois jusqu'à Feit et Thompson) a conduit à la classification des groupes finis simples. On pourrait citer beaucoup d'autres exemples, topologiques, géométriques, etc. De tels résultats manifestent l'existence de contraintes objectives contraignant (nécessitant) les univers de possibles. Notons que l'exemple princeps est celui des "solides platoniciens" (les cinq polyèdres réguliers convexes).

2. La *cohérence et l'harmonie* inter-théoriques *globales* des théories mathématiques (ce qu'Albert Lautman appelait leur *unité*) (p. 200). Bien "qu'inexpliquées" (p. 33) et constituant un problème central (p. 197), elles sont incontestables et objectives puisque la physique mathématique s'y fonde. Elles sont "l'antidote de l'aléatoire" (p. 155).

3. Le fait que les théories mathématiques intéressantes ont *un contenu informationnel infini*.

On remarquera que ces critères d'objectivité ne sont satisfaits par aucun autre système cognitif symbolique, qu'il s'agisse des langues naturelles ou des divers "jeux" (échecs et autres systèmes de règles) auxquels on a voulu comparer les mathématiques. Pour les faire apparaître pour ce qu'ils sont — "to do justice to what we know" — il est nécessaire d'élaborer une doctrine de l'objectivité.

III. Phénoménologie des idéalités

Comme nous l'avons déjà noté à la fin de notre introduction, il existe quatre piliers de toute philosophie des mathématiques :

- (i) les actes cognitifs constitutifs de l'activité mathématique ;
- (ii) le statut de la connaissance et de la légalité symbolique ;
- (iii) le problème de la donation et de la réalité des objets et des structures mathématiques ;
- (iv) la nature de l'applicabilité des mathématiques au monde de l'expérience.

C'est eux qu'il faut arriver à penser dans le cadre d'une doctrine de l'objectivité. Dans cette direction, nul n'est sans doute allé plus loin que Husserl. Certes, en ce qui concerne certains problèmes précis, nombre de mathématiciens, de logiciens et d'épistémologues ont été plus radicaux. Mais aucun n'a su concevoir une théorie d'ensemble d'une telle envergure. Husserl a selon nous élaboré la plus importante philosophie dépassant les apories du platonisme. Quoi qu'en disent ses détracteurs, il a "résolu" ce problème philosophique

comme on peut résoudre une grande conjecture mathématique ou expliquer une énigme physique. Il est donc pertinent de s'y arrêter un instant.

Nous avons longuement exploré ailleurs certains aspects de la phénoménologie husserlienne, en particulier en ce qui concerne la phénoménologie de la perception, la phénoménologie transcendantale-constitutive des ontologies régionales, l'ontologie formelle et la philosophie des mathématiques (en rapport avec Cavallès et Desanti).²⁴Nous commencerons par suivre ici le remarquable ouvrage *Logic and The Objectivity of Knowledge* consacré par Dallas Willard à la *Philosophie de l'Arithmétique* et aux *Recherches Logiques*.²⁵

III.1. Les actes psychologiques

Comment des transcendances objectives peuvent-elles être fondées dans des représentations et des actes cognitifs ? Il y faut plus que des états et des processus mentaux, plus qu'une communicabilité intersubjective d'expériences, plus que des règles et des lois, plus même que des calculs symboliques. Mais quoi ?

“How an epistemic act or process transcends itself in a correct grasp of truths and objects which are not really ‘present in’ it and which belong equally to all members of the community of inquirers ?” (p. 8).

Comment les actes peuvent-ils se transcender vers des objets et, réciproquement, comment des objets dotés de l'idéalité de l'universel peuvent-ils être saisis épistémiquement ? Pour répondre à ces questions, il faut d'abord disposer d'une analyse catégoriale des actes cognitifs. On sait que, pour ce faire, Husserl a beaucoup emprunté à la *Gestalttheorie*, à ses conceptions des rapports de dépendance entre tous et parties, des moments dépendants (qui ne sont pas des concepts abstraits mais des moments individuels) et des actes complexes d'ordre supérieur (incluant des mises en relation) faisant émerger de nouveaux contenus représentationnels. Cela lui a permis de développer une analyse de *l'origine* des concepts “authentiques” (i.e. issus d'expériences où les objets se donnent concrètement avec leurs caractéristiques essentielles) d'unité, de multiplicité, de collectivisation ou de colligation, de totalité, de nombre. Moments d'ordre supérieur, les moments d'unité et de totalité sont des “intuitions catégoriales”.

Les descriptions husserliennes des actes élémentaires (intuitifs) de colligation et de comptage (saisie des unités, saisie de leurs différences, appréhension et représentation de leur simultanéité, successivité énumérative, unification spatiale par délimitation d'une frontière virtuelle pour un agrégat, saisie aperceptive de l'unité) comme ensembles de procédures, de règles, de programmes pour le traitement du donné perceptif sont tout à fait remarquables. Elles anticipent étonnamment sur les descriptions cognitivistes actuelles.²⁶ Elles permettent de

²⁴ Cf. Petitot [1982], [1985], [1986a], [1987a], [1987b], [1988], [1990b].

²⁵ Willard [1984]. Les renvois à cet ouvrage seront effectués dans le texte.

²⁶ Sur l'étonnante anticipation husserlienne du cognitivisme, cf. Petitot [1986a].

décrire phénoménologiquement la chaîne conduisant, dans un acte concret de colligation, d'une hylé sensorielle (d'une intuition sensible, de *sense data*) à une unité intentionnelle noématique (en l'occurrence l'unité idéale d'une totalité saisie comme intuition catégoriale) à travers une morphé intentionnelle (des synthèses noétiques faisant *apparaître* une totalité énumérable). Il existe donc des “moments figuraux”, des Gestaltqualitäten émergentes, permettant à une totalité d'en être une. Par abstraction, on en arrive ainsi à la fondation du concept de nombre. Son analyse fait intervenir un ensemble de concepts descriptifs qui n'ont pas, selon Husserl, à être définis logiquement (critique de Frege).

Il est facile de voir comment de telles analyses peuvent être, et sont, actuellement reprises, confirmées et approfondies. Pourtant, de l'aveu même de Husserl, elles tombent sous le coup de la critique du psychologisme dès qu'on prétend y réduire les mathématiques.

III.2. Les limites du psychologisme

La mathématique exige (au moins), en plus de l'activité psychologique, la *normativité* du logique. Le psychologisme consiste à faire des lois logiques non pas des normes mais des lois factuelles de la pensée et/ou du langage. Il prétend fonder le normatif sur une description des actes cognitifs. Il a pour lui l'évidence empiriste puisque les structures logiques n'existent concrètement qu'instanciées dans des actes cognitifs. Mais, dans le même temps, il rend la logique, les mathématiques et les sciences incompréhensibles. En effet, comme Husserl y a insisté de façon récurrente, la logique n'a pas trait à la pensée mais à l'ensemble des lois idéales et des règles gouvernant les concepts de fait, de proposition, de vérité, d'objet, de propriété, de relation, d'inférence, de preuve, etc., c'est-à-dire les catégories constitutives de toute science possédant une unité théorique objective et nomologique. Or,

“the psychologistic interpretation requires that logical laws be vague and inductively based. (...) By contrast, on Husserl's view, they are in fact rigorous or exact laws supported by immediate insight and deductively organized, with no implication of the existence of minds or of cognitives acts of any sort”(p. 150).

Husserl refuse que les lois logiques de la connaissance symbolique puissent être vagues et dépendre, donc, en ce qui concerne leurs conditions d'application, de circonstances empiriques mal définies ou non spécifiables. Les lois logiques ne disent pas que sous les circonstances *X*, les prémisses *P* entraînent avec une grande probabilité que la conclusion *C* émergera dans l'esprit du sujet avec un sentiment d'évidence apodictique (p. 160). Elles ne sont pas obtenues par généralisation inductive. Elles n'impliquent pragmatiquement l'existence d'aucun fait concret, d'aucun état de choses, autrement dit, elles sont *sans contenu factuel*. Elles sont idéales en un sens non mentaliste.²⁷ Bref, la logique *pure* est l'instance

²⁷ Sur ce point, notre position pourra peut-être paraître un peu ambiguë. En effet, en ce qui concerne les théories cognitives, nous défendons des conceptions morphodynamiques “sub-symboliques” (connexionnistes) faisant des structures logiques des structures vagues, mais structurellement stables, émergeant de dynamiques

normative de la légalisation objective. Appliquée à la psychologie cognitive des actes, elle permet à ces actes d'acquérir des corrélats objectaux.

III.3. La connaissance symbolique et la légalité du formel

Nous reviendrons plus bas sur la façon dont Husserl traite les caractères d'idéalité et d'exactitude des lois logiques, des objets et des vérités mathématiques. Pour l'instant, arrêtons-nous brièvement sur la façon dont il aborde le problème central de la connaissance symbolique et formelle.

La connaissance logico-mathématique est de part en part symbolique et calculatoire (computationnelle). À ce titre elle est "inauthentique" et "in absentia", c'est-à-dire de nature différente de la connaissance "authentique" d'objets et d'états de choses *donnés* intuitivement dans la concrétude de leur présence. Bref, elle est formelle ("aveugle" et "vide" disait Kant). Comment peut-elle donc donner accès à une connaissance objective ? Ce problème a toujours été central pour Husserl :

"it is not a great or a pointless exaggeration to say that the analysis of symbolic representing and knowing is *the* main problem for investigation throughout Husserl's career" (p. 89).

Pour Husserl, contrairement à ce qu'il en est pour nombre de philosophes de la logique, les représentations symboliques ne constituent pas l'instance sémio-linguistique qui permet à des représentations privées de devenir publiques, autrement dit, l'instance permettant de dépasser le solipsisme. En effet, le solipsisme se trouve dépassé *d'emblée* par l'intentionnalité (p. 92). Le problème est bien plutôt celui du statut de la connaissance symbolique comme *connaissance*. Pour élucider ce statut, il faut admettre deux choses :

- (i) la fondation (au sens de rapport de dépendance) de la cognition symbolique dans la cognition "authentique", et
- (ii) la légalité *sui generis* du formel.

Une théorie mathématique comme l'arithmétique repose sur un symbolisme construit et structuré où il existe un parallélisme strict entre le système des concepts de nombre et le système des signes numériques. Ce parallélisme permet, *au-delà* de nos limites intuitives et épistémiques, de faire de ce système symbolique de signes un représentant ("inauthentique") du système conceptuel devenu *cognitivement* ineffectif. Il substitue aux nombres concrets (avec leur genèse cognitive évoquée plus haut) des nombres "systématiques" sur lesquels on neurones sous-jacentes. Nous n'admettons donc pas les versions *formalistes* du fonctionnalisme (à la Fodor-Pylyshyn) et partageons pleinement les critiques d'un Changeux à cet égard. Mais de même que l'on peut fort bien, d'un côté, élaborer des modèles mathématiques sophistiqués de la perception visuelle de formes géométriques (par exemple à des fins de robotique) et, d'un autre côté, défendre une idéalité objective de la géométrie en tant que constitutive des théories physiques, de même le souci de modéliser mathématiquement les phénomènes cognitifs servant de base justificative au psychologisme n'implique évidemment pas qu'on adhère aux conclusions *épistémologiques* de celui-ci. Nous partageons avec Husserl la thèse de l'idéalité objective de la logique *pure*.

peut opérer formellement, c'est-à-dire calculer, le calcul étant un système de “rule-governed operations” (p. 108), “in the manner of rules for a game” (p. 104).

Or les calculs symboliques — qui permettent de nous affranchir de notre *finitude* cognitive — ne sont plus de nature représentationnelle.²⁸ Le formel possède une *légalité autonome*, légalité autonome à laquelle la logique doit faire justice. Cela suffit à invalider le psychologisme : la logique ne peut pas être une science empirico-inductive des processus cognitifs. Elle relève plutôt d'une technologie du symbolique.²⁹ Bref, une authentique logique formelle doit ouvrir à une théorie *non représentationnelle* des calculs symboliques (p. 116).

Il faut bien voir que cela signifie beaucoup plus, pour la logique, que d'être simplement une logique de représentations “inauthentiques” (symboliques), par exemple des nombres. En effet, les théories mathématiques comme l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse fonctionnelle, etc. poussent le non-représentationnel bien au-delà de ces représentations inauthentiques en introduisant et en utilisant tout un ensemble d'intuitions catégoriales et d'objets idéaux. Et dans la mesure où seuls les langages formels et les algorithmes symboliques garantissent ces théories, il existe donc un statut épistémique *spécifique* du formel en tant que tel dont aucune logique représentationnaliste n'arrive à rendre compte. Les systèmes formels assurent par conséquent l'unité théorique *objective* des expériences cognitives et, dans une certaine mesure, toute la question devient de savoir comment ils l'assurent. Pour reprendre l'opposition kantienne fondamentale entre concepts déterminants et idées régulatrices, on peut considérer :

(i) soit que le formel assure une unité théorique simplement *régulatrice* pour les expériences cognitives, et alors le formel pourra être conçu de façon purement normative sans unités objectales (noématiques) corrélatives ;

(ii) soit que le formel assure aussi une unité théorique objective *déterminante* pour ces expériences, et il devra alors être corrélé à des unités objectales.

Quoi qu'il en soit, il faut résoudre deux questions centrales :

“(1) What constitutes the *unity* of an algorithm ? and (2) What is the *basis of the applicability* of an algorithm within one or more domains of knowledge ?”
(p. 118).

²⁸ Les travaux néo-intuitionnistes déjà cités (Reeb-Harthong, Nelson-Cartier) sur l'arithmétique et l'analyse non standard ont remis au premier plan cette distinction entre nombres entiers “concrets” (i.e. cognitivement accessibles, même si le “cognitif” en question est celui d'un ordinateur) et les entiers “formels” (axiomatiquement légalisés). Cf. plus bas § VI.3.

²⁹ Évidemment, sur ce point, le mentalisme fonctionnaliste et computationnel d'un Fodor prend en quelque sorte sa revanche puisqu'il conçoit l'activité cognitive comme un calcul formel sur des représentations symboliques possédant la structure des expressions d'un langage formel (le “langage de la pensée”, le “mentalais”). Mais, comme nous l'avons vu, ce dépassement des limites du psychologisme est en grande partie factice. Une théorie naturaliste de la cognition doit relier structure et fonction, performance et compétence, à un niveau dynamique “subsymbolique”. Du coup cela réouvre le problème de la légalité extra-cognitive du formel.

On sait que sur ce point, Husserl partageait le point de vue de Hilbert sur la métamathématique et ce qui allait devenir plus tard la théorie logique des modèles. Les symboles “matériels” (littéraux) des systèmes formels rompent avec *l'intentionnalité* conceptuelle. Toutefois, comme l'explique magnifiquement Hilbert dans *Über das Unendliche*, ils servent de base *intuitive* aux manipulations symboliques.³⁰ En tant qu'objets extra-mentaux, ils deviennent ainsi, selon Husserl, le support de nouveaux types d'actes (opérations formelles, preuves, etc.). Autrement dit, la proto-arithmétique constituée d'objets-nombres qui sont les corrélats intentionnels (noématiques) d'une hylé sensorielle gestaltiquement (noétiquement) organisée (cf. plus haut § III.1.) peut se prolonger en une arithmétique formelle à condition d'hypostasier ces objets-nombres de premier niveau en une hylé sensorielle de deuxième niveau servant de base à des actes intentionnels (des synthèses noétiques) de deuxième niveau ayant eux-mêmes pour corrélats objectaux (noématiques) des types de nombres et de concepts numériques de deuxième niveau. C'est une telle conversion d'un *noématique* de niveau n en un *hylétique* de niveau $n+1$ que permet le symbolisme littéral.

"It should be observed that (...) arithmetical intentionality by means of symbols is really a return to aperceptive support by primary contents or *sensa* — in perception or imagination" (p. 126).

Les symboles deviennent de nouveaux contenus primaires qui permettent de calculer en dehors de toute intentionnalité conceptuelle et qui, à ce titre,

“become literally a part of the logical content, the *sense*, of our thought of the corresponding numbers” (p. 126)

et

"form the ultimate epistemic foundation of arithmetical knowledge" (p. 127).

Mais il est alors évident que le noématique de niveau $n+1$ *ne peut plus* être intuitivement rempli par de l'hylétique de niveau n . C'est ce que l'on appelle la rupture du formel avec “l'intuitif”. Le déplacement de l'intuition du sensible perceptif au sensible littéral constitue bien un authentique changement de niveau.³¹

³⁰ “Intuitif” est pris ici au sens technique d'Ésthétique transcendantale. Dans ce texte, Hilbert se réclame longuement de l'Ésthétique transcendantale kantienne, mais en lui faisant subir une remarquable mutation de statut : il ne s'agit plus de l'espace-temps conditionnant la manifestation des phénomènes sensibles, mais de la littéralité des signes conditionnant la manifestation des expressions symboliques. Comme nous le verrons plus bas à propos de Wittgenstein, c'est sur ce déplacement d'Ésthétique transcendantale que se concentrent la plupart des problèmes concernant le statut des idéalités mathématiques. Cf. également Petitot [1990f] pour des précisions.

³¹ Insistons sur le fait que cette distinction entre les entiers formels algorithmiquement maîtrisés et les entiers concrets et intuitifs cognitivement accessibles a été retrouvée et considérablement approfondie par les versions radicalement finitistes de l'arithmétique non standard. Cf. Nelson [1986] ainsi que Salanskis [1989] et [1990].

III.4. Le problème de l'objectivité

Mais la logique symbolique régissant la légalité autonome du formel demeure encore irrémédiablement insuffisante pour assurer la compréhension de la connaissance. En effet, comment un usage réglé de déterminations symboliques extrinsèques, comment des processus algorithmiques “aveugles”, peuvent-ils conduire à des vérités objectives et à un accroissement de la connaissance ? Pour Husserl (comme pour tout rationaliste) cette question de l'objectivité de la connaissance représente la question clé,

“the cardinal question of epistemology” (p. 4).

Le progrès de la connaissance est une progression épistémique fort différente d'une évolution socio-historique et culturelle.

D'où l'opposition indépassable entre logique formelle et logique transcendantale. Une fois élaborés les calculs déductifs de la logique formelle (et donc la formalisation de toutes les procédures de manipulation de symboles, la question a été relancée par l'informatique théorique) encore faut-il les corrélérer à une logique de l'objectivité scientifique. C'est là évidemment une difficulté centrale. Car il faut disposer pour cela, répétons-le, d'une bonne doctrine de l'objectivité.

III.5. Logique formelle et logique transcendantale

On connaît la façon dont Husserl a repris et généralisé la logique transcendantale kantienne. Dans les sciences empiriques n'ayant pas encore atteint le stade de leur rationalité (ce que Kant appelait les “arts systématiques”, les exemples étant, en son temps, ceux de la chimie ou de la biologie), les vérités sont reliées entre elles par la factualité des phénomènes observés. En revanche, dans les disciplines rationnelles (ce que Kant appelait les “sciences proprement dites”, i.e. mathématisées, l'exemple en étant la physique mathématique), les vérités sont reliées entre elles par un *système de lois* fondées dans des concepts et des lois primitives, des catégories et des principes. Ce système forme, comme le dit Husserl, une “unitotalité rationnelle” fondée sur une légalité de base.³² C'est donc l'unité théorique “systématique” de lois objectives qui est caractéristique des sciences nomologiques proprement dites. On peut en rendre compte, nous allons le voir, à partir des concepts d'ontologie formelle et d'ontologie régionale.³³

Il existe par conséquent trois tâches pour une logique pure.

(a) La première tâche consiste à spécifier et à clarifier les concepts primitifs de l'idée même de théorie unifiée, comme les universaux constitutifs des propositions (sujet, prédicat, objet, propriété, proposition, fondement, conséquence, relation, vérité, etc.), ou les catégories de l'ontologie formelle (unité, ensemble, tout/partie, etc.). La clarification épistémologique de

³² Cf. Petitot [1984] et [1986b].

³³ Dans ce qui suit il ne faut pas confondre la notion husserlienne d'ontologie avec l'ontologie d'une réalité en soi indépendante de toute connaissance. Elle correspond en fait à un domaine d'objectivité.

ces concepts repose sur leur origine *abstractive* dégageant réflexivement des universaux dans les actes cognitifs et leurs objets. D'où la compatibilité (mais pas la réduction) de la logique avec la psychologie cognitive.

(b) La deuxième tâche (celle de la grammaire pure logique) consiste à élaborer une théorie de *l'inférence* édictant les règles de déduction conservant la validité et l'unité théorique des théories. Elle est plus communément admise.

(c) La troisième tâche consiste à investiguer a priori les différentes formes possibles de théories. C'est certainement la plus difficile et encore la plus ouverte actuellement. Nous allons y revenir.

À supposer que ces trois tâches soient menées à bien, et que soit donc conquise une logique pure, on peut alors, selon Husserl, comprendre en termes de parallélisme la raison pour laquelle l'usage d'algorithmes symboliques permet d'accroître la connaissance objective. Le premier parallélisme relie, nous l'avons vu, les actes cognitifs et les systèmes symboliques :

“the formation and transformation rules of our ‘mental language’ will be correlated to those of any epistemically effective symbol system or calculational mechanism”.

Le second parallélisme relie, quant à lui, les systèmes symboliques aux systèmes objectaux et aux unités théoriques :

“the analogy of the unity of the algorithm (...) to the unity of the theory guarantees the epistemic reliability of the formally derived results”.

“This connection with the unity of the theory for, or of the truths about, a certain domain (say, of numbers) is what enables the system of signs to provide a grasp of the objects in the domain of knowledge, although the signs are not directly connected with those objects either in themselves or in their use” (p. 175).

III.6. La corrélation intentionnelle comme solution des apories du platonisme

Comme nous l'avons déjà noté, le concept de corrélation noético-noématique permet de fonder des transcendances objectives dans l'immanence d'actes cognitifs et, par là même, de résoudre les apories du platonisme.

(i) Si l'on disjoint la logique symbolique (et les unités objectales qu'elle norme) des actes cognitifs corrélatifs, on aboutit à un platonisme formaliste (à la Bolzano, Frege, Russell par exemple) : les propositions sont des objets idéaux qui réfèrent à des états de choses déterminant leur vérité objective et qui servent de contenu à des attitudes propositionnelles (des jugements, des croyances, des doutes, etc.) sans dépendre pour autant de ces attitudes.

(ii) Si au contraire on interprète le rapport de fondation (de dépendance) qu'est la corrélation comme une possibilité de réduire les contenus objectaux aux actes, on aboutit alors à un psychologisme solipsiste.

Husserl n'est pas platonicien au sens de Bolzano ou Frege. Pour lui, les propositions telles qu'ils les conçoivent au sens formaliste sont des entités mythiques flottant entre être et non-être,

“ontologically strange and epistemically useless” (p. 182).

Les contenus et objets idéaux sont au contraire pour lui des corrélats intentionnels d'actes c'est-à-dire des composantes *non réelles* de ces actes. Ce sont des universaux intentionnels constituant *le sens invariant* des occurrences variables où ils se réalisent. Comme *intention identique*, le sens invariant est un *moment* présent dans les instanciations, sans pour autant s'y réduire, sans pour autant pouvoir en être détaché et autonomisé : les objets intentionnels ne sont pas des objets au sens “chosique” du terme. Ce sont des “*species*”, des essences (et non pas des termes généraux de nature linguistique).³⁴

La réponse aux apories complémentaires du psychologisme et du platonisme (qui constituent, nous l'avons vu, une antinomie dialectique au sens de Kant) est par conséquent que les propositions et les contenus objectaux sont des *moments* non détachables d'actes cognitifs concrets. Ils ne peuvent donc pas en être indépendants. Mais ils constituent un ordre systématique autonome possédant sa légalité propre. La logique pure qui les régit s'applique donc (normativement) aux actes corrélatifs.³⁵

Les idéalités mathématiques comme les nombres *existent* donc pour Husserl. Mais elles n'existent évidemment pas comme des choses matérielles individuées. Le concept de chose matérielle individuée n'étant pas du tout primitif mais au contraire extrêmement sophistiqué, on ne peut y subordonner le concept d'existence. Hors toute ontologie substantialiste, l'existence des objets est liée à la *vérité* des jugements d'expérience associés. On le sait depuis Kant, l'existence n'est pas un prédicat réel et sa réalité est la relation d'un phénomène objectivé à la légalité catégoriale de l'expérience. L'unité théorique, systématique et objective de l'ontologie formelle, des ontologies régionales et des sciences “proprement dites” qui dépendent de leur législation rationnelle repose sur la solidarité entre les *objets* but

³⁴ Cf. Petitot [1984].

³⁵ Une analogie permettant de comprendre très facilement (et de justifier) les affirmations de Husserl est l'analogie avec le moment spatial d'un objet sensible. Le moment spatial (l'extension spatiale, mieux spatio-temporelle) d'un objet appartient à la perception de cet objet et analyser les bases cognitives de la perception spatiale est certainement l'une des tâches les plus difficiles et les plus importantes de la psychologie cognitive. Mais ce n'est pas pour autant que l'on peut admettre la réduction psychologiste (solipsiste) de l'espace à une simple composante réelle des actes de perception. On admet en général ce que Kant appelait le réalisme empirique de l'espace. Mais cela ne signifie pas que l'espace existe “en soi”, indépendamment du sujet. C'est une *forme* de l'objectivité et non pas une réalité ontologique. Comme dit Kant, la réalité empirique de l'espace ne s'étend pas jusqu'à sa réalité transcendante. Il y a *réalité empirique et idéalité transcendante* de l'espace. Et l'idéalité est bien *transcendante*, objective et non pas subjective (psychologique). On voit fort bien sur cette analogie comment une position phénoménologique-transcendante évite aussi bien les pièges du psychologisme solipsiste que ceux du réalisme platonicien. On pourrait dire que Husserl généralise aux concepts objectaux et aux formes logiques ce que Kant affirmait de l'espace, à savoir leur réalisme empirique *et* leur idéalité transcendante.

des visées intentionnelles et les *vérités* où les *significations* et les *types* normant les objets viennent à l'être.

III.7. Le problème des intuitions catégoriales

Étant donnée la corrélation intentionnelle entre les actes et leurs contenus objectaux, il existe *deux* types fondamentalement différents de concepts abstraits. Il y a les concepts obtenus par abstraction à partir de composantes réelles d'actes mentaux rendues intuitives par *réflexion* sur ces actes. Ces concepts sont "psychologiques" et leur intention peut être remplie par une intuition "interne". Il n'en va pas de même des concepts catégoriaux de l'ontologie formelle (unité, pluralité, ensemble, nombres, etc.).

Ces formes catégoriales dérivent par abstraction *des objets* des actes. Elles sont donc *intuitionnables* comme des *moments* des objets. Ce sont les "intuitions catégoriales" que les empiristes rejettent avec horreur (cf. p. 234). On se trouve là en présence non pas d'un idéalisme subjectif mais d'un *réalisme épistémique*. L'esprit produit des actes d'ordre supérieur fondés dans des actes d'ordre inférieur, actes formant, combinant, transformant des contenus primaires (une hylé). Ces actes supérieurs possèdent des corrélats objectifs qui sont des formes catégoriales. Mais précisément parce qu'elles sont des *corrélats*, celles-ci ne sont pas "produites" par l'esprit. Elles sont objectives. Le monde catégorialement structuré par l'ontologie formelle est donc un monde objectif (et non pas seulement cognitif). Il ne se réduit pas à l'expérience que nous en avons et ne peut être relativisé à nos structures cognitives (a fortiori aux différentes cultures historiques). Son existence est relative à la vérité et non à l'esprit (cf. p. 237).

Évidemment, le problème que posent ces intuitions catégoriales est l'absence apparente de contenu représentationnel susceptible de les rendre présentes comme représentations "authentiques" (intuitives).

"It is this that has made them so epistemically problematic. For what, then, can serve in the higher order act as representing content for the categorial aspects of objectivities of higher order ?" (p. 238).

Dallas Willard explique fort clairement la réponse de Husserl. Dans un acte d'ordre supérieur, il existe des relations formelles entre les actes inférieurs constitutifs d'objets et les objets. Ce sont ces relations formelles ("animant" les bases sensibles des actes inférieurs) qui servent de contenus représentationnels pour les moments *catégoriaux* des objets d'ordre supérieur. Elles permettent aux actes d'ordre supérieur de faire apparaître des formes catégoriales (d'où le caractère intuitif de celles-ci). Mais, comme toujours chez Husserl, cela même qui apparaît est un corrélat et ne se réduit donc pas à cela qui permet à des actes de le faire apparaître en le constituant en objet intuitivement donné.

“This is an essential part of the homogeneity of nature that allows the formal mental content to act as representing content for the formal trait in the corresponding objectivity” (p. 240).

III.8. Vérité et intuitions remplissantes

On sait que chez Husserl le concept de vérité est fondamentalement lié à la possibilité de “remplir” des sens intentionnels par des intuitions d'objets. En général, les intuitions remplissantes sont “impures” (i.e. relèvent de la fonction représentative, ce qui n'est plus le cas des intuitions “pures”) et “incomplètes” (i.e. seulement *partiellement* remplissantes). En particulier, dans une perception, la base sensorielle ne peut présentifier que certains aspects d'un objet et en indiquer d'autres. C'est ce que Husserl appelle la *perception par esquisses*.³⁶ Une de ses lois est celle d'une tendance à *compléter* l'intuition incomplète, la connaissance et la vérité reposant sur l'adéquation intention-intuition. Or, la *complétude intuitive* (où toute l'intention devient présentée intuitivement) *n'existe que pour les universaux*. Elle exige que l'objectivité correspondante existe et existe comme elle est pensée (p. 231). Dans l'intuition catégoriale, l'objet, dans sa transcendance objective, est *donné* conformément à la façon dont il est *pensé*. Le psychologisme argue de cela pour réduire le donné au pensé. Le platonisme argue au contraire de cela pour autonomiser le donné par rapport au pensé et faire du pensé le reflet représentatif du donné.³⁷ Husserl les renvoie dos à dos par sa conception de l'objectivité comme corrélation.

III.9. Les idéalités mathématiques chez Jean-Toussaint Desanti

On connaît la façon magistrale dont tous ces thèmes husserliens ont été redéployés par Jean-Toussaint Desanti (en faisant l'économie, grâce à une optique à la Cavailles, d'une philosophie de la conscience au profit d'une dialectique du concept). Dans *Les Idéalités mathématiques*, J.-T. Desanti analyse en détail la liaison entre actes, objets et propriétés, et, plus précisément, la façon dont les “actes instaurateurs d'opérations” définissent des “positions d'objets” corrélatives (p. 30). Par *thématisation*, des propriétés engendrent des concepts *structuraux* (au sens du structuralisme mathématique à la Hilbert-Bourbaki), qui sont

“co-posés et effectués dans l'enchaînement des opérations assurant le maniement réglé des champs d'objets produits dans la théorie” (p. 31).

La corrélation actes-objets (la fondation des transcendants objectives dans l'immanence des actes) implique qu'il existe, pour toute position d'objet, des “champs réflexifs” qui lui sont immanents (p. 80). Par abstraction, des idéalités se trouvent produites à partir de ces champs,

³⁶ Cf. Petitot [1986a] et [1990c]. où nous analysons en détail la perception par esquisses chez Husserl ainsi que ses relations avec les théories cognitives actuelles de la perception (en particulier celle de David Marr).

³⁷ Là encore l'analogie avec le moment spatial rend la position de Husserl d'une justesse évidente.

idéalités elles-mêmes converties en objets au moyen de concepts structuraux et thématiques. D'où la nature *intentionnelle* des objets et des structures mathématiques. L'intentionnalité est

“le mode d'être de la conscience d'objet au coeur de ses objets” (p. 92).

En tant qu'intentionnel, l'objet fonctionne comme un principe normatif et un pôle idéal d'unité pour les actes opérant sur des données pré-objectives.³⁸ Comme noyau noématique,

“il est position de la pure possibilité des enchaînements d'actes capables d'effectuer, dans un champ d'intuition non encore dominé, les vérifications exigées par la position de l'idéalité normative”.

Il constitue

“ce moment où la conscience d'objet saisit son objet comme l'unité essentielle d'une norme et d'un inachèvement”

C'est

“le moment synthétique où l'objet manifeste la relation circulaire de son idéalité et de son devenir” (pp. 92-93).

À partir de là, J.-T. Desanti redéploie l'ensemble de la problématique et, en particulier, le problème du statut de l'objectivité syntaxique du formel. S'il y a là méconnaissance des neurosciences c'est peut-être parce que les neurosciences méconnaissent elles-mêmes la nature normative des idéalités objectives ...

IV. Ontologie formelle, ontologies régionales et synthétique a priori

En partant des phénomènes, des vécus et des actes de conscience, Husserl a pu montrer que tout moment objectif possède le statut de corrélat intentionnel et est donc le résultat d'une procédure de constitution. Cela est en particulier valable pour tout ce qui, dans l'attitude naturelle, relève de la position d'existence de choses matérielles indépendantes. Ces choses matérielles “n'existent” pas plus (et même plutôt moins puisqu'elles ne se donnent que dans une perception par esquisses) que les idéalités mathématiques.

C'est dire que la corrélation noèse-noème et le principe de la fondation des transcendances objectives dans l'immanence des actes résolvent les apories du platonisme naïf servant de repoussoir aux matérialismes non critiques. Toutefois, elle est fort loin de fournir une compréhension satisfaisante de l'objectivité des mathématiques et de leur implication constituante dans les sciences “proprement dites”. Cette limite provient, selon nous, de la façon dont Husserl concevait les rapports entre ontologie formelle et ontologies régionales.³⁹

³⁸ Pensons au continu comme donnée intuitive et au continu comme légalisé et axiomatiquement dominé par une construction à la Cantor-Dedekind effectuée dans le cadre de la théorie des ensembles.

³⁹ Rappelons que le terme d'ontologie n'est plus utilisé ici par Husserl dans son sens métaphysique traditionnel, mais dans son sens *d'objectivité*.

Dans le concept transcendantal d'objectivité les phénomènes se trouvent légalisés comme objets. Mais ils se trouvent *doublement* légalisés. D'une part, ils sont qualifiés par les catégories générales de toute objectivité, par les principes, par les concepts de la réflexion et par les intuitions catégoriales d'une Analytique de l'objet *en général*, Analytique qui remonte à l'Analytique transcendantale de Kant et que Husserl développe en *ontologie formelle*. Mais, d'autre part, ils se trouvent également qualifiés conformément à une essence objective *régionale* définissant leur *type* d'objectivité. À ce titre, ils tombent sous la législation d'une ontologie régionale, *synthétique* et "*matérielle*".⁴⁰ L'essence objective d'une ontologie régionale détermine *préalablement* (a priori) ce qui appartient *génériquement* et *synthétiquement* à l'objectivité des phénomènes de la région. Sourcede dans l'intuition eidétique, elle *anticipe normativement* — à travers l'unité synthétique d'une aperception transcendantale — sur le contenu empirique des sciences empiriques qui en dépendent. Ainsi que l'explique en détail Husserl dans les *Ideen I*, la région est l'unité générique et eidétique appartenant à un domaine de phénomènes concrets. Elle détermine des vérités eidétiques de caractère *synthétique a priori* qui constituent le contenu des catégories régionales.⁴¹ Une question fondamentale — du moins en ce qui concerne l'objectivité des mathématiques — est alors de savoir comment les mathématiques interviennent dans la relation entre ontologie formelle et ontologies régionales.

C'est ici qu'intervient une thèse centrale de Husserl, de nature *formaliste* et aux conséquences considérables pour la phénoménologie.

Pour Husserl, il existait une différence irréductible entre deux types d'abstraction : l'abstraction *idéatrice* (généralisante) et l'abstraction *formalisante*. L'abstraction idéatrice généralisante abstrait de l'intuition sensible des essences idéales (par exemple les qualités sensibles). Ces essences entretiennent entre elles des rapports de fondation et ce sont sur ces derniers et sur leur nécessité idéale que reposent les lois synthétiques des a priori régionaux matériels. En revanche, les formes catégoriales de l'ontologie formelle relèvent quant à elles de l'abstraction formalisante. Cette opposition recoupe celle entre les essences *anexactes* et vagues appréhendées dans l'intuition sensible par idéation directe et les essences *exactes* que sont, pour Husserl, les idéalités mathématiques. Selon Husserl, les essences mathématiques exactes appréhendées par l'abstraction formalisante sont issues d'une "idéalisation *sui*

⁴⁰ Chez Kant la relation husserlienne entre ontologie formelle et ontologie régionale se trouve anticipée par exemple par la relation entre la *Critique de la Raison Pure* (Analytique de l'objet en général) et les *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (ontologie régionale des phénomènes de type "mouvement"). Kant appelait *Übergang* la spécification de l'objet en général en un objet régional comme le mouvement. Chez Husserl, le concept de chose matérielle ou *Ding* (perception par esquisses, etc.) relève d'une ontologie régionale.

⁴¹ Cf Husserl [1950], pp. 55-56. Pour des précisions techniques sur ces délicats problèmes de phénoménologie, cf. Petitot [1982], [1986a], [1990c]. Par exemple, le fait que les choses matérielles se donnent dans une perception par esquisses, le fait que les qualités sensibles sont fondées dans l'extension spatio-temporelle, etc. sont des vérités eidétiques exprimant des lois d'essence (synthétiques a priori) du noème de la perception.

generis” et possèdent le statut “d'idées” au sens kantien du terme.⁴² Elles sont donc associées à des concepts limites idéaux et exacts. Au contraire, les essences anexactes sont associées à des concepts *descriptifs*. Or, ainsi que le développe très clairement et très techniquement Husserl dans les *Ideen I* (§ 74 “Contraste entre géométrie et science descriptive”), l'idéation qui porte des essences exactes à *l'idéalité* s'oppose à l'abstraction qui porte des essences inexactes à la *généricité*. À l'opposé des concepts exacts, les concepts descriptifs sont des concepts génériques par essence *non formalisables*.⁴³

La phénoménologie refuse l'idéation et l'abstraction formalisantes. Elle opte pour l'abstraction généralisante. La conséquence en est que, pour elle, les mathématiques *ne peuvent pas* intervenir au niveau des ontologies régionales et de leurs a priori matériels. En effet, seules les formes catégoriales et les lois analytiques issues de l'abstraction formalisante sont mathématisables. Autrement dit, seule l'ontologie *formelle* est mathématisable. Les lois synthétiques des a priori matériels ne sont pas quant à elles formalisables, sauf à être subordonnées aux prescriptions générales des lois analytiques de l'ontologie formelle : ce qui est formalisable dans les lois matérielles n'est (et ne peut être) que la *forme* (et non le contenu) de la loi.

De par son formalisme, une telle conception ne permet de rendre justice ni à l'objectivité des mathématiques ni à leur rôle dans les objectivités physiques (où elles permettent de formaliser le synthétique a priori lui-même). Il faut donc considérablement l'approfondir. Husserl permet de sortir des paradoxes de l'idéalité platonicienne. Mais encore faut-il, sur cette base, conquérir le sens de l'objectivité mathématique et de son implication dans l'objectivité physique. Nous allons le tenter en plusieurs étapes. Nous commencerons par évaluer la position de Wittgenstein.

V. Le transcendantalisme mathématique de Wittgenstein

L'intérêt de la philosophie mathématique de Wittgenstein est, selon nous, d'avoir retrouvé et à nouveau revendiqué, pour les mathématiques, tous les principes, toutes les exigences et toutes les conséquences d'une doctrine *de l'objectivité* — en tant qu'opposée à une ontologie, l'ontologie étant ici le platonisme naïf. Elle représente selon nous :

- (i) un cas moderne exemplaire d'approche *transcendantale* et *critique* (ce qui peut sembler aller contre ses interprétations faisant autorité) ;
- (ii) une radicalisation de la *légalité* du formel en tant que tel, du formel considéré comme instance *autonome*.

⁴² Cf. Husserl, *Recherches Logiques III*, p. 28.

⁴³ Cf. Husserl [1950] p. 237. Dans Petitot [1982], [1986a], nous avons montré en détail comment cette thèse avait empêché Husserl d'admettre l'idée d'une eidétique descriptive géométrique et analysé les conséquences décisives que cette limite a eu pour la phénoménologie (comme l'impossibilité pour l'idéalisme transcendantal husserlien d'éviter sa rechute dans l'idéalisme subjectif, cf. par exemple les critiques réalistes d'un Daubert).

Notre thèse — qui surprendra peut-être par son aspect “hérétique” — sera donc que la philosophie wittgensteinienne des mathématiques est *une philosophie transcendantale de l'objectivité grammaticale du mathématique dans son autonomie et sa légalité propre*. Elle répète tous les moments constitutifs de la philosophie kantienne, qui était une philosophie transcendantale de l'objectivité physique du sensible dans son autonomie et sa légalité propre. Mais elle en diffère en même temps considérablement puisque, chez Kant, les mathématiques sont pensées en grande partie à partir de leur rôle dans les théories physiques et non pas véritablement en tant que telles. Nous reviendrons plus loin sur ce rôle. Pour l'instant nous nous focalisons sur les mathématiques pures en tant que telles.

V.1. La comparaison physique/mathématique

Il est curieux que personne n'ait jusqu'ici vraiment insisté sur le parallèle frappant qui existe entre la philosophie *mathématique* de Wittgenstein et la philosophie *physique* (et non pas mathématique, insistons-y pour éviter tout malentendu) de Kant. Pourtant, Wittgenstein lui-même a souvent expliqué que le point de vue le plus proche du sien était celui du synthétique a priori kantien.

Le parallèle que nous allons brièvement expliciter tient dans le tableau suivant.

	Kant	Wittgenstein
<i>Phénomènes donnés.</i>	Phénomènes de l'intuition sensible.	Énoncés mathématiques.
<i>Catégories et Principes.</i>	Nécessité d'une légalisation objectivante. Instance légalisante = Analytique transcendantale.	Nécessité d'une légalisation objectivante. Instance légalisante = Grammaire, règles et démonstrations.
<i>Objets d'expérience.</i>	Phénomènes objectivés = Objets.	Énoncés mathématiques objectivés = Propositions mathématiques démontrées.
<i>Inaccessibilité épistémique de la réalité ontologique sous-jacente aux objets.</i>	Inaccessibilité et non sens de la réalité en soi.	Inaccessibilité et non sens d'un sens des propositions référant à des idéalités existantes.
<i>Synthétique a priori.</i>	L'objectivité physique du monde est prescriptive et non descriptive.	L'objectivité symbolique des mathématiques est prescriptive et non descriptive.

Ce qui est commun à Kant et à Wittgenstein .

Le rapport à la finitude.

La certitude et la nécessité sont relatives aux instances de légalisation.

Toute réintroduction d'une ontologie conduit à des antinomies dialectiques.

Pouvoir faire apparaître des questions comme dénuées de sens (dialectique transcendantale) est la marque du passage de l'ontologie à l'objectivité.

Il existe d'excellentes introductions à et d'excellents commentaires de la philosophie de Wittgenstein (M. Dummett, G.H. von Wright, etc.). On consultera en particulier les récents ouvrages de Jacques Bouveresse. Nous nous référerons ici au livre remarquable de Stuart G. Shanker *Wittgenstein and the turning point in the philosophy of mathematics*.⁴⁴ Il présente en effet selon nous l'avantage d'être à la fois érudit, complet, juste et radical.

1. Dans l'objectivité mathématique, ce qui tient lieu de ce que sont en physique les phénomènes donnés perceptivement et exprimés en langue naturelle sont les *énoncés* mathématiques *non formalisés*, c'est-à-dire des énoncés exprimés dans des langues quasi-naturelles augmentées de lexiques mathématiques ($7+5 = 12$, 7 est un nombre premier, le théorème de Pythagore, etc., etc.). Or, en physique, les énoncés isolés exprimant les phénomènes en relation à des états de choses relevant d'une ontologie substantialiste de choses et d'évènements entretenant entre eux des rapports de causalité et d'interaction sont, nous l'avons vu, des énoncés sans contenu objectif en tant que tels. Leur contenu ontologique apparent est une hypostase linguistique. Les phénomènes doivent être déterminés et objectivés, c'est-à-dire légalisés. Ils ne sont pas donnés avec un sens d'objet déjà déterminé. De même, selon Wittgenstein, des énoncés isolés se donnant comme mathématiques ne possèdent pas de contenu mathématique en tant que tels. Leur contenu apparemment ontologique en faisant des énoncés descriptifs décrivant des états de choses d'un supposé univers mathématique idéal est une hypostase linguistique. Ils doivent être objectivés, c'est-à-dire légalisés. Leur légalisation objectivante s'identifie à leur *démonstration*. La démonstration transforme un énoncé d'apparence mathématique en proposition effectivement mathématique, c'est-à-dire en énoncé "déterminé". Et de même qu'un phénomène physiquement conditionné et déterminé perd son contenu apparemment ontologique au profit de sa détermination objective, de même un énoncé formellement conditionné et déterminé perd son contenu apparemment ontologique au profit de sa détermination objective. La thèse anti-ontologique (anti-platonicienne) de Wittgenstein est donc une thèse transcendantale typique. L'objectivité mathématique, pas plus que l'objectivité physique, ne décrit une réalité "chosique" en soi (indépendante). Elle est de nature *prescriptive* et *normative*. Les théories mathématiques ne décrivent pas, ne dénotent pas. Pas plus que les théories physiques. Elles *déterminent*, ce qui, nous l'avons dit, est tout à fait autre chose. Vidés de leur ontique fantomatique, les propositions mathématiques (donc démontrées) apparaissent comme des règles de syntaxe. De même que l'objectivité physique est une construction catégoriale, l'objectivité mathématique est une *construction grammaticale*. Ne possédant aucun contenu descriptif, les propositions mathématiques sont des règles de syntaxe, des normes de représentation et d'expression (p. 274). Ce sont des *conditions de possibilité* de significations (qui, sans elles, n'existent pas).

⁴⁴ Shanker [1987]. Les renvois à cet ouvrage seront effectués dans le texte.

“Meaning is determined by intra-linguistic rules rather than a connection between language and reality” (p. 304).

C'est le système des axiomes et des règles qui définit (implicitement) le sens des concepts. C'est pourquoi la preuve des propositions est une procédure normative qui *force* à les accepter comme règles (p. 86). Il existe par conséquent une inséparabilité entre une proposition mathématique et sa preuve. Sa preuve détermine son *sens*. Une proposition n'existe en tant que telle que si elle appartient à une théorie (et donc à un calcul). Elle n'existe que si elle est vérifiable et sa vérification n'est rien d'autre que sa démonstration. C'est dire que les relations qu'une proposition entretient avec une théorie ne sont pas externes et contingentes. Elles sont *constitutives et déterminantes, internes et nécessaires* et constituent l'énoncé en tant que proposition mathématique (p. 111). Le sens de la proposition n'est pas son sens comme énoncé ou expression (sens qui n'est qu'une hypostase). Et c'est pourquoi un énoncé-expression isolé n'est pas donné (et ne peut pas être donné) avec son sens *mathématique*. Le rapport de dépendance objet-théorie est donc bien chez Wittgenstein en tout point analogue à celui qui régit l'objectivité physique chez Kant.

2. De cette conception anti-ontologique de l'objectivité des mathématiques découlent la plupart des thèses de Wittgenstein — qui sont donc essentiellement justes d'un point de vue transcendantal.

(a) La nécessité d'introduire entre l'analytique a priori et le synthétique a posteriori une instance de type *synthétique a priori* (p. 33).⁴⁵ Les propositions mathématiques ne sont pas synthétiques a posteriori. Le premier Wittgenstein et l'empirisme logique les ont considérées comme analytiques. Le second Wittgenstein s'inspirera de Kant pour dire qu'elles ne sont ni tautologiques (analytiques) ni vraies en fonction d'un contenu dénotant des états de choses (synthétiques a posteriori) mais qu'elles sont pour autant significatives. En tant que normes grammaticales

“they tell us something ‘which no experience will refute’ and ‘whenever we say that something *must* be the case we are using a norm of expression” (p. 275).⁴⁶

Évidemment, ce synthétique a priori est spécifique de l'objectivité mathématique et *n'est pas* celui (fondé dans l'Esthétique transcendantale spatio-temporelle) de l'objectivité physique.

(b) Le “réalisme empirique” et “l'idéalité transcendantale” de la grammaire. Dans la mesure où la grammaire légalise les énoncés mathématiques et permet leur détermination logique en tant que propositions démontrées, son réalisme empirique (relativement aux “phénomènes” mathématiques que sont les énoncés) est évident. Il n'est pas réductible à un

⁴⁵ Sur le synthétique a priori, cf. Petitot [1987b], [1988], [1989b], [1990a], [1990b]. Malgré toutes les réflexions post-positivistes (Quine, Dummett, etc.), la question reste largement ouverte. Il ne s'agit pas de savoir si le synthétique a priori est un caractère propre de certains énoncés, mais de savoir s'il existe une composante et une fonction synthétiques a priori dans les sciences.

⁴⁶ Les citations de Wittgenstein sont extraites des *Lectures* de Cambridge, W.L.C [1932-1935].

idéalisme subjectif (anti-psychologisme de Wittgenstein). Mais, d'un autre côté, ce réalisme ne peut pas être ontologique. Il se double de l'idéalité transcendantale de la grammaire (anti-platonisme de Wittgenstein). En mathématiques, la grammaire est une Analytique, mais une Analytique *transcendantale* et non pas formelle.

(c) Comme nous l'avons montré ailleurs⁴⁷, la forme moderne de l'idéalité transcendantale de l'espace dans l'objectivité physique concerne tout ce qui tourne autour du rôle constitutif des groupes de symétrie dans les théories physiques. Autrement dit, l'idéalité transcendantale a trait au rapport entre conventionnalisme (à la Poincaré) et synthétique a priori (la conventionnalité du synthétique a priori se trouvant déjà chez Kant puisque le synthétique a priori *n'est pas* logiquement nécessaire et relève de la “contingence radicale” de l'expérience). Elle est la clef de l'objectivité comme légalité autonome. Cela est très net chez Wittgenstein en ce qui concerne l'objectivité grammaticale des mathématiques. Ses règles ne sont “arbitraires” — conventionnelles — que pour autant qu'elles sont *constitutives* et *déterminantes* pour les phénomènes mathématiques. Comme le remarque Peter Hacker

“The arbitrariness of grammar is the arbitrariness of autonomy”.

(d) Le synthétique a priori est *indérivable* : empiriquement indérivable (il n'est pas synthétique a posteriori) et logiquement indérivable (il n'est pas analytique).⁴⁸ Croire qu'il est imposé par une nécessité logique, c'est retomber dans un dogmatisme métaphysique (celui du logicisme). Croire qu'il est imposé par une réalité externe, c'est retomber dans une ontologie. Or,

“grammar is not accountable to any reality”.⁴⁹

Sa *nécessité* est d'une tout autre nature. En effet, (cf. plus haut) dans une optique transcendantale, le concept de vérité et la catégorie modale suprême de nécessité sont *subordonnés* à des procédures de constitution, c'est-à-dire à leur conformité à une Analytique transcendantale et à un synthétique a priori. Deux thèses célèbres de Wittgenstein retrouvent cette conquête transcendantale majeure. D'abord on ne peut pas justifier une grammaire. Prescriptive, elle n'est ni vraie ni fausse.

“Grammar is antecedent to truth : the rules of grammar determine what makes sense, but cannot themselves be true or false” (p. 318).

La vérité d'une proposition équivaut à sa démonstration. Elle n'existe pas en fonction de faits externes. C'est une vérité-cohérence et non pas une vérité-correspondance. Certes, les faits, le monde, jouent un rôle heuristique dans la formation des règles. Mais ils ne les nécessitent pas. Ils n'y fonctionnent que de façon *abductive*, c'est-à-dire *réfléchissante* au sens de Kant, *non* déterminante (p. 319).⁵⁰ D'où la seconde thèse : en mathématiques la nécessité et la certitude sont définies de façon *négative* :

⁴⁷ Petitot [1989b], [1990a].

⁴⁸ La possibilité de redéployer une doctrine du synthétique a priori permet de retrouver la critique de Quine des “dogmes” de l'empirisme logique.

⁴⁹ Wittgenstein [1969b], p. 184 (cf. p. 319).

“it is that the possibility of uncertainty has been grammatically removed”
(p. 284).

La nécessité objective des vérités mathématiques vient du fait que le doute à leur sujet est logiquement exclu.

“The propositions of mathematics are *objectively* certain — unassailable by doubt — because (...) the very notion of epistemological doubt has been *logically excluded* from the normative province of mathematics” (p. 71).⁵¹

Kant a montré que, dans l'objectivité physique, la nécessité de la vérité est sans bases ontologiques et repose sur l'accord de la détermination d'un réel avec un dispositif transcendantal (prescriptif, constitutif) de détermination. Wittgenstein a montré qu'il en allait de même dans l'objectivité mathématique.

(e) On comprend dès lors les raisons pour lesquelles Wittgenstein a tant critiqué l'idée que des *conjectures* mathématiques pouvaient être prises pour des *propositions* mathématiques non encore démontrées. Certes, il existe des questions problématiques jouant un rôle heuristique majeur dans la construction de nouvelles démonstrations et de nouvelles théories. Mais ces conjectures ne sont pas à proprement parler des propositions car elles ne sont pas légalisées. La distinction wittgensteinienne entre propositions et conjectures mathématiques est en tout point analogue aux distinctions kantienne entre concepts déterminants et idées régulatrices, entre jugements *déterminants* et jugements *réfléchissants*. Wittgenstein a souvent insisté sur ce point : les conjectures sont régulatrices et la relation entre une conjecture et sa démonstration n'est pas déductive mais heuristique (réfléchissante et abductive) (pp. 113-114). En physique, en dehors d'un dispositif de détermination objective, un jugement ne possède pas de sens objectif. Il ne possède que son sens linguistique. Croire que ce sens est fondé en réalité et peut s'identifier à son sens objectif c'est introduire subrepticement la thèse métaphysique que l'objectivité peut rejoindre l'ontologie d'une réalité en soi, indépendante. Il en va de même en mathématiques pour la distinction entre conjecture et proposition. Lorsqu'une conjecture est démontrée, et devient donc une proposition, son sens comme proposition *n'est plus* son sens comme conjecture (p. 110). Le sens mathématique d'une proposition ne peut pas lui préexister car il est le *résultat* de sa détermination objective (de sa démonstration). En faire un sens préexistant c'est croire que la compréhension de la réalité mathématique peut transcender son objectivité (ce qui est la négation même du point de vue transcendantal).

⁵⁰ Ce qui manque ici cruellement chez Wittgenstein est l'équivalent de la Dédution transcendantale, c'est-à-dire de la justification de la prétention des règles à valoir comme règles de détermination, autrement dit de leur prétention à posséder une valeur objective (bien que celle-ci soit logiquement et empiriquement indéterminable).

⁵¹ Dans *La Force de la Règle*, Jacques Bouveresse a remarquablement développé ce point.

V.2. *Finitude et Dialectique transcendante*

Pour Wittgenstein, les mathématiques sont donc bien objectives. Elles le sont en un sens transcendantal et ne peuvent donc pas être descriptives. Nous venons de le constater à propos d'un certain nombre de points techniques. Mais le parallèle avec Kant ne s'arrête pas là. On peut le prolonger fort loin, jusqu'aux bases mêmes des orientations philosophiques de ces deux penseurs. Nous en donnerons très brièvement trois exemples.

1. *Le rejet d'une réalité en soi sous-jacente à l'objectivité*

La guerre de Wittgenstein contre l'idée d'un “corps de signification” qui serait accessible à la connaissance mathématique est en tout point analogue à la guerre de Kant contre l'idée d'une “chose en soi” qui serait accessible à la connaissance physique.

2. *Le rôle constitutif de la finitude*

Comme chez Kant, on trouve chez Wittgenstein la thèse que la scission indépassable entre objectivité et ontologie est liée à notre finitude épistémique. Le finitisme de Wittgenstein n'est pas celui, par exemple, de l'intuitionnisme. Il concerne *l'accessibilité* épistémique aux “objets” mathématiques, c'est-à-dire la façon dont des règles finies permettent d'accéder finitairement aux significations qu'elles constituent (p. 127).

3. *La résolution des apories en termes de Dialectique transcendante*

Kant a été le premier à montrer que la bonne réponse aux apories métaphysiques (aux antinomies rationnelles) était, non pas d'essayer de les résoudre, mais de les *dissoudre* comme non sens. Une bonne Analytique transcendante, une bonne doctrine de la constitution transcendante de la réalité objective, se teste certes *positivement* par la compréhension qu'elle assure de la vérité et de la nécessité. Mais elle se teste aussi *négativement* par le développement d'une Dialectique transcendante. On trouve exactement la même attitude chez Wittgenstein. Les apories de la “crise des fondements” des mathématiques doivent être *dissoutes* (p. 29). En particulier, les énoncés indécidables (c'est-à-dire ceux dont on démontre qu'ils ne peuvent pas être objectivés et déterminés comme propositions) ne sont pas des énoncés dont le contenu “transcenderait” notre esprit (p. 57). Les penser ainsi ce serait les penser dialectiquement comme des énoncés référant à une réalité en soi inaccessible. Il faut au contraire les penser comme des énoncés *sans* signification proprement mathématique. En quelque sorte, les propositions indécidables possèdent le statut de conjectures absolues (c'est-à-dire sans démonstration possible). C'est le même esprit qui anime la position de Wittgenstein quant au problème des fondements. Pour lui, on n'a pas à chercher des fondations épistémologiques aux mathématiques. La question des fondements relève d'une Dialectique transcendante. Certes, il est pertinent, voire fondamental, de transformer, comme l'a fait Hilbert avec son programme méta-mathématique, les démonstrations et les

théories mathématiques elles-mêmes en “nouveaux” objets. Mais la portée proprement *épistémologique* d'une preuve de consistance est inexistante (p. 222). Il en va encore de même dans la position de Wittgenstein quant aux contradictions “cachées”. Face au scepticisme de ceux qui craignent qu'une contradiction puisse un jour être découverte dans les théories mathématiques les plus assurées, Wittgenstein répond qu'une contradiction cachée est un non sens analogue à celui d'une conjecture vraie (mais non encore démontrée). Parler de contradiction cachée présuppose que les mathématiques puissent transcender leur objectivité vers une réalité en soi qui pourrait se donner de façon extra-mathématique (p. 232). Ce qui est important aux yeux de Wittgenstein est le *principe* de contradiction qui interdit l'usage des contradictions (p. 235). Les contradictions en tant que telles ne sont pas dangereuses puisque les mathématiques ne véhiculent aucune information sur une réalité, celle-ci serait-elle idéale.

V.3. *Les paradoxes de l'infini*

Sur un plan plus technique, Stuart Shanker explique fort bien les conclusions auxquelles aboutit une telle conception de l'objectivité mathématique. Citons-en quelques unes concernant le statut des preuves lorsque l'infini est en jeu. Le point de vue de Wittgenstein étant (selon nous) transcendantal, il est strictement finitiste et constructiviste mais en un sens original, différent de l'intuitionnisme d'un Brouwer ou du finitisme méta-mathématique d'un Hilbert.

1. Wittgenstein oppose radicalement le fini et l'infini pour la raison suivante. Pour les ensembles finis les approches “synchroniques” en termes ensemblistes de totalités en acte et les approches “diachroniques” en termes de processus et d'itération d'opérations sont équivalentes. Il n'en va pas de même pour les ensembles infinis (cf. p. 165). Pour Wittgenstein l'infini doit rester un infini *potentiel* (non actuel) et il est illégitime de quantifier sur des totalités infinies. En effet, en mathématiques, une totalité et la généralité associée doivent être internes et essentielles, et non pas accidentelles et contingentes. Elles doivent être produites par une procédure de construction. Par exemple, la forme générale d'un entier est donnée par la forme même de *l'induction*. Selon Wittgenstein, un énoncé universellement quantifié sur les entiers $\forall n f(n)$ essaie de *dire* ce que *montre* l'induction.

“The general form of an integer — which is nothing less than the symbol for the infinite numbers series — is given by the representation of mathematical induction” (p. 163).

Il n'y a donc pas de concept de classe qui *précèderait* l'opposition fini/infini. La différence fini/infini n'est pas quantitative. C'est une différence *grammaticale*.

“A correct symbolism has to produce an infinite class in a completely different way from a finite one. Finiteness and infinity of a class must be obvious from its syntax” (p. 165).⁵²

D'où les critiques bien connues de Wittgenstein contre la théorie des ensembles, critiques qui dénoncent

“the finite totality/infinite series categorial confusion, as embodied in ‘transfinite set theory’”(p.196).

Certes, Wittgenstein admet le *calcul* cantorien des nombres transfinis, des ordinaux et des cardinaux. Mais il refuse d'interpréter les transfinis comme des infinis actuels et de poser à leur sujet des questions de réalité. L'infini n'est pas une quantité. Il n'appartient pas à la région du concept de grandeur. Il est *grammaticalement* inséparable du concept d'opération sans limite, sans borne.

“To say that a technique is unlimited does *not* means that it goes on without ever stopping — that it increases immeasurably ; but that it lacks an institution of the end, that it is not finished off” (p. 197).⁵³

2. Il en va de même, évidemment, en ce qui concerne la question, associée et centrale s'il en est, du *continu*. Wittgenstein critique la construction de Cantor-Dedekind. Pour lui, le fait de traiter \mathbb{R} comme un ensemble de points constitue une infraction à la grammaire de l'infini (cf. p. 186). Comme chez Peirce, Veronese ou Weyl, la grammaire de l'infini est, chez Wittgenstein, une grammaire “aristotélicienne” de l'infini *potentiel*. Le fait que des constructions géométriques sélectionnent (distinguent) des points (des intersections, des droites, des cercles, etc.) et les fassent donc passer de la puissance à l'acte ne signifie pas pour autant que ces points préexistent. En effet, comme les mathématiques ne sont pas descriptives, un nombre réel n'existe qu'en rapport avec la loi qui le produit. Il ne doit pas seulement être *approximé* (comme c'est le cas pour les nombres irrationnels conçus comme des coupures de Dedekind ou des limites de suites de Cauchy), mais également *engendré* par une règle.

“For a real number, a construction and not merely a process of approximation must be conceivable” (p. 190).⁵⁴

⁵² Waismann [1967], p. 228.

⁵³ Wittgenstein [1956], II, §45. Sur ce point, Wittgenstein partage les reproches *d'imprédictivité* adressés par des mathématiciens comme Poincaré et Weyl à la théorie des ensembles. On ne peut pas supposer, sauf à adopter une ontologie platonicienne naïve, que \mathbb{N} et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (\mathcal{P} = parties) sont des ensembles bien définis. En effet, le schéma d'induction est un schéma d'axiomes et donc “l'être” de \mathbb{N} dépend des prédicats inductifs $f(n)$. De même, la plupart des $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas définissables.

⁵⁴ Wittgenstein [1964], §186.

Or, les images géométriques ne sont pas des constructions arithmétiques. Selon Wittgenstein, et il s'agit là d'un point de vue particulièrement profond, bien que sujet à critique⁵⁵, traiter la droite géométrique comme un système de nombres et, par exemple, la droite épointée comme distinguant un nombre, c'est subrepticement réintroduire une ontologie platonicienne *et* confondre le constitutif et le déterminant avec le régulateur et le réfléchissant.

“Wittgenstein fundamental objection (...) was that Dedekind's theory crossed over the boundary between heuristic and constitutive principles” (p. 187).

Comme *règle*, un nombre réel se réduit essentiellement à des procédures d'approximation par des rationnels (par exemple des expansions décimales) et donc à des méthodes de comparaison. Mais cela ne justifie pas qu'on lui attribue un statut *objectal*. Objectivité ne veut pas dire objet au sens banal.

3. Ce point de vue de Wittgenstein est particulièrement explicite dans son analyse, évoquée plus haut, des preuves récursives et de l'induction. Shanker explique clairement la façon dont celle-ci repose sur l'opposition essentielle entre *dire* et *montrer*. Les preuves récursives sont des constructions grammaticales qui montrent comment des règles peuvent s'appliquer de façon illimitée. Mais cela n'implique pas qu'elles *démontrent* une proposition générale universellement quantifiée dont le contenu objectal *dirait* ce qu'elles montrent.

“What we gather from the proof, we cannot represent in a proposition at all” (p. 202).⁵⁶

Dans une certaine mesure, l'ontologie mathématique est une ontologie fantomatique permettant de transformer illégitimement une monstration de règles en une représentation d'états de choses, c'est-à-dire de faire *comme si* on pouvait *parler* des calculs.⁵⁷ Or il s'agit là d'une illusion, d'une transgression grammaticale.

“The recursion shows nothing but itself” (p. 204).⁵⁸

“Mathematics consist entirely of calculations. In mathematics everything is algorithm and nothing is meaning, even when it doesn't look like that because we seem to be using *words* to talk about mathematical things. Even these words are used to construct an algorithm” (p. 208).⁵⁹

4. Comme nous l'avons déjà noté, le finitisme et le constructivisme de Wittgenstein sont en grande partie confirmés par les théories actuelles du continu, théories où dominent les problèmes d'effectivité algorithmique dans leur rapport à l'informatique.⁶⁰ Mais, dans la

⁵⁵ Nous reviendrons plus bas sur le problème du continu et l'insuffisance du point de vue de Wittgenstein.

⁵⁶ Wittgenstein [1969b], p. 405.

⁵⁷ Rappelons ici le rôle décisif du “comme si” — du *als ob* — dans la *Critique de la Faculté de Juger* de Kant.

⁵⁸ Wittgenstein [1969b], p. 450.

⁵⁹ Ibid., p. 468.

⁶⁰ Cf. Harthong-Reeb [1989], Salanskis [1989].

mesure où nous nous proposons ici un parallèle avec la conception kantienne de l'objectivité physique, nous soulignerons plutôt le fait que la façon dont Wittgenstein traite les paradoxes de l'infini, et en particulier du continu, relève d'une théorie de l'illusion transcendantale. Elle est en tout point parallèle, on l'aura constaté, avec la façon dont, dans la Dialectique transcendantale, Kant traite de la façon dont l'entendement produit des totalités infinies et inconditionnées illégitimes puis les traite comme des objets d'expérience jusqu'à transformer subrepticement son usage "distributif" en un usage "collectif" et remplacer la *détermination* progressive et indéfinie de la réalité à partir de prescriptions transcendantales en l'illusion transcendantale de la *compréhension* d'une réalité transcendante.

V.4. Objectivité mathématique, réflexion et objectivité physique

L'avantage de la position de Wittgenstein est d'offrir une conception particulièrement pure et radicale de la réalité mathématique comme réalité *objective* sui generis (algorithmique). Comme nous l'avons vu, tous les moments principaux, tant intuitifs, analytiques que dialectiques, d'un processus de constitution y sont répétés avec un sens *spécifique*, à chaque fois relié aux plus profonds des problèmes de la philosophie des mathématiques.

Toutefois, cette doctrine demeure irrémédiablement insuffisante, et cela, selon nous, pour deux raisons principales.

1. La nécessité d'une "Critique du jugement mathématique".

D'abord Wittgenstein traite le sens mathématique en des termes de dialectique transcendantale. Il le traite comme un "en soi" des énoncés. Or, cela est trop radical. En effet, toujours pour poursuivre le parallèle avec la physique, on pourrait plutôt dire que le sens est aux mathématiques ce que *l'organisation* (la structure morphologique des êtres organisés) est à la physique. Certes, on peut liquider, on l'a souvent fait et on continue à le faire, la problématique de l'organisation au nom du mécanisme (l'objectivité "mécaniste" étant en physique l'équivalent de l'objectivité algorithmique en mathématiques) en la ramenant à un effet purement dialectique d'illusion transcendantale. Mais, comme Kant l'a bien montré, cela est trop radical. En effet, l'organisation — ce qu'il appelait *la finalité interne objective* des êtres organisés — relève du principe de finalité en tant que principe transcendantal (à la fois a priori et particulier) de la faculté de juger réfléchissante. Disons que si Wittgenstein a bien conçu les éléments de l'équivalent d'une critique de la raison pure pour l'objectivité mathématique, il lui a totalement manqué l'équivalent d'une critique du jugement *mathématique*. Une telle critique aurait pour vocation de montrer :

(i) que tout se passe en fait "comme si" (*als ob*) le sens mathématique était effectivement objectif, et

(ii) que ce “comme si” est indépassable et inéliminable, *deux* ‘maximes’ du jugement mathématique devant coopérer dans la *compréhension* des phénomènes mathématiques, même si une seule (la maxime du jugement propre à l’objectivité algorithmique) est en droit légitime en tant que constitutive, en tant que relevant du jugement déterminant.

Il existe une finalité objective, tant interne qu’externe, des objets, des structures, des théories et de l’univers mathématiques. Comme Albert Lautman l’a admirablement montré, c’est sur elle que doit porter l’essentiel de la réflexion philosophique.⁶¹ Elle est évidemment corrélée avec *une finalité subjective formelle*, donc avec une capacité de jugement “esthétique” (beau et sublime). Cette faculté de jugement esthétique est caractéristique des mathématiciens authentiques. Sur elle repose *le génie* — et, comme l’affirmait Kant, on n’a pas à “rognier les ailes du génie”. Ce que veut, pourtant, Wittgenstein.

2. La nécessité d’une conception transcendantale de l’applicabilité des mathématiques.

D’autre part, la doctrine de Wittgenstein demeure également irrémédiablement insuffisante dans la mesure où elle ne pense pas de façon transcendantale le rapport des mathématiques à la réalité externe et en particulier la réalité physique. Sa conception des sciences naturelles demeure, hélas, trop empiriste. Il est curieux que sa philosophie physique soit aussi naïve et aussi réactive (comme celle de Husserl d’ailleurs) : le constructivisme techno-scientifique propre à la civilisation du progrès opacifie les formes de vie, il est le commencement de la fin de l’humanité, etc.⁶².

La conception transcendantale de l’objectivité présuppose, répétons-le, une dimension prescriptive. Autant la conception wittgensteinienne des mathématiques pures est riche et profonde, autant celle de leur *applicabilité* est pauvre et assez superficielle. Elle consiste en effet à réduire le prescriptif à celui des mathématiques elles-mêmes. L’applicabilité des mathématiques à l’expérience se ramène alors à l’applicabilité de règles de syntaxe sans contenu propre à la “matière” des données empiriques.

Dans *La force de la règle*, Jacques Bouveresse a rappelé que pour Carnap “l’intérêt” de la thèse wittgensteinienne était

“qu’il devenait possible pour la première fois de combiner la thèse fondamentale de l’empirisme avec une explication satisfaisante de la nature de la logique et des mathématiques”.⁶³

Mais cet “intérêt” constitue au contraire, selon nous, une limite qui vient amoindrir le bénéfice du transcendantalisme mathématique wittgensteinien.

Selon nous, le rapport entre idéalités mathématiques et réalité objective doit être pensé à partir d’une approche *doublement* transcendantale :

(i) transcendantale du côté des idéalités mathématiques, comme chez Wittgenstein ;

⁶¹ Cf; plus bas § VI.4.

⁶² Sur ce point, cf. les travaux d’Elisabeth Rigal.

⁶³ Bouveresse [1987] (citation de l’*Autobiographie* de Carnap).

(ii) mais transcendantale également du côté de la réalité objective (de l'ontologie régionale physique).

Or, comme nous l'avons déjà montré ailleurs et comme nous allons très brièvement y revenir, les moments transcendants d'une ontologie régionale sont ceux d'une esthétique transcendantale, d'un système de catégories régionales, puis de leur schématisation et enfin, et surtout, de leur “construction” mathématique au moyen des outils permettant de mathématiser l'esthétique transcendantale. Notre thèse est donc que c'est dans le rapport à une esthétique transcendantale et à un système catégorial que les mathématiques s'appliquent — et même *s'impliquent* — dans l'expérience. Ce faisant elles acquièrent *un contenu*. C'est à partir de là que tous les problèmes platoniciens d'objets et de réalité se trouvent reposés, sans invalider pour autant un transcendantalisme grammatical à la Wittgenstein (qui n'est que mathématique).

VI. Mathématiques et objectivité

Avec Husserl, nous avons vu comment une théorie des actes peut dépasser le psychologisme vers l'objectivité logique idéale des phénomènes symboliques que sont les expressions mathématiques formelles.

Avec Wittgenstein, nous avons vu comment ces phénomènes symboliques peuvent être légalisés et comment, parce que de nature transcendantale, une telle légalisation objective s'oppose à une ontologie platonicienne naïve. Dans cette optique, le platonisme naïf apparaît comme l'analogie pour les mathématiques de ce qu'est l'ontologie d'une réalité en soi pour la physique. Dans son constructivisme finitiste strict, Wittgenstein a donc apparemment “raison”. Pourtant, sa conception possède, nous venons de le voir, des limites radicales.

C'est pourquoi, pour conclure ce déjà trop long article, nous nous permettrons d'indiquer très brièvement la façon dont nous avons longuement développé ailleurs l'idée directrice d'un *double transcendantalisme physico-mathématique* ainsi que la façon dont cela vient bouleverser la conception que l'on peut se faire de la philosophie mathématique en réhabilitant un réalisme platonicien “non naïf”.

VI.1. Logique transcendantale et objectivité physique

On peut d'abord montrer que les développements de la physique moderne, et en particulier le rôle constitutif des *symétries*, valident la thèse transcendantale. On peut citer par exemple la façon dont en mécanique classique le théorème de Noether relie :

- (i) des principes de relativité affirmant la non observabilité (i.e. le caractère non physique) de certaines entités absolues (comme une origine du temps, une origine de l'espace, une direction spatiale privilégiée, etc.) ;
- (ii) des invariances par symétrie des lagrangiens décrivant les systèmes physiques ;
- (iii) des lois de conservation de grandeurs physiques observables.

Cela atteste que la physique détermine bien mathématiquement des phénomènes sans ontologie sous-jacente (puisque des composantes idéales et “subjectives” comme les symétries de l'espace-temps — relevant de l'esthétique transcendantale — y deviennent constitutives des objets).

À un niveau plus sophistiqué, celui de la théorie quantique des champs, on peut citer le prototype de détermination objective qui consiste, à partir de groupes de relativité, d'invariances de jauge et de symétries, d'abord à construire des lagrangiens et des actions puis ensuite, à travers la méthode des intégrales de chemin de Feynman, à élaborer des modèles explicites des phénomènes.⁶⁴ Tous ces développements confirment le bien fondé et le rôle constitutif central de l'Esthétique transcendantale (c'est-à-dire de la covariance des théories relativement à des groupes d'invariance).⁶⁵

VI.2. Le dédoublement de l'Esthétique transcendantale et de l'objectivité

Pour penser dans le cadre d'un *double* transcendantalisme, d'abord mathématique puis physique, le statut de l'objectivité physico-mathématique, nous reprenons alors l'idée que les mathématiques s'appliquent aux théories physiques d'abord en *déterminant* mathématiquement leur esthétique transcendantale c'est-à-dire les formes de la manifestation — de la donation et de l'extériorité — des phénomènes. Or, dans ces formes de donation, le continu est donné intuitivement comme infini actuel.

C'est ici qu'intervient la difficulté philosophique centrale : les formes de la manifestation phénoménale physique, que les mathématiques déterminent, possèdent le statut d'une réalité en soi pour ces mathématiques. Autrement dit, les mathématiques peuvent *déterminer* des formes de manifestation mais ne peuvent pas les *engendrer*. La détermination mathématique appartient à l'idéalité transcendantale de ces formes, mais leur réalisme empirique lui échappe complètement (heureusement d'ailleurs). C'est grâce à cet écart irréductible (entre ce que Kant appelait l'exposition métaphysique et l'exposition transcendantale de l'esthétique) que la reconstruction mathématico-catégoriale du réel physique ne transgresse pas les limites de la *finitude* du Dasein et ne débouche pas sur un dogmatisme mathématique.

On se trouve donc en présence d'une articulation non triviale entre *deux* objectivités différentes, toutes deux transcendantalelement constituées, articulation résumée dans le tableau suivant qui complète celui du § V.1. (l'articulation y est représentée par le lien envoyant la fin de la première colonne sur le début de la seconde colonne).

⁶⁴ Cf. par exemple Cohen-Tannoudji, Spiro [1986], Itzykson, Zuber [1985].

⁶⁵ Petitot [1989b], [1990a], [1990b].

	Mathématiques	Physique
Phénomènes donnés.	Énoncés mathématiques.	Phénomènes donnés dans l'intuition sensible.
Formes de la manifestation (Esthétique transcendantale).	Littéralité symbolique (cf. Hilbert dans <i>De l'Infini</i>).	Le continu comme <i>forme</i> . Spatio-temporalité et groupes de symétries (externes et internes).
Formes de légalisation.	Grammaires et règles de démonstration (cf. Wittgenstein).	Grammaire catégoriale (Analytique transcendantale).
Rapport entre manifestation et légalisation.	Calcul symbolique.	Schématisme, Analytique des principes et Construction des catégories.
Type d'objectivité.	Objectivité symbolique (propositions mathématiques démontrées).	Objectivité physique.
Actes subjectifs corrélatifs.	Synthèses noétiques et corrélation noèse/noème (cf. Husserl)	Synthèses intuitives et catégoriales.
Réalité en soi.	Le continu comme <i>sens</i> .	Intériorité métaphysique de la matière et organisation (cf. Leibniz, la <i>Critique de la Faculté de Juger</i> et l' <i>Opus postumum</i> de Kant.

Selon nous, c'est la méconnaissance du dédoublement de l'objectivité qui a engagé la philosophie des mathématiques actuelle dans d'inextricables difficultés. Il suffit pourtant de comprendre que ce qui fonctionne comme réalité en soi — en particulier le continu comme *sens* — dans le dispositif transcendantal des mathématiques fonctionne au contraire comme forme de la manifestation dans le dispositif transcendantal de la physique, pour comprendre l'essence et le rôle inéliminable du *synthétique a priori*.

VI.3. Le platonisme objectif “négatif” (non naïf) opposé au platonisme ontologique “positif” (naïf)

Etant donné que le continu est la “forme fondamentale” (comme disait Veronese après Kant) de la réalité objective, forme qui conditionne les phénomènes (tant externes, à travers l'espace, qu'internes, à travers le temps) et qui se trouve mathématiquement déterminée, il est parfaitement légitime de l'inclure dans l'objectivité mathématique, même s'il la transcende. En effet, bien qu'inaccessible (en soi) comme sens intuitif pour l'objectivité algorithmique, il se donne pourtant comme forme de l'expérience. On peut donc, avec Alain Connes, considérer que

“la distinction entre constructivisme et formalisme est avant tout méthodologique” (p. 69),

que le constructivisme

“ne remet pas en question l'existence d'un monde mathématique indépendant”

et que, dans la mesure où il prétend imposer l'exclusion ontologique du continu, il est “conservateur et limitatif” (p. 71).

Précisons un peu la thèse d'une *bimodalité objective du continu*. Si l'on s'astreint (comme il se doit) à ne poser les problèmes d'être, d'existence, de réalité, de vérité et de nécessité qu'à l'intérieur d'une doctrine de l'objectivité, alors le continu est, nous venons de le voir, *doublément objectif*. Relativement à l'objectivité symbolique des mathématiques formelles il n'est pas complètement déterminable. À ce titre, comme Husserl l'a déjà profondément noté, il possède le statut d'une *Idée* au sens kantien du mot (d'un horizon inaccessible pour la détermination complète) et son traitement comme objet conduit nécessairement à des antinomies dialectiques (les paradoxes de l'infini). Mais, relativement à la physique, c'est un *donné originaire* conditionnant universellement les phénomènes.

Comme fondement d'une Esthétique transcendantale, le continu apparaît ainsi comme une “réalité externe” que les mathématiques formelles doivent déterminer. La question est alors de savoir de quel type de réalité et de quel type de détermination il s'agit.

La première erreur, celle du platonisme naïf, est de confondre la transcendance du continu relativement à la finitude du symbolique avec une réalité substantielle (ontologique) du continu, réalité substantielle qui devrait permettre de définir de façon univoque et absolue la valeur de vérité des énoncés y référant. Cela est intenable. La réalité du continu est celle

d'une *forme* de la réalité et la confusion des formes de la réalité avec une réalité substantielle (ou à l'inverse avec un néant) est l'erreur traditionnelle, récurrente, de l'empirisme. Comme infini en acte originairement donné, le continu est une *intuition pure* au sens technique du terme. Son extériorité n'est pas ontologique. Elle ne vient pas du fait qu'il est une réalité (au sens naïf) externe et indépendante, mais bien du fait qu'il est la forme même de l'extériorité des transcendances objectives.

En ce qui concerne maintenant la détermination de ce donné originaire, on peut la voir elle aussi (au moins) de deux façons, soit comme une modélisation, soit comme une détermination proprement dite. Si l'on adopte le point de vue de la modélisation — ce qui est le cas par exemple du néo-intuitionnisme radicalement finitiste de l'école strasbourgeoise d'Analyse non standard — alors la transcendance du continu ne fait pas véritablement problème puisqu'elle est conçue sur le mode d'une transcendance physique. Mais la forme de la réalité physique peut-elle être elle-même de nature physique ? Sans doute pas. Son réalisme empirique se double de son idéalité transcendantale et, à ce titre, il est légitime de considérer que le continu doit pouvoir être mathématiquement objectivé, c'est-à-dire axiomatiquement dominé, et même complètement déterminé.

C'est ici que l'on retrouve, dans le cadre d'une doctrine de l'objectivité, tout un ensemble de profonds problèmes de la théorie logique des modèles.⁶⁶ Nous pensons en particulier aux travaux fondamentaux sur la relation qui existe dans un univers de la théorie des ensembles (ZFC : Zermelo, Fraenkel, Axiome du choix) entre la structure du continu et certains axiomes d'existence de *grands cardinaux*. Considérons la *hiérarchie projective* définie sur les sous-ensembles A de \mathbb{R} . Les projectifs de \mathbb{R} sont les $A \subset \mathbb{R}$ définissables à partir des intervalles ouverts par les opérations d'union, d'intersection, de complémentation et de projection. On note traditionnellement Σ^0_1 la classe des ouverts de \mathbb{R} , Π^0_α la classe des complémentaires des Σ^0_α , $\Sigma^0_{\alpha+1}$ la classe des unions dénombrables de Π^0_α , Δ^0_α la classe $\Sigma^0_\alpha \cap \Pi^0_\alpha$, Σ^1_1 la classe des projections (image directe par application continue) de fermés Π^0_1 , Π^1_α la classe des complémentaires des Σ^1_α , $\Sigma^1_{\alpha+1}$ la classe des projections des Π^1_α , Δ^1_α la classe $\Sigma^1_\alpha \cap \Pi^1_\alpha$, etc. Les boréliens de \mathbb{R} sont par exemple les Δ^1_1 .

On cherche alors à démontrer de bonnes propriétés de “régularité” des projectifs $A \subset \mathbb{R}$ comme par exemple la mesurabilité au sens de Lebesgue ou la propriété de l'ensemble parfait (A est dénombrable ou contient un ensemble parfait). Cela est possible jusqu'au niveau des Σ^1_1 et Π^1_1 . Mais dès le niveau des Σ^1_2 et Π^1_2 les difficultés de démonstration rencontrées sont *méta-mathématiques*. Elles sont en fait des reflets des théorèmes *d'incomplétude*. D'où l'idée, due à Gödel, d'enrichir les axiomes de ZFC de façon à préciser la grandeur de l'univers. Pour cela on introduit des axiomes d'existence de grands cardinaux. La “bonne”

⁶⁶ Pour des précisions sur la suite de ce paragraphe, cf. Petitot [1990f]. Pour une introduction à la théorie des modèles, cf. Petitot [1979] et [1989a] ainsi que leurs bibliographies.

structure du continu en est alors la contrepartie. Le premier axiome de ce genre a été celui de l'existence de cardinaux *inaccessibles* (Tarski, Gödel). On a introduit ensuite celui de l'existence de cardinaux *mesurables* (Ulam, Solovay, Martin).⁶⁷ Pour accéder à de bonnes propriétés de *détermination* des projectifs⁶⁸, on doit introduire des axiomes d'existence pour des cardinaux encore plus immenses.

Il existe tout un ensemble de résultats remarquables de Solovay, Martin, Steel, Moschovakis, Harrington, Woodin, etc. dont l'intérêt philosophique est éminent. En effet ces résultats montrent que les axiomes de ZFC ne suffisent pas à complètement dominer axiomatiquement le continu. Et comme y ont insisté Gödel et Martin, les axiomes d'existence de grands cardinaux permettant d'accéder à une détermination complète doivent être considérés comme des sortes "d'hypothèses physiques".

On est ainsi conduit, à la suite de ces auteurs et en particulier de Gödel, à interpréter l'ensemble des résultats méta-mathématiques de non catégoricité, d'incomplétude, d'indécidabilité et d'existence de modèles non standard comme des arguments en faveur d'une *nouvelle* forme de platonisme. En effet, tous ces résultats manifestent un écart irréductible entre le concept computationnel de démontrabilité formelle et ce que Gödel appelait fort bien

"le concept hautement transfini de vérité mathématique objective".⁶⁹

Ce platonisme est non naïf et en quelque sorte *négatif*. Il n'affirme pas comme le platonisme positif naïf qu'il existe des êtres mathématiques autonomes qui se donneraient à nous avec toutes leurs propriétés dans l'intuition d'une conscience d'évidence et la possibilité d'une accessibilité symbolique. Cette ontologisation métaphysique subreptice de ce qui transcende l'accessibilité symbolique finitiste peut être, nous l'avons vu, transcendentalement déconstruite. D'ailleurs, le platonisme positif naïf se nie lui-même. Pour lui en effet :

- (i) les idéalités mathématiques existent comme des êtres dotés de réalité ontologique,
- (ii) elles sont théoriquement caractérisables,
- (iii) elles garantissent de façon univoque et absolue la valeur de vérité des énoncés s'y rapportant.

Toute théorie devrait par conséquent être finitairement axiomatisable et catégorique. Mais alors, il y aurait en définitive identité entre syntaxe et sémantique et l'on pourrait faire l'économie de la thèse conférant une existence autonome aux idéalités mathématiques. Mais l'intuition pure, donnant originellement le continu comme forme fondamentale de la réalité, est extra-mathématique. Et c'est précisément parce que sa détermination mathématique ne

⁶⁷ Naïvement, une mesure sur un cardinal κ est une partition de ses sous-ensembles analogue à celle que l'on obtient sur \mathbb{N} (identifié au cardinal \aleph_0) en étendant le filtre des sous-ensembles cofinis en un ultrafiltre libre.

⁶⁸ $A \subset \mathbb{R}$ est déterminé si dans le jeu où deux joueurs choisissent à tour de rôle un entier (ce qui, à la limite, donne un $r \in \mathbb{R}$), l'un des joueurs possède une stratégie gagnante pour le résultat $r \in A$. Gale et Stewart ont montré que les ouverts Σ_1^0 sont déterminés (1953). On a montré ensuite que les Σ_n^0 pour $n \leq 4$ et les boréliens Δ_1^1 sont déterminés (Wolfe 1955, Paris 1964, Martin 1975).

⁶⁹ Cf. Wang [1987].

peut pas être une détermination univoque et absolue qu'elle fonctionne relativement aux expressions symboliques comme un horizon de compréhension, une Idée régulatrice, une réalité en soi, un sens nouménal. À ce titre, elle transcende l'objectivité mathématique qui pourtant vise à la déterminer. Mais sa transcendance n'est pas pour autant, insistons-y une dernière fois, ontologique et absolue. Elle n'est que relative au dispositif transcendantal constituant l'objectivité mathématique.

Une version d'un tel platonisme négatif (non naïf) est défendue par Alain Connes, lorsqu'il explique que le théorème d'incomplétude montre que *l'information* encodée dans des théories mathématiques non élémentaires est *infinie*, et qu'il ajoute

“n'est-ce pas là une caractéristique d'une réalité indépendante de toute création humaine ?” (p. 211).

Les mathématiques ne sont pas réductibles à des langages formels et

“on peut considérer ce théorème [de Gödel] comme une conséquence des contraintes imposées par la théorie de l'information, à cause de la finitude de la complexité de tout système formel” (p. 213).

Il y a là un point fort délicat. On peut interpréter les thèses platoniciennes du second Gödel comme la doctrine selon laquelle :

- (i) si X est un ensemble, son ensemble de parties $\mathcal{P}(X)$ est bien déterminé (on ne tient donc pas compte des problèmes d'imprédictivité soulignés par Poincaré, Weyl, Wittgenstein, etc. Cf. plus haut §V.3.1) ;
- (ii) on peut itérer transfiniment l'opération $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$;
- (iii) cette itération transfinie est nécessaire pour rendre décidables des énoncés finitaires (comme par exemple des énoncés de consistance) qui seraient autrement indécidables.

De nombreux auteurs ont montré, en particulier Solomon Feferman⁷⁰, que ce platonisme n'est pas tenable. Toutefois, comme nous venons de le voir, ce n'est le cas que si on l'interprète comme un platonisme naïf, ontologique et positif, par exemple comme un platonisme affirmant que, eu égard à ce qu'*est* en soi le continu, l'hypothèse du continu $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ possède une valeur de vérité bien définie. Mais tout change si l'on interprète le platonisme gödelien comme un platonisme objectif et négatif. En effet, dans une optique transcendantale, eu égard à sa bimodalité objective, le continu est mathématiquement une réalité en soi et physiquement une forme de la réalité. Il ne saurait donc être, ni dans un cas ni dans l'autre, une réalité substantielle possédant un être univoque et absolu garantissant la valeur de vérité des énoncés qui y réfèrent. Le fait même que l'hypothèse du continu soit indécidable (Gödel, Cohen), qu'elle soit

“an inherently indefinite problem which will never be ‘solved’”,
le fait même que ZFC ne puisse pas être une théorie

⁷⁰ Cf. par exemple Feferman [1989].

“about a fixed and definite world”⁷¹,

montrent donc en fait la *transcendance objective* du continu. Une détermination objective n'est pas une détermination ontologique. Elle est toujours conventionnelle, c'est-à-dire relative à un cadre transcendantal. L'important est qu'une détermination complète conventionnelle du continu puisse permettre à celui-ci de remplir sa fonction synthétique a priori dans les sciences physiques.

VI.4. L'inter-traduction des théories mathématiques et la philosophie d'Albert Lautman

Souvent on s'imagine les mathématiques comme la synopsis infinie et complète de tous les systèmes d'axiomes consistants et de toutes les théories qui en sont déductibles, immense univers de conventions syntaxiques où les sciences empiriques viendraient puiser les formes logiques de leur mise en forme théorique. Nous venons d'insister sur le fait qu'une telle vision synoptique n'est pas appropriée dans la mesure où, n'étant en général ni catégoriques ni finiment axiomatisables, les théories ne déterminent pas complètement leurs objets. Mais il existe une autre raison, peut-être encore plus fondamentale, de ne pas s'en satisfaire. Une telle vision est en effet inaccessible, serait-ce comme idéalisation et horizon, à un intellect fini dans la mesure où elle ne tient pas compte d'un aspect essentiel des mathématiques modernes.

Les mathématiques modernes sont certes logiques et axiomatico-déductives. Mais elles sont aussi, peut-être même surtout, *structurales*. D'abord, comme l'ont montré Jean Cavailles et Jean-Toussaint Desanti, on peut y abstraire indéfiniment de nouvelles propriétés et de nouvelles structures qui — une fois converties en objets secondaires par thématization — assument de nouveaux rôles syntaxiques et normatifs dans de nouvelles théories, tout en conservant un contenu objectif hérité des objets primaires (comme le continu) auxquels ils s'appliquent et qu'ils permettent d'investiguer structurellement. Ensuite, il existe une *inter-traduction* — une entre-expression — des structures mathématiques entre elles. Une partie considérable des mathématiques modernes consiste à traduire certaines propriétés de certaines structures par des propriétés ou même par l'existence d'autres structures. Cette méthode qui est l'héritière des anciennes méthodes synthétiques en géométrie est complémentaire de la méthode analytique de la déduction.

L'innovation synthétique ici à l'œuvre est “sémantique” en un sens spécial. Elle ne l'est pas au sens d'une sémantique dénotative. Elle l'est en un sens *interprétatif*. De théories en théories, les mathématiques *s'entre-interprètent* indéfiniment et c'est pourquoi la déduction n'y est que *locale*. Comme les mythes de Lévi-Strauss, les théories mathématiques “se parlent entre elles” et c'est la compréhension de cette entre-expression qui régule, et même souvent

⁷¹ Feferman [1989], p.43.

domine, la mécanique démonstrative. Il existe donc comme une “*herméneutique intrinsèque*” des mathématiques pures.⁷²

Dans l'une de ses célèbres boutades sur Russell, Jean Dieudonné a dénoncé ainsi la thèse de la réduction des mathématiques à la logique :

“une telle affirmation est aussi absurde que celle qui consisterait à dire que les œuvres de Shakespeare ou de Goethe font partie de la grammaire!”⁷³.

Prise au sérieux, cette boutade va très loin. En effet, il est clair que les oeuvres littéraires, bien que constituées de phrases et de mots, ne s'y réduisent pas pour autant. Leur syntaxe narrative n'est pas une syntaxe phrastique et leur sémantique discursive n'est pas une sémantique lexicale. Les analyses structurales (Lévi-Strauss, Jakobson, Greimas, etc.) ont permis de dégager des structures sémio-narratives et discursives, supra-phrastiques et supra-lexicales, qui constituent un niveau *supérieur* de la compréhension des récits. Il en va exactement de même en mathématiques, à ceci près que — si familier qu'il soit aux mathématiciens professionnels — le niveau supra-syntaxique (au sens de la syntaxe logique) et supra-sémantique (au sens de la sémantique formelle) reste à explorer entièrement. *C'est le continent inconnu de la philosophie des sciences*. Il relie démonstration, vérité et objectivité à une dimension proprement herméneutique (qui serait l'équivalent de la “finalité interne objective” kantienne dans une critique du jugement mathématique).

Ainsi, au-delà des objets, des structures et des théories déductives, il existe un niveau supérieur des mathématiques, celui de l'inter-translation. Ce niveau est évidemment impossible à étudier rigoureusement sans entrer profondément dans les *contenus spécifiques* des théories. C'est sans doute pour cette raison qu'il n'a fait jusqu'ici l'objet de pratiquement aucune réflexion philosophique, à l'exception notable, toutefois, de celle d'Albert Lautman.

À notre connaissance, Albert Lautman est le seul philosophe à avoir compris que “la considération d'une mathématique purement formelle” devait être complétée par une approche complémentaire où

“l'objet étudié n'est pas l'ensemble des propositions dérivées des axiomes [i.e. les théories au sens de la théorie logique des modèles], mais des êtres organisés, structurés, complets, ayant comme une anatomie et une physiologie propre”.⁷⁴

Selon lui, au-dessus du niveau syntactico-sémantique des théories, il existe un niveau “qualitatif intégral” que, en hommage, nous appellerons le *niveau lautmanien* et identifierons à celui de l'herméneutique intrinsèque définie plus haut.

⁷² Pour quelques exemples concernant les théories respectives des surfaces de Riemann, des groupes et des algèbres de Lie, des corps de nombres algébriques, des singularités, de la cohomologie des faisceaux, etc., cf. Petitot [1979-1982] et [1990a].

⁷³ Dieudonné [1981].

⁷⁴ Cf. Lautman [1937-1939]. Les termes à connotation biologique “organisation”, “anatomie”, “physiologie” montrent que dans une optique transcendante il est bien justifié de faire le lien avec la conception kantienne de l'organisation biologique dans la critique de la faculté de juger téléologique.

Pour Lautman, l'inter-traduction et l'entre-expression constitutives de *l'unité* des mathématiques relèvent de la façon dont des *Idées problématiques*⁷⁵ opèrent dans les concepts et les structures mathématiques. Ses deux thèses sont :

- (i) que le développement de ces Idées réalise une authentique *dialectique historique du Concept*,
- (ii) que leur *compréhension* se prolonge en une *genèse historique* de théories mathématiques effectives.

Nous avons montré ailleurs qu'un tel point de vue n'allait pas sans difficultés. Nous n'y reviendrons donc pas.⁷⁶ Ce que nous retenons ici est son importance pour la constitution d'une épistémologie rationaliste plausible. Notre thèse est que c'est au *niveau lautmanien* que les mathématiques *s'impliquent* dans l'expérience.

Il faut dire que, même si les philosophes ont en général dédaigné cette question, il n'en est heureusement pas allé de même pour les mathématiciens professionnels. On pourrait citer de très nombreux exemples. Nous avons évoqué Jean Dieudonné. Nous avons souligné l'insistance d'Alain Connes sur la cohérence et l'harmonie inter-théorique globales des mathématiques. Nous concluerons par quelques mots de Gian-Carlo Rota qui, dans une conférence donnée récemment au Collège de France, revenait à son tour sur le fait que les théories mathématiques profondes ont des applications à longue portée, dans des domaines extrêmement éloignés de celui pour lequel elles ont été conçues.

“C'est là le mystère, et aussi la fierté et la gloire des mathématiques. (...) La fréquence de ces miracles est telle que leur existence appartient à l'essence des mathématiques, et aucune philosophie de cette science ne devrait être dispensée d'en rendre compte.”⁷⁷

Bibliographie

- BOUVERESSE, J., 1987. *La Force de la Règle*, Paris, Editions de Minuit.
- CAVAILLES, J., 1938. *Méthode axiomatique et Formalisme. Essai sur le problème des fondements des mathématiques*, Paris, Hermann.
- CAVAILLES, J., 1941. “Transfini et Continu”, *Philosophie mathématique*, 253-274, Paris, Hermann, 1962.

⁷⁵ Des antinomies en devenir, en un sens assez voisin du concept de *themata* introduit plus tard dans les années 70 par Gerald Holton pour étudier l'imagination scientifique.

⁷⁶ Cf. Petitot [1987a].

⁷⁷ Rota [1990], p.59. On a là un magnifique exemple de corrélation entre une finalité interne objective (l'unité inter-théorique des mathématiques comme système) et une finalité subjective formelle (“mystère”, “miracle”, “fierté”, “gloire”). Cette corrélation est philosophiquement juste et légitime. On n'a pas à rogner les ailes du génie.

- CAVAILLES, J., 1947. *Sur la Logique et la Théorie de la Science*, (oeuvre posthume), Paris, Presses Universitaires de France.
- CAVAILLES, J., LAUTMAN, A., 1939. "Discussion sur la pensée mathématique", *Société Française de Philosophie*, volume 40, séance du 4 février 1939. Publié en 1945.
- CHANGEUX, J.-P., CONNES, A., 1989. *Matière à Pensée*, Paris, Éditions Odile Jacob.
- COHEN-TANNOUDJI, G., SPIRO, M., 1986. *La Matière-Espace-Temps*, Paris, Fayard.
- DESANTI, J.-T., 1968. *Les Idéalités mathématiques*, Paris, Le Seuil.
- DESANTI, J.-T., 1975. *La philosophie silencieuse, ou critique des philosophies de la science*, Paris, Le Seuil.
- DIEUDONNE, J., 1981. "Bourbaki et la philosophie des mathématiques", *Un siècle dans la philosophie des mathématiques*, Archives de l'Institut International des Sciences Théoriques, Bruxelles, Office International de Librairie.
- FEFERMAN, S., 1989. "Infinity in mathematics : is Cantor necessary ?", *Philosophical Topics*, XVII, 2, 23-45.
- GRANGER, G.G., 1988. *Pour la connaissance philosophique*, Paris, Éditions Odile Jacob.
- HARTHONG, J., REEB, G., 1989. "Intuitionnisme 1984", *M.N.S* 1989, 213-252.
- HUSSERL, E., 1950. *Idées Directrices pour une Phénoménologie*, (trad. P. Ricoeur), Paris, Gallimard.
- HUSSERL, E., 1969-1974. *Recherches Logiques*, Paris, Presses Universitaires de France.
- HUSSERL, E., 1976. *La Crise des Sciences Européennes et la Phénoménologie Transcendantale*, (trad. G. Granel), Paris, Gallimard.
- HUSSERL, E., 1982. *Idées Directrices pour une Phénoménologie II : Recherches Phénoménologiques pour la Constitution*, (trad. E. Escoubas), Paris, Presses Universitaires de France.
- ITZYKSON, C., ZUBER, J.B., 1985. *Quantum Field Theory*, Singapour, Mc Graw-Hill.
- KANT, E., 1781-1787. *Critique de la Raison pure*, (trad. A.J.L. Delamarre et F. Marty), Paris, Pléiade, Gallimard, 1980.
- KANT, E., 1786. *Premiers Principes métaphysiques de la Science de la Nature*, (trad. J. Gibelin), Paris, Vrin, 1971.
- KANT, E., 1790. *Critique de la Faculté de Juger*, (trad. A. Philonenko), Paris, Vrin, 1979.
- KITCHER, Ph., 1988. "Mathematical Progress", *PM* 1988, 518-540.
- LAUTMAN, A., 1937-1939. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, (réédition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946), Paris, Bourgois, 1977.
- L.T.C., 1989. *Logos et Théorie des Catastrophes*, Colloque de Cerisy autour de René Thom, (J. Petitot ed.), Genève, Patino.
- M.N.S, 1989. *La Mathématique non standard*, (H. Barreau, J. Harthong, eds.), Paris, Editions du CNRS.
- NELSON, E., 1986. *Predicative Arithmetic*, Princeton University Press.

- PETITOT, J., 1979-1982. “Infinitesimale”, “Locale/Globale”, “Unità delle matematiche”, *Enciclopedia Einaudi*, VII, 443-521 ; VIII, 429-490 ; XV, 341-352 ; XV, 1034-1085, Turin, Einaudi.
- PETITOT, J., 1982. “Structuralisme et Phénoménologie”, *L.T.C*, 1989, 345-376.
- PETITOT, J., 1984. “La lacune du contour : phénoménologie et perception”, *Anàlise*, 1, 1, 101-140, Lisbonne, GEC Publicações.
- PETITOT, J., 1985. *Morphogenèse du Sens*, Paris, Presses Universitaires de France.
- PETITOT, J., 1986a. “Le ‘Morphological Turn’ de la Phénoménologie”, *Documents du CAMS*, Paris, École des Hautes Études en Sciences Sociales, (à paraître dans Petitot 1990e).
- PETITOT, J., 1986b. “Epistémologie des phénomènes critiques”, *Documents du CAMS*, Paris, École des Hautes Études en Sciences Sociales, (à paraître dans Petitot 1990e).
- PETITOT, J., 1987a. “Refaire le ‘Timée’. Introduction à la philosophie mathématique d’Albert Lautman”, *Revue d’Histoire des Sciences*, XL, 1, 79-115.
- PETITOT, J., 1987b. “Mathématiques et Ontologie”, *La Scienza tra Filosofia e Storia in Italia nel Novecento*, (F. Minazzi, L. Zanzi, eds.), 191-211, Rome, Edizione della Presidenza del Consiglio dei Ministri.
- PETITOT, J., 1988. “Logique transcendantale et ontologies régionales”, *Colloque de Cerisy : Rationalité et objectivités* (à paraître).
- PETITOT, J., 1989a. “Rappels sur l’analyse non standard”, *M.N.S*, 1989, 187-209.
- PETITOT, J., 1989b. “Le problème du physico-mathématique. Actualité de la doctrine transcendantale”, *Colloque “1830-1930, Un siècle de géométrie, Épistémologie, Histoire et Mathématiques”*, Paris, Institut Henri Poincaré (à paraître chez Springer).
- PETITOT, J., 1989c. “Hypothèse localiste, Modèles morphodynamiques et théories cognitives : Remarques sur une note de 1975”, *Semiotica*, 77, 1/3, 65-119.
- PETITOT, J., 1989d. “Forme”, *Encyclopaedia Universalis*, XI, 712-728, Paris.
- PETITOT, J., 1990a. “Logique transcendantale, Synthétique a priori et Herméneutique mathématique des objectivités”, *Fundamenta Scientiae*, 10, 1, 57-84.
- PETITOT, J., 1990b. “Logique transcendantale et Herméneutique mathématique : le problème de l’unité formelle et de la dynamique historique des objectivités scientifiques”, *Il pensiero di Giulio Preti nella cultura filosofica del novecento*, (F. Minazzi ed.), 155-172, Milano, Franco Angeli.
- PETITOT, J., 1990c. “Le Physique, le Morphologique, le Symbolique. Remarques sur la vision”, *S.C 1990*, 139-183.
- PETITOT, J., 1990d. “Modèles morphodynamiques pour la grammaire cognitive et la sémiotique modale”, *Recherches Sémiotiques - Semiotic Inquiry*, 9, 1-2-3, 17-51.
- PETITOT, J., 1990e. *Physique du Sens* (à paraître).
- PETITOT, J., 1990f. “Continu et Objectivité”, *Le Continu mathématique*, (J.-M.Salanskis, H. Sinaceur, eds.), Colloque de Cerisy (à paraître).

- P.M, 1988. "Philosophie des Mathématiques" (Ph. Kitcher, ed.), *Revue Internationale de Philosophie*, 42, 167.
- RESNIK, M.D., 1988. "Mathematics from the Structural Point of View", *P.M* 1988, 400-424.
- ROTA, G.C., 1990. "Les ambiguïtés de la pensée mathématique", *Gazette des Mathématiciens*, 45, 54-64.
- SALANSKIS, J.-M., 1989. "Le potentiel et le virtuel", *M.N.S*, 1989, 275-303.
- SALANSKIS, J.-M., 1990. "L'arithmétique prédicative, ou l'herméneutique des nombres entiers", *Séminaire de Philosophie et Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure*, (séance du 23 janvier 1990).
- S.C., 1990. *Sciences cognitives : quelques aspects problématiques*, (J. Petitot, ed.), *Revue de Synthèse*, IV, 1-2, Paris, Albin-Michel.
- SHANKER, S.G., 1987. *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press.
- VUILLEMIN, J., 1955. *Physique et Métaphysique kantienne*, Paris, Presses Universitaires de France.
- WAISMANN, F., 1967. *Wittgenstein und der Wiener Kreis*, Oxford, Blackwell, 1979.
- WANG, H., 1987. *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, M.I.T Press.
- WILLARD, D., 1984. *Logic and the Objectivity of Knowledge*, Ohio, University Press.
- WITTGENSTEIN, L., 1953. *Philosophische Untersuchungen, Philosophical Investigations*, (G.E.M. Anscombe, R. Rhees, eds.), Oxford, Blackwell, 1958.
- WITTGENSTEIN, L., 1956. *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, Remarks on the Foundation of Mathematics*, (G.H. von Wright, R. Rhees, G.E.M. Anscombe, eds.), Oxford, Blackwell, 1978.
- WITTGENSTEIN, L., 1964. *Philosophische Bemerkungen, Philosophical Remarks*, (R. Rhees, ed.), Oxford, Blackwell, 1975.
- WITTGENSTEIN, L., 1969a. *Über Gewissheit, On Certainty*, (G.E.M. Anscombe, G.H. von Wright eds.), Oxford, Blackwell, 1977.
- WITTGENSTEIN, L., 1969b. *Philosophische Grammatik, Philosophical Grammar*, (R. Rhees, ed.), Oxford, Blackwell, 1974.
- WITTGENSTEIN, L., 1977. *Vermischte Bemerkungen*, Frankfurt, Suhrkamp Verlag; Oxford, Blackwell, 1980.
- W.L.C, 1932-1935. *Wittgenstein's Lectures, Cambridge 1932-1935*, (A. Ambrose, ed.), Oxford, Blackwell, 1979.
- WRIGHT, C., 1988. "Why Numbers can believably be : a Reply to Hartry Field", *P.M* 1988, 425-473.