Mise à jour en 2010 du chapitre V de Physique du Sens, Editions du CNRS, Paris, 1992.

Introduction aux phénomènes critiques

(D'après Arnold, Bergé, Berry, Bocarra, Brézin, Chazarain, Collet, Coullet, Derrida, Douady, Duistermaat, Eckmann, Golubitsky, Guckenheimer, Green, Hubbard, Itzykson, Jänich, Kléman, Pfeuty, Pommeau, Ruelle, Thom, Toulouse, Tresser, Zeeman)

Jean Petitot*

Table des Matières

1 Les caustiques en optique **3**
1.1 Les caustiques comme enveloppes géométriques . . . 3
1.2 Solutions asymptotiques de l'équation des ondes . . . 5
1.3 Solutions lagrangiennes . . . 6
1.4 Les caustiques comme catastrophes . . . 7
1.5 Intégrales oscillantes et déploiements universels . . . 8
1.6 La physique des infrastructures morphologiques . . . 11

2 Transitions de phases et ruptures de symétrie **12**
2.1 La surface des états et ses singularités . . . 12
2.2 La théorie "élémentaire" de Landau . . . 17
2.3 Catastrophe papillon et points tricritiques . . . 20
2.4 Limites de la théorie de Landau . . . 21
2.5 La règle des phases . . . 24
2.6 TE équivariante . . . 26

3 Groupe de renormalisation et dynamique qualitative **27**
3.1 Les idées de base . . . 27
3.2 Exposants critiques et lois d'échelle . . . 28
3.3 Analyse dimensionnelle et dimensions anormales . . . 30
3.4 De la mécanique statistique à la dynamique qualitative . . . 31
3.5 Modèles discrets et modèles continus : le calcul de la fonction de partition . . . 33
3.6 Le modèle gaussien . . . 38
3.7 Quelques indications sur la méthode du GR . . . 39
3.7.1 Explicitation de l'idée fondamentale . . . 39
3.7.2 Le cas gaussien . . . 41
3.7.3 Les développements en $\varepsilon = 4 - d$ . . . 42
3.8 Compléments . . . 44
3.8.1 Les développements en $\frac{1}{n}$ . . . 44
3.8.2 Théorie des points tricritiques . . . 44
3.8.3 Systèmes complexes . . . 44
3.8.4 Anisotropie . . . 44
3.8.5 Phénomènes de cross-over . . . 45

*École des Hautes Études en Sciences Sociales (EHESS) et CREA (École Polytechnique), Paris, France.
e-mail : petitot@poly.polytechnique.fr
URL : http://jean.petitot.pagesperso-orange.fr/

3.8.6 La percolation . . . 45
3.9 Les infrastructures catastrophiques universelles . . . 45

4 Zéros de la fonction de partition et ensembles de Julia 45
4.1 Les zéros de Z . . . 45
4.2 Les modèles hiérarchiques . . . 46
4.3 La possibilité du chaos . . . 50
4.4 La renormalisation comme paradigme . . . 51
4.5 Endomorphismes quadratiques de l'intervalle . . . 52
4.6 Ensembles de Julia . . . 58

5 Physique et phénoménologie : la question des réductions 66

6 Autres applications physiques de la morphodynamique 66
6.1 Flambage élastique . . . 66
6.2 Défauts des milieux ordonnés . . . 67
6.3 Perturbations singuliéres . . . 68
6.4 Physique nucléaire . . . 69
6.5 Ondes de choc . . . 69
6.6 Problèmes variationnels . . . 70
6.7 Hydrodynamique . . . 70
6.8 Dynamique qualitative et TG . . . 71

Bibliographie 71

Index 78

Introduction

La théorie des phénomènes critiques possède de nombreuses applications en dehors de la physique *stricto sensu*, dans tous les domaines où des interactions complexes entre unités élémentaires de niveau "micro" peuvent donner lieu à des transformations brusques de structures globales émergentes "macro". Mais, comme elle est technique sur le plan mathématique, sa diffusion se heurte à des difficultés pédagogiques de présentation. Ce papier reprend un texte d'introduction aux phénomènes critiques daté de 1982, repris dans mon ouvrage de 1992 *Physique du Sens*, qui avait été écrit pour mes collègues de sciences cognitives et sociales.

Cette présentation situe la mathématique des phénomènes critiques dans le contexte général de la théorie des singularités d'applications différentiables et des bifurcations de systèmes dynamiques. La théorie des singularités correspond à la théorie élémentaire (TE) et celle des bifurcations générales à la théorie généralisée (TG). Elle doit beaucoup aux travaux de René Thom sur les approches morphodynamiques des processus morphogénétiques, l'idée de base étant que, en un certain sens, tout les phénomènes d'apparition de morphologies dans des substrats matériels sont des manifestations qualitatives de phénomènes critiques sous-jacents.

Les domaines que nous allons aborder sont d'une redoutable technicité. Pour ne pas trop donner dans la compilation vulgarisatrice, nous nous restreindrons drastiquement. Nous n'esquisserons que deux exemples, celui, optique, des caustiques et celui, thermodynamique, des transitions de phases, en nous focalisant :

1. sur l'*universalité* des phénomènes manifestant l'action de contraintes très largement indépendantes de la physique spécifique des substrats;

2. sur les changements de niveaux menant du niveau géométrique au niveau ondulatoire en optique, du niveau macroscopique au niveau microscopique en thermodynamique;

3. sur les rapports entre la théorie élémentaire (TE) et la théorie générale (TG).

Après avoir présenté brièvement la théorie des caustiques comme théorie des solutions lagrangiennes de l'équation des ondes (section 1), nous consacrerons l'essentiel de cet article à la théorie des transitions de phases. Nous commencerons par rappeler que la TE est équivalente aux théories du champ moyen "à la Landau" (section 2). Nous esquisserons ensuite le contenu des méthodes du groupe de renormalisation (section 3). Cette incursion dans un domaine très spécialisé nous permettra alors de donner un exemple d'application de modèles relevant de la TG (théorie des ensembles de Julia) à des systèmes thermodynamiques particuliers (section 4). Après être revenus à la section 5 sur quelques points épistémologiques, nous conclurons en citant quelques autres applications physiques de la morphodynamique (section 6).

1 Les caustiques en optique

1.1 Les caustiques comme enveloppes géométriques

Une des applications physiques rigoureuses les plus spectaculaires de la morphodynamique concerne l'analyse des caustiques en optique.[1]

Considérons d'abord l'approximation de l'optique géométrique dans un milieu homogène et isotrope. Les rayons lumineux sont alors des droites normales aux fronts d'ondes. Si S_0 est un front d'onde initial il évolue parallèlement à lui-même. Ce qui peut rendre la situation non triviale en introduisant des singularités sur les fronts d'ondes est, par conséquent, l'existence

[1] Cf. par exemple : Airy [2], Arnold [8], Berry [16], [17], [18], [20], [21], Berry-Nye-Wright [23], Berry-Upstill [24], Chazarain [39], Duistermaat [65], Guckenheimer [86], Nye [131], Pearcey [134], Thom [180], Wassermann [196], Wright [205].

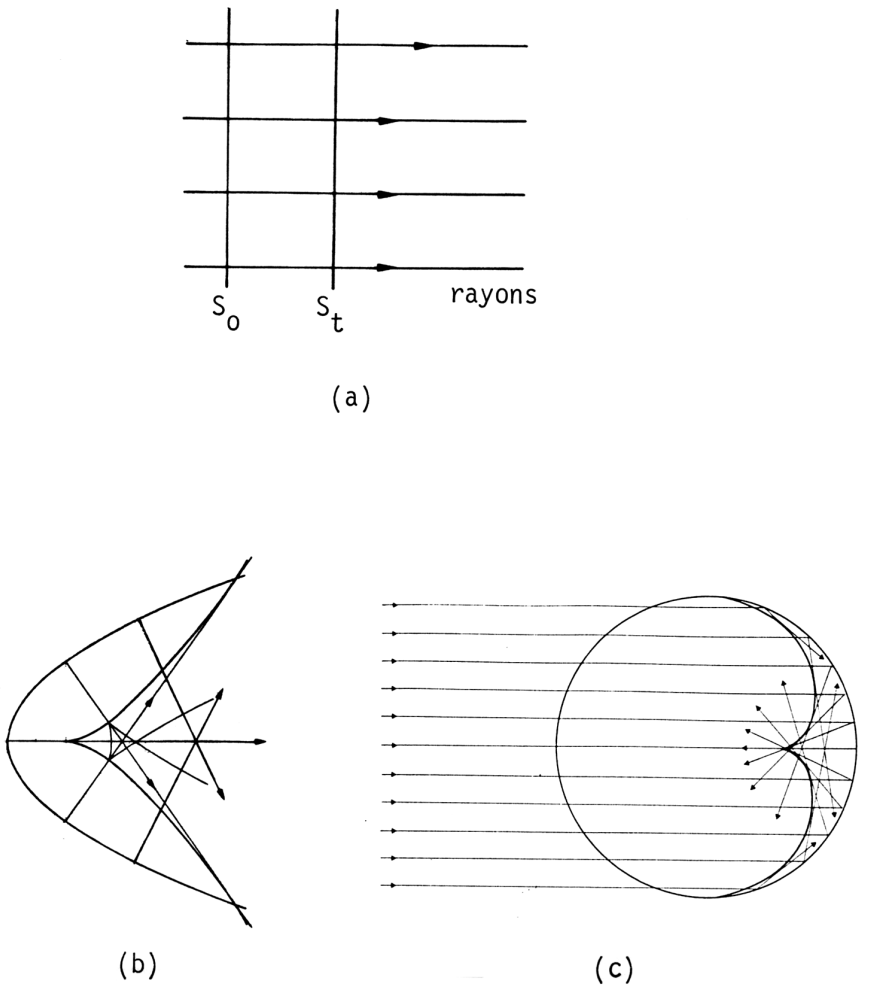


Figure 1: (a) Onde plane: propagation triviale, sans caustique. (b) Caustique C des normales à S_0. (c) La caustique "breakfast" observable dans un bol de café au soleil (d'après Poston-Stewart [145], p. 248).

d'une *enveloppe* C des normales à S_0. Si elle existe, celle-ci est dite *caustique* de la propagation[2] (*Cf.* Fig. 1). Sur la caustique C il se produit une focalisation de l'énergie lumineuse. L'intensité y devient "infinie". Elle diverge dans l'approximation de l'optique géométrique. C'est pourquoi, dans un medium lumineux où l'on a interposé un écran, seules les caustiques sont observables (cf. Fig. 1). Comme le remarque Michael Berry, elles dominent les images optiques et sont phénoménologiquement structurantes. Ce sont des phénomènes critiques. Pourtant, pendant longtemps, elles ont été connotées négativement car, comme nous allons le voir, elles constituent des obstructions à l'intégration de l'équation des ondes en optique ondulatoire.

Il s'agit de comprendre les singularités que peuvent présenter les caustiques génériquement. Soit donc S une surface lisse plongée dans $\mathbb{R}^3$ et soit $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une carte locale. Considérons les fonctions distance $V_q(u) = \|q - g(u)\|^2$ qui sont des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ paramétrées par $q \in \mathbb{R}^3$. Leurs singularités[3] correspondent aux concepts traditionnels de la

[2]La caustique est donc l'évolute de la famille des fronts d'ondes géométriques et ceux-ci sont différents involutes de celle-là.

[3]Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable, un point $a = (x, y) \in U$ est une singularité de f si le

géométrie des surfaces : centres de courbure principaux, surfaces focales (*i.e.* caustiques), lignes de courbure, etc.[4]

Par exemple, les points de la normale à S en $g(u)$ sont les points $q \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels u est un point critique de $V_q(u)$. En général, ces points critiques sont non dégénérés. Lorsqu'ils le sont, c'est-à-dire lorsque le hessien[5] de V_q en u n'est pas de rang maximal 2, q est un centre de courbure et appartient à C. Si, bien que dégénéré, le hessien est non nul (et donc s'il est de rang 1), on est en présence d'une catastrophe pli. Si le hessien est nul, $g(u)$ est un ombilic de S (égalité des rayons de courbure principaux). Depuis longtemps (Cayley et Darboux) on a étudié en grands détails la structure locale d'une surface au voisinage d'un point ombilical. Dans le cas de stabilité structurelle, on dispose de résultats sur la structure globale des champs de directions principales.[6]

1.2 Solutions asymptotiques de l'équation des ondes

Lorsque l'on passe de l'optique géométrique à l'optique *ondulatoire*, on doit analyser les solutions de l'équation des ondes au voisinage des caustiques, ce qui soulève de nombreuses difficultés. Toute propagation d'ondes lumineuses dans $\mathbb{R}^3$ (supposé constituer un milieu homogène et isotrope) est une solution $v(q,t)$ de l'équation des ondes $Dv = 0$, q étant un point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x,y,z), t le temps et D l'opérateur différentiel linéaire du 2ème ordre $D = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ (Δ étant le Laplacien $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, i.e. la dérivée spatiale seconde symétrisée relativement aux rotations, et la vitesse de la lumière étant prise égale à 1). La séparation des variables spatiales et temporelle conduit à chercher des solutions stationnaires de fréquence τ qui sont du type $v(q,t) = e^{i\tau t}u(q)$, $u(q)$ étant une amplitude satisfaisant $D_\tau u = 0$, où $D_\tau = \tau^2 + \Delta$, avec pour condition initiale la donnée d'une fonction $u_0(q)$ sur la surface source S_0. Cela signifie que l'on cherche une propagation spatiale $u(q)$ de $u_0(q)$ sur laquelle vient se greffer un pattern ondulatoire $e^{i\tau t}$.

L'approximation de l'optique géométrique correspond à une fréquence τ infinie, *i.e.* à une longueur d'onde = 0. Mais pour $\tau = \infty$, l'opérateur D_τ n'est plus défini. D'où l'idée de chercher des *solutions asymptotiques* relativement à la fréquence τ – c'est-à-dire des solutions u_τ paramétrées par τ, égales à u_0 sur S_0 et définies à une fonction à décroissance rapide en τ près – de la famille d'équations perturbées $D_\tau u_\tau = \varepsilon_\tau$ où ε_τ est une fonction à décroissance rapide en τ. "A la limite", la fonction u_∞ sera alors solution de l'équation $D_\infty u = 0$.

On cherche donc des solutions spatiales de la forme $u_\tau(q) = a_\tau(q)e^{i\theta}$, où $\theta = \tau\varphi(q)$, $\varphi(q)$ étant une phase *spatiale*, et où l'amplitude $a_\tau(q)$ admet un développement asymptotique en τ de la forme :

$$a_\tau(q) \sim \tau^\mu \left[a_0(q) + \frac{1}{\tau}\, a_1(q) + \cdots + \frac{1}{\tau^k}\, a_k(q) + \ldots \right] \text{ avec } a_0 \not\equiv 0.$$

Lorsque $\tau \to \infty$, les $\dfrac{1}{\tau^k} \to 0$ pour $k \geq 1$. Les points où la solution $v(q,t)$ possède une phase *constante* satisfont l'équation $\tau(t + \varphi(q)) = \text{cste}$.

Il est facile de calculer $D_\tau u_\tau$ sous la forme d'un développement en puissances décroissantes de τ. Mais comme u_τ doit être solution de $D_\tau u_\tau = \varepsilon_\tau$ où ε_τ est à décroissance rapide (*i.e.* plus rapide que toute puissance négative de τ), les coefficients de ce développement doivent tous être identiquement nuls. Cela donne :

1. L'équation $a_0(1 - |\nabla\varphi|^2) \equiv 0$, où $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ est le gradient de la phase spatiale, soit, puisque $a_0 \not\equiv 0$, $1 - |\nabla\varphi|^2 \equiv 0$, avec la condition initiale $\varphi\,|_{S_0} = 0$. Cette

gradient de f, $\nabla f = \{\partial f/\partial x, \partial f/\partial y\}$, s'annule en a. Supposons que 0 soit singulier et que $f(0) = 0$. Alors le développement de Taylor de f en 0 commence au second ordre : $f(a) = \left(\partial^2 f/\partial x^2\right) x^2 + 2\left(\partial^2 f/\partial x \partial y\right) xy + \left(\partial^2 f/\partial y^2\right) y^2 + \cdots$ pour a assez voisin de 0.

[4] *Cf.* par exemple Portéous [144].

[5] Le hessien est la forme quadratique $\left(\partial^2 f/\partial x^2\right) x^2 + 2\left(\partial^2 f/\partial x \partial y\right) xy + \left(\partial^2 f/\partial y^2\right) y^2$ qui donne le terme d'ordre 2 du développement de Taylor. Sa matrice est $\begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x \partial y \\ \partial^2 f/\partial x \partial y & \partial^2 f/\partial y^2 \end{pmatrix}$.

[6] *Cf.* Sotomayor-Gutierrez [167].

équation caractéristique de type Hamilton-Jabobi – dite *équation eikonale* – exprime que le gradient de la phase spatiale φ est de module constant et $= 1$. Cela signifie géométriquement que les surfaces de niveau S_t de φ sont des surfaces parallèles. Ce sont les fronts d'ondes de l'approximation géométrique, les lignes de gradient de φ (*i.e.* les courbes intégrales du champ de vecteurs $\nabla\varphi$) étant quant à elles les rayons lumineux.

2. L'équation pour a_0, dite *équation de transport*, $a_0\Delta\varphi - 2\nabla\varphi\cdot\nabla a_0 = 0$, avec la condition initiale $a_0 \mid_{S_0} = u_0$. Sur un rayon lumineux, comme $q(t)$ satisfait $\dfrac{dq}{dt} = 2\nabla\varphi$, on a $2\nabla\varphi \cdot \nabla a_0 = \nabla a_0 \cdot \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{da_0}{dt}$, et l'équation de transport se réduit à une équation différentielle ordinaire linéaire (φ étant supposée connue) :
$$\frac{da_0}{dt} + a_0\Delta\varphi = 0.$$

3. Il en va de même pour les autres coefficients a_k. Ils sont solutions d'équations linéaires ordinaires sur les rayons lumineux, c'est-à-dire sur ce que l'on appelle les *caractéristiques* de l'équation des ondes.

On peut ainsi, par intégrations successives, obtenir une solution asymptotique *locale*, définie dans un voisinage de la source S_0. Ce qui fait obstruction à la construction d'une solution *globale* est l'enveloppe des caractéristiques, c'est-à-dire précisément la caustique C, car sur C l'amplitude a_0 diverge.

1.3 Solutions lagrangiennes

Pour comprendre ce qui se passe au voisinage d'une caustique, il faut approfondir la description géométrique et considérer l'espace où habite le graphe de la différentielle $d\varphi$ de la phase spatiale. Pour ce faire, on introduit les moments conjugués p des positions $q \in \mathbb{R}^3$ et on passe à un formalisme hamiltonien. Soit $T^*\mathbb{R}^3$ le fibré cotangent de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées (q,p). A la famille d'opérateurs de propagation D_τ est associé l'hamiltonien $H(q,p) = 1 - |p|^2$ – dit *symbole principal* de D_τ – sur l'espace de phases $T^*\mathbb{R}^3$. L'équation eikonale s'écrit $1 - |\nabla\varphi|^2 = 1 - |d\varphi|^2 = H(q, d\varphi) = 0$, la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$ établissant un isomorphisme entre $T^*\mathbb{R}^3$ et $T\mathbb{R}^3$ qui permet d'identifier la 1-forme différentielle $d\varphi$ au champ de gradient $\nabla\varphi$.[7]

Soit alors Λ_φ le graphe de $d\varphi$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$ où φ est définie. Il est facile de vérifier que, pour la structure symplectique canonique de $T^*\mathbb{R}^3$ définie par la 2-forme fondamentale $\omega = dq \wedge dp$ [8]:

1. Λ_φ est une sous-variété lagrangienne de T^*U, c'est-à-dire une sous-variété Λ de dimension moitié sur laquelle la 2-forme ω s'annule.

[7] Le fibré cotangent T^*M d'une variété différentiable de dimension n est le dual de son fibré tangent TM : sa fibre T^*_aM en $a \in M$ est le $\mathbb{R}$-vectoriel des formes $\mathbb{R}$-linéaires $L : T_aM \to \mathbb{R}$ sur T_aM. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées locales en $a \in M$, et si $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)$ est la base de T_aM associée, on note (dx_i) la base de T^*_aM duale de $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)$. Autrement dit, dx_i est la forme linéaire sur T_aM qui associe à tout vecteur tangent ξ à M en a, $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, sa i-ème composante $\xi_i : dx_i(\xi) = \xi_i$. Si $\theta \in T^*_aM$, ses coordonnées θ_i dans la base (dx_i) sont données par $\theta_i = \theta\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)$ et donc $\theta(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i\theta_i$. Soit alors $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une fonction potentiel sur M. On peut associer à φ la 1-forme différentielle $d\varphi$ (*i.e.* une section de T^*M) définie par $d\varphi(x)(\xi) = \xi(\varphi) = \sum_{i=1}^n \xi_i \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. On a $d\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} dx_i$, et l'on retrouve la formule leibnizienne des différentielles.

[8] Sur le fibré cotangent T^*M d'une variété (de coordonnées locales (q,p)), il existe une 1-forme *canonique* θ d'expression pdq. $\theta(q,p) \in T^*_{(q,p)}(T^*M)$ associe à tout vecteur tangent $(\xi,\eta) \in T_{(q,p)}(T^*M)$ le réel $p(\xi)$ (bien défini car $p \in T^*_qM$ et $\xi \in T_qM$). La 2-forme $\omega = d\theta$ est fondamentale en mécanique classique car c'est elle qui se trouve à la base du formalisme hamiltonien (mécanique symplectique, *cf.* Arnold [9]).

2. Le symbole principal H s'annule sur Λ_φ.

3. Λ_φ est *transverse* en chacun de ses points aux fibres de la projection canonique $\pi : T^*U \to U$, ce qui signifie que en tout point x de Λ_φ la somme des espaces tangents à Λ_φ et à la fibre de π en x est tout l'espace tangent T^*_xU.

On voit que l'obstruction qu'il y a à construire une solution φ *globale* consiste en un éventuel *défaut de transversalité*. D'où l'idée de chercher d'abord des solutions *géométriques* Λ à l'équation caractéristique et de ne poser que dans un second temps la question de leur représentation fonctionnelle.

On appellera donc *solution lagrangienne* du problème hamiltonien défini par le symbole H une variété lagrangienne Λ sur laquelle H s'annule (conditions (1) et (2)). Lorsque la condition (3) de transversalité est en plus remplie, Λ est localement représentable par le graphe Λ_φ d'une phase φ solution de l'équation caractéristique $H(q, d\varphi) = 0$. Remarquons que le champ $2\nabla\varphi$ (dont les rayons sont les courbes intégrales) est donné par $\dfrac{\partial H}{\partial p}$. Considérons alors le champ hamiltonien $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ défini par H sur l'espace de phases $T^*\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2\nabla\varphi \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \end{cases}$$

H est constant sur les courbes intégrales de X_H puisque

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

et comme $H\ |_\Lambda \equiv 0$ par hypothèse, Λ est réunion de telles courbes, dites courbes *bicaractéristiques*.

Si $\Lambda = \Lambda_\varphi$, $p = d\varphi$, $2\nabla\varphi = \dfrac{\partial H}{\partial p}(q, d\varphi)$ et donc les rayons (les courbes caractéristiques) sont la projection sur $\mathbb{R}^3$ des courbes bicaractéristiques. La caustique C est par suite le *contour apparent* sur $\mathbb{R}^3$ de la solution lagrangienne Λ, *i.e.* la projection du lieu critique Σ où la condition (3) de transversalité n'est pas satisfaite.

On voit ainsi clairement à quoi tient l'obstruction due à l'existence de caustiques. La phase spatiale φ s'identifie à une longueur de chemin optique régie par un principe variationnel (principe de Fermat). C'est l'analogue d'une action. Dans $\mathbb{R}^3$ plusieurs rayons peuvent passer par un même point q. Si α est un paramétrage local de S_0, φ dépend de α et les origines des rayons passant par q sont données par $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$, *i.e.* par les points critiques de $\varphi_q(\alpha)$. Il y a caustique lorsqu'il y a coalescence de deux rayons passant par q, *i.e.* lorsqu'un des points critiques α devient *dégénéré*. L'existence de caustiques est donc lié à la *multiformité* de l'action φ. En passant dans l'espace de phases $T^*\mathbb{R}^3$, l'introduction des coordonnées conjuguées p lève l'obstruction et "désingularise" la situation. Les bicaractéristiques ne se coupent plus et l'on peut construire des solutions lagrangiennes globales. Les caustiques se retrouvent alors par projection de l'espace de phases $T^*\mathbb{R}^3$ sur l'espace de configuration $\mathbb{R}^3$.

1.4 Les caustiques comme catastrophes

Ainsi que l'a montré Guckenheimer, il y a *équivalence* entre "catastrophes" et variétés lagrangiennes dans un fibré cotangent T^*M. Considérons l'espace de configuration M comme un espace "externe" de contrôle. Soit $\varphi = \varphi_q(\alpha)$ une famille de potentiels définis sur un espace "interne" $\mathbb{R}^p$ de variables α, famille paramétrée par $q \in M$. Soit V_φ le lieu critique de φ, lieu des points (α, q) tels que α soit point critique de φ_q. La "catastrophe" associée à cette famille est le contour apparent de V_φ sur M le long de la projection $\chi : V_\varphi \to M$. Sur

V_φ, $d\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q}dq$ puisque $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$. Considérons alors l'application :

$$\begin{aligned}\sigma : V_\varphi &\to T^*M \\ (\alpha, q) &\mapsto \left(q,\ d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial q}dq\right)\end{aligned}$$

On montre que, génériquement, $\sigma(V_\varphi)$ est une sous-variété lagrangienne de T^*M et que toute catastrophe peut s'obtenir ainsi comme caustique par composition de σ avec la projection $\pi : T^*M \to M$.

Les caustiques offrent ainsi un domaine physique où les catastrophes élémentaires (CE) se trouvent réalisées. A ce titre, elles sont "universelles" au sens des *déploiements universels* de singularités. Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable possédant une singularité en 0. On localise la situation au voisinage de 0 et l'on considère l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ des fonctions $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ localisées en 0.[9] On dit que deux telles fonctions g et h sont équivalentes si elles se deduisent l'une de l'autre par changement de coordonnées à la source et au but. Si la singularité de f n'est pas trop dégénérée, on sait définir sa codimension, c'est-à-dire la codimension de sa classe d'équivalence $\widetilde{f}$ dans $\mathcal{F}$. On appelle déploiement de f une famille f_q paramétrée par $q \in M$. Si la codimension de f est finie $= k$, on appelle déploiement universel de f une famille f_q paramétrée par un complémentaire de $\widetilde{f}$ dans $\mathcal{F}$. On montre que tous les déploiements universels sont en un certain sens équivalents. Etant donné un déploiement universel f_q, la catastrophe associée est définie comme ci-dessus. Thom a appelé "élémentaires" les catastrophes de codimension ≤ 4 qui peuvent posséder l'espace-temps physique comme espace "externe".

Si l'on appelle alors avec Klaus Jänich "caustique universelle" une caustique associée à un déploiement universel de CE, et donc stable relativement aux petites déformations à la fois du front d'ondes initial S_0 et de l'hamiltonien H, on peut montrer qu'il suffit de la stabilité relative à S_0 pour assurer la stabilité relative à H (*cf.* Jänich [100] et Wasserman [196]).

1.5 Intégrales oscillantes et déploiements universels

En ce qui concerne maintenant les représentations *fonctionnelles* locales des solutions lagrangiennes, l'idée fondamentale est due à Maslov. Elle consiste à chercher des solutions asymptotiques $u_\tau(q)$ qui ne sont plus simplement de type $a_\tau(q)e^{i\tau\varphi(q)}$ où

$$a_\tau(q) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{\mu-j} a_j(q)\ ,$$

mais des sommes localement finies *d'intégrales oscillantes* :

$$I(q,\tau) = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{p/2} \int e^{i\tau\varphi(q,\alpha)} a_\tau(q,\alpha) d\alpha\ ,$$

où α parcourt $\mathbb{R}^p$, où $(\tau/2\pi)^{p/2}$ est un facteur de renormalisation et où $a_\tau(q,\alpha)$, supposé être de support compact en α, admet un développement asymptotique $a_\tau(q,\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{\mu-j} a_j(q,\alpha)$.

Le raccord entre ces représentations fonctionnelles et les solutions lagrangiennes définies plus haut se fait à travers le principe dit de la *phase stationnaire* qui explique les interférences destructrices faisant passer de l'optique ondulatoire à l'optique géométrique : pour l'équivalence à une fonction à décroissance rapide près, une intégrale oscillante se concentre lorsque τ tend vers l'infini sur le lieu critique V_φ où la phase $\varphi_q(\alpha)$ est stationnaire

[9] Ces espaces fonctionnels de germes de fonctions différentiables sont délicats à manier et possèdent une topologie naturelle compliquée dite topologie de Whitney. Ce paragraphe les traite comme des espaces intuitifs et n'est donc pas du tout rigoureux.

(*i.e.* où $\dfrac{\partial \varphi_q(\alpha)}{\partial \alpha} = 0$). D'après ce principe, il existe une solidarité profonde entre l'intégrale oscillante $I(q,\tau)$ et la catastrophe $\chi : V_\varphi \to M$.

Lorsque les points critiques $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de $\varphi_q(\alpha)$ sont non dégénérés, l'intégrale oscillante $\int e^{i\tau\varphi(q,\alpha)} a_\tau(q,\alpha) d\alpha$ est approximée par

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\tau^{\mu - p/2}}{|\det\, H_j|^{1/2}} a_\tau(q,\alpha_j) e^{i\left(\tau\varphi(q,\alpha_j) + \frac{\pi\sigma}{4}\right)}$$

où H_j est le hessien de φ_q en α_j et σ sa signature. Lorsque des points critiques sont dégénérés (*i.e.* sur la caustique) certains des $\det H_j$ s'annulent et cette approximation diverge. Mais l'expression intégrale reste valable.

La méthode de la phase stationnaire – aussi dite WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) – est donc en fait typiquement morphodynamique. Elle consiste à introduire des paramètres internes supplémentaires α pour la phase spatiale φ, à considérer les coordonnées q comme des paramètres de contrôle et à utiliser l'application $\sigma : V_\varphi \to T^*M$ définie plus haut pour associer à cette phase une variété lagrangienne. D'après un théorème d'Hörmander, on peut ainsi représenter localement *toute* solution lagrangienne et donc toute caustique est identifiable à une catastrophe. Les CE de codimension ≤ 3 (pli, cusp, queue d'aronde, ombilic ellipitique et ombilic parabolique) classifient donc les singularités structurellement stables des caustiques naturelles.

Soit alors Λ une solution lagrangienne globale de projection $\pi(\Lambda)$, de lieu critique Σ et de caustique (de contour apparent) $C = \pi(\Sigma)$

1. Si $q \notin \pi(\Lambda)$, les intégrales oscillantes sont à décroissance rapide en τ. $M - \pi(\Lambda)$ est la *zone d'ombre*.

2. Si $q \in \pi(\Lambda) - C$, les points critiques de $\varphi_q(\alpha)$ sont non dégénérés. Les intégrales oscillantes décroissent comme $\left(\dfrac{1}{\tau}\right)^{p/2}$ et, étant donné le facteur de normalisation $\left(\dfrac{\tau}{2\pi}\right)^{p/2}$, on peut éliminer α et représenter localement Λ par une phase purement spatiale. $\pi(\Lambda) - C$ est la *zone de lumière*.

3. Si $q \in C$ et si α est un point de Σ au-dessus de q (*i.e.* un point critique dégénéré de $\varphi_q(\alpha)$) alors l'intégrale oscillante $I(q,\tau)$ décroît comme $\left(\dfrac{1}{\tau}\right)^{p/2-\beta}$ où β est le degré de la singularité (α, q). Si Λ est structurellement stable, le calcul de $I(q,\tau)$ se ramène à celui d'une intégrale oscillante de type $J(y,\alpha) = \int e^{i\tau\psi(y,\alpha)} f(\alpha) d(\alpha)$ où $\psi(y,\alpha)$ est un déploiement universel de la singularité (α, q). On obtient ainsi des *catastrophes de diffraction standard.*[10]

Dans le cas, le plus simple, celui d'une singularité pli (singularité de codimension 1), on retrouve ainsi l'intégrale oscillante $J = \int e^{i\tau(\alpha^3/3 + y\alpha)} d\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$: corang 1) introduite dès 1838 par Airy pour exprimer l'intensité lumineuse au voisinage d'une caustique (*cf.* Fig. 2). Dans le cas d'une singularité cusp, on retrouve l'intégrale oscillante $J = \int e^{i\tau(\alpha^4/4 + y_1\alpha^2 + y_2\alpha)} d\alpha$ étudiée par Pearcey (*cf.* Fig. 3). Dans le cas de l'ombilic elliptique, les travaux de Michael Berry manifestent un accord tout aussi spectaculaire entre la théorie et l'expérience (*cf.* Fig. 4).

Notons pour conclure l'existence de *lois d'échelle* $I(q) = \tau^\beta I(\tau^\sigma q)$ provenant de la possibilité d'éliminer τ des intégrales oscillantes grâce à la quasi-homogénéité en α des déploiements universels de basse codimension. Dans le cas du pli, on aura par exemple à

[10] Les développements asymptotiques ne sont plus en τ^μ mais en $\tau^\mu (\mathrm{Log}\tau)^\nu$.

Figure 2: Franges de diffraction d'Airy au voisinage d'une catastrophe pli. (Photo de M. Berry).

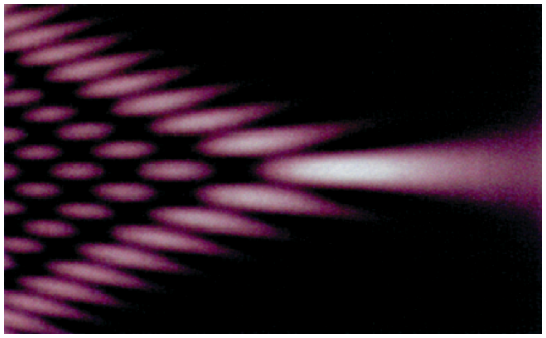


Figure 3: Franges de diffraction de Pearcey au voisinage d'une catastrophe cusp. (Photo de M. Berry).

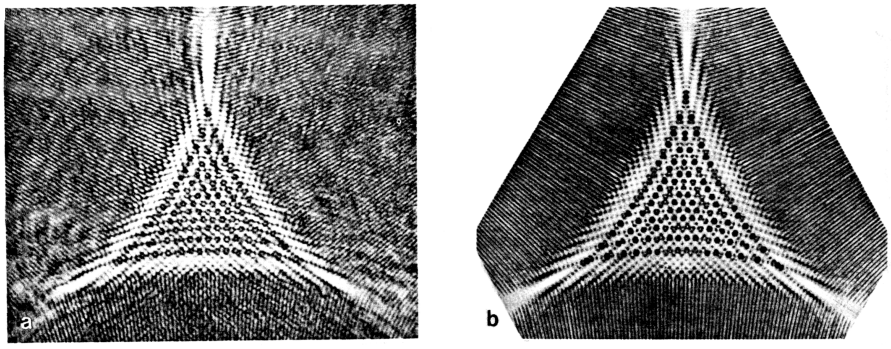


Figure 4: Franges de diffraction au voisinage d'un ombilic elliptique. On notera l'adéquation entre la théorie et l'expérience. (a) Configuration observée. (b) Configuration calculée par intégrales oscillantes à partir du déploiement universel de l'ombilic. D'après Nye [131]. (Photos M. Berry).

comparer

$$J(y') = \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{1/2} \int e^{i\tau(\alpha'^3/3+y'\alpha')} d\alpha' \text{ à } \widetilde{J}(y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \int e^{i(\alpha^3/3+y\alpha)} d\alpha.$$

En posant $\tau\alpha'^3 = \alpha^3$, *i.e.* $\alpha = \tau^{1/3}\alpha'$, on obtient $J(y') = \tau^{1/6}\widetilde{J}(\tau^{2/3}y')$, c'est-à-dire une expression de la forme $J(y') = \tau^{\beta}\widetilde{J}(\tau^{\sigma}y')$. L'index β, dit index d'Arnold, mesure la divergence de $|J|$ au centre organisateur $y = 0$ lorsque $\tau \to \infty$. Quant à l'index σ, dit index des franges, il mesure l'espacement des franges de la catastrophe de diffraction dans la direction de contrôle y.

Remarque. – On sait que, dans sa formulation hamiltonienne, la mécanique classique est une optique généralisée où l'action joue le rôle de longueur du chemin optique, le principe de moindre action celui du principe de Fermat, l'équation de Hamilton-Jacobi celui du principe de Huyghens, les trajectoires celui des rayons et l'impulsion celui de la vitesse normale des fronts d'ondes.[11] "L'optique ondulatoire" associée est la mécanique quantique et l'on peut donc s'attendre à ce que les résultats sur les caustiques aient des applications importantes en mécanique quantique. La méthode WKB de la phase stationnaire et des développements asymptotiques en $1/\hbar$ lorsque la constante de Planck $\hbar \to 0$ ($1/\hbar$ jouant le rôle de τ) s'appelle dans ce cas la méthode des approximations *semi-classiques*. Elle consiste à appliquer ce que nous avons vu plus haut à des espaces de configuration qui sont des espaces *fonctionnels* de chemins et à calculer des intégrales oscillantes – dites intégrales de chemin de Feynman – $K = \int e^{iS(\gamma)/\hbar} d\gamma$ où $d\gamma$ est une différentielle de chemin (intégration dans l'espace fonctionnel des chemins) et S une fonctionnelle d'action définie sur les chemins γ. Le principe de la phase stationnaire dit ici que, dans la limite semi-classique $\hbar \to 0$, l'intégrale de Feynman K se concentre sur les chemins classiques γ_c qui sont solutions du principe variationnel classique $\delta S(\gamma) = 0$ (équations d'Euler-Lagrange). Comme pour le cas des caustiques, lorsqu'un chemin classique γ_c est un point critique non dégénéré de l'action S on peut calculer facilement K à partir de ce principe. Lorsque γ_c est un point critique dégénéré, il faut introduire les déploiements universels des CE. On pourra se référer à Dangelmayr-Güttinger-Veit [52] et, en ce qui concerne les difficultés dues au passage à la dimension infinie, à Magnus-Poston [118] et Dangelmayr [51].

Dans un autre ordre d'idées, Michael Berry a montré comment la théorie des caustiques peut s'appliquer à l'étude de la fonction de Wigner (*cf.* Berry [19] et [20]).[12]

1.6 La physique des infrastructures morphologiques

En tant que théorie des singularités stables des variétés lagrangiennes, la base mathématique de la morphodynamique peut être considérée comme une partie intégrante de la théorie de Hamilton-Jacobi. Elle en possède l'*universalité.*[13] Par l'intermédiaire des catastrophes de diffraction que sont les intégrales oscillantes associées aux déploiements universels de singularités, elle est également universelle pour les phénomènes propagatifs.

L'exemple des caustiques manifeste déjà de façon paradigmatique divers aspects des approches morphodynamiques :

1. La différence entre *deux* niveaux d'observation : ici entre un niveau géométrique "grossier" et un niveau ondulatoire "fin" qui vient s'y greffer : adjonction d'une "chair" de diffractions à un "squelette" hamiltonien.

2. La description en termes de CE du niveau "grossier". Celui-ci est phénoménologiquement dominant. C'est celui des infrastructures morphologiques des phénomènes.

[11] *Cf.* Arnold [10], p. 250.

[12] La fonction de Weyl permet d'associer à toute observable quantique (et donc à un *opérateur*) fonction des opérateurs Q et P de position et de moment une *fonction* $A(q,p)$ des variables classiques de position et de moment. La fonction de Wigner d'un état quantique $|\psi>$ est la fonction de Weyl de l'opérateur $(|\psi><\psi|)/\hbar$ qui est le projecteur sur l'espace engendré par $|\psi>$.

[13] *Cf.* Thom [180] .

3. L'insertion de cette description dans des formalismes fondamentaux régissant le niveau "fin" (ici, les développements asymptotiques et les intégrales oscillantes issus des équations de Maxwell). Cette insertion permet de contrôler mathématiquement le changement de niveau (*cf.* ici, le principe de la phase stationnaire).

4. La transformation du rapport entre les deux niveaux (et donc entre phénoménologie émergente et physique sous-jacente) en problèmes mathématiques précis et spécifiques.

2 Transitions de phases et ruptures de symétrie

Après l'optique, nous allons aborder, avec l'étude des transitions de phases, la thermodynamique et la mécanique statistique. Dans cette section, nous resterons au niveau "grossier", celui des théories du champ moyen (TE). Dans les prochaines sections nous indiquerons les méthodes permettant de passer au niveau "fin"(TG).

Avec les transitions de phases en thermodynamique, la morphodynamique fait plus que rencontrer un champ d'applications privilégié. Comme avec les caustiques, comme avec les phénomènes de flambage élastique (*cf.* plus bas section 6.1), elle rencontre un domaine de réalité où ses mathématiques se trouvent réalisées de façon paradigmatique. Pour une introduction plus détaillée à la mécanique statistique et aux phénomènes critiques, on pourra consulter les classiques Ruelle [152] et Landau-Lifschitz [110], ainsi que Stanley [170], CPPS [50] et surtout la remarquable série PTCP [147] éditée par C. Domb et M.S. Green.

2.1 La surface des états et ses singularités

Les transitions de phases sont des cas prototypiques de phénomènes critiques puiqu'ils concernent les changements brusques d'états "internes" macroscopiques d'un système thermodynamique (phases) sous la variation de paramètres "externes" de contrôle comme la température, la pression, le champ magnétique, etc. La difficulté principale que rencontre leur explication est celle du changement de niveau faisant passer de la physique microscopique à la phénoménologie macroscopique.

Considérons un fluide F (de l'eau par exemple). L'état macroscopique de ce fluide, supposé être en équilibre thermodynamique, est décrit par trois paramètres d'état : la température T (variable intensive conjuguée de la variable extensive S qu'est l'entropie), la pression P (variable intensive) et le volume V (variable extensive conjuguée de P). A l'équilibre, ces trois paramètres sont liés par une *équation d'état* $f(P,V,T)=0$. Cela signifie que les points (P,V,T) de $\mathbb{R}^3$ qui représentent un état thermodynamique de F s'accumulent expérimentalement sur la surface des états Σ d'équation $f=0$, surface qui est caractéristique du système thermodynamique F et dont la géométrie en résume la phénoménologie macroscopique.

Dans le plan des variables intensives $W=(T,P)$ considéré comme espace externe (le volume étant la variable interne), les points catastrophiques de transitions de phases constituent un fermé stratifié de codimension 1, communément appelé *diagramme de phases* (*cf.* Fig. 5). Cet ensemble singulier – dit aussi "catastrophique" – K partitionne l'espace W en domaines correspondant aux diverses phases que peut présenter le système F. Il "externalise" donc les conflits entre états internes. Il est constitué de lignes de *coexistence* de deux phases (strates de conflit de codimension 1) aboutissant à des points isolés (strates de codimension 2) correspondant à des valeurs déterminées de T, P et V, et qui, dans la figure 5, sont de deux types :

1. un point triple τ de coexistence de trois phases,

2. un point γ – dit point critique – de coalescence de deux phases.[14]

[14]Il faut faire attention à la spécificité des lexiques. Dans la théorie mathématique des applications différentiables, un point critique est un point singulier. Les minima non dégénérés d'une fonction sont par exemple des points critiques. Dans la théorie thermodynamique des transitions de phases, un point critique est un point de coalescence de deux phases. Si les phases sont les minima d'un potentiel thermodynamique, un point critique fusionne au moins deux minima en un minimum dégénéré.

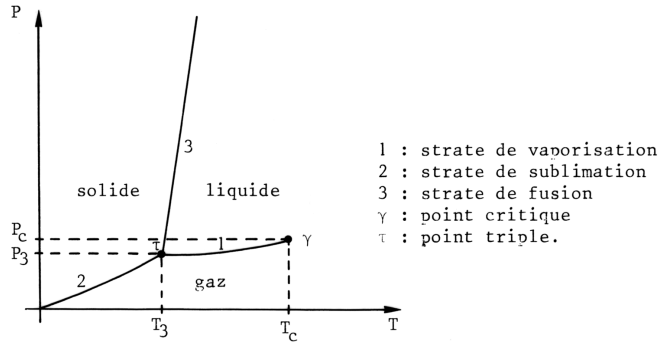


Figure 5: Un diagramme de phases typique.

Si l'on appelle transitions d'ordre n, les transitions dues à la coalescence de n phases, on voit que sur $K - \{\gamma\}$ les transitions sont du 1er ordre et qu'en γ la transition est du 2ème ordre.

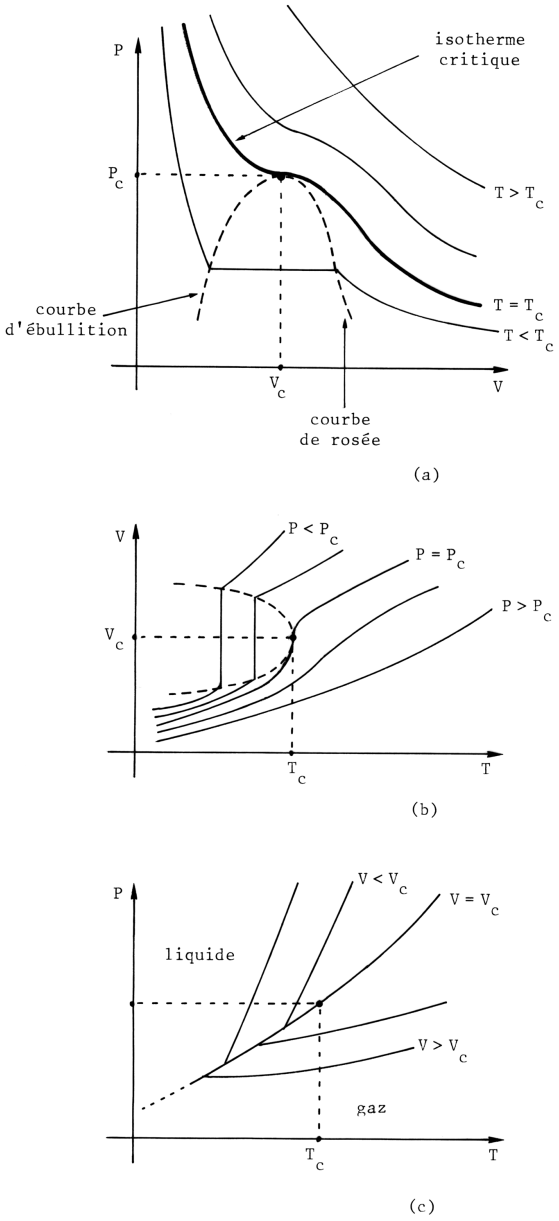
Phénoménologiquement (qualitativement) parlant, la géométrie des diagrammes de phases est (localement) celle des catastrophes élémentaires CE. Considérons par exemple les descriptions classiques des isothermes ($T = \text{cste}$), des isobares ($P = \text{cste}$) et des isochores ($V = \text{cste}$) au voisinage du point critique (T_c, P_c, V_c) (*cf.* Fig. 6). Si on ajoute les états métastables correspondant soit à un retard à la vaporisation (liquides sous-pressés), soit à un retard à la condensation (vapeurs sursaturées), soit à une pression négative (liquides tirés), retards limités par la courbe spinodale où les fluctuations sont de l'ordre de la hauteur du "seuil" séparant les phases, on voit que, au voisinage du point critique γ, la surface des états Σ est qualitativement une surface fronce (Fig. 7) et que donc la catastrophe déployant γ est une catastrophe cusp.

Ce lien avec les catastrophes vient du fait que l'explication classique des transitions de phases utilise une fonction d'état $F(T, P, V)$ (par exemple l'énergie libre, *i.e.* le potentiel thermodynamique de Gibbs, ou l'enthalpie libre) dont les minima représentent les phases en vertu d'un principe variationnel.[15] L'ensemble singulier K au voisinage de $\pi(\gamma)$ (*cf.* Fig. 7) est alors donné par la convention de Maxwell, convention stipulant que les isothermes cubiques doivent être remplacées par des isothermes à palier (*cf.* Figs. 6 et 8) dont le palier est défini par l'égalité des aires A et B de la figure 9 (ce qui revient à remplacer l'énergie libre F à deux minima par sa convexifiée).

Si l'on admet cette explication classique (très sommaire) et si le système ne dépend naturellement que des 2 contrôles T et P, alors le théorème de classification des CE implique que tous les points critiques soient *qualitativement* (différentiablement) équivalents, en l'occurrence à des fronces de la surface caractéristique Σ. En fait, la thermodynamique classique est allée plus loin et a établi une équivalence *quantitative* des points critiques. C'est la dite "loi des états correspondants" : à condition de mesurer les paramètres P, V, T avec un jeu d'unités propres à chaque corps, les équations d'états des divers fluides deviennent toutes identiques à une équation *universelle*. Une telle équation, mais approchée, correspondant à la théorie classique des phénomènes coopératifs, a été obtenue à partir de l'équation des gaz parfaits en introduisant un volume minimal b du gaz et en perturbant la pression P par un terme a/V^2 moyennant les interactions moléculaires. C'est la célèbre équation de Van der Waals $\left(P + \dfrac{a}{V^2}\right)(V - b) = rT$. Nous savons *a priori* qu'elle doit être équivalente au modèle standard du cusp $F = x^4/4 + ux^2/2 + vx$. Cela se vérifie facilement.[16]

[15] *Cf.* Komorowski [109].

[16] *Cf.* Fowler [76], Poston-Stewart [145] section 14.1. et Keller et al. [105].



Isothermes dits d'Andrews dans la représentation dite de Clapeyron (plan (P,V)).

Isobares.

Isochores (un isochore comprend la partie de la courbe de vaporisation jusqu'au point anguleux qui le caractérise).

Figure 6: Les isothermes, les isobares et les isochores d'un fluide.

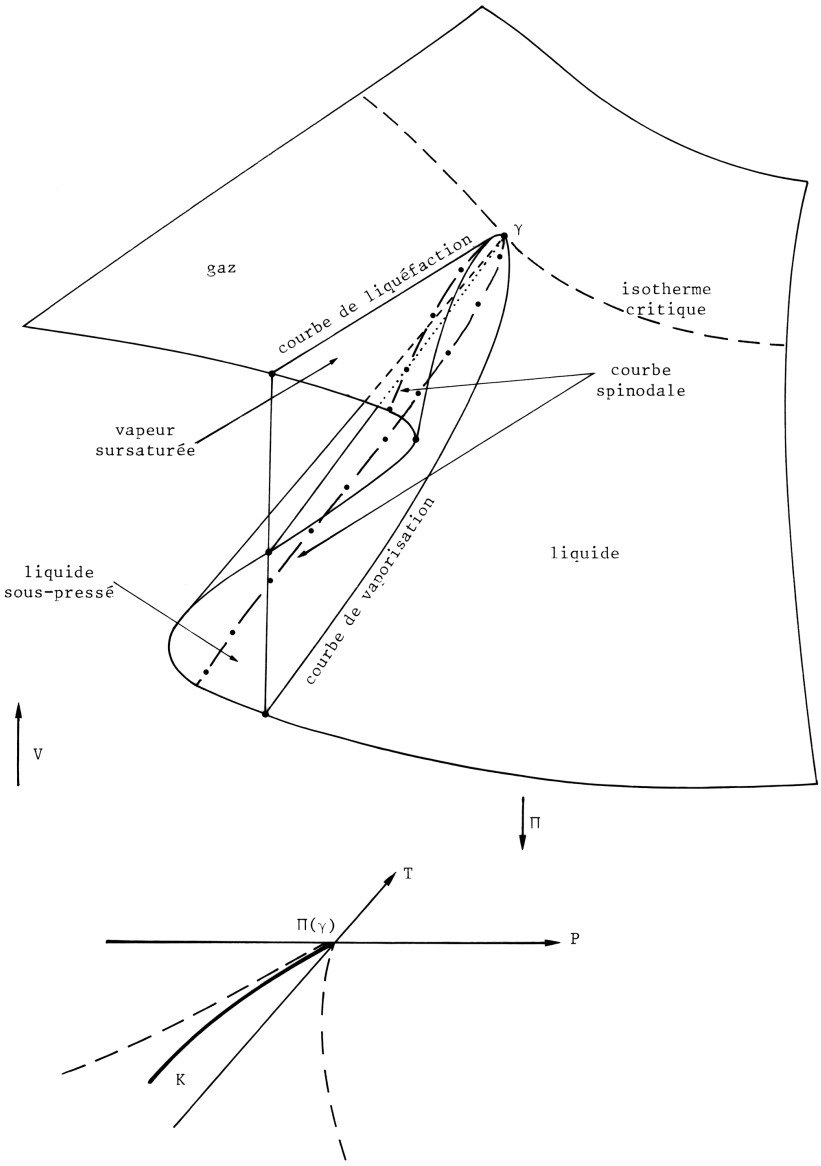


Figure 7: La surface fronce des états d'un fluide au voisinage d'un point critique. Il s'agit d'une catastrophe cusp.

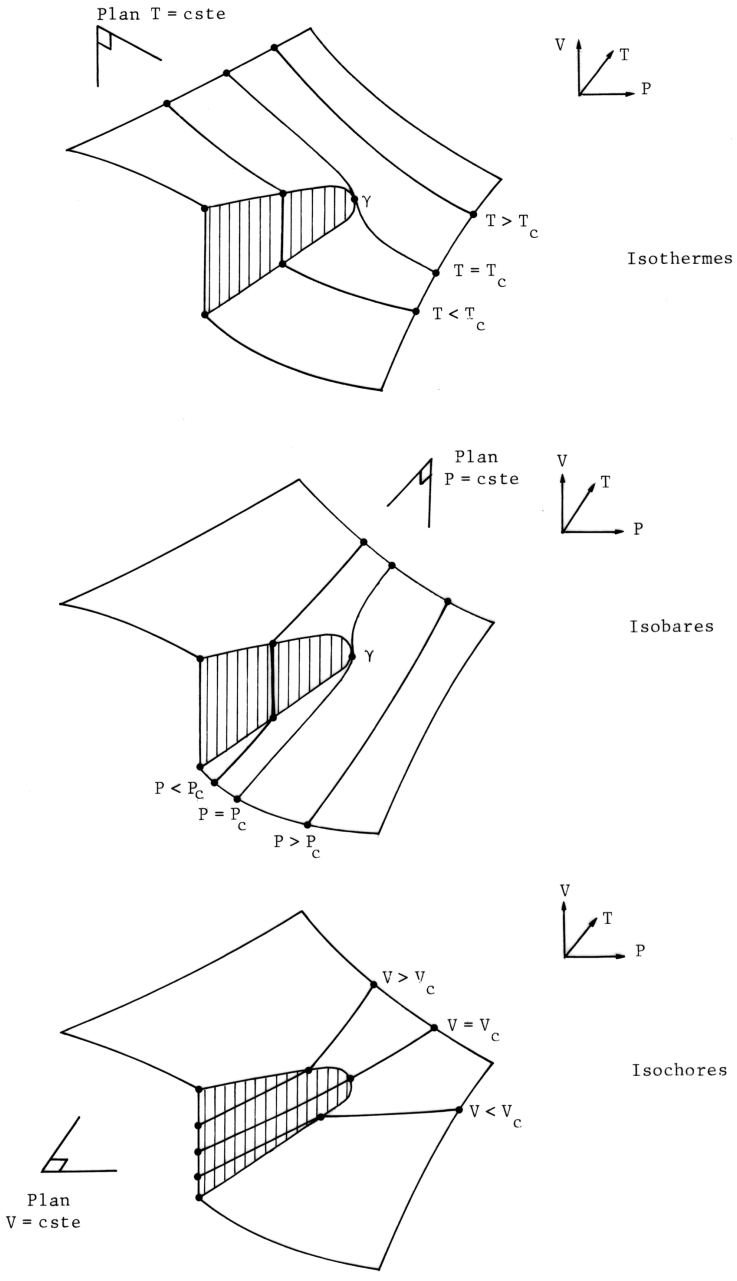


Figure 8: Les isothermes, isobares et isochores d'un fluide définis sur la surface des états (surface fronce d'une catastrophe cusp).

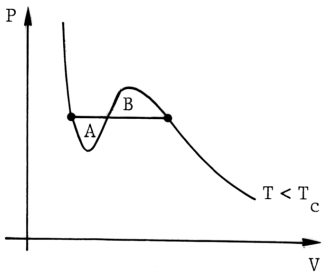


Figure 9: La convention de Maxwell remplaçant une isotherme critique par une isotherme à palier.

Le point critique est donné par $P_c = \frac{a}{27b^2}$, $V_c = 3b$ et $T_c = \frac{8a}{27br}$. En utilisant les variables réduites $p = \frac{P - P_c}{P_c}$, $v = \frac{V - V_c}{V_c}$, $t = \frac{T - T_c}{T_c}$ et en prenant pour variable interne non plus le volume mais $x = \frac{V_c - V}{V} = -\frac{v}{1+v}$, l'équation de Van der Walls devient $x^3 + ux + v = 0$ avec $u = \frac{8t + p}{3}$ et $v = \frac{8t - 2p}{3}$.

2.2 La théorie "élémentaire" de Landau

En ce qui concerne maintenant l'explication physique (et non plus la phénoménologie) des transitions de phases, l'approche morphodynamique la plus simple correspond à la *théorie de Landau*, théorie que nous allons très brièvement résumer.[17]

La théorie des transitions de phases ne s'est véritablement développée comme doctrine générale des phénomènes critiques qu'après la découverte par Curie des transitions de phases magnétiques. On sait qu'au delà d'une température critique T_c caractéristique (dite point de Curie), un corps ferromagnétique devient paramagnétique. Il y a bien là un phénomène de transition entre "phases" magnétiques. Mais contrairement à ce qui se passe dans la transition du premier ordre liquide/gaz, il n'existe pas de coexistence des deux phases, et la transition est ici *continue*. Du deuxième ordre, elle est due à une compétition entre d'un côté un phénomène coopératif tendant à faire aligner les moments magnétiques atomiques et d'un autre côté l'agitation thermique des atomes. Il s'agit là d'un phénomène spontané de *rupture de symétrie*, de passage d'une phase désordonnée de groupe de symétrie G à une phase ordonnée de groupe de symétrie G' un sous-groupe de G. Il en va de même pour les transitions dans les alliages métalliques (hypothèse de Bragg-Williams) ou pour les transitions fluide/superfluide, conducteur/supraconducteur, liquide/nématique/smectique, métal/non métal, etc. L'idée centrale de Landau est que ces ruptures de symétrie peuvent se décrire à partir d'un *paramètre d'ordre* η qui est une variable extensive nulle dans la phase désordonnée et non nulle dans la phase ordonnée. Ce paramètre d'ordre pouvant être un scalaire, un vecteur, une phase, un tenseur, etc., la théorie de la représentation des groupes devient un outil essentiel. Plus précisément, soit ρ la densité (scalaire, vectorielle, tensorielle, etc.) attachée au problème considéré et soit G la symétrie de la phase la plus symétrique (la plus désordonnée). La densité ρ étant G-invariante dans la phase la plus symétrique, elle appartient à une certaine représentation linéaire E de G. La décomposition de celle-ci en représentations irréductibles conduit à écrire $\rho = \rho_0 + \rho_1$ à partir de $E = E_0 \oplus E_1$ où E_0 est la représentation identique de G. La densité ρ_0 est G-invariante et, au point de transition, on a $\rho_1 = 0$. Si $\rho_1 = \sum c_i \varphi_i$ où (φ_i) est une base de E_1, à la traversée du point de transition l'une des coordonnées c_i devient différente de 0 (rupture de symétrie). Landau

[17] *Cf.* Landau - Lifschitz [110].

pose $\eta^2 = \sum c_i^2$.

Soit alors H la variable intensive conjuguée de η (par exemple le champ magnétique extérieur). Le potentiel thermodynamique G (par exemple l'énergie libre F)[18] dont les minima représentent les phases, dépend naturellement des deux contrôles T et H. On a $dG = VdP - SdT - \eta dH$ (où S, variable extensive conjuguée de T, est l'entropie), et donc $\eta = -\left(\frac{\partial G}{\partial H}\right)_T$ et $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_H$.[19] La chaleur spécifique à H constant, c_H, est donnée par $dQ = c_H dT$. Mais comme $dQ = TdS$, on a $c_H = T\left(\frac{\partial S}{dT}\right)_H = -T\left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\right)_H$. De même, la susceptibilité isotherme associée à η est donnée par $\chi_T = \left(\frac{\partial \eta}{\partial H}\right)_T = -\left(\frac{\partial^2 G}{\partial H^2}\right)_T$. Ces deux quantités sont en général *discontinues* au point critique. Dans le cas d'une transition du premier ordre, il s'agit d'une catastrophe de conflit (convention de Maxwell), le point représentatif $V(T, P)$ de la phase sautant d'un minimum de F à l'autre. Dans le cas d'une transition du deuxième ordre, il en va tout autrement. En effet, la situation standard correspond à $H = 0$ (absence de champ externe) et le système ne dépend plus que de la seule variable T. L'axe des T dans l'espace de contrôle $W = (T, H)$ passe par le point cusp et à la traversée de T_c le minimum de l'énergie libre F devient un maximum (Fig. 10(a)), ce qui implique bien la continuité de η. Pour $H \neq 0$, η ne peut s'annuler puisqu'il y a toujours rupture de symétrie (quelle que soit T) et il n'y a pas de transition possible. On obtient de cette manière la situation décrite sur la fronce de la figure 10(b) ainsi que la variation caractéristique de η décrite à la figure 10(c) montrant que la susceptibilité χ_T diverge pour $T = T_c$ (puisque la tangente en $T = T_c$ est verticale). Dans le lexique des catastrophes on dit que T est le "facteur de splitting" et que H est le "facteur normal".

L'approximation de Landau est l'analogue de celle de l'optique géométrique. Elle représente la synthèse des théories du champ moléculaire de type "théorie de Weiss". Supposons que le paramètre d'ordre soit une densité $\eta(x)$ dépendant du point x du substrat W considéré. En tant que système thermodynamique, ce substrat est décrit par la *fonction de partition* $Z = \int e^{-\beta F(\eta)} d\eta$ où $\beta = \frac{1}{kT}$ (k constante de Boltzmann), où F est l'énergie libre $F(\eta) = \int_W \varphi(\eta(x))dx$ (intégrale sur W d'une densité φ dépendant de $\eta(x)$) et où l'intégrale sur η est une intégrale *fonctionnelle* sur l'espace des $\eta(x)$ (*cf.* tout traité de thermodynamique, par exemple Grandy [81]). Lorsque le volume V de W tend vers l'infini (ce que l'on appelle la "limite thermodynamique"), les minima (η_i) de $F(\eta)$ – dits "modes" de η – correspondent à des "pics" de plus en plus "aigus" de $e^{-\beta F(\eta)}$ et l'intégrale $Z = \int e^{-\beta F(\eta)} d\eta$ se concentre donc autour de ceux-ci.

L'approximation consiste alors à *négliger les fluctuations* autour du point critique et à faire l'hypothèse que ces "pics" représentant les états macroscopiques de W sont assez "aigus" pour que l'on puisse "discrétiser" Z et poser $Z = \sum_i e^{-\beta F(\eta_i)}$, les η_i étant les densités minimisant F. Elle revient donc à faire l'analyse de la fonctionnelle F en utilisant la méthode de la phase stationnaire pour le calcul des intégrales oscillantes.[20]

En plus de l'hypothèse évidente que F est l'intégrale sur W d'une densité d'énergie libre φ, $F(\eta) = \int_W \varphi(\eta(x))dx$, Landau suppose également :

1. que φ ne dépend que des dérivées premières et secondes de η; que les dérivées premières interviennent de façon quadratique à travers $(\nabla\eta)^2$ (contrainte d'isotropie); et que les dérivées secondes interviennent linéairement à travers $\Delta\eta$ (autre contrainte d'isotropie), ce qui implique d'après le théorème de Stokes que $\varphi(\eta)$ ne dépend des dérivées de η qu'à travers $(\nabla\eta)^2$;

[18] Nous gardons la notation traditionnelle. Ne pas confondre G avec le groupe de symétrie introduit précédemment.

[19] Dans les notations traditionnelles de la thermodynamique, une expression comme $\left(\frac{\partial G}{\partial H}\right)_T$ désigne la dérivée partielle de la fonction G par rapport à H avec T constant.

[20] *Cf.* Komorowski [109], Grandy [81], O'Shea [132], Schulman-Revzen [161], Thom [179], [181].

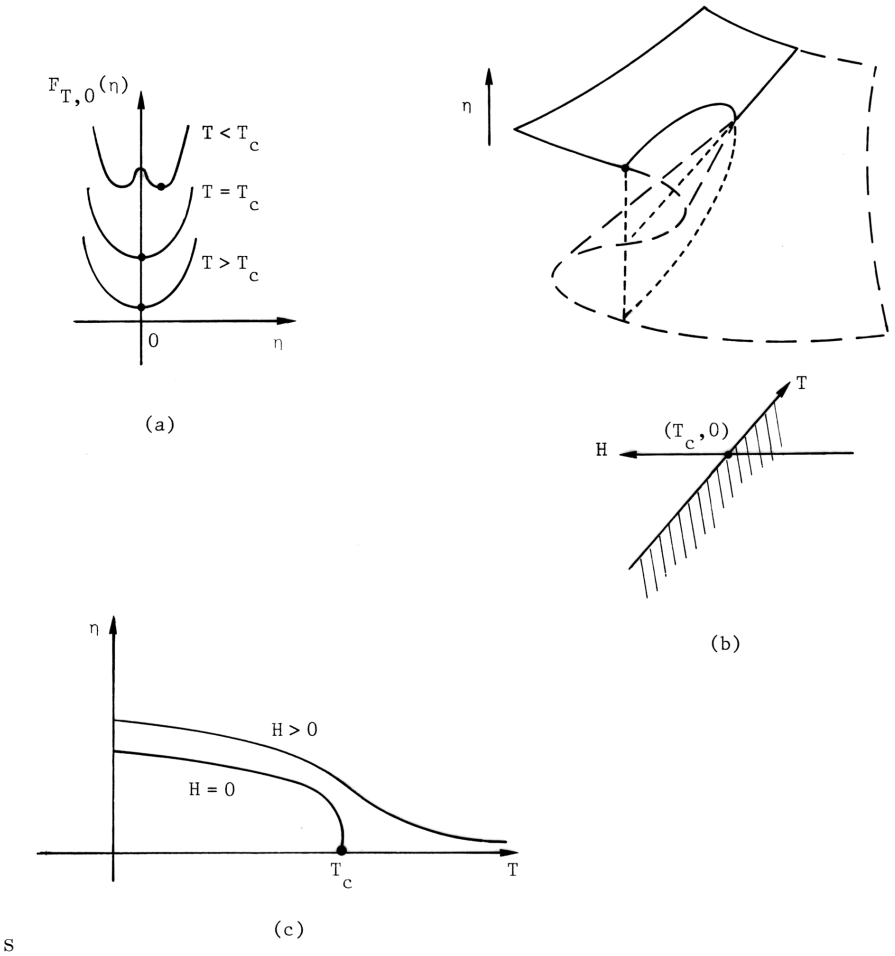


Figure 10: Géométrie d'une transition du 2ème ordre de paramètre d'ordre η.

2. que φ dépend de H à travers le terme linéaire $-H\eta$.

Si donc $H = 0$, la minimisation de $F(\eta) = \int_W \varphi(\eta(x))dx$ implique $\nabla\eta = 0$, *i.e.* $\eta =$ cste, ce qui nous ramène à la théorie *élémentaire* TE. On trouve dans les textes classiques de Landau une admirable anticipation (*cf.* Landau-Lifschitz [110]) de certains développements futurs. Landau suppose – en insistant, bien avant l'apparition des méthodes du groupe de renormalisation, sur le fait qu'une telle hypothèse de régularité est très loin d'être évidente – que l'on peut développer F en série de Taylor au voisinage de $\eta = 0$ et écrire $F(\eta) = F_0 + \alpha\eta + A\eta^2 + B\eta^3 + C\eta^4 + \ldots$, série où les coefficients sont fonctions de P et de T. Il fait alors le raisonnement suivant :

1. Pour que les états $\eta = 0$ et $\eta \neq 0$ puissent avoir des symétries différentes, il faut $\alpha \equiv 0$.

2. Pour que $\eta = 0$ soit un minimum pour $T > T_c$, il faut $A > 0$. Pour que $\eta \neq 0$ soit un minimum pour $T < T_c$, il faut au contraire $A < 0$. On a donc $A = 0$ au point de transition $T = T_c$. La forme la plus simple est $A = a(T - T_c)$, $a > 0$.

3. Pour que le point de transition soit stable (*i.e.* que $\eta = 0$ soit un minimum de $F_{T_c}(\eta)$), il faut $B = 0$ et $C > 0$ pour $T = T_c$.

C'est dire très exactement que le point de transition est une singularité en η^4 et donc, puisque η^4 est "déterminée" à l'ordre 4 (résultat que Landau ne connaissait pas), qu'elle est équivalente à η^4 par changement différentiable des coordonnées x. On voit que l'approximation de Landau consiste donc essentiellement à supposer la validité d'un potentiel suffisamment différentiable et à lui appliquer la profonde réinterprétation de la technique des développements de Taylor proposée par la théorie des singularités. C'est pourquoi, plus qu'une application de la morphodynamique, elle en est une réalisation dans un domaine physique particulier.

2.3 Catastrophe papillon et points tricritiques

Le coefficient $B(T, P)$ du terme η^3 peut être identiquement nul pour des raisons de symétrie. Alors, dans le plan (T, H), les points critiques sont génériquement isolés (argument de transversalité) et engendrent donc des lignes Γ de transitions du deuxième ordre dans le plan (T, P). Mais une telle courbe Γ peut aboutir à une singularité de F de codimension > 2 pour laquelle l'analyse doit être raffinée et complexifiée. Il s'agit de ce que l'on appelle les points *tricritiques* (et, plus généralement, multicritiques). Au voisinage d'un tel point où $F(\eta)$ est en η^6 (et non en η^4), c'est la catastrophe papillon qui commande le processus et l'on doit donc observer également une ligne de points triples, ainsi que, outre la transition entre la phase ordonnée et la phase désordonnée, une zone de *coexistence* des deux phases. Pour un traitement "à la Landau", on pourra consulter Boccara [27] section 4.1. et Schulman [160].

Alors que pour les points critiques, le recours à la théorie des singularités et des CE ne fait que reformuler des résultats déjà bien connus, elle peut en revanche apporter quelques éclaircissements sur la théorie des points tricritiques. Dans la littérature thermodynamique classique, on appelle point tricritique un point où une transition du deuxième ordre devient une transition du premier ordre. Dans l'approximation de Landau (où l'on suppose F paire), $F(T, P, H, \eta) = F_0 + A\eta^2 + C\eta^4 + E\eta^6 + \ldots$, ce sont les points (T_0, P_0, H_0) où $A = C = 0$ (et $E > 0$). Le potentiel F envoie donc un voisinage du point (T_0, P_0, H_0) transversalement sur le déploiement universel quadridimensionnel (W, K) de η^6.

Mais il existe dans la littérature une grande ambiguité à ce sujet car on ne tient pas compte du fait qu'une singularité possède une dimension d'espace de contrôle qui lui est *canoniquement* associée (sa codimension). Landau ne considère que le plan (T, P). D'autres auteurs (Boccara par exemple) considèrent le plan (T, P) et des plans (T, Y) où Y est un champ externe différent de H. D'autres auteurs encore (Toulouse par exemple) considèrent quant à eux l'espace (T, H, h) où h est un champ externe. Mais l'espace de contrôle *naturel* d'un point tricritique est un espace quadridimensionnel (T, P, H, Y) et c'est par conséquent

dans cet espace naturel qu'il faut interpréter ce que les physiciens ont observé, à savoir qu'une ligne de transitions du deuxième ordre donne naissance à une ligne de transitions du premier ordre et à deux lignes de points critiques. Considérons une section standard du papillon $\eta^6/6 + t\eta^4/4 + u\eta^3/3 + v\eta^2/2 + w\eta$ (*cf.* Fig. 11(a)) associée à la géométrie standard des figures 11(d) et 11(e) d'après Keller [105]. Les points cusp L_2 et L_3 sont des points d'arrêt de strates de conflit et L_1 est un point triple. Or lorsque Y varie, on obtient les sections suivantes du diagramme de phases dans le plan (H, T) (*cf.* Fig.11(b) d'après Toulouse -Pfeuty [190]). Cela signifie :

1. que T reste, comme dans la catastrophe cusp, le "splitting factor",
2. que le coefficient du terme cubique η^3 commandant la distorsion de la symétrie ("gliding factor") est nul, et
3. que le champ externe Y est lié au coefficient du terme en η^4 ("butterfly factor").

Toutefois, dans le déploiement universel standard de $\eta^6/6 + t\eta^4/4 + u\eta^3/3 + v\eta^2/2 + w\eta$, l'équation de la strate du point triple se transformant en point cusp est donnée dans le plan (t, v) par l'équation $v = 0$ pour $t > 0$ et $v = t^{2/4}$ pour $t < 0$ (*cf.* Fig.11(c)). L'écart que ce diagramme manifeste avec celui de la figure 11(b) montre que le diagramme de phases réel est une transformation de l'ensemble catastrophique du papillon. Cette transformation fait partie intégrante de la physique du phénomène. Elle correspond aux deux champs d'échelle (différents des champs physiques T et Y) qui s'introduisent dans la description du point tricritique par la méthode du groupe de renormalisation que nous introduirons dans la section suivante.

Remarquons également que, en général, le terme cubique $u\eta^3/3$ n'apparaît pas dans la littérature et ce, comme chez Landau, pour des raisons *a priori* de symétrie. Or, insistons-y avec Schulman, il existe une dimension naturelle et canonique du contrôle, la codimension. Pour le cusp η^4 le terme cubique en η^3 est éliminable du déploiement universel. Mais pour le papillon η^6 c'est le terme en η^5 – et non celui en η^3 – qui est éliminable. On doit donc faire l'hypothèse que le terme en η^3 correspond à un nouveau champ externe qui n'a pas encore été repéré et exploité.[21]

La situation devient encore plus complexe dans l'analyse des points *multicritiques* où p strates de transitions du premier ordre rencontrent q strates de transitions du deuxième ordre. On obtient en effet des paramêtres d'ordre à plusieurs composantes et des déploiements universels partiels auxquels sont imposées des contraintes de symétrie. Les transitions dans les systèmes ferro-antiferromagnétiques, ferromagnétiques-piezzoélectriques ou cristallins-superfluides en fournissent des exemples. Or il suffit de songer, d'un côté, au fait que, eu égard à sa complexité, la géométrie du double cusp $\eta_1^4 + \eta_2^4$ n'est pas encore complètement connue et, d'un autre côté, à la difficulté de la théorie des invariants, pour se convaincre qu'il y a là un domaine immense à explorer. Mais ce que nous avons brièvement esquissé suffit à montrer que, équivalente à la théorie classique de Landau, l'approche morphodynamique de la théorie des singularités rend celle-ci beaucoup plus intelligible. Elle la situe dans une méthodologie plus sûre et dans une doctrine générale des phénomènes critiques. Elle en explique la validité en rendant compte de l'universalité des configurations géométriques typiques que l'on rencontre dans les diagrammes de phases – ces universaux morphologiques n'étant que les ensembles catastrophiques stratifiés des catastrophes élémentaires. Elle permet également de comprendre que le "couplage" de deux (ou plusieurs) paramètres d'ordre est d'une complexité qui était demeurée jusqu'ici insoupçonnée.

2.4 Limites de la théorie de Landau

Les limites de la théorie de Landau sont évidemment celles de son approximation même, qui consiste à négliger les fluctuations alors que celles-ci deviennent précisément *dominantes* au voisinage du point critique et qu'en ce point le potentiel thermodynamique n'est plus une

[21] *Cf.* Schulman [160].

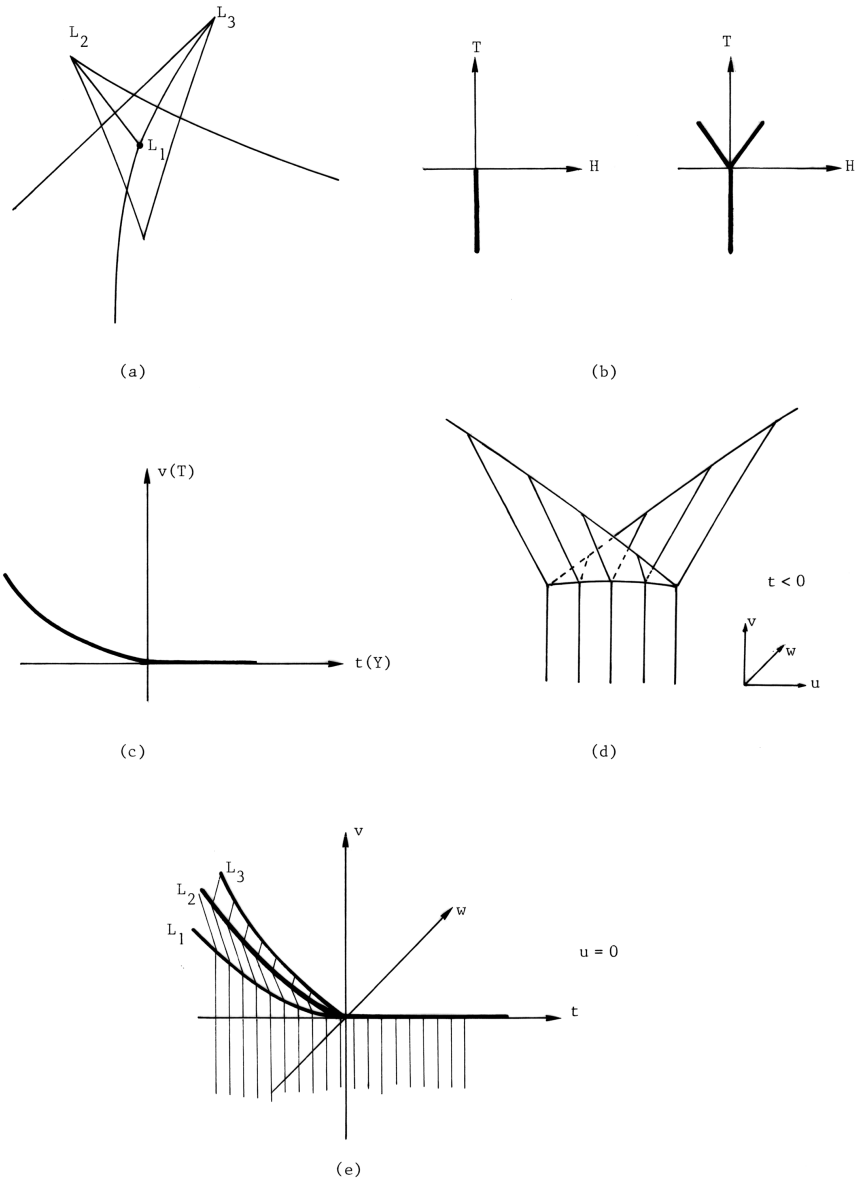


Figure 11: La géométrie d'un point tricritique explicitée par la catastrophe papillon.

fonction différentiable et ne peut donc pas être développé en série de Taylor. Dans la limite thermodynamique, les modes η_i s'accumulent et l'on ne peut plus utiliser des formalismes simples comme le modèle catastrophique qui, à strictement parler, n'est valable que pour une variable interne η de dimension finie et pour des fonctions $F(\eta)$ à un nombre fini de points critiques.

Cette inadéquation fondamentale se manifeste dans le désaccord entre les prédictions théoriques et les observations expérimentales. Si $F = F_0 + a(T - T_c)\eta^2 + C\eta^4 + \ldots$, il est facile de voir que, au point critique :

1. $\eta \sim \left(\frac{a}{2C}(T_c - T)\right)^{1/2}$ pour $T \leq T_c$ (on sait que $\eta = 0$ pour $T \geq T_c$).
2. La chaleur spécifique c_H présente un saut de $\frac{a^2 T_c}{2C}$.
3. La susceptibilité isotherme χ_T est donnée par $2a(T - T_c)\chi_T + 12C\eta^2\chi_T - 1 = 0$ et est donc égale à $\frac{1}{2a(T - T_c)}$ pour $T > T_c$ et à $\frac{1}{4a(T_c - T)}$ pour $T < T_c$. Elle diverge pour $T = T_c$ en $\frac{1}{|T - T_c|}$ (loi de Curie-Weiss).
4. Lorsque $H \neq 0$, η est équivalent à $H^{1/3}$.
5. Si Y est un champ externe supplémentaire, η qui s'annule comme $|T - T_c|^{1/2}$ à Y constant, s'annule comme $|Y - Y_c|^{1/2}$ à T constant. De même, $\chi_{T,Y}$ qui diverge comme $|T - T_c|^{-1}$ à Y constant, diverge également comme $|Y - Y_c|^{-1}$ à T constant.

Or, expérimentalement, on trouve que η ne varie pas en $|T - T_c|^{1/2}$ mais plutôt en $|T - T_c|^{1/3}$. D'autre part, la divergence de la susceptibilité χ_T indique, par exemple dans le cas des transitions magnétiques, que la réponse de l'aimantation à une trés petite fluctuation du champ magnétique interne est "infinie". Il y a là une contradiction, puisque l'approximation de Landau néglige les fluctuations. Enfin, cette approximation ne peut en rien rendre compte de la raison *microscopique* des transitions de phases. Considérons par exemple un système magnétique constitué de spins distribués sur les nœuds d'un réseau. Localement, les spins s'intercorrèlent et ont tendance à s'aligner. Il y a par conséquent toujours des zones, fluctuantes, où les spins sont parallèles. Soit ξ leur dimension moyenne. C'est une longueur caractéristique du système qui s'appelle la *longueur de corrélation*. Au point critique, ξ diverge relativement à la maille du réseau, les fluctuations deviennent *macroscopiques* et agissent sur des corrélations à longue portée. C'est cette divergence qui est la cause de celle de la susceptibilité isotherme χ_T et, pour les transitions du premier ordre liquide/gaz, de celle de la compressibilité isotherme, phénomène caractéristique dit "d'opalescence critique".

Pour comprendre et expliquer ces phénomènes, on peut dans un premier temps revenir à l'idée de Landau que le paramètre d'ordre η est en fait une densité $\eta(x)$ sur le substrat W, l'énergie libre étant donnée par la fonctionnelle de Landau-Ginzburg (*cf.* plus haut) :

$$F = \int_W \left(a(T - T_c)\eta^2(x) + C\eta^4(x) + D\|\nabla\eta(x)\|^2\right) dx \ .$$

Cette approximation permet de bien rendre compte de la divergence de la longueur de corrélation ξ (*cf.* Boccara [27] section 3.3 : Théorie d'Ornstein et Zernicke). En effet, en présence d'un champ non uniforme $H(x)$, η est solution de l'équation

$$2a(T - T_c)\eta(x) + 4C\eta^3(x) - 2D\Delta\eta(x) = H(x) \ .$$

Si l'on introduit la susceptibilité généralisée $\chi(x, y)$ donnée par la "dérivée" de η par rapport à H : $d\eta(x) = \int_W \chi(x, y) dH(y) dy$, et si l'on admet une homogénéité macroscopique du système, alors $\chi(x, y) = \chi(x - y)$ satisfait l'équation :

$$2a(T - T_c)\chi(x - y) + 12C\eta^2\chi(x - y) - 2D\Delta\chi(x - y) = \delta(x - y)$$

où δ est la distribution de Dirac. En résolvant cette équation (par exemple par la méthode des transformées de Fourier), on obtient :

$$\chi(x-y) = \frac{1}{8\pi D}\frac{e^{-\|x-y\|/\xi}}{\|x-y\|}$$

où ξ est la longueur de corrélation donnée par :

$$\begin{cases} \xi = \left(\dfrac{a}{D}(T-T_c)\right)^{-1/2} & \text{si } T > T_c \\ \xi = \left(\dfrac{2a}{D}(T_c-T)\right)^{-1/2} & \text{si } T < T_c. \end{cases}$$

Or $\chi_T = \int_W \chi(x)dx$ et donc :

$$\begin{cases} \chi_T = \dfrac{1}{2a(T-T_c)} & \text{si } T > T_c \\ \chi_T = \dfrac{1}{4a(T_c-T)} & \text{si } T < T_c \end{cases}$$

soit les résultats trouvés plus haut. La divergence de χ_T en $|T-T_c|^{-1}$ provient ainsi de celle de ξ en $|T-T_c|^{-1/2}$.

Mais cette approximation est encore insuffisante. Pour pallier ce défaut, il a été nécessaire d'accomplir un progrès décisif dans la compréhension des phénomènes critiques, ce qu'a réussi à faire la méthode du *groupe de renormalisation* dont nous parlerons plus loin à la section 3. Mais avant que d'y venir, faisons deux remarques sur les formalismes, l'une à propos de la règle des phases, l'autre à propos de la théorie équivariante.

2.5 La règle des phases

A propos de l'usage de la théorie des singularités en théorie des transitions de phases, on peut citer l'interprétation géométrico-topologique de la règle des phases de Gibbs proposée, à partir d'une suggestion de René Thom, par Bernard Teissier.[22] Si un système thermodynamique est composé de n constituants et dépend naturellement de 2 contrôles (pression et température), la règle des phases de Gibbs dit que, si le système présente φ phases de façon stable, son nombre de degrés de liberté est $\ell = n+2-\varphi$. Comme il y a toujours une phase, on a $\max(\ell) = n+1$ et, comme la coexistence de deux phases impose une condition de codimension 1, celle de φ phases impose $\varphi - 1$ conditions de codimension 1, d'où, en suivant un usage naïf et implicite des arguments de transversalité et de codimension, $\ell = n+1-(\varphi-1) = n+2-\varphi$. De même, pour les transitions d'ordre ≥ 2, la coalescence de φ impose $\varphi - 1$ conditions de codimension 2, d'où $\ell = (n+1) - 2(\varphi-1) = n+3-2\varphi$.

Soit k le nombre de paramètres indépendants dont dépend le système. On a $k = (n-1)+2$ et la règle des phases s'écrit $\ell = k+1-\varphi$, égalité dont une forme affaiblie est $\varphi_{\max} \leq k+1$. On se propose d'interpréter cette inégalité en considérant un potentiel (analytique) $f(x_1,\ldots,x_n)$ sur l'espace interne $\mathbb{R}^n$ admettant une singularité de codimension finie μ à l'origine. D'après la théorie des singularités, on a $\mu = \dim_{\mathbb{R}} \dfrac{\mathbb{R}\{x\}}{J(f)}$ où $\mathbb{R}\{x\}$ est l'algèbre des $f(x)$ en $x = (x_1,\ldots,x_n)$ et où l'idéal $J(f)$ est l'idéal dit "jacobien" engendré par les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.[23]

On montre qu'un déploiement universel G de f s'écrit :

$$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\mu-1} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1},\ (x,t) \mapsto \left(f(x) + \sum_{i=1}^{\mu-1} t_i s_i, t\right)$$

où les s_i constituent avec la fonction constante 1 une base de $\mathbb{R}\{x\}/J(f)$. G ne fait que traduire géométriquement la famille $f_t = f + \sum_{i=1}^{\mu-1} t_i s_i$ ($f_0 = f$) contrôlée par $\mathbb{R}^{\mu-1}$. L'ensemble de bifurcation $K \subset \mathbb{R}^{\mu-1}$ est l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^{\mu-1}$ tels que f_t possède

[22] *Cf.* Teissier [177].

[23] *Cf.* par exemple Chenciner [40].

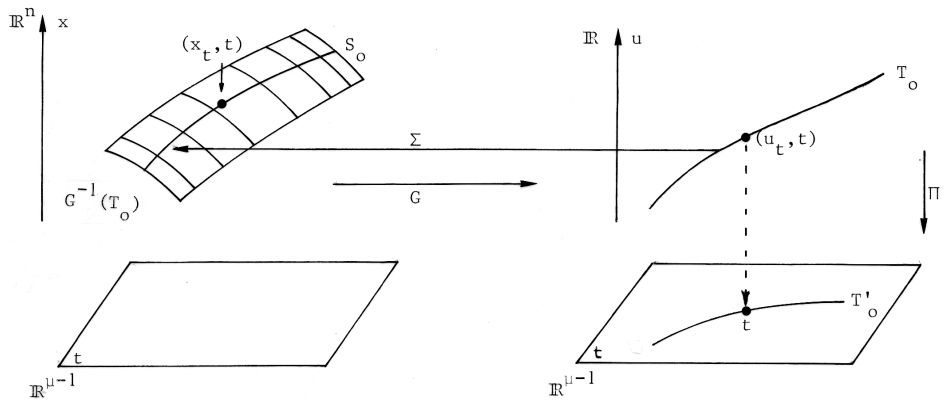


Figure 12: Structure d'un déploiement universel.

au moins un point critique dégénéré et le discriminant $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ est l'ensemble des $(u,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ tels que u soit valeur critique de f_t. G étant structurellement stable, il stratifie son espace source et son espace but. Soit $T_0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ la strate de 0 dans la stratification de G au but, *i.e.* la strate le long de laquelle G possède le même type topologique qu'à l'origine et le long de laquelle la famille f_t est donc triviale. On montre (*cf.* Fig. 12) :

1. que la projection canonique $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1} \to \mathbb{R}^{\mu-1}$, $(u,t) \mapsto t$, induit un isomorphisme de T_0 sur son image $T'_0 = \pi(T_0)$;
2. que pour $t \in T'_0$, f_t ne possède (comme f_0) qu'un point critique x_t (de même type que 0 pour f_0), et
3. que x_t parcourt l'image $S_0 = \Sigma(T_0)$ d'une section Σ de G, S_0 étant la strate de 0 dans la stratification de G à la source, $G|_{S_0}$ étant un isomorphisme de S_0 sur T_0 et $G|_{G^{-1}(T_0)}$ étant une submersion.

Les "vrais" paramètres de contrôle varient donc dans un supplément P en 0 de T'_0 dans $\mathbb{R}^{\mu-1}$ et l'on a par conséquent

$$k = \dim P = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}^{\mu-1}} T'_0 = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mu-1}} T_0 - 1.$$

D'autre part, le nombre de phases $\varphi_{\max}$ est égal au nombre maximal ν_G de minima quadratiques non dégénérés que peut présenter l'un des potentiels f_t. La règle des phases $\varphi \leq k+1$ équivaut par suite à l'inégalité purement géométrico-algébrique :

$$\nu_G \leq \operatorname{codim}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mu-1}} T_0 \qquad (*)$$

Pour démontrer $(*)$, Teissier introduit le nombre δ_G maximal de points singuliers distincts que peut présenter une fibre $G_{u,t} = G^{-1}(u,t)$ de G et il démontre :

1. $\delta_G \leq \operatorname{codim}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mu-1}} T_0$,
2. $\nu_G \leq \delta_G$.

En ce qui concerne (2), il suffit de remarquer qu'il existe des $t \in \mathbb{R}^{\mu-1}$ tels que f_t possède ν_G minima non dégénérés de même valeur critique u_0. En effet $G^{-1}(u_0,t)$ possède alors ν_G points critiques distincts et l'on a $\nu_G \leq \delta_G$. En ce qui concerne (1), soit D_k l'ensemble des points s de D tels que D soit, localement en s, la réunion de k hypersurfaces régulières en position générale. Les arguments de généricité et de transversalité montrent que D_k est de codimension k dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mu-1}$. Or l'on a $\delta_G = \max\{k | 0 \in \overline{D}_k\}$ et, comme le type topologique de G est constant sur $S_0 = \Sigma(T_0)$, on en déduit $T_0 \subset \overline{D_{\delta(G)}}$. D'où (1).

2.6 TE équivariante

L'analyse précédente des transitions de phases conduit à s'interroger sur le problème général des *ruptures spontanées de symétries*. Dans le cadre de la TE, celui-ci concerne la TE dite *équivariante*, c'est-à-dire la considération des déploiements universels G-invariants de potentiels G-invariants sur une variété interne M où opère un groupe G de difféomorphismes. Si G est un groupe de Lie compact, son action définit une stratification Σ de M par les types des orbites, x et y appartenant à la même strate S de Σ si et seulement si leurs stabilisateurs respectifs $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ et G_y sont conjugués dans G. Si le potentiel $f : M \to \mathbb{R}$ est G-invariant, x est un point critique si et seulement si x est un point critique de $f|_S$ où S est la strate de x, et alors toute l'orbite $G(x)$ de x est critique. Cela implique en particulier que si S correspond à un stabilisateur G_x maximal, S est fermée dans M, donc compacte si M est compacte, que par suite $f|_S$ possède un point critique et que f admet une orbite critique (théorème de Louis Michel).

La TE équivariante a pu être développée à partir du théorème fondamental de Gerald Schwarz généralisant au cas $\mathcal{C}^\infty$ le théorème de finitude classique de Hilbert sur les invariants.[24] Si G est un groupe de Lie *compact* opérant linéairement sur $\mathbb{R}^n$ (cette représentation linéaire $\theta : G \to GL(n, \mathbb{R})$ étant complètement réductible et pouvant être supposée orthogonale puisque G est compact), le théorème de Hilbert dit que l'algèbre $\mathbb{R}[x]^G$ des polynômes G-invariants est engendrée comme $\mathbb{R}$-algèbre par un nombre *fini* de polynômes (homogènes) G-invariants $\rho_1, \ldots, \rho_k$. Si ρ est le morphisme algébrique :

$$\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1 = \rho_1(x), \ldots, y_k = \rho_k(x)) \ ,$$

le morphisme associé entre $\mathbb{R}$-algèbres $\rho^* : \mathbb{R}[y] \to \mathbb{R}[x]^G$ est donc *surjectif* et tout polynôme G-invariant est par conséquent un polynôme en les ρ_i. Il est facile de montrer que l'application ρ est propre, qu'elle sépare les orbites de G et, par passage au quotient, qu'elle induit un *homéomorphisme* $\rho' : \mathbb{R}^n/G \to \rho(\mathbb{R}^n)$.

Autrement dit, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application (continue) G-invariante quelconque, elle ne dépend de x qu'en étant une fonction (continue) des ρ_i. Le théorème de Schwarz dit que l'application naturelle $\rho^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$ est également *surjective*, autrement dit que le plongement $\rho' : \mathbb{R}^n/G \to \mathbb{R}^k$ est différentiable au sens où $\mathbb{R}^n/G$ muni de l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^G$ est isomorphe à $\rho(\mathbb{R}^n)$ muni de l'anneau $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^k)\mid_{\rho(\mathbb{R}^n)}$. A partir de là on peut généraliser au cas équivariant tous les résultats principaux de la théorie des singularités développée par Whitney, Thom, Arnold et Mather.[25]

Considérons alors un déploiement G-universel f_λ d'une fonction f_0 possédant une singularité isolée au point $a \in M$ de stabilisateur $G_a = G$. Pour $\lambda \neq 0$, l'orbite critique ponctuelle $G(a) = \{a\}$ bifurquera en général en orbites $G(x_0)$ de stabilisateurs $G_{x_0} \neq G$. Il y aura donc rupture spontanée de symétrie. On peut également considérer le déploiement universel W (non G-universel) de f_0. Alors la G-invariance de f_0 induit une action compensatrice de G dans W, et donc une stratification par les classes de conjugaison des stabilisateurs. Ces strates définissent les ruptures de symétrie que le système décrit par f_0 peut présenter. Lorsque M est l'espace d'une représentation linéaire de G, on retrouve ainsi la théorie de Landau. Il s'agit là d'un thème en pleine expansion.[26]

Tout cela montre que la "philosophie" de la stabilité structurelle propre aux approches morphodynamiques permet de rendre en principe intelligibles les processus de rupture de symétrie. Or, ceux-ci étaient jugés jusqu'ici paradoxaux dans la mesure où ils violent le principe *a priori* (principe de Curie, 1894) que la symétrie des causes doit se retrouver dans la symétrie des effets. Et pourtant ils sont universellement présents et d'une importance cruciale pour la structuration phénoménologique des phénomènes naturels. Il y avait là un véritable obstacle théorique qui commence à être levé.[27]

[24] *Cf.* Poénaru [143].

[25] *Cf.* par exemple Schwarz [162], Poénaru [143].

[26] *Cf.* par exemple Thom [181], Poénaru [143], Michel [125], Golubitsky-Schaeffer [80], Bouligand [31].

[27] (Note de 2010) "Commençait" en 1982. Depuis ces travaux pionniers, l'important rôle structurant des singularités est partout reconnu.

3 Groupe de renormalisation et dynamique qualitative

La théorie moderne des transitions de phases, celle du *groupe de renormalisation* (GR), n'a pu se développer qu'à partir d'un changement conceptuel profond. Une fois le saut théorique accompli, elle a débouché sur une moisson impressionnante de résultats difficiles. Située au confluent de méthodes issues de la théorie quantique des champs, de la mécanique statistique et de la dynamique qualitative, elle a révélé une unité théorique sous-jacente à des domaines fort différents et a ouvert un nombre considérable de nouvelles possibilités. A ce titre, elle constitue à notre avis l'une des plus enthousiasmantes lignes de force de la physique moderne. Elle est épistémologiquement profonde car on peut y suivre trés précisément comment s'y opère par degrés le passage de la théorie "grossière" de Landau (TE) à la théorie "fine" rigoureuse (TG).

Hélas, le sujet est trop technique pour être véritablement exposé ici. Nous nous voyons donc contraint à un simple résumé, que nous ferons en suivant, entre autres, les ouvrages Boccara [27], Toulouse-Pfeuty [190] et PTCP [147].[28] Le texte fondateur est Wilson-Kogut [199]. Citons également le Symposium Nobel CPPS [50].

3.1 Les idées de base

Un certain nombre de constats expérimentaux et d'idées directrices sont à la base de la méthode du GR.

1. Une analyse expérimentale précise des *exposants critiques* – c'est-à-dire des comportements en puissances de $\Delta T = T - T_c$ des grandeurs caractéristiques (η, χ_T, ξ, etc.) du système considéré – a montré qu'ils ne sont pas ceux, appelés désormais *classiques*, donnés par la théorie de Landau.

2. La résolution mathématique exacte (qui constitue un véritable tour de force) de modèles microscopiques explicites (comme ceux d'Ising ou d'Heisenberg) a également conduit à des valeurs non classiques des exposants critiques.

3. Dans ces deux cas, on a constaté que les exposants étaient reliés par des relations *universelles* appelées "lois d'échelle", (*cf.* plus bas section 3.2.). Il existe donc des comportements critiques *typiques*, en grande partie indépendants de la physique fine des substrats.

D'où la premiére grande idée directrice, celle d'*universalité*. Comme l'exprime Amnon Aharony,

> "the basic idea of universality is that the critical behaviour of the systems, when the correlation lenght becomes very large, depends only on a small number of general features of the hamiltonians, and not on the actual values of the various parameters involved."[29]

Il faut donc développer des méthodes d'approximation qui, tout en n'étant pas trop qualitatives (comme la théorie de Landau), soient à même de rendre compte de la "hiérarchie de degrés d'universalité" entre la température critique, trés spécifique du système étudié, et les exposants critiques

> "ne dépendant que des propriétés de symétrie les plus générales (dimensionalité de l'espace et dimensionalité du paramètre d'ordre), indépendants de la nature de la transition, du détail des interactions, etc."[30].

[28] Nous nous permettrons d'ailleurs de conseiller au lecteur intéressé l'ensemble de la série *Phase Transitions and Critical Phenomena* éditée par C. Domb et M.S. Green.

[29] Aharony [1], p. 358.

[30] Toulouse-Pfeuty [190].

Ces méthodes ne chercheront pas à être exactes. Mais elles devront néanmoins être très précises *quantitativement* en ce qui concerne les comportements critiques.[31] Ainsi que le remarquent Th. Niemeijer et J.M.J. Van Leeuwen :

> "it is not the purpose of the renormalization theory to add to the number of exactly solvable models, but rather to provide for more realistic case a computational scheme for the critical singularities and the free energy."[32]

La seconde idée directrice du GR (introduite par Kadanoff et Widom et développée par Wilson) est celle *d'invariance d'échelle*, intimement liée à celle d'itération. Comme y insiste Kenneth Wilson[33], le fait physique fondamental manifesté par les transitions de phases est celui d'existence de fluctuations de grande longueur d'onde qui, au point critique, n'ont plus de longueur caractéristique. Cela conduit donc à traiter un problème à plusieurs échelles, avec une double conséquence. Sur le plan méthodologique, cela conduit à décomposer le problème en sous-problèmes ayant, eux, des longueurs caractéristiques. Une telle méthode sera itérative (récursive). Sur le plan technique, cela conduit à des structures *auto-semblables* ("self-similar" en anglais) possédant la propriété d'homothétie interne et donc en général très complexes car presque nécessairement *fractales*. On ne saurait trop insister sur l'importance de cette découverte – relativement récente[34] et dont les applications paraissent innombrables – que de très simples contraintes d'invariance d'échelle (comme pour la turbulence en hydrodynamique) conduisent en général à des situations d'une complexité interne infinie.

Dans la mesure où le GR constitue l'une des premières et l'une des plus spectaculaires applications de telles idées directrices, on peut affirmer avec Gérard Toulouse et Pierre Pfeuty

> "qu'il ne paraît pas exagéré de voir là un nouveau niveau de la physique, doté d'un système de concepts originaux et puissants."[35]

3.2 Exposants critiques et lois d'échelle

Les principaux exposants critiques étudiés sont les suivants :

1. $\eta \sim \Delta T^{\beta}$,
2. $c_H \sim (\Delta T)^{-\alpha}$,
3. $\chi_T \sim (\Delta T)^{-\gamma}$,
4. $\xi \sim (\Delta T)^{-\nu}$,
5. $H \sim \eta^{\delta}$,
6. $\Gamma(r) \sim \dfrac{1}{r^{d-2+\eta}}$ où $r = \|x\|$, où d est la dimensionalité du système et où $\Gamma(r)$ est la fonction de corrélation entre le point r et un point fixe 0.[36]

Les exposants β et δ sont ceux du paramètre d'ordre, α et γ ceux thermodynamiques, ν et η ceux des fluctuations.

Comme nous l'avons vu, les valeurs classiques données par le modèle de Landau sont : $\beta = 1/2$, $\alpha = 0$, $\gamma = 1$, $\nu = 1/2$, $\delta = 3$ et $\eta = 0$ (soit, pour $d = 3$, $\Gamma(r) = \dfrac{1}{r}$). Remarquons

[31] Nous reviendrons à la section 4.5. sur ce mixte qualitatif-quantitatif.
[32] Niemeijer-Leeuwen [130], p. 463.
[33] *Cf.* par exemple Wilson [200].
[34] Note de 2010. "Récente" en 1982.
[35] Toulouse-Pfeuty [190], p. 7.
[36] Il ne faut pas confondre l'exposant critique η intervenant dans (6) avec le paramètre d'ordre.

que, pour H petit, l'équation d'état peut s'écrire $\frac{H}{\eta^3} = 4C + 2a\frac{\Delta T}{\eta^2}$. Or comme $H \sim \eta^3$ et $\eta^2 \sim \Delta T$, cette équation est en fait une relation – la loi des états correspondants – entre les limites H/η^δ et $\Delta T/\eta^{1/\beta}$: $\frac{H}{\eta^\delta} = f\left(\frac{\Delta T}{\eta^{1/\beta}}\right)$ avec $f(x) = 4C + 2ax$. De même, pour un point tricritique, l'approximation de Landau donne les valeurs classiques $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\delta = 5$.

Comme nous le verrons, le résultat fondamental concernant les valeurs classiques est qu'elles sont exactes si la dimensionalité d du système est ≥ 4 et qu'elles sont au contraire essentiellement inexactes pour $d = 2$ et $d = 3$. Par exemple le modèle bi-dimensionnel d'Ising magistralement résolu par Onsager en 1944 donne les valeurs non classiques $\beta = \frac{1}{8}$, $\alpha = 0^+$ (divergence logarithmique $c_H \sim \frac{1}{\mathrm{Log}\,\Delta T}$), $\gamma = 7/4$, $\nu = 1$, $\delta = 15$ et $\eta = 1/4$. Cela suffit à invalider l'approximation de Landau car, les valeurs classiques étant des invariants du type différentiable (associés nous l'avons vu aux diverses CE), on ne pourrait expliquer dans ce cadre les valeurs non classiques qu'en admettant pour changements de coordonnées des homéomorphismes *non* différentiables, ce qui ruinerait l'hypothèse de différentiabilité permettant d'utiliser les formalismes de la théorie des singularités.

Pour comprendre pourquoi $d = 4$ est la dimension "critique" avant laquelle le modèle de Landau n'est pas valable, on peut remarquer que, si l'on tient explicitement compte de d dans la fonctionnelle de Landau-Ginzburg, un terme en $\Delta T^{\frac{d-4}{2}}$ intervient dans l'expression de la chaleur spécifique $c_H = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$, terme dû aux fluctuations gaussiennes $\|\nabla\eta\|^2$. Pour $d > 4$, ce terme est négligeable. Pour $d < 4$, il est au contraire *divergent* et l'on a $\alpha = \frac{4-d}{2}$ (pour $d = 4$, $\alpha = 0^+$: divergence logarithmique).

Depuis Onsager, des observations très nombreuses et très sophistiquées ont été faites, soit expérimentalement, soit numériquement, sur des modèles explicites.[37] Elles ont permis de conclure que les exposants critiques ne dépendent que de d et de la dimensionalité n de η et qu'ils sont reliés par des lois d'échelle. Ces propriétés d'universalité sont profondes et demandent explication.

Les quatre principales lois d'échelle sont :

1. la loi de Rushbrooke $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$,
2. la loi de Widom $\gamma = \beta(\delta - 1)$,
3. la loi de Fisher $\gamma = (2 - \eta)\nu$,
4. la loi de Josephson $d\nu = 2 - \alpha$.[38]

Comme l'a montré Widom, on peut facilement en rendre compte à partir d'*hypothèses d'homogénéité* affirmant (i) que, en ce qui concerne sa partie singulière, le potentiel (l'énergie libre) F est de la forme

$$F = \Delta T^{2-\alpha} f\left(\frac{H}{\Delta T^\sigma}\right)$$

et (ii) que la fonction de corrélation Γ est de la forme $\Gamma(r) \sim r^{-u} g\left(\frac{r}{\xi}\right)$ où $u = d - 2 + \eta$.[39] En effet :

[37] *Cf.* par exemple Boccara [27] section 5.4.

[38] On remarquera que les valeurs classiques $\eta = 0$, $\nu = 1/2$, $\beta = 1/2$, $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ et $\delta = 3$ satisfont les trois premières lois mais ne satisfont la loi de Josephson *que pour* $d = 4$. Nous reviendrons sur cette valeur critique de la dimensionalité du système.

[39] On appelle fonction homogène généralisée une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $f(\lambda^{a_1} x_1, \ldots, \lambda^{a_n} x_n) = \lambda^p f(x_1, \ldots, x_n)$. Si l'on suppose la loi d'homogénéité $F(\lambda\Delta T, \lambda^\sigma H) = \lambda^{2-\alpha} F(T, H)$ et si l'on pose $\lambda = (\Delta\ T)^{-1}$, on obtient $F(T, H) = \Delta T^{2-\alpha} F\left(1, \frac{H}{\Delta\ T^\sigma}\right)$ *i.e.* la forme voulue avec $f(h) = F(1, h)$.

1. $\eta = -\dfrac{\partial F}{\partial H} \sim \Delta T^{2-\alpha} \dfrac{1}{\Delta T^{\sigma}} f'\left(\dfrac{H}{\Delta T^{\sigma}}\right) \sim \Delta T^{2-\alpha-\sigma}$ et comme $\eta \sim \Delta T^{\beta}$, $\beta = 2-\alpha-\sigma$.

2. $\chi = -\dfrac{\partial^2 F}{\partial H^2} \sim \Delta T^{2-\alpha-2\sigma} f''\left(\dfrac{H}{\Delta T^{\sigma}}\right) \sim \Delta T^{2-\alpha-2\sigma}$ et comme $\chi \sim \Delta T^{-\gamma}$, $\gamma = -2 + \alpha + 2\sigma$.

3. On vérifie également que $c_H = -T\dfrac{\partial^2 F}{\partial T^2} \sim \Delta T^{-\alpha}$.

4. En éliminant σ, on obtient la loi de Rushbrooke $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$.

5. Comme $\eta \sim \Delta T^{\beta}$, $f'\left(\dfrac{H}{\Delta T^{\sigma}}\right) \sim \Delta T^{\beta-\sigma} H$ et comme $H \sim \eta^{\delta}$, on a $\sigma = \beta\delta$ et par suite $\gamma = -2 + \alpha + 2\sigma = -\beta + \sigma = -\beta + \beta\delta$, soit la loi de Widom $\gamma = \beta(\delta - 1)$.

6. Considérons maintenant la loi d'homogénéité $\Gamma(r) = \dfrac{g(r\xi)}{r^{d-2+\eta}}$ valable pour $\Delta T \to 0$ et $r \gg \xi$. Pour la transformée de Fourier $\widetilde{\Gamma}(k)$ de $\Gamma(r)$, on obtient une loi d'homogénéité de forme $\widetilde{\Gamma}(k) \sim \dfrac{1}{k^{2-\eta}}\, h(k\xi)$. Or d'après le théorème de fluctuation-dissipation, on a $\chi \sim \widetilde{\Gamma}(0)$. Comme $\chi \sim \Delta T^{-\gamma}$, $\widetilde{\Gamma}(0)$ suit une loi de puissance en ΔT ce qui implique (nécessité d'élimination des termes en k) que $h(x)$ se comporte comme $x^{2-\eta}$. On a donc $\widetilde{\Gamma} \sim \xi^{2-\eta} \sim (\Delta T)^{-\nu(2-\eta)} \sim \Delta T^{-\gamma}$. Soit la loi de Fisher $\gamma = \nu(2-\eta)$.

7. Quant à la loi des états correspondants $\dfrac{H}{\eta^{\delta}} = f\left(\dfrac{\Delta T}{\eta^{1/\beta}}\right)$, elle découle aussi directement de l'hypothèse d'homogénéité.

Le point essentiel est donc de justifier l'hypothèse de Widom selon laquelle la partie *singulière* de l'énergie libre au point critique est une fonction homogène de η et de ΔT. C'est ce qu'a fait Kadanoff en introduisant l'opération de renormalisation qui a permis à Wilson de développer une méthode asymptotique qui, dans une certaine mesure, est à l'approximation de Landau ce que la méthode des intégrales oscillantes est, en optique, à l'approximation géométrique. Dire que la partie singulière de l'énergie libre est homogène, *i.e.* que $F(\lambda\Delta T, \lambda^{\sigma} H) = \lambda^{2-\alpha} F(T, H)$ ou encore, puisque $H \sim \eta^{\delta}$ et $\sigma = \beta\delta$, que $F(\lambda\Delta T, \lambda^{\beta}\eta) = \lambda^{2-\alpha} F(\Delta T, \eta)$, c'est dire que F est un *point fixe* de la transformation $T' = \lambda T$, $\eta' = \lambda^{\beta}\eta$, $F' = \lambda^{\alpha-2} F$.

Autrement dit, les lois d'homogénéité sont des contraintes (considérables) qui peuvent s'exprimer en termes de points fixes de transformations appropriées dans des espaces fonctionnels appropriés. C'est cette idée directrice qu'applique le GR. Comme l'ont souligné Gérard Toulouse et Pierre Pfeuty, elle conduit à repenser entièrement le problème des transitions de phases dans le cadre des théories générales des systèmes dynamiques et des itérations de transformations,

> "théories [qui], par leur caractère d'approche globale et leur insistance sur les propriétés d'universalité, constituent [pour la théorie des phénomènes critiques] un nouveau cadre de pensée."[40]

3.3 Analyse dimensionnelle et dimensions anormales

Il est important de noter que les valeurs classiques des exposants critiques sont celles que donne une simple analyse dimensionnelle exprimant les propriétés de covariance des grandeurs par changement d'unité de longueur. Les valeurs non classiques peuvent également s'obtenir ainsi mais à condition de doter les grandeurs de dimensions "anormales" qui expliquent l'homogénéité.

[40] Toulouse-Pfeuty [190].

Les dimensions normales sont, relativement à la dimension $[L]$ des longueurs : $[\eta] = \left[L^{\frac{d-2}{2}}\right]^{-1}$, $[H] = \left[L^{\frac{d+2}{2}}\right]^{-1}$, $[\chi] = \left[L^2\right]$, $[G] = \left[L^d\right]^{-1}$. Les dimensions anormales sont quant à elles $[\eta] = \left[L^{\frac{d-2+\eta}{2}}\right]^{-1}$, $[H] = \left[L^{\frac{d+2-\eta}{2}}\right]^{-1}$, $[\chi] = \left[L^{2-\eta}\right]$, $[G] = \left[L^d\right]^{-1}$.[41]

En prenant pour longueur caractéristique la longueur de corrélation ξ, en utilisant la loi de puissance $\xi \sim (\Delta T)^{-\nu}$, en substituant L par ξ et en utilisant les autres lois de puissance définissant les exposants critiques, on retrouve les lois d'échelle.

3.4 De la mécanique statistique à la dynamique qualitative

Exposons maintenant brièvement, en suivant Toulouse-Pfeuty [190], les grandes lignes de la méthode du GR. L'idée de base, introduite par Kadanoff en 1966, est d'utiliser la propriété d'invariance d'échelle et d'absence de longueur caractéristique au point critique pour *réduire* drastiquement le nombre de degrés de liberté du système. Considérons par exemple un réseau de spins de maille a. Près de la température critique T_c, la longueur de corrélation ξ devient trés grande ("macroscopique") par rapport à la maille "microscopique" a : $\xi \gg a$. Ce sont donc les fluctuations à "longue" longueur d'onde qui sont massivement dominantes et l'on peut par conséquent chercher à éliminer les fluctuations à "courte" longueur d'onde. Pour cela, selon l'idée de Kadanoff, on remplace les spins par des blocs de spins de longueur ℓ avec $\xi \gg \ell \gg a$, chaque bloc ayant pour spin la moyenne des spins (fortement intercorrélés) qui y appartiennent. On renormalise alors la maille du nouveau réseau de façon à la rendre égale à la maille initiale. Le moyennage réduit le nombre de degrés de liberté, ce qui transforme le problème donné en un problème de longueur de corrélation réduite $\xi' < \xi$.

Soit alors s le changement d'échelle des longueurs nécessaire pour renormaliser la maille du réseau. Les opérations décrites intuitivement ci-dessus sont *a priori* exprimables par un opérateur $\mathcal{R}_s$ – dit opérateur de renormalisation – agissant sur la fonction F décrivant le système : son hamiltonien, son énergie libre ou sa fonction de partition. Il est clair que ces opérateurs constituent un semi-groupe : $\mathcal{R}_t \circ \mathcal{R}_s = \mathcal{R}_{st}$, et l'on obtient ainsi un semi-groupe de transformations sur l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ des fonctions F.

Au point critique, la longueur ξ diverge, et cela signifie (puisque $\xi/s = \xi$) que F est un *point fixe* des opérateurs $\mathcal{R}_s$. On est donc conduit à un schéma général tout à fait analogue à celui des systèmes dynamiques (mais d'une difficulté redoutable à mettre effectivement en pratique à cause de très nombreux points techniques d'analyse fonctionnelle). Supposons que l'on prenne par exemple pour F l'hamiltonien H du système. Soit $\mathcal{H}$ l'espace fonctionnel des hamiltoniens envisageables. La première approximation (exacte dans certains cas pas trop complexes) consiste à supposer que tous les hamiltoniens obtenus par renormalisation à partir de l'hamiltonien initial H_0 appartiennent à une même classe de $\mathcal{H}$ ne dépendant que d'un nombre *fini* de paramètres $(p_1, \ldots, p_\ell)$ (température T, champ extérieur H, constantes de couplage, etc.) parcourant une sous-variété $\mathcal{P}$ de $\mathcal{H}$. Cela permet, en se situant dans $\mathcal{P}$, de ramener le problème à un problème de dimension finie.[42]

Pour un système donné, l'hamiltonien $H(T)$ va décrire, lorsque T décroît à partir des valeurs $T > T_c$, une courbe de $\mathcal{P}$ appelée *ligne physique*. Comme ξ croît lorsque T décroît vers T_c et diverge pour $T = T_c$, cette ligne physique est transverse aux hypersurfaces iso-ξ S_ξ (où ξ = constante) de $\mathcal{P}$ et traverse S_∞ en $H_c = H(T_c)$. Appliquons alors le GR. Si H appartient à la ligne physique mais $H \neq H_c$ ($H \notin S_\infty$) alors la trajectoire de H sous l'action du GR s'écarte de S_∞ (car le GR contracte ξ). Mais en revanche la trajectoire de H_c *demeure dans* S_∞.

On est ainsi conduit à analyser la "dynamique" induite par le GR dans S_∞. Si la situation est simple, S_∞ sera alors décomposée en bassins d'attraction de différents points fixes et H_c sera "capturé" en général par un tel point fixe H^* (à moins qu'il se situe sur une

[41] *Cf.* Toulouse-Pfeuty [190], p. 88.

[42] Il faut bien voir que cette hypothèse est très forte. En effet, en général, même si l'hamiltonien initial H est d'un type simple, les $\mathcal{R}_s H$ sont d'un type beaucoup plus complexe et comprennent de nombreux nouveaux paramètres (*cf.* la section 3.7.1). Pour l'analyse de l'action de $\mathcal{R}_s$ dans $\mathcal{H}$ (et non plus dans $\mathcal{P}$) on pourra consulter Rasetti [148].

séparatrice). L'idée de base est alors que tous les systèmes dont le H_c appartient à un même bassin $\mathcal{B}(H^*)$ ont *même* comportement critique. La position de H_c dans $\mathcal{B}(H^*)$, H_c pouvant être plus au moins proche de H^*, exprime l'extension du domaine des paramètres sur lequel le système possède le comportement H^*. Mais le comportement *au point critique* (et non plus en son voisinage) ne dépend que de H^*. On trouve là une interprétation dynamique remarquablement élégante de ce mixte de quantitatif et de qualitatif que devait *a priori* présenter la méthode du GR pour pouvoir rendre compte de l'universalité des phénomènes critiques : l'universalité correspond à H^* et la spécificité à la position de H_c dans $\mathcal{B}(H^*)$.

Soit donc H^* un point fixe du GR dans S_∞ et supposons que les $\mathcal{R}_s$ soient *linéarisables* au voisinage de H^*. On a donc $\mathcal{R}_s(H^* + \delta H) = H^* + \mathcal{L}_s(\delta H)$, où $\mathcal{L}_s$ est un opérateur linéaire. Soient $\mathfrak{a}_i$ les vecteurs propres de $\mathcal{L}_s$ et $\lambda_i(s)$ les valeurs propres associées. D'après la loi de semi-groupe $\mathcal{R}_t \circ \mathcal{R}_s = \mathcal{R}_{st}$, on a $\lambda_i(s)\lambda_i(t) = \lambda_i(st)$ et donc $\lambda_i = s^{\alpha_i}$. Si l'on écrit alors que, au voisinage de H^*, la fonction F décrivant le système (par exemple l'énergie libre) est une fonction des coordonnées μ_i par rapport aux $\mathfrak{a}_i$, on en *déduit* les lois d'homogénéité de F et donc les lois d'échelle. Par exemple, on a $F' = s^d F$ et donc $F(s^{\alpha_i}\mu_i) = s^d F(\mu_i)$. On a de même $\Gamma\left(\frac{r}{s}, s^{\alpha_i}\mu_i\right) = s^{2\rho}\Gamma\left(r, \mu_i\right)$. Les exposants critiques apparaissent ainsi comme des cas particuliers des *exposants caractéristiques* bien connus que l'on trouve dans tous les systèmes dynamiques en un point fixe linéarisable.

Les vecteurs propres $\mathfrak{a}_i$ s'appellent *champs d'échelles*. Le GR y agit comme l'homothétie $\lambda_i = s^{\alpha_i}$. Si $\alpha_i > 0$ il s'agit d'une dilatation et l'on dit que $\mathfrak{a}_i$ est *pertinent*. Si $\alpha_i < 0$ il s'agit d'une contraction et l'on dit que $\mathfrak{a}_i$ est non pertinent. Si $\alpha_i = 0$ on dit que $\mathfrak{a}_i$ est *marginal*. Un point fixe H^* de GR n'est stable que si tous les champs pertinents y sont nuls.

Cette image dynamique permet de penser trés élégamment un grand nombre de phénomènes. Donnons quelques exemples.

1. Si le point H_c où la ligne physique traverse l'hypersurface S_∞ appartient à un bassin $\mathcal{B}(H^*)$, alors on est en présence d'un point critique de type H^*.

2. Si H_c traverse S_∞ sur une *séparatrice* alors on est en présence d'un point *tricritique* où s'effectue la transition entre deux régimes critiques différents (*cf.* la section 2.3).

3. Les trajectoires s'éloignant à l'infini dans S_∞ correspondent aux transitions du *premier* ordre.

4. Les phénomènes, dits de *cross-over*, où un système présente une succession de deux régimes critiques, l'un transitoire et l'autre effectif, correspondent à une trajectoire de type de celle de la figure 13.

5. Les valeurs classiques des exposants critiques correspondent à un point fixe G, dit point *gaussien* (*cf.* plus bas sections 3.6 et 3.7.2). Ce point est le plus stable pour $d > 4$. S'il existe des valeurs non classiques, c'est "tout simplement" parce qu'à la traversée de la valeur $d = 4$ de la dimensionalité du système, le point fixe gaussien G devient *instable* et se trouve "supplanté" par un point fixe *non gaussien* NG. Pour $d = 4$, G et NG coïncident, il y a coalescence de deux régimes critiques et le champ pertinent assurant l'échange de stabilité entre N et NG devient marginal (*cf.* Fig. 14). On trouvera à la figure 15 un cas plus complexe, étudié entre autres par Amnon Aharony, où il y a échange de stabilité entre le modéle d'Heisenberg et le modèle cubique à la traversée d'une valeur critique n_c de la dimension n des spins (*i.e.* du paramètre d'ordre).

6. Mais la théorie qualitative des systèmes dynamiques montre que même des systèmes simples peuvent avoir, s'ils sont non linéaires, des trajectoires très compliquées, voire chaotiques. Il semble que cela soit le cas pour certains phénomènes de transitions de phases.

Evidemment, comme nous allons le voir, toute la difficulté est d'arriver à des *formules* (approchées) pour le GR. Mais, quoi qu'il en soit, il est crucial de noter que la méthode du

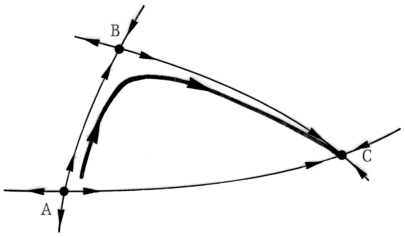


Figure 13: Phénomène de cross-over : la trajectoire de H_c passe au voisinage de B avant d'aboutir en C.

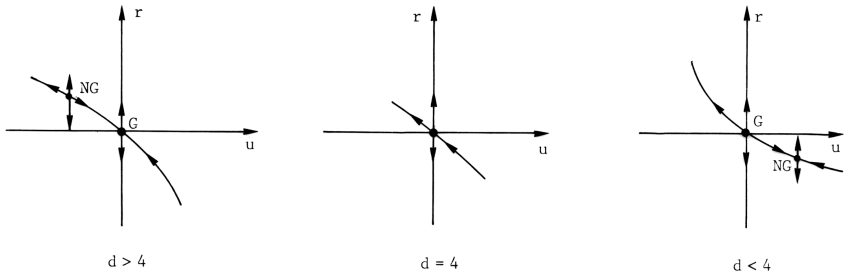


Figure 14: Echange de stabilité des points fixes gaussien (G) et non gaussien (NG) à la traversée de la dimensionalité critique $d = 4$. Le champ r est toujours pertinent. Pour $d > 4$, NG est totalement instable alors que G admet une variété stable (un champ non pertinent). C'est l'inverse pour $d < 4$.

GR "conduit à une description géométrique, topologique, des phénomènes critiques"[43], ce qui permet

> "la transformation d'un problème hautement singulier en un problème régulier dans un espace abstrait."[44]

3.5 Modèles discrets et modèles continus : le calcul de la fonction de partition

Donnons quelques brèves précisions, sans toutefois entrer dans le détail, sur le type de modèles que traite le GR.

Les modèles discrets sont le plus souvent des modèles où l'on considère des spins σ_i^α à n composantes (indexées par α) pouvant prendre un ensemble discret $\{1, 2, \ldots, q\}$ ou continu de valeurs, spins distribués aux nœuds i (sites) d'un réseau de N sites de symétrie donnée. Si l'on suppose alors que chaque spin n'interagit qu'avec les spins d'un certain de ses voisinages (hypothèse d'interactions à courte portée), si $J_{ij}^{\alpha\beta}$ est la constante de couplage des composantes α et β des spins de deux sites voisins i et j, alors, pour une distribution de spins $\sigma = \{\sigma_i^\alpha\}$ *donnée*, toute la physique du système en présence d'un champ magnétique externe H est incluse dans l'hamiltonien :

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} J_{ij}^{\alpha\beta} \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta - H \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_i^\alpha \tag{1}$$

[43] Toulouse-Pfeuty [190], p. 9.
[44] Ibid, p. 32.

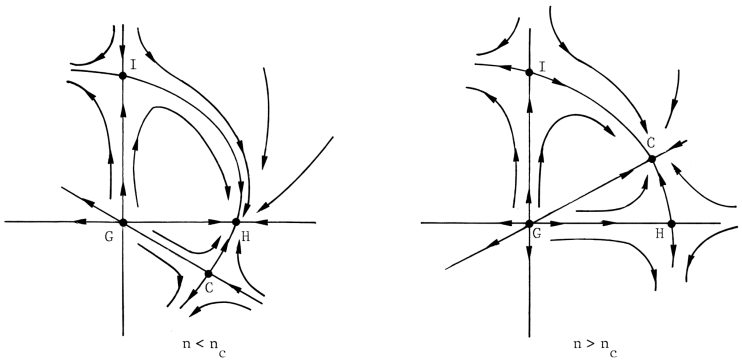


Figure 15: Echange de stabilité entre H et C à la traversée de $n = n_c$ (G = modèle gaussien, I = modèle d'Ising, H = modèle d'Heisenberg, C = modèle cubique). D'après Aharony [1], p. 397.

En général on pose $J_{ij}^{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$ et l'on ne considère que des interactions entre voisins immédiats. Si les $J_{ij} = J$ sont indépendants de i, j il y a isotropie.

Si les spins n'ont qu'une composante et ne peuvent prendre que deux valeurs ($+1$, -1 ou $+1/2$, $-1/2$, *i.e.* "haut" et "bas"), on a les modèles d'Ising. S'ils peuvent prendre q valeurs, on a les modèles de Potts. S'ils ont trois composantes, on a les modèles d'Heisenberg. S'ils ont trois composantes σ_i^x, σ_i^y, σ_i^z n'interagissant que dans le plan x, y ($J_{ij}^z = 0$), on a les modèles XY, etc.

Connaissant $\mathcal{H}$, le probléme (monumental) est alors de calculer la fonction de partition (avec $\beta = \dfrac{1}{kT}$) :

$$Z(\mathcal{H}) = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta\mathcal{H}(\sigma)} \tag{2}$$

où $\sum_{\{\sigma\}}$ est une somme prise sur toutes les distributions possibles de spins. A partir de Z (qui est fonction de T, de H et des paramètres de couplage), on peut en effet retrouver les grandeurs thermodynamiques. L'énergie libre par site est donnée par exemple par $f = -\dfrac{1}{\beta N}\mathrm{Log}Z$, la magnétisation par site est $\eta = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial H}\right)_\beta$, $\chi_T = -\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial H^2}\right)_\beta$, $c_H = -k\beta^2\left(\dfrac{\partial^2(\beta f)}{\partial \beta^2}\right)_H$, etc. (*cf.* la section 2.2). D'autre part, la connaissance de Z permet de calculer les moyennes $\langle A\rangle$ de toutes les grandeurs. Si A est une grandeur, on a en effet par définition :

$$\langle A\rangle = \frac{\sum_{\{\sigma\}} A(\sigma)e^{-\beta\mathcal{H}(\sigma)}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta\mathcal{H}(\sigma)}} = \frac{1}{Z}\sum_{\{\sigma\}} A(\sigma)e^{-\beta\mathcal{H}(\sigma)} \tag{3}$$

Parmi les moyennes, certaines sont particulièrement importantes. Ce sont les fonctions de corrélation. Leur importance vient du fait (i) que leurs transformées de Fourier sont expérimentalement accessibles et (ii) que l'on peut à partir d'elles reconstruire Z. Ce sont essentiellement les moyennes des interactions à 1 site, 2 sites, 3 sites, ..., k sites, etc. Pour un modèle d'Ising, on a par exemple :

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(0)} &= \langle 1 \rangle = 1 \\
\Gamma^{(1)}_i &= \langle \sigma_i \rangle \\
\Gamma^{(2)}_{i,j} &= \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \\
\Gamma^{(3)}_{i,j,k} &= \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \sigma_k \rangle - \langle \sigma_j \rangle \langle \sigma_i \sigma_k \rangle - \langle \sigma_k \rangle \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \\
&\quad + 2 \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle \langle \sigma_k \rangle, \text{etc.}
\end{aligned} \tag{4}
$$

Insistons sur le fait que, eu égard à l'extrême difficulté du calcul, il n'existait pas de théorie exacte pour $d > 2$ ou pour $d = 2$, $H \neq 0$ ($d = 2$, $H = 0$ était le modèle d'Ising résolu par Onsager). Pendant longtemps, la seule méthode d'approche était de trouver des développements en série en les constantes de couplage. Mais avec de telles méthodes, chaque cas était particulier. C'est pourquoi il n'existait pas de théorie générale pouvant rendre compte de l'universalité observée. C'est dans ce contexte que l'on a dégagé les lois d'échelle (Fisher, Rushbrooke, Widom), que Kadanoff et Widom ont introduit l'idée de renormalisation des fonctions de corrélation et que – en s'inspirant des méthodes développées par Schwinger et Symanzyk en théorie quantique des champs (méthodes inspirées elle-mêmes de la mécanique statistique) – Migdal, Polyakov et Wilson ont pu la formaliser correctement.

En général, on ne se restreint pas à des modèles discrets. On passe du discret au continu, ce qui transforme les modèles discrets en des modèles continus tout à fait analogues à ceux que l'on trouve en théorie quantique des champs. Réciproquement, si l'on se donne un tel modèle continu, on peut le discrétiser en le considérant comme la limite pour $a \to 0$ d'un modèle défini sur un réseau de maille a. L'introduction de la maille élimine les interactions pour les "petites" distances (*i.e.* inférieures à a) et donc les modes de "grand" vecteur d'onde (cut-off).[45]

Le modèle le plus communément choisi est donné par l'hamiltonien (*cf.* section 2.2. la fonctionnelle de Landau-Ginzburg) :

$$
\mathcal{H}(H,T) = \frac{1}{\beta} \int_W \left(\frac{1}{2} \|\nabla \eta(x)\|^2 + \frac{1}{2} r_0 \|\eta(x)\|^2 + \frac{u}{4!} \|\eta(x)\|^4 - H\eta(x) \right) dx \tag{5}
$$

où $\eta(x)$ est la densité de spins dans $\mathbb{R}^d$ (dont le paramètre d'ordre η est la valeur moyenne) et où r_0 et u (constantes de couplage) sont des fonctions *analytiques* de T.[46] On suppose en général que $\eta(x)$ est un champ scalaire. On remarquera que $\mathcal{H}$ est l'hamiltonien d'un champ quantique de lagrangien :

$$
\mathcal{L}(\eta) = \frac{1}{2} \|\nabla \eta\|^2 + \frac{1}{2} r_0 \|\eta\|^2 + \frac{u}{4!} \|\eta\|^4 - H\eta.
$$

On remarquera également que, d'après Pythagore, $\|\eta\|^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i^2$ et que donc, dans la partie *quadratique* de $\mathcal{H}$, les composantes de la densité η sont *découplées*, alors que, au contraire, $\|\eta\|^4 = \sum_{i,j=1}^n \eta_i^2 \eta_j^2$ et que donc, dans la partie *quartique* de $\mathcal{H}$, interviennent des couplages $\eta_i^2 \eta_j^2$, $i \neq j$. Ce fait est fondamental.

Si l'on veut tenir compte du cut-off introduit par une discrétisation, on peut ajouter à $\mathcal{H}$ un terme en $\|\nabla^2 \eta\|^2$ (*i.e.* en $\|\Delta \eta\|^2$) :

$$
\mathcal{H} = \frac{1}{\beta} \int_W \left(\frac{1}{2} \|\nabla \eta(x)\|^2 + \frac{1}{2} r_0 \|\eta(x)\|^2 + \frac{u}{4!} \|\eta(x)\|^4 - H\eta(x) + \frac{\Lambda^{-2}}{2} \|\nabla^2 \eta(x)\|^2 \right) dx \tag{6}
$$

où Λ^{-1}, qui a la dimension d'une longueur, est la maille.

Comme le rappelle D.T. Wallace, cette forme standard provient des hypothèses suivantes :

[45] Les modes sont ici les composantes des transformées de Fourier.

[46] $\|\eta(x)\|$ est la norme de $\eta(x)$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\|\nabla \eta\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\nabla \eta_i\|^2$ où $\nabla \eta_i$ est le gradient relativement à $x \in \mathbb{R}^d$ de la composante $\eta_i(x)$ de η ($i = 1, \ldots, n$).

1. isotropie dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^d$ et dans l'espace des spins $\mathbb{R}^n$,

2. interactions à courte portée ($\mathcal{H}$ intègre une fonctionnelle *locale* de η ne dépendant que de η et de ses dérivées),

3. terme en $\|\nabla\eta\|^2$ à coefficient ≥ 0, ce qui assure que, quand il y a magnétisation spontanée, la minimisation de l'énergie se fait à η constant (*cf.* section 2.2 les hypothèses de Landau),

4. cut-off des modes de trop grand vecteur d'onde (car trop énergétiques),

5. validité semi-microscopique du modèle qui est la limite d'un "vrai" modèle microscopique (d'où l'analyticité de r_0 et u).

On remarquera que le couplage u doit être > 0 car sinon l'énergie serait une fonction décroissante de η, ce qui n'a pas de sens physique. Pour permettre $u < 0$ il faut introduire des termes en $\|\eta\|^6$ (points tricritiques, *cf.* section 2.3).

D'autre part une analyse dimensionnelle donne $[r_0] = \left[\Lambda^2\right]$ et $[u] = \left[\Lambda^{4-d}\right]$. On peut donc introduire la constante sans dimension $u_0 = u/\Lambda^{4-d}$. La fonction de partition est alors une intégrale fonctionnelle dans l'espace fonctionnel des η :

$$Z = Z(T, H; r_0, u_0, \Lambda) = \int \exp(-\beta\mathcal{H}(\eta))d\eta. \tag{7}$$

Les fonctions de corrélation $\Gamma^{(p)}_{i_1\ldots i_p}(x_1, \ldots, x_p)$ sont alors essentiellement les moyennes (dites fonctions de Schwinger en théorie des champs)[47] :

$$\langle \eta_{i_1}(x_1)\ldots\eta_{i_p}(x_p)\rangle = \frac{\int \eta_{i_1}(x_1)\ldots\eta_{i_p}(x_p)\exp(-\beta\mathcal{H}(\eta))d\eta}{Z} \tag{8}$$

Si l'on introduit un champ externe variable supplémentaire (toujours noté H) et si l'on généralise Z à $Z = \int \exp(-\beta\mathcal{H}(\eta) + H\eta)d\eta$, on voit aussitôt que l'on a[48] :

$$\begin{aligned}\langle \eta_{i_1}(x_1)\ldots\eta_{i_p}(x_p)\rangle &= \frac{1}{Z}\frac{\delta}{\delta H_{i_1}(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta H_{i_p}(x_p)}(Z)\\ &= \frac{\delta^p}{\delta H_{i_1}(x_1)\ldots\delta H_{i_p}(x_p)}(\operatorname{Log} Z)\end{aligned} \tag{9}$$

En particulier, les moyennes $\langle\eta_i(x)\rangle$ expriment que les variables η et H sont *conjuguées* :

$$\langle\eta_i(x)\rangle = \frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta H_i(x)}.$$

Ces formules permettent de mettre Z sous une forme plus adaptée au calcul, en extrayant de (7) la partie d'interaction correspondant au terme en $\|\eta\|^4$ de l'hamiltonien. Séparons en effet dans $\mathcal{H}(\eta)$ la partie *quadratique* :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{\beta}\int\left(\frac{1}{2}\|\nabla\eta\|^2 + \frac{1}{2}\,r_0\|\eta\|^2 - H\eta + \frac{\Lambda^{-2}}{2}\|\nabla^2\eta\|^2\right)dx$$

et la partie proprement *interactive* :

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{\beta}\int\frac{u}{4!}\|\eta\|^4 dx\ .$$

[47] La différence entre les $\Gamma^{(p)}$ et les moyennes de (8) correspond, dans les développements en graphes de Feynman introduits plus bas, à la différence entre graphes connexes et graphes quelconques.

[48] Les dérivées $\dfrac{\delta}{\delta H_i(x)}$ sont prises en $H_i = 0$.

Si l'on applique les formules (9) en normalisant de façon à ce que (pour $H = 0$) $Z = 1$ et en remarquant que Z n'est fonction de H qu'à travers $\mathcal{H}_0$, on obtient la formule[49] :

$$\int \eta_i(x) \exp(-\beta \mathcal{H}_0(\eta)) d\eta = \frac{\delta}{\delta H_i(x)}(Z_0)$$

(où Z_0 est la fonction de partition définie par $\mathcal{H}_0$) et plus généralement, pour une fonction algébrique $f(z_1, \ldots, z_n)$:

$$\int f(\eta) \exp(-\beta \mathcal{H}_0(\eta)) d\eta = f\left(\frac{\delta}{\delta H(x)}\right)(Z_0) \ . \tag{10}$$

Mais, comme

$$Z = \int \exp(-\beta \mathcal{H}(\eta)) d\eta = \int \exp(-\beta \mathcal{H}_0(\eta)) \exp(-\beta \widetilde{\mathcal{H}}(\eta)) d\eta$$

et comme

$$\exp(-\beta \widetilde{\mathcal{H}}(\eta)) d\eta = \exp\left(-\int \frac{u}{4!} \|\eta\|^4 dx\right),$$

on a (toujours informellement) la formule fondamentale :[50]

$$Z = \left(\exp\left(-\int \frac{u}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta H(x)}\right)^4 dx\right)\right)(Z_0) \tag{11}$$

où $\left(\frac{\delta}{\delta H(x)}\right)^4 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\delta^2}{\delta H_i(x) \delta H_i(x)}\right)^2$.

Cette formule est fondamentale car on sait calculer la fonction de partition Z_0. Elle est donnée par des *intégrales gaussiennes*. D'où le nom de modèle gaussien donné au modèle défini par l'hamiltonien quadratique $\mathcal{H}_0(\eta)$. Dans le cas discret, on a les formules :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{2} y_i A_{ij} y_j + H_i y_i\right) dy_i \\ &= \exp\left(\sum_{i,j} \frac{1}{2} H_i (A^{-1})_{ij} H_j\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{2} z_i A_{ij} z_j\right) dz_j \end{aligned} \tag{12}$$

permettant, dans une intégrale d'exponentielles d'une forme quadratique et d'une forme linéaire, d'extraire le terme linéaire (la matrice $(A^{-1})_{ij}$ est la matrice inverse de la matrice symétrique (A_{ij}) définissant la forme quadratique). Dans le cas continu où le produit $\prod_{i=1}^N dy_i$ est remplacé par $d\eta$, la forme quadratique $\|\eta(x)\|^2$ peut s'écrire $\eta(x)\delta(x-y)\eta(y)$ où δ est la distribution de Dirac, et la partie purement quadratique de $\mathcal{H}_0$: $\frac{1}{2}\|\nabla\eta\|^2 + \frac{1}{2} r_0 \|\eta\|^2 + \frac{\Lambda^{-2}}{2} \|\nabla^2 \eta\|^2$ peut s'écrire $\frac{1}{2}\eta(x) A(x-y)\eta(y)$ où A est une distribution. La formule (12) est encore valable à condition de prendre pour A^{-1} l'inverse Δ – dit propagateur – de A au sens des distributions, inverse donné par $\int A(x-z)\Delta(z-y)dz = \delta(x-y)$. D'après (12) on obtient :

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \exp(-\beta \mathcal{H}_0) d\eta = \int \exp\left(-\frac{1}{2}\eta(x) A(x-y)\eta(y) + H\eta\right) d\eta \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\int H(x)\Delta(x-y)H(y)dxdy\right) \cdot \int \exp(-\beta \mathcal{H}_0 \mid_{H=0} (\eta)) d\eta. \end{aligned} \tag{13}$$

[49] Les calculs qui suivent sont faits informellement. Il serait hors de propos de tenir compte ici des problèmes d'analyse fonctionnelle que pose leur formulation rigoureuse.

[50] *Cf.* Wallace [195] et Brézin *et al.* [35].

Or $I = \int \exp(-\beta \mathcal{H}_0 \mid_{H=0} (\eta))d\eta$ ne dépend plus de H, et si l'on revient à la formule (11) donnant la fonction de partition, on voit que l'on a, en incluant I dans une constante C :

$$Z = C \left(\exp\left(-\frac{u}{4!} \int \left(\frac{\delta}{\delta H(x)} \right)^4 dx \right) \right) \exp\left(\frac{1}{2} \int H(x)\Delta(x-y)H(y)dxdy \right). \qquad (14)$$

Cette formule (14) est la base de l'application à la thermodynamique des développements *en graphes de Feynman* habituels en théorie quantique des champs. On utilise le résultat fondamental[51] :

$$\frac{\delta}{\delta H(x_1)} \frac{\delta}{\delta H(x_2)} \left(\exp\left(\frac{1}{2} \int H(x)\Delta(x-y)H(y)dxdy \right) \right) = \Delta(x_1 - x_2). \qquad (15)$$

Cela conduit au célèbre théorème de Wick[52] disant que

$$\frac{\delta}{\delta H(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta H(x_{2n})} \left(\exp\left(\frac{1}{2} \int H(x)\Delta(x-y)H(y)dxdy \right) \right) \qquad (16)$$

est une somme de produits de toutes les contractions de paires possibles des x_i, la contraction élémentaire étant le propagateur $\Delta(x_i - x_j)$.

En développant Z en série de u suivant (14) et en appliquant répétitivement le théorème de Wick, on obtient une méthode de calcul analogue à celle des graphes de Feynman : l'expansion en u conduit à des vertex connectés entre eux par les propagateurs $\Delta(x-y)$ à travers l'action de $\dfrac{\delta}{\delta H}$ sur $H\Delta H$.[53] Ce calcul de Z par approximations successives permet alors de calculer les valeurs critiques des paramètres et les exposants critiques. Par exemple T_c sera donnée par la condition que la susceptibilité χ diverge.

Pour mener à bien ces divers calculs, on passe en général par transformée de Fourier dans l'espace des moments.[54] L'avantage en est évidemment que les dérivations sur $\eta(x)$ y sont remplacées par de simples multiplications. Par exemple, dans le cas discret, avec $d = 3$ et η scalaire par simplicité[55], l'hamiltonien (5) :

$$\mathcal{H}(\eta) = \frac{1}{\beta} \int \left(\frac{1}{2} \|\nabla\eta(x)\|^2 + \frac{1}{2} r_0 \|\eta(x)\|^2 + \frac{u}{4!} \|\eta(x)\|^4 - H\eta(x) \right) dx$$

sera transformé en (avec $dk = dk_1 dk_2 dk_3$) :

$$\mathcal{H}(k) = \frac{1}{2\beta} \int_k (r_0 + |k|^2)|\eta_k|^2 dk + \frac{u}{4!\beta} \int_{k_1 k_2 k_3} \eta_{k_1}\eta_{k_2}\eta_{k_3}\eta_{-k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 - H\eta_0. \qquad (17)$$

Quant au propagateur Δ intervenant dans la formule fondamentale (14), il est tout simplement donné par $\Delta(k) = (r_0 + |k|^2 + \Lambda^{-2}|k|^4)^{-1}$.

3.6 Le modèle gaussien

Le modèle de Landau exposé à la section 2.2. consiste à faire le choix standard (5) pour l'hamiltonien et à le traiter dans une approximation analogue à celle de l'optique géométrique. Cela signifie que l'on ne considère dans la fonction de partition Z que les η qui *minimisent* $\int \mathcal{H}(\eta)dx$. Cela implique $\nabla\eta = 0$, donc $\eta =$ cste, et l'on est ainsi conduit à l'étude des

[51] Rappelons que les dérivées $\dfrac{\delta}{\delta H(x)}$ sont prises en $H = 0$.

[52] *Cf.* Brézin *et al.* [35].

[53] *Cf.* Wallace [195].

[54] Rappelons que la transformée de Fourier de $\eta_i(x)$ est donnée par $\widehat{\eta}_i(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\eta_i(x)dx$.

[55] On note η_k les composantes de Fourier de η.

minima de $\frac{1}{2}r_0\|\eta\|^2+\frac{u}{4!}\|\eta\|^4$. D'où le modèle du cusp et les valeurs classiques des exposants critiques.

Une autre approximation consiste à ne conserver de l'hamiltonien $\mathcal{H}(\eta)$ que la partie $\mathcal{H}_0$ en posant $\widetilde{\mathcal{H}}=0$, *i.e.* $u=0$. Dans ce cas, dit cas gaussien, l'on sait calculer Z comme une intégrale gaussienne (formule (13)). On obtient ainsi $\eta=0$, $\gamma=1$, $\nu=1/2$ et $\alpha=\frac{4-d}{2}$, $\beta=\frac{d-2}{4}$, $\delta=\frac{d+2}{d-2}$ pour $d<4$. Ces exposants satisfont aux lois d'échelle. On remarquera qu'ils correspondent aux valeurs classiques pour $d=4$. La coupure $d=4$ correspond à la divergence "infrarouge" des intégrales $I=\int_0^\infty \frac{|k|^{d-1}dk}{(r_0+|k|^2)^2}$ qui interviennent dans les calculs dans l'espace des moments.[56]

3.7 Quelques indications sur la méthode du GR

3.7.1 Explicitation de l'idée fondamentale

Nous avons esquissé à la section 3.4. l'idée de base de la méthode du GR. Pour l'expliciter, plaçons-nous dans le cas continu et dans l'espace des moments avec un paramètre de coupure (cut-off) $1/a$ (ce qui revient implicitement à discrétiser par un réseau de maille a).[57]

On a alors (toujours avec $d=3$, η scalaire, η_k = les composantes de Fourier de η et $dk=dk_1dk_2dk_3$) la nouvelle formule (17) :

$$\begin{aligned}\beta\mathcal{H}(\eta)&=\frac{1}{2}\int_{|k|<1/a}(r_0+|k|^2)|\eta_k|^2dk+\frac{u}{4!}\int_{|k|<1/a}\eta_{k_1}\eta_{k_2}\eta_{k_3}\eta_{-k_1-k_2-k_3}dk_1dk_2dk_3\\ Z&=\int e^{-\beta\mathcal{H}(\eta)}d\eta=\int\prod_{|k|<1/a}e^{-\beta\mathcal{H}(\eta)}d\eta_k.\end{aligned}\tag{18}$$

Dans la formule (18) donnant la fonction de partition on intègre *par blocs*, c'est-à-dire entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{sa}$ où s est un facteur >1 de dilatation des longueurs, et l'on définit *un nouvel hamiltonien* $\mathcal{H}_1$ par la formule fondamentale[58] :

$$e^{-\beta\mathcal{H}_1}=\int\prod_{1/sa<|k|<1/a}e^{-\beta\mathcal{H}}d\eta_k\ .\tag{19}$$

Cette intégration partielle sur les fluctuations rapides contient pratiquement toute la physique du système. Elle met en forme la tactique de Kadanoff de formation de blocs de spins. Exprimée à partir d'elle, la fonction de partition prend la nouvelle forme :

$$Z=\int\prod_{|k|<1/sa}e^{-\beta\mathcal{H}_1}d\eta_k\ .\tag{20}$$

Pour ramener Z à sa forme initiale invariante, on suppose que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$ appartiennent à une même famille d'hamiltoniens dont le terme en $|\eta_k|^2$ est toujours le même : $\frac{1}{2}|k|^2|\eta_k|^2$, et dont le paramètre de coupure $\frac{1}{a}$ est le même. Cette seconde opération consiste chez Kadanoff à ramener la maille des blocs de spins à la maille initiale en renormalisant les longueurs. On renormalise également la taille des spins de façon à préserver l'amplitude des fluctuations. Ces opérations définissent un nouvel hamiltonien $\mathcal{H}'=\mathcal{R}_s\mathcal{H}$ qui est le renormalisé de $\mathcal{H}$.

L'opérateur $\mathcal{H}'=\mathcal{R}_s\mathcal{H}$ est l'opérateur du GR. Il opère *a priori* sur l'espace fonctionnel $\mathcal{H}$ des hamiltoniens. Dans les cas très simples, le nouvel hamiltonien $\mathcal{H}'$ ne diffère de $\mathcal{H}$ que

[56] *Cf.* Toulouse-Pfeuty [190], section 2.2.

[57] Le Λ intervenant dans l'expression (6) est proportionnel à $\frac{1}{a}$.

[58] *Cf.* Toulouse-Pfeuty [190], p. 100.

par une renormalisation des paramètres de $\mathcal{H} : T, H, r_0, u$. Mais en général $\mathcal{H}'$ est d'un type beaucoup plus complexe que $\mathcal{H}$ et inclut par exemple des interactions avec des voisins non immédiats, des couplages à plus de 2 spins, etc. Comme l'expliquent Toulouse et Pfeuty, la renormalisation

> "engendre toutes sortes de nouvelles constantes de couplage dans $\mathcal{H}'$ parce qu'il n'est plus possible [contrairement à ce qui se passe dans le cas gaussien $u = 0$] d'intégrer indépendamment les fluctuations $[\eta_k]$."[59]

Il est donc en général difficile de trouver un "bon" espace de paramètres $\mathcal{P}$ ayant la propriété que si $\mathcal{H} \in \mathcal{P}$ alors $\mathcal{R}_s\mathcal{H} \in \mathcal{P}$. Pourtant, comme nous l'avons vu en 3.4, c'est dans un tel espace de dimension *finie* que l'on peut développer la conception dynamique (géométrico-topologique) du GR. L'essentiel des approximations consistera alors à réduire au maximum la dimension de $\mathcal{P}$. Cela est trés difficile car les calculs sont compliqués et leur contrôle, même qualitatif, délicat.

Pour expliquer ce qui est en jeu, plaçons-nous dans le cas discret, en suivant la présentation, déjà citée, de Niemeijer et Van Leeuwen. Partons d'une forme simplifiée de (1) :

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{i,j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

où les constantes de couplage J_{ij} prennent leurs valeurs dans un ensemble J_a, J_b etc. correspondant aux divers types d'interactions entre sites existant sur le réseau. Lorsque l'on passe d'un réseau à N spins à un réseau à N' blocs de spins, l'opération de renormalisation prend la forme:

$$\exp\left(G - \beta\mathcal{H}'(\sigma')\right) = \sum_{\{\sigma\}} P(\sigma', \sigma)\, \exp\left(-\beta\mathcal{H}(\sigma)\right) \tag{21}$$

où G est une constante introduite pour satisfaire les normalisations :

$$\sum_{\{\sigma\}} \mathcal{H}(\sigma) = \sum_{\{\sigma'\}} \mathcal{H}'(\sigma') = 0$$

et où $P(\sigma', \sigma) \geq 0$ est une fonction poids satisfaisant $\sum_{\{\sigma'\}} P(\sigma', \sigma) = 1$.

Cette dernière relation est imposée par l'invariance de Z par renormalisation :

$$\begin{aligned} Z' &= \sum_{\{\sigma'\}} \exp\left(G - \beta\mathcal{H}'(\sigma')\right) = \sum_{\{\sigma\}\{\sigma'\}} P(\sigma', \sigma) \exp(-\beta\mathcal{H}(\sigma)) \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta\mathcal{H}(\sigma)) = Z. \end{aligned}$$

La formule (21) peut s'interpréter comme une transformation sur les J'_{ij} : $J'_{ij} = J'_{ij}(J_l)$. Qui plus est, soit f l'énergie libre par site : $F' = N'(J')f(J')$, $F = N(J)f(J)$. Si l'on pose $G(J) = Ng(J)$, on a, puisque $N/N' = s^d$, l'expression suivante pour l'égalité triviale $G + F' = F$:

$$f(J) = g(J) + s^{-d} f(J') \ . \tag{22}$$

Ce sont *les équations de renormalisation* dans l'espace des J_{ij}. En faisant l'hypothèse que $g(J)$ et $J'(J)$ sont des fonctions régulières, on cherchera alors à analyser les *singularités* de la fonction f.

On voit très clairement sur cette formulation la façon dont on obtient les lois d'échelle. Soit J^* un point fixe linéarisable du GR dans l'espace des J_{ij}. Soient μ_i les champs d'échelle tangents aux vecteurs propres (de valeurs propres λ_i) du linéarisé. Supposons le paramètre μ_1 pertinent (*i.e.* $|\lambda_1| > 1$) et supposons que $f(\mu_1)$ suive une loi de puissance en $|\mu_1|^{a_1}$

[59] Toulouse-Pfeuty [190], p. 108

au voisinage de 0 (rappelons que tous les champs pertinents s'annulent sur l'hypersurface critique S_∞, *cf.* section 3.4). Comme g est régulière, l'équation (22) implique $|\mu_1|^{a_1} \sim s^{-d}|\lambda_1\mu_1|^{a_1}$. Comme $\lambda_1 = s^{\alpha_1}$, on en tire l'exposant critique $a_1 = d/\alpha_1$.

D'autre part, il est clair que l'équation (22) est une équation de *récurrence* et doit donc être itérée. Si on l'écrit au voisinage de J^* comme $f(\mu) = g(\mu) + s^{-d}f(\lambda\mu)$, on obtient par itération :

$$f(\mu) = \sum_{j=0}^{n-1} s^{-jd} g(\lambda^j \mu) + s^{-nd} f(\lambda^n \mu) \; . \tag{23}$$

Avec la condition aux limites $s^{-nd}f(\lambda^n\mu) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, on obtient $f(\mu)$ comme série à partir de la fonction g :

$$f(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} s^{-jd} g(\lambda^j \mu) \; . \tag{24}$$

Si l'on connaît un développement de g en série : $g(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \mu^n$ alors on dispose d'un schéma computationnel pour calculer le comportement critique.

3.7.2 Le cas gaussien

Appliquons la méthode du GR au cas gaussien $u = 0$. On a d'après (17), (18) et (20) :

$$\beta\mathcal{H}(\eta) = \frac{1}{2}\int_{|k|<1/a} (r_0 + |k|^2)|\eta_k|^2 dk \tag{25}$$

$$Z = \int \prod_{|k|<1/a} e^{-\beta\mathcal{H}(\eta)} d\eta_k = \int \prod_{|k|<1/sa} e^{-\beta\mathcal{H}_1(\eta)} d\eta_k \; . \tag{26}$$

Mais si $u = 0$ les différentes composantes sont *découplées*. Pour voir très élémentairement ce que cela signifie, discrétisons k et remplaçons $\int_{|k|<1/a}$ par une somme $\sum_{|k|<1/a}$. Il est alors évident que $-\beta\mathcal{H}(\eta)$ est une somme de composantes indépendantes $h_k = \frac{1}{2}(r_0 + |k|^2)|\eta_k|^2$. On a donc d'après (26) :

$$Z = \int_{|k|<1/a} e^{\left(\sum_{|k|<1/a} h_k\right)} d\eta_k = \int \prod_{|k|<1/a} e^{h_k} d\eta_k \; .$$

Pour l'écrire sous la forme $\int_{|k|<1/sa} e^{-\beta\mathcal{H}_1(\eta)} d\eta_k$, il faut que l'on ait $-\beta\mathcal{H}_1 = \sum_{|k|<1/sa} h_k$ à une constante additive près. En revenant des sommes aux intégrales, on a donc :

$$-\beta\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\int_{|k|<1/sa} (r_0 + |k|^2)|\eta_k|^2 dk \; . \tag{27}$$

Si l'on renormalise les longueurs ($k = k'/s$), cela donne :

$$-\beta\mathcal{H}' = \frac{1}{2}\int_{|k'|<1/a} (r_0 + |k|'^2/s^2) s^{-d} |\eta_{k'}|^2 dk' \; . \tag{28}$$

Pour que $\mathcal{H}'$ ait le même coefficient de $|k|'^2|\eta_{k'}|^2$ que $\mathcal{H}$ (*cf.* plus haut), il faut également renormaliser les spins en posant $\eta = \zeta\eta'$. On doit avoir $\frac{|k|'^2}{s^2} s^{-d} |\zeta\eta'|^2 = |k|'^2 |\eta'|^2$, soit $s^{-(d+2)}\zeta^2 = 1$, soit $\zeta = s^{\frac{d+2}{2}}$. On peut alors écrire, à une constante additive près,

$$-\beta\mathcal{H}' = \frac{1}{2}\int_{|k'|<1/a} (r_0' + |k|'^2)|\eta_{k'}'|^2 dk' \tag{29}$$

avec $r_0 s^{-d}|\eta|^2 = r_0'|\eta'^2$, soit $r_0' = r_0 s^{-d}\zeta^2 = r_0 s^{-d} s^{d+2} = r_0 s^2$.

L'équation :

$$r_0' = r_0 s^2 \tag{30}$$

est l'équation de renormalisation puisque $\mathcal{H}'$ ne dépend, comme $\mathcal{H}$, que du seul paramètre r_0'. Ici l'espace $\mathcal{P}$ est unidimensionnel et l'équation (19) triviale. Cela est dû au découplage des composantes. Qui plus est le GR opère comme simple homothétie dans $\mathcal{P}$ (*i.e.* comme changement d'échelle) et cela explique pourquoi il retrouve les résultats de la simple analyse dimensionnelle (*cf.* section 3.3.).

Cette analyse du point fixe gaussien G donné par $r_0 = 0$ permet de montrer facilement pourquoi, à la traversée de la dimension $d = 4$, il y a échange de stabilité entre G et un autre point fixe NG non gaussien, ainsi que nous l'avons anticipé en 3.4. (*cf.* Fig. 13). Nous venons de voir que η_k se renormalise en $\eta_k = \zeta \eta_k'$ avec $\zeta = s^{\frac{d+2}{2}}$. Comme dans l'espace des positions (et non plus des moments) $\eta(x) = \int \eta_k e^{ikx} dk$, η se renormalise en s^τ avec $s^\tau = s^d \zeta^{-1}$. Ce qui donne $\tau = \dfrac{d-2}{2}$. η^p se renormalise en $s^{p\tau}$. Par suite, les termes $u_p \eta^p$ de l'hamiltonien voient leurs coefficients u_p se renormaliser en s^{y_p} avec $y_p = d - p\tau$. Reintroduisons alors le terme $\dfrac{u}{4!}\|\eta\|^4$. Son coefficient u se renormalise en s^{y_4} avec $y_4 = d - 4\tau = d - 4\left(\dfrac{d-2}{2}\right) = 4 - d$. Dans l'espace des (u, r_0) le point fixe gaussien G correspond à $u = 0$, $r_0 = 0$. Le champ r_0 est toujours pertinent. Mais le champ u ne l'est que pour $y_4 > 0$, *i.e.* pour $d < 4$. Dans ce cas, il entraîne le système vers un point fixe non gaussien.

3.7.3 Les développements en $\varepsilon = 4 - d$

La méthode de calcul la plus puissante du GR a été introduite par Kenneth Wilson. Elle consiste à trouver des développements en $\varepsilon = 4 - d$ des grandeurs et des exposants critiques considérés. Comme le notent Toulouse et Pfeuty, ces développements

> "constituent un haut fait de la physique. Ils ont bouleversé la façon d'aborder des problèmes, la valeur accordée à des approximations. Ils ont contribué à poser les questions différemment. Il y a là quelque chose qui mérite méditation."[60]

Il est impossible de donner ici serait-ce un aperçu de ces techniques. Elles dépassent d'ailleurs nos compétences. Mais pour en donner néanmoins une vague idée, indiquons, en suivant Wallace [195], comment elles apparaissent.

Partons de notre hamiltonien standard dans l'espace des moments. Nous avons indiqué en 3.5. que l'on peut calculer les fonctions de corrélation G en appliquant le théorème de Wick (méthode des graphes de Feynman) et que cela fait intervenir le propagateur $\Delta(k) = (r_0 + |k|^2 + \Lambda^{-2}|k|^4)^{-1}$. On obtient ainsi des développements des fonctions G comme fonctions de r_0, u et Λ. Toutefois, comme on ne connaît pas $u(T_c)$ et $r_0(T_c)$, ceux-ci ne sont pas trés utiles. Il est donc intéressant d'exprimer G en fonction de χ car, pour connaître son comportement critique, il suffira d'y faire $\chi \to \infty$. Pour cela, on décompose de façon nouvelle l'hamiltonien en l'écrivant sous la forme $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 + \mathcal{H}^1$ avec :

$$\begin{cases} \beta\mathcal{H}^0 = \int \left(\dfrac{1}{2}\|\nabla\eta\|^2 + \dfrac{1}{2} r \|\eta\|^2 + \dfrac{\Lambda^{-2}}{2}\|\nabla^2\eta\|^2 - H\eta \right) dx \\ \beta H^1 = \int \left(\dfrac{u}{4!}\|\eta\|^4 + \dfrac{1}{2}(r_0 - r)\|\eta\|^2 \right) dx. \end{cases} \tag{31}$$

Pour $r = r_0$ on retrouve la décomposition standard intervenant dans les formules (10) et (11). L'intérêt de ce "truc" est que, si l'on pose $r = 1/\chi$, alors la partie "quadratique" $\beta\mathcal{H}^0$ donne *exactement* la fonction de corrélation $G^{(2)}$ en $k = 0$. En appliquant la méthode des graphes de Feynman, on en arrive ainsi à une expression de la température réduite $\tau = r_0(T) - r_0(T_c)$ en fonction de r qui, à travers χ, est bien une fonction de T :

[60] Toulouse-Pfeuty [190], p. 148.

$$\tau = r - \frac{u}{6}\,(n+2) r (2\pi)^{-d} \int \frac{dk}{(|k|^2 + r + \Lambda^{-2}|k|^4)(|k|^2 + \Lambda^{-2}|k|^4)} \tag{32}$$

Pour $d < 4$, ces intégrales présentent une divergence "infrarouge" lorsque $k \to 0$. Pour $d > 4$ elles sont convergentes.

On peut en fait les développer en puissance de ε. On trouve au premier ordre :

$$\tau = r\left(1 - \frac{n+2}{n+8}\,\varepsilon\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{r}{\Lambda^2} + \dots\right)\right) + 0(\varepsilon^2)\ . \tag{33}$$

L'idée fondamentale du GR exprimée par la formule (19) est que cette série est le développement en ε d'une *exponentielle*. Celle-ci ne peut alors être que

$$\tau \sim r(r/\Lambda^2)^{\frac{-\varepsilon(n+2)}{2(n+8)}}\ . \tag{34}$$

Mais comme $r = \chi^{-1}$, $\chi \sim (T - T_c)^{-\gamma}$ et $\tau \sim T - T_c = \Delta T$, on a $\Delta T \sim (\Delta T^{\gamma})^{1 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{n+2}{n+8}}$, *i.e.*

$$\gamma = \frac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{n+2}{n+8}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n+2}{n+8} + 0(\varepsilon^2) \text{ au deuxième ordre en } \varepsilon\ . \tag{35}$$

De tels calculs ont permis de développer en ε les équations *infinitésimales* du GR (*i.e.* celles du champ de vecteurs associé au GR). Plaçons-nous (ce qui est une approximation) dans l'espace bidimensionnel $\mathcal{P}$ des paramètres r_0 et u. Soit h le point représentant un hamiltonien $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{P}$. Le générateur infinitésimal $\mathcal{G}$ de $\mathcal{R}_s$ est donné par $\mathcal{R}_{1+\delta} = I + \mathcal{G}\delta + \dots$ et, si l'on pose $s = e^t$ où t est infinitésimal, la version infinitésimale de l'opération de renormalisation $\mathcal{H}' = \mathcal{R}_s\mathcal{H}$ est l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dh}{dt} = \mathcal{G}(h)\ . \tag{36}$$

On trouve au second ordre en ε le système non linéaire[61]

$$\begin{cases} \frac{dr_0}{dt} = 2\left(r_0 + \frac{(n+2)}{3}u\,(1 - r_0)\right) \\ \frac{du}{dt} = \varepsilon u - \frac{2}{3}\,(n+8)\,u^2 \end{cases} \tag{37}$$

Le point gaussien correspond, nous l'avons vu, à la solution triviale $u = 0$, $r_0 = 0$. Le linéarisé du champ G y est la matrice $L_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2\,(n+2)\,/3 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$ de valeurs propres 2 et ε. Le champ r_0 est toujours pertinent et si $d > 4$ ($\varepsilon < 0$) le champ u est non pertinent (cf. plus haut).

Mais il existe clairement un autre point fixe de (37) donné par

$$\begin{cases} r_0^* = \left(\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{n+2}{n+8}\right) / \left(\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{n+2}{n+8} - 1\right) \\ u^* = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\varepsilon}{n+8} \end{cases}$$

soit, au premier ordre en ε :

$$\begin{cases} r_0^* = -\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{n+2}{n+8} \\ u^* = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\varepsilon}{n+8} \end{cases} \tag{38}$$

Les valeurs propres du linéarisé y sont $2 - \varepsilon\dfrac{n+2}{n+8}$ et $-\varepsilon$.

[61] *Cf.* Boccara [27], p. 261 et Toulouse-Pfeuty [190], p. 126.

Il est alors immédiat de calculer au premier ordre la valeur des exposants critiques. On trouve $\beta = \frac{1}{2} - \varepsilon\frac{3}{2(n+8)}$, $\alpha = -\varepsilon\frac{n-4}{2(n+8)}$, $\gamma = 1 + \varepsilon\frac{n+2}{2(n+8)}$, $\nu = \frac{1}{2} + \varepsilon\frac{n+2}{4(n+8)}$ et $\delta = 3 + \varepsilon$. On vérifiera qu'ils satisfont les lois d'échelle.

Donnons pour le plaisir les développements à l'ordre 3 (on pourra apprécier la performance)[62]:

$$\begin{aligned}
\gamma = 1 &+ \varepsilon \cdot \frac{n+2}{2(n+8)} + \varepsilon^2 \cdot \frac{(n+2)(n^2+22n+52)}{4(n+8)^3} + \\
&\varepsilon^3 \cdot \frac{n+2}{8(n+8)^3}\left[(n+2)^2 + \frac{4(55n^2+268n+424)}{(n+8)^2} + \right. \\
&\left. 24\,\frac{(n+2)(n+3) - (10n+44)\zeta(3)}{(n+8)}\right] + 0(\varepsilon^4), \\
\eta = &\varepsilon^2 \cdot \frac{n+2}{2(n+8)^2}\left\{1 + \varepsilon\left(\frac{6(3n+14)}{(n+8)^2} - \frac{1}{4}\right) + \right. \\
&\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{(n+8)^2}\left[45\,\frac{(3n+14)^2}{(n+8)^2} - 8 \cdot \frac{3n^2+53n+160}{n+8} - \right. \\
&\left.\left. \frac{1}{16}(-5n^2+234n+1076) - 24\,\frac{(5n+22)}{(n+8)} \cdot \zeta(3)\right]\right\} + 0(\varepsilon^5).
\end{aligned}$$

3.8 Compléments

Pour donner une idée un tant soit peut satisfaisante du GR, il faudrait apporter évidemment de nombreuses précisions et dire un mot de nombreuses généralisations possibles. Citons-en brièvement quelques-unes.

3.8.1 Les développements en $\frac{1}{n}$

En plus des développements en ε on peut calculer des développements en $\frac{1}{n}$. Cela est nécessaire pour certains systèmes où la dimensionalité n du paramètre d'ordre est très élevée et tend vers l'infini. Dans ce cas, une approximation consiste à découpler les composantes du paramètre d'ordre et, en quelque sorte, à développer une théorie du champ moyen non plus entre spins voisins mais entre composantes (*cf.* Toulouse-Pfeuty section 2.6 : approximation de Hartree).

3.8.2 Théorie des points tricritiques

Il s'agit de développer la théorie précédente avec un hamiltonien contenant un terme en $\|\eta\|^6$ (ce qui permet au coefficient u d'être < 0.)

3.8.3 Systèmes complexes

Certains systèmes sont également définis par des contraintes globales sur des variables extensives et par des contraintes aux limites. Le paramètre d'ordre peut y être couplé avec d'autres degrés de liberté (cas des impuretés, cas des cristaux liquides, etc.). Tout cela complexifie et enrichit considérablement les analyses du GR.

3.8.4 Anisotropie

Citons enfin les situations d'anisotropie où les constantes de couplage dépendent de certaines directions privilégiées. On peut par exemple considérer des hamiltoniens de la forme:

$$\beta\mathcal{H} = \int \left(\frac{1}{2}\|\nabla\eta\|^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\eta_i^2\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{u_{ij}}{4!}\ \eta_i^2\eta_j^2\right) dx$$

[62] *Cf.* Fisher [75], p. 67, Wallace [195], p. 318 et Toulouse-Pfeuty [190], p. 152. $\zeta(x)$ est la fonction zéta de Riemann.

Le lecteur intéressé trouvera des précisions par exemple dans Aharony [1].

3.8.5 Phénomènes de cross-over

Nous les avons définis plus haut à la section 3.4 : avant de rejoindre son comportement critique, le système passe au voisinage d'un autre régime critique (*cf.* Fig. 12).

3.8.6 La percolation

On a beaucoup étudié ces derniers temps les parallèles qui existent entre les phénomènes de transitions de phases et ceux de percolation.

3.9 Les infrastructures catastrophiques universelles

Mais notre propos était plus épistémologique que vulgarisateur. Nous avons vu dans le cas d'un point critique "simple" comment l'on passait explicitement de la description des infrastructures catastrophiques en termes de TE (approximation de Landau) à une description plus rigoureuse qui reste qualitative et universaliste tout en permettant d'accéder à une maîtrise quantitative de chaque type de comportement critique. Nous sommes donc fondés à affirmer :

1. qu'il existe des "infrastructures" catastrophiques des phénomènes critiques;[63]
2. que celles-ci sont contraintes par des contraintes universelles;
3. que la différence entre approximation géométrique et approximation semi-classique possède elle-même une certaine universalité (optique, mécanique quantique, thermodynamique, etc.);
4. que l'on commence à voir se manifester une unité théorique des phénomènes critiques (comme autrefois on a vu se manifester une unité théorique des phénomènes dynamiques) et donc se dégager un *niveau de réalité* commun à plusieurs domaines.

Pour conclure ce texte, nous allons à présent montrer comment la résolution exacte du GR sur des réseaux de géométrie très particulière a conduit à des modèles que l'on peut considérer comme relevant de la TG.

4 Zéros de la fonction de partition et ensembles de Julia

4.1 Les zéros de Z

Revenons à un modèle discret simple comme un modèle d'Ising isotrope sur un réseau à M sites et à N liens. On a la fonction de partition :

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp(-\beta \mathcal{H}(\sigma)), \ \textit{i.e.}$$

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left(-\beta\left(\sum_{\langle i,j\rangle} J\sigma_i\sigma_j - H\sum_{i=1}^{M}\sigma_i\right)\right)$$

où $\sum_{\langle i,j\rangle}$ désigne une somme sur les couples (i,j), $i,j = 1,\ldots,M$, de sites voisins. Quitte à ajouter une constante à $\mathcal{H}(\sigma)$, on peut réécrire Z sous la forme :

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left(-\beta\left(\sum_{\langle i,j\rangle} J(\sigma_i\sigma_j - 1) - H\sum_{i}(\sigma_i - 1)\right)\right) \ .$$

[63] On peut chercher à interpréter les valeurs non classiques des exposants critiques en restant dans le cadre de la TE. Il suffit d'admettre des changements *non différentiables* de coordonnées en posant $x = \eta^\theta$ et $u = \tau^\lambda$ où τ est la température réduite $\Delta T/T_c$ et u le facteur de splitting du cusp normal (*cf.* Keller *et al.* [105]). Cela a l'avantage de montrer que *topologiquement* les "infrastructures catastrophiques" existent réellement.

Soit alors $C_{m,n}$ la classe des configurations $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ ayant m spins σ_i égaux à -1 et n arêtes reliant des spins σ_i et σ_j opposés ($\sigma_i\sigma_j = -1$).[64] Soit $c_{m,n}$ le cardinal de $C_{m,n}$. Il est alors trivial d'écrire Z comme un *polynôme* en les variables $y = e^{-2\beta H}$, $t = e^{2\beta J}$. En effet, si $\sigma \in C_{m,n}$, comme on a $\sigma_i\sigma_j - 1 = 0$ si $\sigma_i\sigma_j = 1$ et $\sigma_i - 1 = 0$ si $\sigma_i = 1$, on a $\exp(-\beta\mathcal{H}(\sigma)) = \exp(\beta n 2J - \beta m 2H)$ et donc

$$Z = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} c_{m,n} y^m t^n.$$

Cette remarque a permis à Lee et Yang d'introduire une nouvelle idée directrice. Si $Z(y,t)$ est un polynôme, il est connu par la localisation de ses zéros.[65] Il est donc intéressant et utile de connaître la forme de leur distribution Ω. Mais cela exige de se situer dans les plans complexes des t et des y (*i.e.* dans $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$) et donc de considérer des températures et des champs magnétiques imaginaires. Cette extension apparemment sans aucun sens physique est pourtant naturelle. Elle fait partie de la donnée du problème et permet en quelque sorte de "visualiser" la complexité de Z.

Mais il est évidemment aussi difficile de calculer Ω que de calculer Z. Citons toutefois les deux résultats suivants :

1. à t fixé (*i.e.* à J et β fixés), l'ensemble Ω_t des 0 des $Z_t = Z(t,y)$ est inclus dans le cercle unité (théorème de Lee et Yang);

2. à y fixé (*i.e.* à H fixé) $y = 1$ et, en dimension 2, l'ensemble Ω_y des 0 de $Z_y(t) = Z(t,y)$ est inclus dans une paire de cercles.

Dans le cas général, on fera une étude numérique de Ω_y et l'on étudiera sa variation en fonction de y (*i.e.* de H) (*cf.* Fig. 16).

Dans la limite thermodynamique ($M \to \infty$, $N \to \infty$) l'ensemble Ω des 0 de Z devient infini. Il sera en général d'une extrême complexité, mais l'on peut dire a priori (pour $H = 0$) qu'il admettra pour points d'accumulation certains points de l'axe réel du plan des t, points T_c correspondant précisément aux températures critiques puisque, en ces points, Z s'annule et donc l'énergie libre $F(\eta)$ diverge. On peut également dire a priori que si dans la région critique il y a renormalisation possible de Z (scaling), alors il y a également une renormalisation de Ω et donc aux points critiques t_c, $\Omega_c = \Omega_{t_c}$ devra présenter des propriétés *d'auto-similitude*. Or cela implique que si Ω_c possède une structure locale non triviale (même simple) à une certaine échelle, il doit la posséder à toutes les échelles et il doit donc posséder une structure interne *fractale*, de complexité infinie.

4.2 Les modèles hiérarchiques

Une telle structure fractale apparaît sur des modèles de géométrie très particulière – dits modèles *hiérarchiques* – sur lesquels les approximations itératives du GR deviennent *exactes*. Ces réseaux fournissent une vaste classes de modèles *exactement* solubles sur lesquels on peut facilement "visualiser" les opérations du GR.[66] La critique qu'on peut leur adresser est que leur géométrie est très différente de celle des réseaux de Bravais que l'on considère habituellement. Mais on pourra également chercher à approximer ces derniers par des réseaux hiérarchiques en espérant contrôler sur de telles approximations de la géométrie du réseau les approximations du GR (qui se font, elles, à réseau constant).[67]

L'idée des modèles hiérarchiques est de construire le réseau récursivement par une procédure d'expansion dont l'inverse correspond exactement à une procédure de réduction à la Kadanoff. La figure 17 en montre un exemple simple (réseau en "diamant"). A chaque étape, le réseau se complexifie, chaque liaison se trouvant substituée par un motif standard (ici le "diamant").

[64] *Cf.* Itzykson *et al.* [98].

[65] Comme Z est une intégrale d'exponentielles $e^{-\beta\mathcal{H}(\sigma)}$, Z ne peut avoir de zéro *réel* que lorsque $\beta\mathcal{H}(\sigma) = \infty$, *i.e.* lorsque l'énergie diverge, *i.e.* lorsque l'on est au point critique.

[66] *Cf.* par exemple Griffiths-Kaufman [82] et Kaufman-Griffiths [104].

[67] *Cf.* par exemple les travaux de Derrida-Flyvbjerg [58].

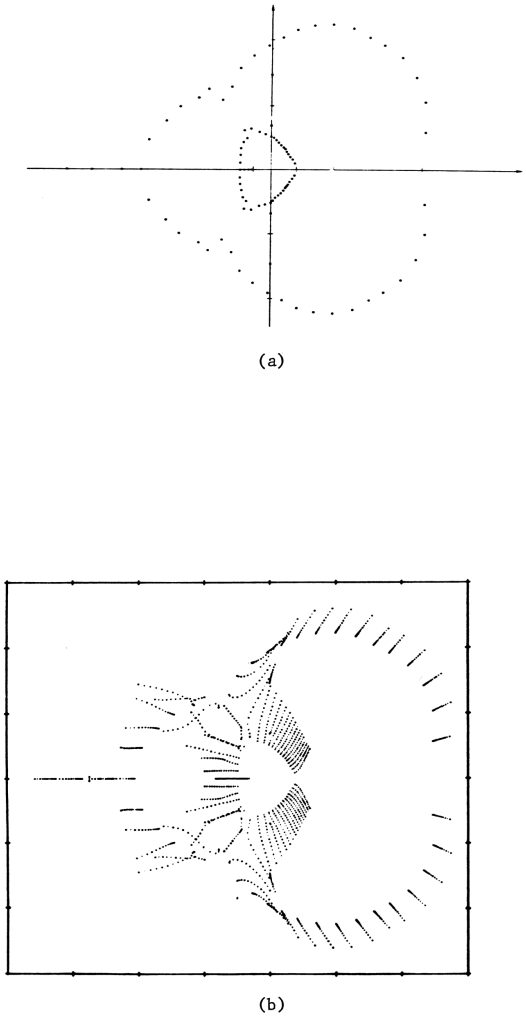


Figure 16: (a) Ensemble des zéros de Z dans le plan complexe $u = t^2$ pour un réseau cubique $4 \times 4 \times 4$. (b) Variation en fonction de H. D'après Itzykson *et al.* [98].

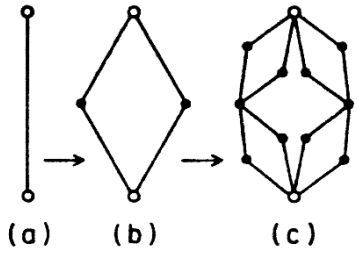


Figure 17: Construction d'un réseau hiérarchique en "diamant". (a) Liason initiale. (b) Expansion. (c) Itération. D'après Griffiths-Kaufman [82].

Si maintenant l'on part d'un tel réseau, de cardinal N trés grand, muni de spins à ses différents sites, on peut lui appliquer une procédure de réduction à la Kadanoff en prenant pour blocs de spins précisément les motifs standard et en les remplaçant par des liaisons simples. La réduction est donc bien l'opération inverse de la procédure de construction du réseau. Soit B le cardinal du motif standard, dit "nombre d'agrégation" ($B = 4$ dans la figure 17).

On montre que[68] :

1. $B^{-N}\mathrm{Log}\, Z_N$ tend vers une limite bien définie lorsque N tend vers l'infini (limite thermodynamique).

2. Il n'y a pas un seul réseau pour $N = \infty$ mais plusieurs réseaux géométriquement (topologiquement) non équivalents. Toutefois leur thermodynamique est la même.

3. Les réseaux sont très *inhomogènes*. Si certains liens (avec un couplage K particulier) ne sont pas itérés, on peut obtenir des exposants critiques variant *continûment* avec K.

4. Si les interactions non itérées croissent indéfiniment, le système limite peut présenter une coexistence de phases (transition du premier ordre).

Remarquons que sur un modèle hiérarchique le nombre d'agrégation B correspond à s^d dans les modèles à réseau de Bravais. Mais on ne sait définir ni d (dimensionalité du système), ni s (dilatation des longueurs). On ne peut définir que les exposants thermodynamiques α et γ, et non pas ceux ν et η liés à la longueur de corrélation ξ.

Considérons alors un modèle de Potts sans champ extérieur sur un réseau hiérarchique en "diamant". On a l'hamiltonien

$$\mathcal{H}(\sigma) = \sum_{\langle i,j\rangle} J\delta_{\sigma_i\sigma_j} \tag{39}$$

où les σ_i peuvent prendre q valeurs et où δ est le symbole de Kronecker (si $\sigma_i \neq \sigma_j$ il n'y a donc pas d'interaction). En fonction de la variable $z = e^{-\beta J}$, on peut alors calculer explicitement une relation de récurrence liant $Z_n(z)$ à $Z_{n-1}(z)$, où Z_n est la fonction de partition correspondant au réseau obtenu à la n-ème étape de la procédure de construction. On obtient[69] :

$$\begin{cases} Z_n(z) = Z_{n-1}(z')[A(z)]^{2\cdot 4^{n-2}} \text{ avec } A(z) = 2z + q - 2 \text{ et} \\ z' = T(z) = \left(\dfrac{z^2+q-1}{2z+q-2}\right)^2 \end{cases} \tag{40}$$

T est la *transformation de renormalisation*. Elle permet de calculer Z_n en fonction de Z_1. Mais pour le réseau trivial constitué de deux sites σ_1 et σ_2 reliés entre eux on a :

$$\begin{aligned} &Z_1 = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta J\delta_{\sigma_1\sigma_2}} = \sum_{\sigma=1}^{q} e^{-\beta J} + \sum_{\sigma_1\neq\sigma_2} e^0 = qz + q^2 - q, \text{ soit} \\ &Z_1 = q(z+q-1). \end{aligned}$$

A partir de (40) il est facile de calculer récursivement l'ensemble Ω_n des 0 de Z_n. Ecrivons en effet $Z_n(z) = q\prod_{i=1}^{4^{n-1}}(z - z_i)$. C'est un polynôme de degré 4^{n-1}. Soient $\widetilde{z}_i$, $i = 1, \ldots, 4^{n-2}$ les 0 de Z_{n-1}. On a d'après (40) :

[68] *Cf.* Kaufman-Griffiths [104].
[69] *Cf.* Derrida *et al.* [56].

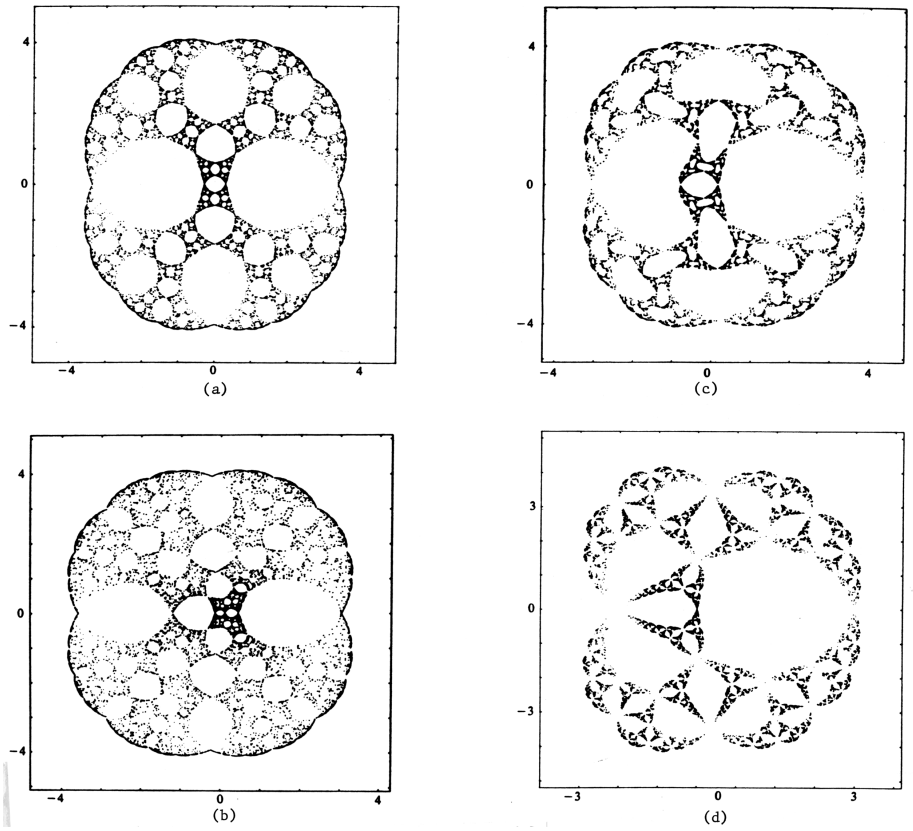


Figure 18: Le fractal des zéros complexes de la fonction de partition Z d'un modèle hiérarchique de Potts sur un réseau en "diamant". Le nombre q de composantes des spins est traité comme un paramètre continu. (a) $q = 1$, (b) $q = 1,5$, (c) $q = 2,5$, (d) $q = 3$. D'après Derrida, de Sèze, Itzykson [56].

$$
\begin{aligned}
q\prod_{i=1}^{4^{n-1}}(z-z_i) &= q\prod_{i=1}^{4^{n-2}}\left(\left(\frac{z^2+q-1}{2z+q-2}\right)^2-\widetilde{z}_i\right)(2z+q-2)^{2\cdot 4^{n-2}}\,,\ \text{soit}\\
\prod_{i=1}^{4^{n-1}}(z-z_i) &= \prod_{i=1}^{4^{n-2}}\left((z^2+q-1)^2-\widetilde{z}_i(2z+q-2)\right) = \prod_{i=1}^{4^{n-2}}P_i(z)
\end{aligned}
\tag{41}
$$

où les $P_i(z)$ sont des polynômes de degré 4.

On voit que $P_i(z) = 0$ si et seulement si $T(z) = \widetilde{z}_i$. Pour passer de Ω_{n-1} à Ω_n il suffit donc de prendre les images inverses de Ω_{n-1} par la transformation de renormalisation T. Comme $Z_1(z)$ admet $1-q$ pour zéro unique, Ω_n est constitué des 4^{n-1} pré-images de $1-q$ par T^{n-1}. Dans la limite $n \to \infty$ on obtient ainsi un ensemble fractal $\Omega = \Omega_\infty$ dont la géométrie est de toute beauté (*cf.* Fig. 18).[70] On constate que ces ensembles s'accumulent "en pointe" sur certaines valeurs *réelles* correspondant aux températures critiques des transitions ferromagnétiques et antiferromagnétiques.

En ce qui concerne maintenant l'énergie libre par site f, on obtient la relation de récurrence (que l'on comparera avec (22))

$$f(T(z)) = 4f(z) - 2\,\mathrm{Log}(2z+q-2)\,. \tag{42}$$

[70] Nous verrons en 4.6 que Ω_∞ est *l'ensemble de Julia* de T.

Nous avons vu en 3.7.1 comment une telle récurrence fournit, au voisinage d'un point fixe de T, un schéma computationnel pour calculer le comportement critique. On obtient, au voisinage du point fixe z_c donné par $q = \left(\sqrt{z_c} - 1\right)(z_c - 1)$, f sous la forme d'une série de logarithmes :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} g(z_n) \text{ avec } g(z) = \frac{1}{2}\text{Log}(2z + q - 2) \text{ et } z_n = T(z_{n-1}) \; . \tag{43}$$

En écrivant que les parties singulières des deux membres de l'équation (42) sont égales, on obtient, en se plaçant toujours au voisinage de z_c supposé *instable* et en écrivant (42) sous la forme $f(z) = \frac{1}{2}\text{Log}(2z+q-2) + \frac{1}{4} f(T(z))$ et $T(z) = T(z_c) + T'(Z_c)(z - z_c)$, la formule :

$$f_{\text{sing}}(z) = \frac{1}{4} f_{\text{sing}}(T(z_c) + T'(z_c)(z - z_c)) \tag{44}$$

dont la solution type est donnée par:

$$f_{\text{sing}}(z) \sim |z - z_c|^{2-\alpha} h\left(\frac{\text{Log}|z - z_c|}{\text{Log}\, T'(z_c)}\right) \tag{45}$$

où $\alpha = \dfrac{\text{Log}4}{\text{Log}\, T'(z_c)}$ et où $T'(z_c) = \dfrac{4z_c}{\left(\sqrt{z_c}+1\right)^2}$ est la dérivée de T en z_c.[71]

4.3 La possibilité du chaos

D'après la formule de récurrence (42), le comportement de l'énergie libre f dépend essentiellement de la structure dynamique de T, où l'on entend par structure dynamique la structure qualitative des trajectoires obtenues par itération de T. Dans les exemples précédents, T est une *fonction rationnelle* de z et on est donc naturellement conduit à analyser dynamiquement ces fractions rationnelles. A travers l'idée de Lee et Yang et l'usage des modèles hiérarchiques, la théorie du GR rejoint ainsi un nouveau thème mathématique d'une profondeur tout à fait fascinante et qui était jusqu'ici complètement étranger au domaine des transitions de phases.[72] Nous trouvons là un exemple spectaculaire de l'impossibilité de préjuger des mathématiques pertinentes pour un domaine empirique et du merveilleux gain d'unité théorique qu'entraîne en général toute idée forte une fois qu'elle a pu être mathématisée.

La fonction Log dans (42) est une fonction analytique de z. On peut montrer que f est analytique au voisinage des points fixes *stables* z_s (ou des k-cycles stables)[73] de T. En effet, comme T est contractante sur le bassin des z_s[74], les $g(T^n(z))$ de la formule (43) y sont uniformément bornés et la série (43) est celle d'une fonction analytique. En revanche si z_s est un point fixe (ou un k-cycle) *instable* – cas qui correspond précisément aux transitions de phases – alors f admet en général une *singularité*. Mais, comme nous allons le voir, T aura en général *beaucoup* de cycles instables. Ceux-ci, ainsi que toutes leurs pré-images, donneront alors des singularités de f. La fonction f peut donc présenter, méme pour des transformations de renormalisation très simples, une structure singulière *chaotique* (infinité de températures critiques). La figure 19 en donne un exemple pour l'application, sur laquelle nous allons revenir,

$$T(z) = \mu z(z-1), \mu \in [0,4], g(t) = t \; . \tag{46}$$

[71] *Cf.* Derrida-Itzykson-Luck [59]. On remarquera que dans (45) la loi de puissance en $|z - z_c|$ est modulée par la fonction h de période 1 dont le calcul est difficile. Cela est dû au fait que les opérations de renormalisation sur les réseaux hiérarchiques n'admettent pas de générateur infinitésimal.

[72] Note de 2010. "Nouveau" en 1982.

[73] Un k-cycle de T est un point fixe de T^k.

[74] Nous allons voir que ce bassin a une topologie en général très compliquée.

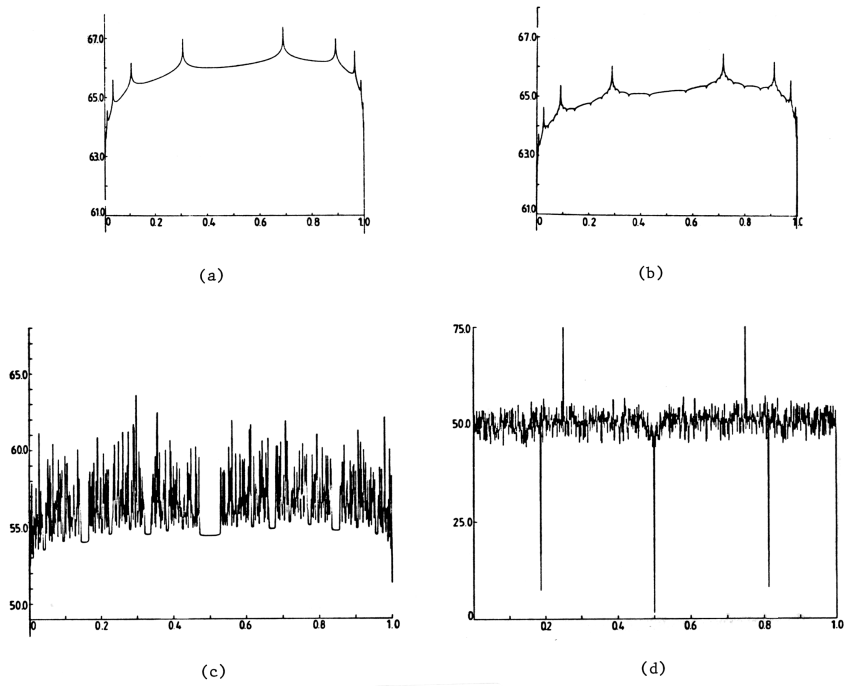


Figure 19: La fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} g(T^n(z))$ avec $g(z) = z$, $T(z) = \mu z(1-z)$, et $a = 1,01$. (a) $\mu = 3,236$ 2-période stable. (b) $\mu = 3,49$ 4-période stable. (c) $\mu = 3,832$ 3-période stable. (d) $\mu = 4$ pas de période stable. D'après Derrida, Eckmann, Erzan [57].

4.4 La renormalisation comme paradigme

On voit ainsi l'idée du GR migrer de la physique aux mathématiques pures et devenir une idée force abstraite. C'est pourquoi ces dernières années[75], on a été conduit (en faisant un usage intensif de l'analyse numérique) à étudier en grand détail des cas mathématiques *explicites* d'opération de renormalisation $\mathcal{R}_s$. On en a analysé les points fixes possibles (leurs algorithmes de construction, leurs propriétés de continuité et de différentiabilité, ou au contraire leur comportement chaotique, la structure de $\mathcal{R}_s$ dans leur voisinage, bref l'analyse spectrale de l'"application linéaire tangente"), ainsi que les propriétés itératives, les points périodiques, les attracteurs étranges, bref, leurs propriétés dynamiques sur des sous-ensembles invariants non triviaux caractéristiques. Il s'agit là d'un sujet en plein essort où convergent harmonieusement des domaines mathématiques très différents (*cf.* par exemple Collet-Eckmann [45], [47], Lanford [112], Cosnard [48], Feigenbaum [70], [71], [72], Guckenheimer [91], Milnor-Thurston [126], Misurewicz [127]). On a par exemple étudié en détail (*cf.* Collet-Eckmann [46] et Eckmann [66]) le modèle de renormalisation :

$$\mathcal{R}_\varepsilon(f)(x) = -f(f((-f(1))^{1+\varepsilon}x))^{1+\varepsilon}/f(1) \text{ avec } f(0) = 1 \text{ et } x \geq 0,$$

ainsi que le modèle hiérarchique de la mécanique statistique :

$$\mathcal{R}_c f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} f\left(\frac{x}{\sqrt{c}} - u\right) f\left(\frac{x}{\sqrt{c}} + u\right) du \ .$$

Pour le premier modèle, $1 - x$ est le point fixe trivial. Pour trouver un point fixe non trivial, on pose $\lambda = -f(1)$ et l'on cherche des solutions $\mathcal{R}_\varepsilon f = f$. Elles satisfont l'équation fonctionnelle $\lambda f(x) - f(f(\lambda^{1+\varepsilon}x)^{1+\varepsilon}) = 0$. Si on les suppose de la forme $f_\varepsilon(x) =$

[75] Note de 2010. "Ces dernières années", c'est-à-dire depuis la fin des années 70.

$1-(1+\lambda)x+\lambda^2 g(x)$ avec $g(0)=g(1)=0$, on peut les construire explicitement en exprimant λ en fonction de ε, faire l'analyse du système dynamique associé à $\mathcal{R}_\varepsilon$ au voisinage de f_ε (spectre de l'application tangente, compacité, existence des variétés stables et instables, etc.) et calculer les exposants critiques.[76]

Pour le second modèle[77], on cherche des solutions dans l'espace $L^1(e^{-x^2/2}dx)$, f étant associée à la densité de probabilité de spin $f(x)e^{-x^2/2}$. La solution $f=1$ donne le point fixe trivial. Dans un espace fonctionnel approprié, "l'application tangente" $\mathcal{T}_c$ à $\mathcal{R}_c$ en ce point est un opérateur hermitien compact ayant pour spectre $\left\{\frac{2}{c^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ et pour vecteurs propres des polynômes d'Hermite. La difficulté est de trouver un "bon" espace fonctionnel (par exemple Banach pour que l'on puisse appliquer un théorème des fonctions implicites généralisé) où $\mathcal{R}_c$ soit borné et où $\mathcal{T}_c$ ait la même théorie spectrale. En utilisant des estimations de $\|\mathcal{R}_c(f_0)-f_0\|_{L^\infty}$ pour des fonctions f_0 de la forme $f_0(x)=e^{-\varepsilon\theta x^4}P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme, on trouve un point fixe non trivial de la forme $\varphi_\varepsilon=f_0+r$. On remarquera qu'une telle procédure n'est valable que pour $\varepsilon>0$ car, pour $\varepsilon<0$, les fonctions f_0 n'appartiennent plus au domaine de $\mathcal{R}_c$. Physiquement parlant, cela correspond au fait que, pour $\varepsilon<0$ (*i.e.* à la traversée de la dimensionalité critique $\varepsilon=0$), tous les exposants critiques prennent leur valeur classique. Mathématiquement parlant, cela explique la difficulté du probléme. Car si l'on pouvait appliquer les théorèmes classiques d'existence de points fixes, la branche non triviale des φ_ε existerait pour tout ε assez petit.

On a également étudié intensément des cas encore plus simples qui se sont révélés d'une richesse véritablement surprenante. Par exemple, lorsqu'on étudie le système dynamique discret constitué par leurs itérés f^n, les endomorphismes quadratiques $f(x)=4\mu x(1-x)$ de l'intervalle $I=[0,1]$ présentent, lorsque μ augmente, une suite μ_k de bifurcations correspondant à des doublements de périodes de points périodiques, suite s'accumulant sur une bifurcation limite μ_∞ où le systéme devient "turbulent", chaotique, présente des propriétés d'homothétie interne (d'invariance d'échelle) caractéristiques des transitions de phases et devient susceptible d'un traitement par la méthode du groupe de renormalisation (*cf.* par exemple Coullet-Tresser [49], Derrida [54], Myrberg [128], Gumowski-Mira [93], Feigenbaum [70], Lanford [112]). Arrêtons-nous y un instant.

4.5 Endomorphismes quadratiques de l'intervalle

Les applications $f_\mu=4\mu x(1-x)$ de l'intervalle $I=[0,1]$ on été particulièrement étudiées car elles présentent un cas particulièrement simple de l'extrême richesse de structure qui apparaît lorsqu'on traite les applications :

1. du point de vue *dynamique* (*i.e.* de celui de l'itération);
2. du point de vue *qualitatif* (*i.e.* de celui de la structure qualitative des trajectoires de f_μ et de leurs transformations lorsque μ varie).

Pour $\mu\in I$, f_μ est un endomorphisme de I. Ce n'est pas un difféomorphisme car tout point $x\in I$ admet deux pré-images solutions de l'équation $4\mu y(1-y)=x$. Ces pré-images sont confondues au point critique de f_μ donné par $f'_\mu=4\mu(1-2x)=0$ *i.e.* par $x=\frac{1}{2}$. Le graphe de f_μ est donc une parabole concave ayant un sommet en $\left(\frac{1}{2},\mu\right)$. Pour $\mu=0$, $f_0=0$ et le cas est trivial. A l'autre extrême, pour $\mu=1$, f_μ présente une dynamique *chaotique*. Pour le voir, faisons le changement de variable $x=\frac{1-\cos(\theta)}{2}$. On obtient $4x(1-x)=4\frac{1-\cos(\theta)}{2}\cdot\frac{1+\cos(\theta)}{2}=1-\cos^2(\theta)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$. Exprimée en l'angle θ,

[76] On se situe dans l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ des f (et non pas dans un sous-espace de dimension finie).
[77] Nous donnerons en 4.5. une idée de l'origine de sa dénomination.

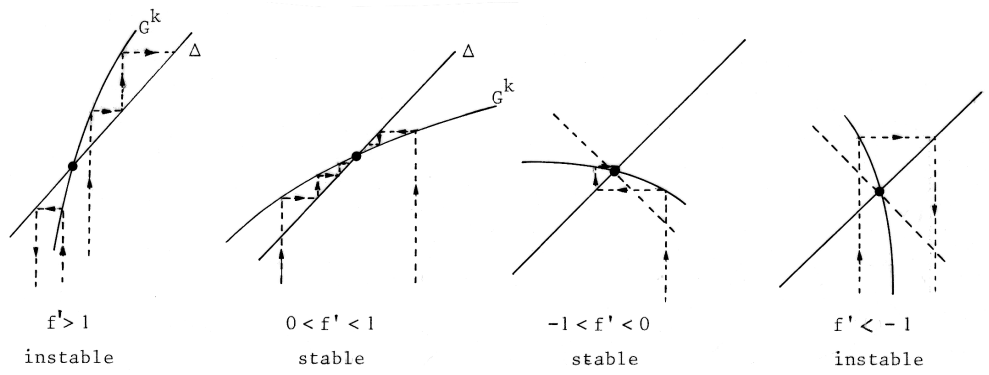


Figure 20: La méthode de Newton pour étudier la stabilité des points fixes d'une fonction.

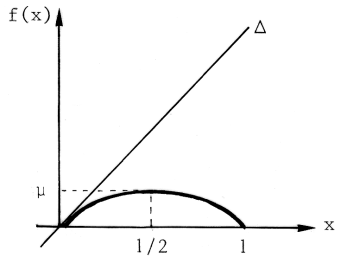


Figure 21: Le graphe de $f(x) = 4\mu x(1-x)$ pour $\mu < 1$.

$f_\mu\left(\dfrac{1-\cos(\theta)}{2}\right) = g_\mu(\theta)$ devient alors la fonction $g_\mu(\theta) = 2\theta$ de doublement de θ. Or il est facile de voir que celle-ci est chaotique.

Entre ces deux comportements extrêmes, f_μ présente lorsque μ varie de 0 à 1 une suite de comportements que l'on a pu analyser en détail. Dynamiquement, ce sont les points fixes, les points périodiques et leur stabilité qu'il faut analyser en premier lieu. Pour cela, on applique la classique méthode de Newton qui consiste à considérer les graphes G^k des f_μ^k et leurs intersections avec la diagonale Δ(*cf.* Fig. 20).

Partons de $\mu = 0$. Pour μ petit (*i.e.* $4\mu < 1$) 0 est le seul point fixe, il est stable (attractif) et son bassin est I tout entier (*cf.* Fig. 21).

Lorsque μ traverse la valeur $1/4$, 0 devient instable et un autre point fixe x^* stable et globalement attractif apparaît par bifurcation. De $4\mu x(1-x) = x$, on tire $x^* = 1 - \dfrac{1}{4\mu}$ (*cf.* Fig. 22). Mais à la traversée de la valeur critique $\mu_1 = 0,75$ ce régime stationnaire devient à son tour instable et x^* bifurque vers un 2-cycle stable (attractif) (x_1^*, x_2^*) (*cf.* Fig. 23). Cela est dû au fait que le graphe de f^2 subit une bifurcation : son point fixe stable x^* devient instable et un couple de points fixes stables (x_1^*, x_2^*) émerge (*cf.* Fig. 24). On dit qu'il y a eu bifurcation *par doublement de période.*

Dans la figure 25, il s'agit du graphe de f^{1000}. On a représenté également la construction de l'ensemble de Cantor qui est l'attracteur étrange de f_{μ_∞}.

On démontre qu'il y a ainsi une "cascade" de bifurcations – dite "cascade de Feigenbaum" – par doublements successifs de période. Si μ_ℓ est la valeur critique pour laquelle un 2^ℓ-cycle stable devient instable et se trouve substitué par un $2^{\ell+1}$-cycle stable, on peut montrer :

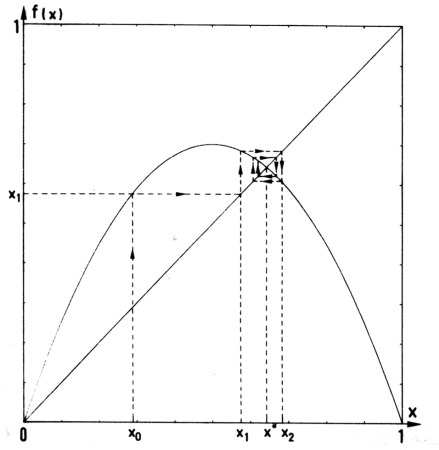


Figure 22: Le graphe de $f(x) = 4\mu x(1-x)$ pour $0,25 < \mu < 0,75$. Il y a un point fixe attractif x^*. D'après Bergé *et al.* [14].

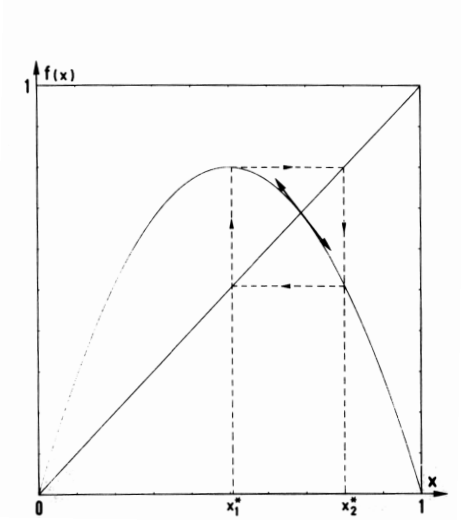


Figure 23: Le graphe de $f(x) = 4\mu x(1-x)$ pour μ ayant traversé la valeur critique $0,75$. Le point fixe x^* de la figure 22 bifurque vers un 2-cycle stable (x_1^*, x_2^*). D'après Bergé *et al.* [14].

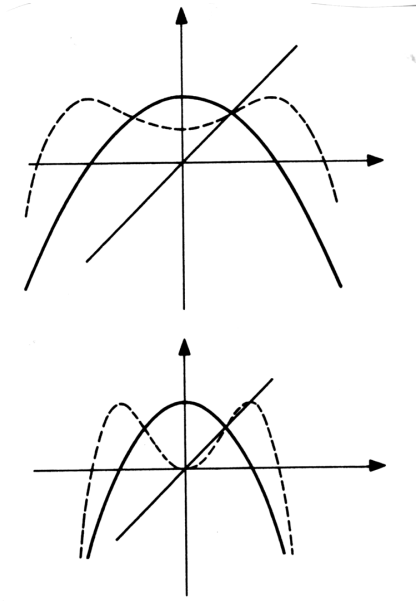


Figure 24: Le graphe de f^2 (en pointillés) qui explique la bifurcation de la figure 24. D'après Coullet et Tresser [49].

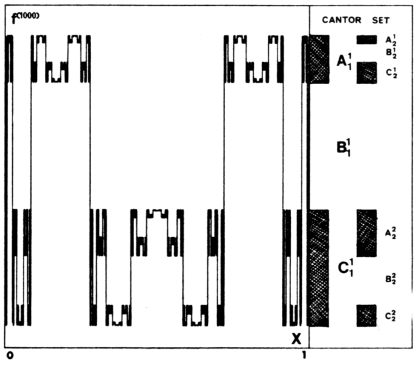


Figure 25: Le graphe de f^{1000}. Dans la colonne de droite, l'ensemble de Cantor qui est l'attracteur étrange de f_{μ_∞}. D'après Coullet et Tresser [49].

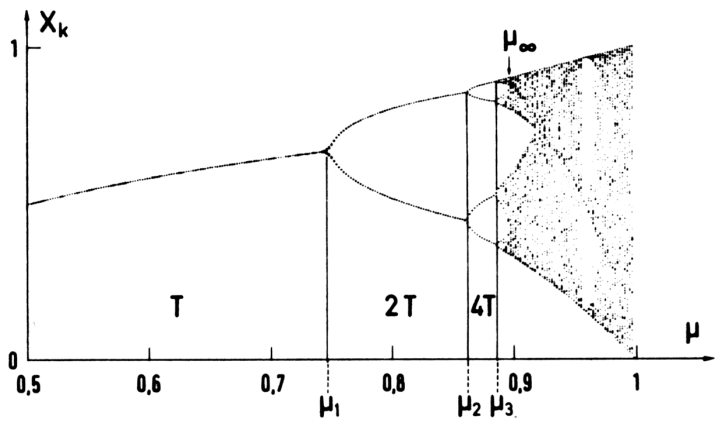


Figure 26: Le diagramme de bifurcation de f_μ. Après μ_∞, le chaos apparaît à travers des cascades sous-harmoniques. Il est d'abord confiné localement puis il diffuse globalement. D'après Bergé *et al.* [14].

1. que la suite μ_ℓ converge trés rapidement vers une valeur limite $\mu_\infty = 0,892486418...$ pour laquelle f_{μ_∞} présente un attracteur "étrange" homéomorphe à l'ensemble de Cantor;

2. que la limite $\lim_{\ell\to\infty} \dfrac{\mu_\ell - \mu_{\ell-1}}{\mu_{\ell+1} - \mu_\ell} = \delta$ est un *exposant critique* de valeur

$$\delta = 4,6692016091029909...$$

qui est *universel*, c'est-à-dire indépendant de la forme de f pourvu que f soit différentiable, concave et admette un maximum.

C'est ce résultat (démontré par Feigenbaum et indépendamment par Coullet et Tresser) qui a établi le lien avec le groupe de renormalisation. Il n'est pas évident car les cycles de f_μ et leur stabilité dépendent de la situation des graphes G^k par rapport à la diagonale Δ. Or ceux-ci deviennent vite très complexes et devraient apparemment être très sensibles à la forme de f (*cf.* Fig. 25). Pourtant il n'en est rien, et le scénario décrit par la cascade de Feigenbaum possède une certaine universalité.

Après la traversée de μ_∞ apparaissent des cycles attractifs de périodes différentes de 2^k et en particulier de périodes *impaires*. On montre que cela conduit sur certains domaines de I à l'apparition de *chaos déterministe*, c'est-à-dire de trajectoires errantes présentant de la sensibilité aux conditions initiales. Tout se passe comme si f_μ admettait des cycles "bruyants" composés d'intervalles s'échangeant sous l'action de f_μ et sur lesquels f_μ est chaotique. Lorsque μ croît de μ_∞ à 1, ces intervalles "confinant" le chaos *fusionnent* par bifurcations successives jusqu'à $\mu = 1$ où il n'y a plus qu'un seul intervalle, I tout entier, sur lequel f est partout chaotique. On a donc entre μ_∞ et 1 une sorte de cascade "inverse" conduisant du chaos minimal émergeant en μ_∞ au chaos total en $\mu = 1$ (*cf.* Fig. 22).

De façon plus précise, à chaque apparition d'une période ℓ qui n'est pas de la forme 2^k (par exemple $\ell = 3$), apparaît une cascade "sous-harmonique" de périodes $3 \cdot 2^k$ menant à une valeur critique $\mu_{\ell,\infty}$ suivant le scénario de Feigenbaum, avec les *mêmes* lois d'échelle (et donc le même δ).

Cet exemple des endomorphismes f_μ de I permet de comprendre comment une situation *qualitative* peut néanmoins donner naissance à une grande exactitude *quantitative* en ce qui concerne les exposants critiques (*cf.* la section 3.1.). B. Derrida [55] a analysé les

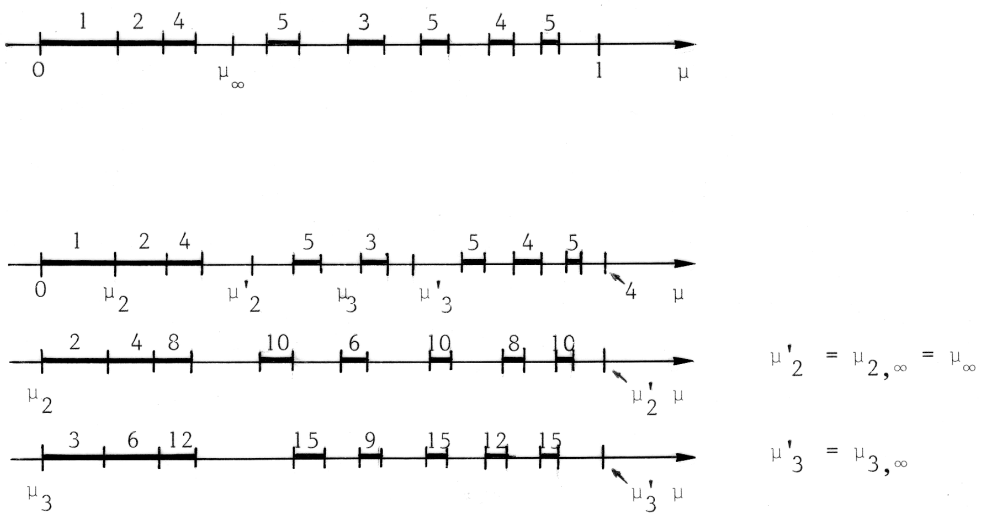


Figure 27: Haut: les domaines de stabilité de f_μ pour les périodes $\ell \leq 5$. Bas: deux exemples d'intervalles $I_p = [\mu_p, \mu'_p]$ $(p = 2, 3)$ montrant leur équivalence avec I, les domaines de stabilité de la période ℓ étant envoyés sur ceux de la période $p\ell$.

domaines de stabilité dans I associés à chaque période ℓ.[78] Les données pour $\ell \leq 5$ sont représentées en haut de la figure 27. On remarque qu'une période donnée ℓ possède plusieurs domaines de stabilité. Lorsque $\ell \to \infty$, le nombre de ces domaines tend également vers ∞. Des domaines de stabilité de la même période ℓ correspondent à des ordres différents des points sur le ℓ-cycle. Par exemple, pour $\ell = 4$, le premier domaine correspond à l'ordre $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$ alors que le second correspond à l'ordre cyclique $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$. Or l'ordre de succession de ces domaines est *auto-semblable*. Il satisfait la propriété d'homothétie interne. Autrement dit, il existe dans I des intervalles $I_p = [\mu_p, \mu'_p]$ et des homéomorphismes $R_p : I \to I_p$ tels que (cf. le bas de la figure 27) :

1. l'ordre des domaines de stabilité dans I_p soit l'image de celui de I par R_p, et
2. un domaine de stabilité de la période ℓ soit envoyé par R_p sur un domaine de stabilité de la période $p\ell$.

Or c'est cette distribution des domaines de stabilité qui est universelle. Elle ne dépend que de la forme qualitative de f. Et à partir d'elle, on peut reconstruire les exposants critiques. Quant aux valeurs critiques comme μ_∞, on peut les retrouver comme points fixes des R_p. Les R_p sont des transformations de renormalisation.

Remarquons d'autre part que c'est cet exemple des endomorphismes quadratiques de l'intervalle qui a conduit à l'étude de la renormalisation

$$\mathcal{R}_\varepsilon(f)(x) = -f(f((-f(1)^{1+\varepsilon}x))^{1+\varepsilon})/f(1)$$

que nous avons citée en 4.4.[79]

Les résultats ci-dessus semblent manifester une connexion intime entre $f_\mu^{2^n}$ et $f_\mu^{2^{n+1}}$ pour n grand. Le plus simple est de supposer une homothétie, d'où une formule de récurrence du type :

$$f_\mu^{2^n}(x) = \lambda^{-1} f_\mu^{2^{n+1}}(\lambda x) \; .$$

[78] *Cf.* Derrida [55].
[79] *Cf.* Eckmann [66].

Si l'on renormalise par $\lambda = -f(1)$ et $f(0) = 1$, l'on est conduit à l'hypothèse que, dans l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ des f, les f^{2^n} convergent, pour des f assez quelconques, vers un point fixe de $\mathcal{R}_0$:

$$\mathcal{R}_0 f(x) = -f(f(-f(1)x))/f(1) \; . \tag{47}$$

On montre alors[80] que si $f_\varepsilon(x)$ est telle que $f_\varepsilon(|x|^{1+\varepsilon})$ soit point fixe de $\mathcal{R}_0$ (on montre que f_ε existe) et si $h \in \mathcal{F}$ est assez voisine, alors les $\psi_\mu(x) = h(|\mu x|^{1+\varepsilon})$ convergent vers f_ε suivant le scénario de Feigenbaum avec un exposant critique $\delta(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε (universalité). Les points fixes de la renormalisation $f(x) = -\dfrac{1}{f(1)} f^2(-f(1)x)$ ont une structure trés singulière. On pourra à ce sujet consulter Cosnard [48].

L'universalité de la cascade de Feigenbaum ne concerne pas seulement les endomorphismes de l'intervalle, mais également les systèmes *dissipatifs* en général. En effet les systèmes dissipatifs contractent l'espace des phases avec, en général, des rapports de contraction différents suivant les directions. A la limite (asymptotiquement), ils deviennent donc "unidimensionnels" (dans la direction de la plus faible contraction) et, de façon assez générale, leur application de Poincaré est du type "endomorphisme quadratique de l'intervalle". Ils présentent donc le scénario typique de la cascade des doublements de période.

4.6 Ensembles de Julia

Lorsque l'on passe du domaine réel au domaine complexe, l'analyse dynamique de la famille $4\mu z(z-1)$ conduit à des structures fractales d'une richesse (et d'une beauté) fascinante. Avant d'en dire un mot pour conclure, remarquons que cette famille (déjà introduite dans la formule (45)) correspond, dans le modèle hiérarchique exposé en 4.2 (formule (40)), au cas $q = 0$. Physiquement, ce cas n'est pas trés pertinent car le point fixe y correspond à $z_c = 1$ et donc à une température $T = \infty$. T y devient un paramètre marginal. Mais mathématiquement, ce cas suffit à dégager la nature des phénomènes qui apparaissent lorsque l'on traite dynamiquement (par itération) des fractions rationnelles.

L'analyse dynamique de l'itération des fractions rationnelles remonte aux travaux de Fatou et Julia dans les année 1920. Après les travaux de Siegel et de Myrberg dans les années $40-50$, elle a été reprise récemment[81], à partir des travaux pionniers de Guckenheimer et de Brolin, avec les méthodes de la dynamique qualitative élaborées dans un tout autre domaine par des mathématiciens comme Poincaré, Birkhoff, Kolmogoroff, Smale, Thom, Moser, Arnold, etc., et en faisant un usage massif des calculateurs. Elle se trouve donc à la confluence de trois champs : celui de la théorie des fonctions analytiques complexes, celui de la "global analysis"et celui de l'analyse numérique. Pour une introduction au sujet, le lecteur pourra consulter les articles de Douady, Douady-Hubbard, Sullivan cités en bibliographie, ainsi que Blanchard [26], Brolin [36], Collet [44], Fatou [69], Guckenheimer [84], Julia [101], Myrberg [128], Ruelle [154], Siegel [166].

Comme, par changement linéaire de coordonnées, tout polynôme quadratique en z peut se ramener à la forme standard $z^2 + c$, nous considérons la famille

$$f_c(z) = z^2 + c \; . \tag{48}$$

On a $f_c'(z) = 2z$ et donc 0 est le seul point critique de f. Quant aux points k-périodiques de f_c, ils sont donnés par :

$$f_c^k(z) = z \tag{49}$$

qui est un polynôme de degré 2^k en z.

Pour les valeurs de c solutions de $f_c^k(0) = 0$ (polynôme de degré 2^{k-1} en c), le point critique 0 appartiendra à un k-cycle. Un k-cycle $z_1, \ldots, z_k$ est attractif (resp. répulsif, indifférent) si $|(f_c^k)'(z)| < 1$ (resp. > 1, resp. $= 1$) sur les z_i. Si 0 appartient au cycle, celui-ci

[80] *Cf.* Eckmann [66].

[81] Note de 2010. "Récemment" pour 1982. C'est Adrien Douady et Bernard et Maryvonne Teissier qui ont sorti le premier ensemble de Julia sur un Apple.

est dit super-attractif. Considérons alors le cas trivial où $c = 0$. L'application carré $f_0(z) = z^2$ (pour laquelle le point critique est un point fixe) est facile à décrire dynamiquement.

1. Si $|z| < 1$, la trajectoire de z (*i.e.* l'ensemble des $f_0^k(z)$ pour $k \in \mathbb{N}$) spirale très rapidement vers 0.
2. Si $|z| > 1$, la trajectoire spirale très rapidement vers ∞.
3. Si $|z| = 1$, alors f_0 opère sur le cercle unité S^1 en doublant les arguments θ. Nous avons vu en 4.5 que cette application est partout chaotique : elle possède une infinité de points périodiques $\theta = \dfrac{2\ell\pi}{2^k - 1}$ tous répulsifs et denses dans S^1, et pour les points apériodiques la trajectoire dépend hautement des propriétés *arithmétiques* de θ.

En résumé, l'intérieur de S^1 est le bassin d'attraction de 0, son extérieur est le bassin d'attraction de ∞ (dynamiques "simples") et ces bassins sont séparés par $S^1 = J_0$ sur lequel la dynamique de f_0 est complexe. L'ensemble J_0 s'appelle *l'ensemble de Julia* de f_0. Sa topologie et la restriction de la dynamique $f_0|_{J_0}$ constituent l'information essentielle sur la structure *dynamique* de f_0.

Lorsque l'on déforme ce cas exceptionnel $c = 0$, cette situation simple se complique beaucoup. Pour l'analyser, nous allons la considérer comme un système dont l'espace "interne" est le plan des z, dont la dynamique interne est $f_\mu(z)$ et dont l'espace "externe" est le plan des c.

On définit l'ensemble de Julia "rempli" K_c comme le complémentaire du bassin d'attraction $B(\infty)$ de ∞ :

$$K_c = \left\{ z : f_c^k(z) \underset{k\to\infty}{\not\to} \infty \right\} \tag{50}$$

K_c est un fermé, f- et f^{-1}-invariant[82] et l'on peut montrer qu'il est un compact plein (*i.e.* de complémentaire connexe). On peut le construire comme la limite décroissante des $f^{-k}(D)$ où D est un disque assez grand pour que son complémentaire soit inclus dans $B(\infty)$.

On appelle alors *ensemble de Julia* de f_c la frontière $\partial K_c = K_c - \mathring{K}_c$ de K_c. Comme K_c peut être d'intérieur vide, J_c peut être égal à K_c. Mais si K_c admet un intérieur $\mathring{K}_c$, les points de celui-ci ont des trajectoires attirées par des cycles attractifs de f_c, ceux-ci étant tous contenus dans $\mathring{K}_c$. La dynamique de f_c est donc "simple" sur $\mathring{K}_c$ et $B(\infty)$. Elle est en revanche compliquée sur J_c. J_c constitue en quelque sorte la partie *ergodique* de la dynamique définie par f_c.

Dés les années 20, Fatou et Julia avaient démontré le :

Théorème 1.

(a) Si $0 \in K_c$, alors K_c est connexe.

(b) Si $0 \notin K_c$, (*i.e.* si la trajectoire de 0: 0, c, $c^2 + c$, $(c^2 + c)^2 + c$, etc. tend vers ∞), alors K_c est homéomorphe à un Cantor.

Preuve.

Soit D un disque assez grand et $V_n = f_c^{-n}(D)$. On a $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ et $K_c = \cap_n V_n$. Si $0 \in K_c$ alors $f_c : V_{n+1} \to V_n$ est un revêtement de degré 2 ramifié en 0 (car 0 est point critique de f_c). Si V_n est topologiquement un disque, alors V_{n+1} l'est aussi. Or $V_0 = D$ est un disque. Donc $K_c = \cap V_n = \cap \overline{V_n}$ est connexe, mais sa frontière J_c peut devenir extrêmement complexe. Si maintenant $0 \notin K_c$, il existe un N tel que $0 \notin V_n$ pour $n \geq N$. Pour n grand V_{n+1} est donc un revêtement non ramifié de degré 2 de V_n. Si V_n est un disque, V_{n+k} a donc 2^k composantes connexes, et donc une infinité à la limite. On montre que le diamètre de celles-ci tend vers 0. □

On trouvera aux figures 28 et 29 quelques exemples de J_c. Ce sont des fractals car ils possèdent des propriétés d'auto-similitude et s'ils présentent une structure interne à *une* échelle ils doivent la présenter à *toutes* les échelles. Si par exemple J_c admet un "pincement", il en admet une infinité d'échelles différentes.

[82] f n'étant pas inversible, $f^{-1}(z)$ est l'ensemble des pré-images de z.

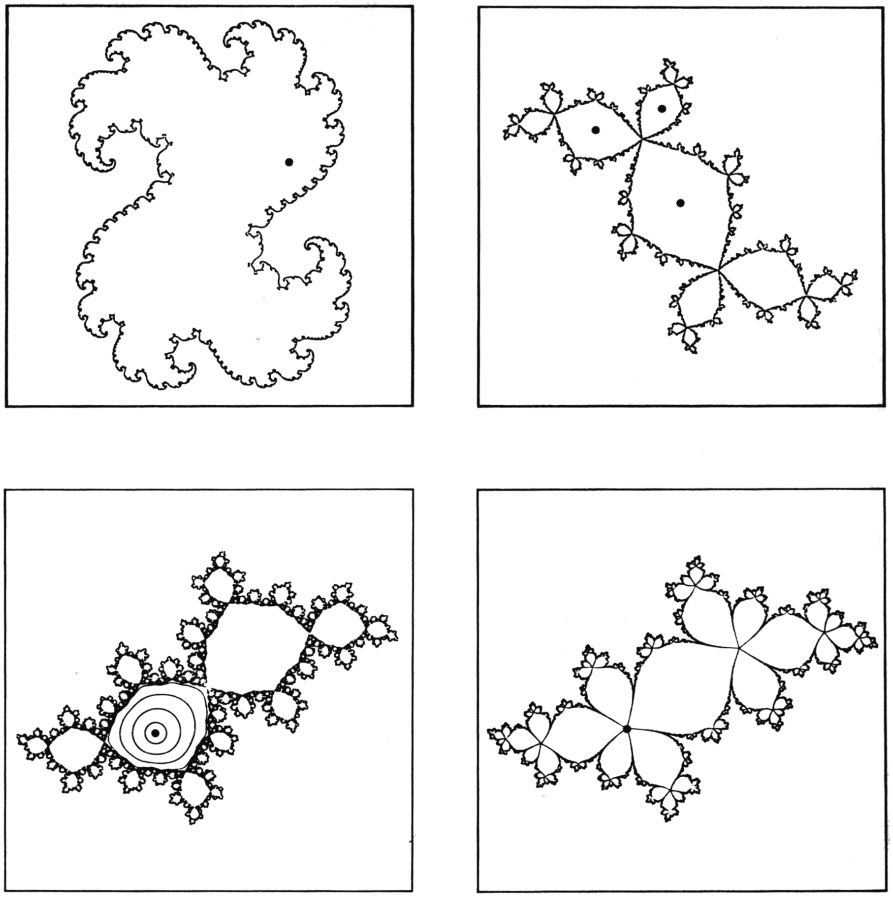


Figure 28: Collection d'ensembles de Julia. D'après Peitgen-Richter [135].

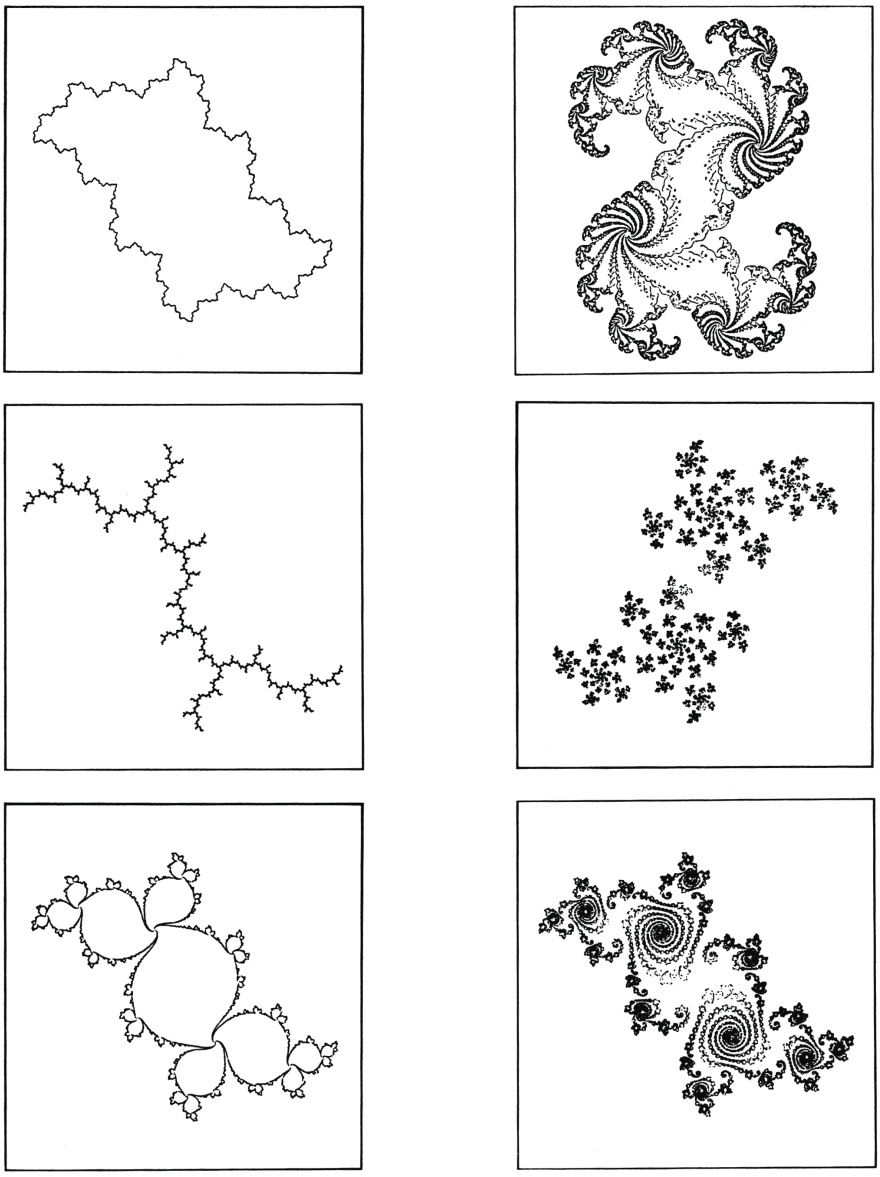


Figure 29: Autre collection d'ensembles de Julia. D'après Peitgen-Richter [135].

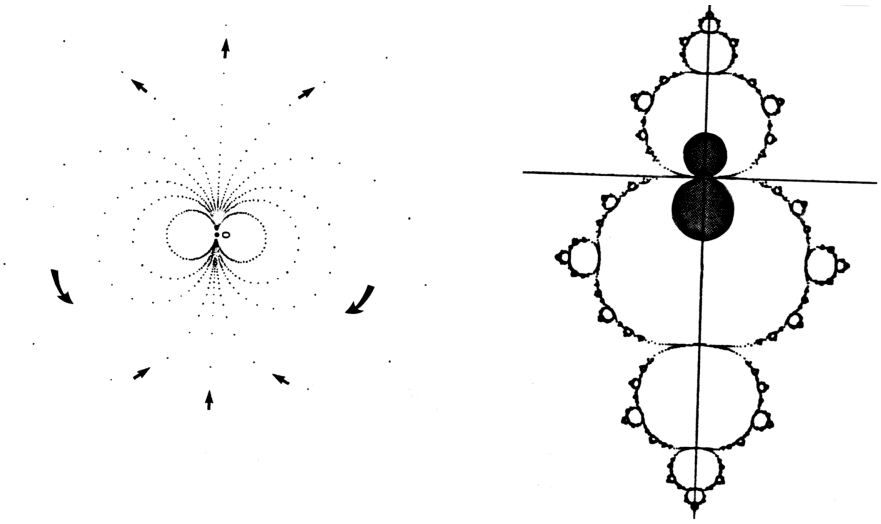


Figure 30: (a) La dynamique de $z \mapsto z(1+z)$ (l'axe des x est vertical). (b) L'ensemble de Julia de $z \mapsto -z + z^2$ et un voisinage de son point fixe indifférent rationnel 0. D'après Blanchard [26].

Un autre théorème célèbre de Fatou et Julia est :

Théorème 2. Tout k-cycle attractif σ possède un point critique dans son bassin immédiat $A(\sigma)$ (*i.e.* dans la composante connexe de son bassin qui le contient).

Preuve.
En prenant f_c^k au lieu de f_c, on se ramène au cas d'un point fixe attractif a. Si $A(a)$ est sans point critique, alors, au voisinage de a, il existe des déterminations uniformes de f_c^{-1}. Or, comme f_c est contractante sur $A(a)$, f_c^{-1} serait alors dilatante. Mais cela est impossible en vertu d'un lemme de la théorie des fonctions analytiques (lemme de Schwartz). □

Pour analyser la structure des f_c, on cherche à les *linéariser* au voisinage de leurs points périodiques. Si σ est un k-cycle attractif, et non super-attractif, alors, sur un voisinage de σ, f_c^k est analytiquement conjuguée à ρz, $\rho = (f_c^k)'(z)$ pour $z \in \sigma$ étant la valeur propre de σ. Si σ est super-attractif ($\rho = 0$) alors f_c^k est analytiquement conjuguée à z^2 au voisinage de σ. Si $|\rho| = 1$ on dit que σ est *indifférent* et si $\sigma \subset \mathring{K}_c$ alors il est linéarisable et f_c est analytiquement conjuguée dans un voisinage de σ à ρz et donc à une *rotation*. Cela implique :

Proposition 3. Si $\rho = e^{i2\pi\theta}$ avec θ rationnel (point périodique indifférent rationnel) alors σ n'est pas linéarisable et donc $\sigma \subset J_c$.

Preuve.
Si σ était linéarisable, on aurait, puisque θ est rationnel, une puissance f^{nk} de f^k qui serait conjuguée à l'identité. Mais cela est impossible car f^{nk} est de degré $d \neq 1$. □

En ce qui concerne les points périodiques indifférents irrationnels, on a le fameux théorème de Siegel.

Théorème 4. Si $\rho = e^{i2\pi\theta}$ et si θ est mal approché par les rationnels (*i.e.* si $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| > a/q^b$ pour tous p, q entiers et pour certains $a, b > 0$) alors σ est analytiquement linéarisable.

Pour les points indifférents rationnels on a, à défaut de la linéarisation, une forme normale *topologique*.

Théoréme 5. Si $\rho = e^{i2\pi\theta}$ avec $\theta = p/q$ ($p, q \in N$) alors f^k est topologiquement conjuguée au voisinage de σ à $\rho z(1 + z^{\ell q})$.

On trouvera à la figure 30 un exemple de dynamique locale de ce type et un exemple de son insertion dans un ensemble de Julia.

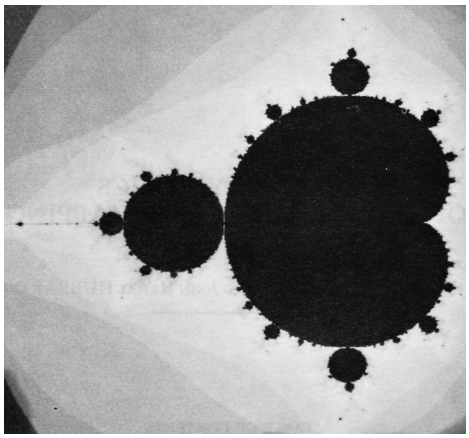


Figure 31: L'ensemble de Mandelbrot M. (Image de Hubbard et Peitgen).

Un théorème fondamental (difficile) est le suivant :

Théorème 6. J_c est la fermeture des points périodiques répulsifs.

Cela montre que "grosso modo" les points voisins de J_c mais non dans J_c sont repoussés par J_c. Presque toute trajectoire rétrograde (*i.e.* l'ensemble des $f^{-k}(z)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et z fixé) vient donc s'accumuler sur J_c. Si nous revenons alors à l'analyse des modèles hiérarchiques esquissée à la section 4.2, nous voyons que, dans la limite thermodynamique, l'ensemble des zéros Ω_∞ de la fonction de partition est bien l'ensemble de Julia de la transformation de renormalisation T.

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes de $\mathring{K}_c$. Soit $\mathcal{C}$ comprend un seul élément (cas analogue à celui $c = 0$), soit $\mathcal{C}$ comprend une *infinité* d'éléments (à cause de la contrainte d'auto-similitude). C'est le cas des K_c "pincés" en un nombre dénombrable de points. On montre que f_c transforme une composante connexe $U \in \mathcal{C}$ en une autre et qu'il induit donc une dynamique f_c^* sur $\mathcal{C}$. Cette dynamique, qui est une approximation grossière de celle de f_c, est maintenant connue à travers, en particulier, un théorème de Sullivan.

Grâce aux travaux de Sullivan, Douady, Hubbard, Thurston, on connaît également bien la dynamique "fine" de f_c dans le cas dit *d'hyperbolicité* où f_c est expansive sur J (nous avons vu que J est toujours "grosso modo" répulsif, mais l'existence de points périodiques indifférents peut l'empêcher de l'être vraiment). Bien que l'hyperbolicité simplifie considérablement la situation, il est normal de l'étudier en premier car c'est une propriété *générique*, satisfaite sur un *ouvert dense* M_H de l'espace externe qu'est le plan des c (théorème de Sullivan, Sad, Mané, Thurston). M_H est l'intérieur de l'ensemble des c pour lesquels f_c n'admet pas de points périodiques indifférents.

Passons maintenant dans cet espace externe et étudions la façon dont la dynamique de f_c (et donc en particulier la topologie de son ensemble de Julia) varie en fonction de c. Soit $M = \{c|0 \in K_c\}$ l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles K_c est *connexe* (*cf.* le théorème 1). Il s'appelle *l'ensemble de Mandelbrot* et est un fractal de toute beauté. Il est constitué essentiellement d'un "agglutinement" de disques d'échelles différentes (*i.e.* à chaque étape on attache des petits disques sur les bords de disques déjà existants) constituant un corps central $\widetilde{M}$ d'où partent des filaments conduisant à des exemplaires réduits de $\widetilde{M}$, et cela à l'infini (invariance d'échelle). On trouvera aux figures 31, 32 et 33 quelques morphologies présentées par M et calculées par Hubbard et Peitgen. On remarquera les petits exemplaires de M accrochés aux filaments de son corps principal.

Une des principales conjectures sur laquelle travaillent actuellement[83] les spécialistes, est de savoir si l'ensemble M_H des c pour lesquels f_c est hyperbolique (ensemble dont on montre facilement qu'il est inclus dans l'intérieur $\mathring{M}$ de M) est en fait identique à $\mathring{M}$. Si tel

[83] Note de 2010. "Actuellement", *i.e.* en 1982.

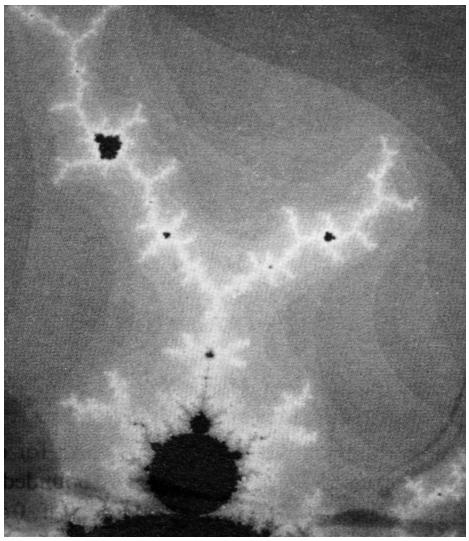


Figure 32: Agrandissement de l'ensemble de Mandelbrot M. (Image de Hubbard et Peitgen).

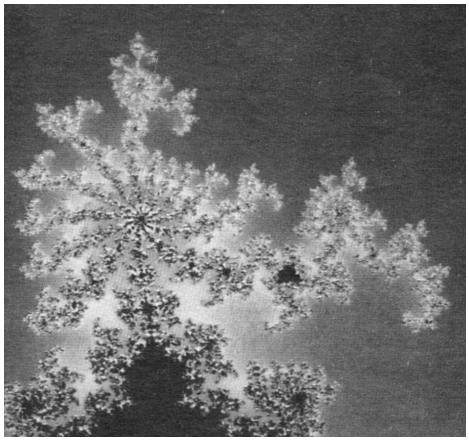


Figure 33: Autre agrandissement de l'ensemble de Mandelbrot M. (Image de Hubbard et Peitgen).

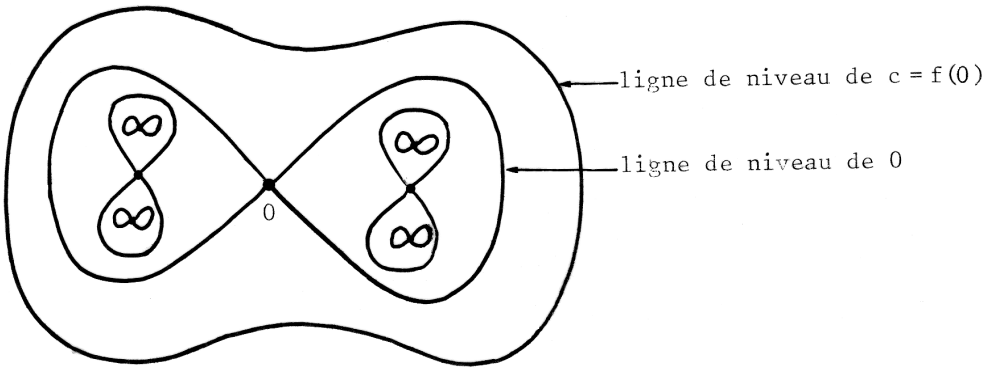


Figure 34: Lignes de niveau du potentiel G_c. Leurs points singuliers sont les points de l'orbite rétrograde du point critique 0.

était le cas, la situation serait assez satisfaisante pour l'esprit. Les composantes connexes W de M_H correspondraient aux domaines de stabilité des différents *types qualitatifs* présentés par les f_c (le terme qualitatif restant à définir rigoureusement : il s'agit de l'équivalence dite quasi-conforme) et la frontière $\partial M = M - \mathring{M}$ serait alors l'ensemble catastrophique de la famille f_c, ensemble qui fournirait un bel exemple de catastrophe généralisée. Quoi qu'il en soit, citons deux résultats cruciaux qui reposent tous deux sur une remarquable "dialectique" entre l'espace interne et l'espace externe.

Théoréme 7 (Douady, Hubbard, Sullivan). Soit W une composante connexe de M_H. Alors l'application $\rho_W : W \to D$ (D disque unité) qui associe à $c \in W$ la valeur propre du cycle attractif de f_c (on montre que f_c possède un et un seul cycle attractif) est une *représentation conforme* de W sur D.

D'autre part, soit $c \in M$. K_c est connexe, son complémentaire est simplement connexe et il existe une représentation conforme $\varphi_c : \mathbb{C} - K_c \to \mathbb{C} - \overline{D}$ (D disque unité) qui conjugue f_c à z^2. Si $c \notin M$, K_c n'est pas connexe (c'est un ensemble de Cantor). Mais l'on peut montrer que l'on peut définir φ_c sur le complémentaire $\mathbb{C} - V$ d'un voisinage fermé de K tel que $c \in \mathbb{C} - V$. Plus précisément, f_c est toujours analytiquement conjuguée à z^2 dans un voisinage V de ∞ et φ_c est donc toujours définie dans V. Cela permet de définir un potentiel par la formule $G_c(z) = \mathrm{Log}\,|\varphi(z)|$. Dans le cas où $c = 0$, les équipotentielles de G_0 sont les cercles concentriques extérieurs à D et les lignes de pente sont les rayons. G_c est une fonction *harmonique*, équivalente à $\mathrm{Log}|z|$ quand $|z| \to \infty$ et satisfaisant $G_c(z) = \dfrac{1}{2} G_c(f_c(z))$. Si K_c est connexe, alors φ_c s'étend de V à $\mathbb{C} - K_c$ et, d'après un théorème fondamental de Carathéodory, φ_c^{-1} se prolonge en une fonction continue *sur le bord* $\partial\overline{D}$ de $\overline{D}$, φ_c^{-1}: $\partial\overline{D} \to \partial K_c$. Autrement dit, $J_c = \partial K_c$ est une courbe topologique continûment paramétrable par t ($\partial\overline{D} = \{e^{i2\pi t}\}$) mais pouvant admettre des "pincements" (non injectivité de φ_c^{-1} sur le bord). Dans ce cas, lorsque z tend vers K_c de l'extérieur, $G_c(z)$ tend vers 0. $G_c(z)$ est donc une sorte de fonction de Liapounov exprimant que la dynamique de f_c^{-1} est comme une dynamique de gradient sur l'extérieur $\mathbb{C} - K_c$ de K_c qui contracte progressivement tout $\mathbb{C}$ sur K_c. Si maintenant $c \notin M$, K_c n'est plus connexe, et G_c n'est *a priori* défini que sur V. Mais comme tous les $z \in \mathbb{C} - K_c$ sont attirés par ∞, pour tout $z \in \mathbb{C} - K_c$ il existe n tel que $f_c^n(z) \in V$. On définit alors $G_c(z)$ par $G_c(z) = \dfrac{1}{2^n} G(f_c^n(z))$ (*cf.* Fig. 34).

En inspectant les lignes de niveau de G_c on voit qu'à partir de la ligne de niveau contenant le point critique 0 ($0 \in \mathbb{C} - K_c$ par hypothèse) elles deviennent disconnexes et à la limite tendent vers un Cantor. Mais avant le niveau critique $G_c(0)$, φ_c est bien définie. Mais comme $0 \notin K_c$, $G_c(0) > 0$ et donc $G_c(c) = 2G_c(0) > G_c(0)$. Donc $\varphi_c(c)$ est bien défini. Posons alors $\Phi(c) = \varphi_c(c)$. On a un résultat "miraculeux" qui est un cas exemplaire de

"dialectique" entre espaces internes et espaces externes.

Théorème 8 (Douady, Hubbard). Φ donne une représentation conforme du complémentaire de M sur le complémentaire de $\overline{D}$.

Ce résultat est précieux car, en prenant l'image inverse par Φ des cercles concentriques extérieurs à $\overline{D}$ et des rayons qui leurs sont orthogonaux, on peut "visualiser" la topologie du bord de M comme celle d'un cercle qui se "plisse" sur lui-même indéfiniment.

Ces théorèmes permettent d'accéder à une représentation assez claire de M_H (et dont de $\mathring{M}$ si la conjecture $\mathring{M} = M_H$ est vraie). En effet, soit W une composante hyperbolique. Comme $\rho_W : W \to D$ est un isomorphisme conforme, il existe un point $c_W = \rho_W^{-1}(0) \in W$ de valeur propre nulle. c_W s'appelle le *centre* de W. Pour c_W le cycle attractif σ de f_c devient super-attractif ($0 \in \sigma$). Pour c voisin de c_W, 0 n'est plus sur σ mais il reste attiré par σ. On montre d'autre part que ρ_W se prolonge en un *homéomorphisme* sur les bords $\partial\overline{W}$ et $\partial\overline{D}$. On peut donc paramêtrer $\partial\overline{W}$ par t puisque $\partial\overline{D} = \{e^{i2\pi t}\}$. Si $c \in \partial\overline{W}$ et si $\rho_W(c) = e^{i2\pi t}$, t s'appelle l'*argument interne* de c. Soit alors k la période de σ. Tous les points de $\partial\overline{W}$ sont des c tels que les points k-périodiques de σ sont devenus *indifférents*. Parmi ceux-ci $\rho_W^{-1}(1) = r_W$ s'appelle la *racine* de W. On a alors:

Théorème 9 (Douady). Tout point $r \in \partial\overline{W}$ d'argument interne t rationnel est la racine $r_{W'}$ d'une autre composante hyperbolique W', déduite de W par une bifurcation d'argument t : si $t = \dfrac{p}{q}$ alors $k' = qk$.

Ce théorème précise le terme intuitif "d'agglutination" : partant de la composante principale de M_H (la cardioïde qui domine sa structure) on attache à chaque étape de nouvelles "petites" composantes aux points d'argument interne rationnel qui sont sur le bord des composantes déjà introduites.

5 Physique et phénoménologie : la question des réductions

Récapitulons. Nous avons vu comment on peut modéliser les phénomènes critiques à partir de lois physiques fondamentales et comment les mathématiques caractéristiques du paradigme morphodynamique (singularités, déploiements universels, stratifications, bifurcations, intégrales oscillantes, catastrophes généralisées, etc.) viennent s'intégrer – grâce à des remarquables possibilités de transfert de méthodes et de dégagement d'universaux – aux formalismes issus de ces lois.

Nous avons retrouvé à propos des transitions de phases ce que nous avions déjà dégagé à propos des caustiques, à savoir la possibilité de suivre jusque dans le détail des formalismes l'articulation du niveau morphologique "grossier" avec le niveau physique "fin". Clairement, le concept médiateur est celui de *singularité*, et nous voyons la force avec laquelle ce concept peut opérer conformément à son double statut à la fois phénoménologique et physico-mathématique. Nous voyons également comment s'opèrent les diverses *réductions*. Par réduction des divers degrés de liberté on aboutit aux méthodes du GR; par réduction à une hypothèse de type "champ moyen" on aboutit à la théorie de Landau; par réduction des dynamiques internes, on aboutit enfin à la morphologie observée. Nous assistons ici à *l'émergence par paliers* du qualitatif et du descriptible hors de la physique microscopique.

6 Autres applications physiques de la morphodynamique

Pour permettre au lecteur de mieux se repérer dans la diversité proliférante des applications physiques de la morphodynamique, citons-en brièvement quelques autres pour conclure. Chacune mériterait évidemment un développement analogue à celui que nous avons esquissé pour les transitions de phases.

6.1 Flambage élastique

Toutes les CE ont été trouvées (indépendamment des travaux de Thom) par les mécaniciens J.M.T. Thompson et G.W. Hunt dans l'analyse des bifurcations des structures élastiques.[84]

[84] *Cf.* Sewell [164], [165], Chillingworth [42], [43], Hui-Hansen [94], Hunt [95], Schaeffer-Golubitsky [159], Thompson [184], [185], Thompson-Gaspar [186], Thompson-Hunt [187], [188], Zeeman [207].

Si l'on exerce des contraintes w sur une telle structure S, celle-ci emmagasine de l'énergie élastique et, à la traversée de valeurs catastrophiques de w, peut la relaxer brutalement en changeant de configuration. C'est sur ce principe que Zeeman a construit sa "machine à catastrophes". Là, comme dans beaucoup d'autres cas, la difficulté vient du fait :

1. que l'espace $\mathcal{C}$ des configurations (des "formes" de S) est un espace fonctionnel, l'énergie élastique étant une *fonctionnelle* sur $\mathcal{C}$ et sa minimisation devant donc résoudre un problème variationnel; et

2. que l'espace de contrôle $\mathcal{W}$ est lui-méme un espace fonctionnel, les contraintes dépendant en général de la position spatiale.

D'où la nécessité de développer la théorie des singularités et des bifurcations en dimension infinie (*cf.* Magnus [116]). Mais dans les espaces fonctionnels qui ne sont ni des Hilbert ni des Banach, des théorèmes aussi fondamentaux que le théorème des fonctions implicites, le théorème de Morse ou le théorème des singularités résiduelles ne sont plus valables. D'où une foule de difficultés. Lorsque $\mathcal{C}$ est un Hilbert et lorsque la fonction énergie $f \in \mathcal{C}$ admet un point critique qui n'est dégénéré que dans un nombre *fini* de dimensions, alors le théorème des singularités résiduelles est encore valable (lemme de Gromoll -Meyer [83]) et l'on peut faire de la TE (*cf.* Chillingworth [42] et Magnus [116]). Sinon, il faut trouver de "bonnes" méthodes d'approximation permettant de "redescendre" en dimension finie.

Dans le cas trés simple du flambage d'une lame élastique, déjà analysé par Euler en 1744, traité dans Zeeman [207] et résumé dans Petitot [136], on voit très clairement comment s'articulent les deux approches possibles. Dans la voie phénoménologique qualitative, on part de la phénoménologie du système, on constate qu'elle est régie par une catastrophe cusp et, en appliquant le théorème de classification des CE, on "remonte" à une forme normale de l'énergie. Dans la voie physicienne quantitative, on part au contraire des lois physiques de l'élasticité, on "descend" vers la singularité régissant le comportement critique et on constate qu'il s'agit bien d'un cusp. Via les théorèmes de classification des singularités, on obtient ainsi une *équivalence* entre la physique du système et sa phénoménologie.[85] Pour une analyse détaillée, on pourra consulter Zeeman [207] sections 16.2 et 16.3, Poston-Stewart [145] sections 13.5 et 13.8, Sewell [164] et Thompson-Hunt [187].

On constate que, là aussi, la TE est valable en première approximation et que, pour obtenir une analyse plus raffinée, il faut recourir à des méthodes asymptotiques de type WKB permettant le passage de l'approximation géométrique à l'approximation semi-classique. On retrouve à ce niveau "fin" des exposants critiques caractéristiques du régime critique. Pour une approche des phénomènes, beaucoup plus complexes, de flambage de structures bidimensionnelles, on pourra consulter Schaeffer-Golubitsky [159] ainsi que la belle analyse des équations de von Kármán présentée dans Magnus-Poston [117] et Poston-Stewart [145].

6.2 Défauts des milieux ordonnés

Un thème intimement lié à la théorie des singularités et aux transitions de phases est celui des *défauts* que peuvent présenter les milieux ordonnés. Ceux-ci proviennent du fait que les symétries locales prescrites par le principe de minimisation de l'énergie ne sont pas compatibles avec les contraintes topologiques imposées par les conditions au bord. Par exemple lorsque l'on passe d'une phase liquide à une phase solide cristalline, la nucléation initiale se développe en domaines ordonnés locaux et indépendants dont les ordres sont incohérents et qui ne peuvent se recoller en une structure globale qu'à travers des parois de défauts. Depuis les progrès rapides, nombreux et importants faits dans l'analyse des phases mésomorphes (cristaux liquides), ils sont devenus un domaine de choix pour les applications physiques de la théorie des singularités et pour certains concepts de topologie algébrique. Pour une introduction à ce sujet, on pourra se référer par exemple à Thom [182], [183], Kléman-Toulouse [108], de Gennes [53], Bouligand [29], Nabarro [129], Friedel [77], Kléman [106]. Pour une présentation des défauts propres aux smectiques (travaux de Friedel et Grandjean sur les

[85] *Cf.* Petitot [136].

coniques focales des cyclides de Dupin qui en sont constitutives) on pourra consulter par exemple Bouligand [29]. Pour les interactions et les configurations stables entre défauts (lignes de désinclinaison moebienne, anneaux de dislocations coin, décrochements, etc.) dans les cholestériques, on pourra consulter par exemple Bouligand [30].

Sans entrer dans aucun détail, on peut présenter intuitivement de la façon suivante l'introduction des concepts de topologie algébrique dans la théorie des défauts. Un milieu ordonné (comme un cristal liquide) est caractérisé par un certain type de symétrie (plus compliqué que celui des réseaux). Qui plus est, ce type de symétrie peut être réalisé dans l'espace avec une position et une orientation données. On définit ainsi une variété d'états internes $\mathcal{V}$ (*cf.* Kléman [106] et Toulouse [189]). Soit alors $\mathcal{U}$ un ouvert de l'extension spatiale W du milieu considéré. Aux points réguliers de $\mathcal{U}$, la structure du milieu est localement triviale. Soit K le fermé complémentaire de l'ouvert des points réguliers. K est le fermé des *défauts*. Dans les bons cas, K possède une structure stratifiée. Soit Z sa strate de dimension maximale. Soient $z \in Z$ et N_z le plan normal à Z en z. Soit S une petite sphère de N_z centrée sur Z. Elle est enchaînée à Z.

Soit θ: $S \to \mathcal{V}$ l'application associant à $s \in S$ la structure locale du milieu en s. *Le principe de Kléman-Toulouse* dit que le défaut K est structurellement stable si et seulement si θ n'est pas homotopiquement triviale. Si on l'applique au cas des smectiques, on voit qu'il ne peut y avoir de strates stables de codimension 1 de K. En effet dans ce cas, N_z serait de dimension 1 et donc $S = S^0$. Mais comme $\mathcal{V}$ est connexe, toute application θ: $S^0 \to \mathcal{V}$ est homotopiquement triviale. Les surfaces des smectiques sont par conséquent telles que leur lieu focal dégénère en courbes de dimension 1. Ce sont donc des cyclides de Dupin, fait déjà connu de Granjean et Friedel.[86]

Si θ: $S \to \mathcal{V}$ n'est pas homotopiquement triviale, les groupes d'homotopie $\pi_k(\mathcal{V})$ classifient les types des défauts (stables). On a ainsi développé une théorie *topologique* des défauts et de leurs "interactions" (coalescence, croisement, etc.) qui est de toute beauté. Celle-ci est liée à la TE car l'espace interne est interprétable comme celui d'une fonction potentiel $V : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sur l'espace interne des configurations moléculaires locales. V est invariante sous l'action du groupe d'invariance de $\mathbb{R}^3$ et ses minima sont des orbites sous cette action (théorie *équivariante*, *cf.* section 2.6.).

Rappelons également que la théorie des défauts des mésophases a trouvé un champ d'application remarquable en biologie depuis qu'Yves Bouligand a pu montrer que certaines textures biologiques manifestent exactement les mêmes symétries que certains cristaux liquides et sont donc analogues à des mésophases. La théorie des défauts étant topologico-géométrique et indépendante de la physique spécifique des substrats, elle est applicable à des situations physiques très diverses (*cf.* Bouligand [28], [32] et [31]).

6.3 Perturbations singuliéres

De nombreux travaux ont également été effectués sur les équations différentielles *contraintes*, c'est-à-dire sur les systèmes dynamiques pour lesquels il existe au moins *deux* échelles de temps, une dynamique "rapide" amenant le point représentatif de l'espace des phases $M \times W$ sur une variété "lente" $\Sigma \subset M \times W$ (surface des états) et une dynamique "lente" faisant évoluer l'état sur Σ (*cf.* Takens [175] pour une excellente introduction).[87] Les singularités de l'application catastrophique $\chi : \Sigma \to W$ déterminent alors des évolutions catastrophiques par franchissements de seuils. Il s'agit donc, dans ces modèles, d'adjoindre à la dynamique interne, une dynamique "externe" lente (*cf.* Thom [178], section 6.2.). Depuis l'usage fait par Christopher Zeeman d'un tel système dynamique contraint pour la modélisation de l'influx nerveux (*cf.* Zeeman [1977], chap. 3), de nombreux modèles de ce genre ont été analysés dans le cadre de ce qu'on appelle la théorie des *perturbations singulières* (*cf.* par exemple Argémi [3] et Argémi-Rossetto [5]). Ils peuvent présenter des phénomènes "d'engouffrement"

[86] *Cf.* Bouligand [29].

[87] Nous avons vu la section 1.2. que cette distinction entre deux échelles de temps est constitutive des modèles morphodynamiques. Mais dans la TE stricte on ne considère pas de dynamique dans les espaces externes.

(toutes les trajectoires issues d'un ouvert U de Σ rejoignent un même point en un temps fini) par exemple lorsqu'une trajectoire sur Σ est tangente à une ligne pli et lorsqu'une certaine condition d'hyperbolicité est satisfaite.

Il existe des modèles locaux pour les diverses configurations typiques présentées par les trajectoires relativement aux catastrophes de χ. Dans le cas où $\dim W = 2$, il existe un théorème de classification des configurations génériques (*cf.* Takens [174] et [175]). Les modèles peuvent aussi manifester des comportements chaotiques car les sauts catastrophiques peuvent "réinjecter" les trajectoires sur les diverses nappes stables de Σ de façon complexe (*cf.* Rössler [149]). Ils peuvent enfin présenter également des "phénomènes canard" *i.e.* des bifurcations de Hopf occultées par une décroissance en catastrophe de l'amplitude de la solution périodique. Ces phénomènes ont été abondamment analysés ces dernières années par les méthodes de l'analyse non standard (*cf.* Benoit-Callot-Diener [13]).

6.4 Physique nucléaire

Citons également les applications de la théorie des singularités à la physique nucléaire. Outre l'effet "arc en ciel" bien connu dans la diffusion élastique des noyaux lourds (catastrophes pli dans l'approximation semi-classique), l'étude de la fission nucléaire fournit des courbes expérimentales analysables en termes de TE (*cf.* R. da Silveira [1982]). Considérons une collision inélastique d'énergie E entre deux noyaux lourds de masses et de charges respectives (M_p, Z_p) et (M_c, Z_c) : $(M_p, Z_p) + (M_c, Z_c) \to (M_1, Z_1) + (M_2, Z_2)$.

Les deux paramètres externes d'un tel système sont l'angle d'émergence θ d'un des fragments (par exemple (M_1, Z_1)) et l'asymétrie de charge η_c dans l'état final. Quant à l'énergie cinétique relative ε des deux fragments dans l'état final, elle joue le rôle de variable interne. On obtient alors expérimentalement le spectre $\dfrac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon}$ (double section efficace différentielle) dont les deux maxima possibles représentent deux mécanismes de transfert très différents, respectivement quasi-élastique rapide et non élastique lent. Or on constate une *compétition* entre ces deux mécanismes dans certaines zones de l'espace externe. Les théorèmes d'existence de catastrophes cusp permettent alors de faire de belles prédictions structurales.

6.5 Ondes de choc

Il faudrait évidemment traiter en détail les phénomènes typiquement catastrophiques de formation et de propagation *d'ondes de choc* en acoustique. En effet, dans le cadre de l'approximation géométrique, une onde de choc est une enveloppe de fronts d'ondes et, étant donnée l'inhomogénéité naturelle du milieu de propagation (l'air), ces fronts d'ondes peuvent présenter des singularités lorsque les "rayons" associés enveloppent des caustiques. Mais l'analyse du passage géométrique $\to$ ondulatoire est plus délicate que dans le cas de l'optique car le principe de superposition linéaire sous-jacent à la méthode des intégrales oscillantes n'est plus valable (*cf.* Poston-Stewart [145], chap.12, section 12). Pour une introduction à ces problèmes, on pourra consulter par exemple Poston-Stewart [145], Guckenheimer [88], [89], Golubitsky [78], Sturtevant-Kulkarny [171], Arnold [10], Golubitsky-Schaeffer [79].

Si l'on considère une loi de conservation du type $\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$ avec la condition initiale $u(x, 0) = \varphi(x)$ – loi dont un cas particulier est l'équation de Riemann $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ décrivant l'évolution $u(x, t)$ du profil des vitesses d'une onde – au bout d'un certain temps, les solutions initialement C^∞ deviennent singulières le long de lignes de discontinuité (ondes de choc). Par exemple, dans le cas de l'équation de Riemann, les trajectoires (*i.e.* les caractéristiques) satisfont à $\dfrac{dx}{dt} = u$. Comme on a $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}$, on a $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ et u est constante sur les caractéristiques (qui sont des droites). Lorsque des caractéristiques se rencontrent, u doit prendre deux valeurs distinctes et doit donc présenter une discontinuité. Si l'on interprète u comme un hamiltonien, on peut trouver u comme solution d'un problème variationnel (théorème de Lax), $u(x, t)$ minimisant une fonctionnelle

$F(u,t,x)$. La TE appliquée à $F_{t,x}(u)$ permet alors d'étudier la dynamique des discontinuités de u ainsi que leurs propriétés de stabilité. En particulier, les points cusp de $F_{t,x}(u)$ sont les points de formation des ondes de choc (*cf.* Guckenheimer [89] et Golubitsky-Schaeffer [79]).

6.6 Problèmes variationnels

La TE peut être considérée comme la théorie des singularités sous-jacente aux problèmes *variationnels*. A ce titre, elle est bien *universelle* (*cf.* Dangelmayr [1979] qui fait excellemment le point sur ce sujet). Lorsque l'hypothèse classique de convexité – qui est l'hypothèse essentielle de régularité dans la transformation de Legendre faisant passer du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien – n'est plus valable, les équations de Hamilton deviennent des équations contraintes et l'on doit alors faire appel aux techniques citées plus haut en 3 (*cf.* Takens [175]). Cette problématique a été remarquablement développée par Ivar Ekeland. Si l'on veut minimiser une fonctionnelle $F = \int_0^T f(q(t), \dot{q}(t))dt$, on peut ramener, on le sait, ce problème de calcul des variations à un problème hamiltonien par une transformation de Legendre. On obtient:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p} = u \\ \dot{p}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -f'_q(q,u) \end{cases}$$

où l'hamiltonien H est donné par :

$$H(p,q) = \min_v \{\langle p, v\rangle + f(q,v)\}$$

et où u est la valeur minimale de v qui donne H. Comme $p = -f'_v(q,v)$, on a l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{dt} f'_v(x,v) = f'_x(x,v) \ .$$

Si $\mathcal{H}(q,p,v) = \langle p, v\rangle + f(q,v)$, on voit que le problème dépend essentiellement de la TE appliquée à $\mathcal{H}$ avec v comme variable interne. Minimiser $\mathcal{H}$ en v pour p et q donnés c'est considérer dans l'espace (v,f) les points de tangence du graphe de f avec la direction de plan $-\langle p, v\rangle$. On va ainsi retrouver toutes les possibilités de CE (catastrophes de bifurcation lorsqu'il y a des minima dégénérés et catastrophes de conflit lorsqu'il y a plusieurs minima en compétition). L'ensemble catastrophique stratifié K dans l'espace de phases (q,p) qui joue ici le rôle d'espace de contrôle impose des comportements singuliers aux trajectoires de H. Par exemple, à la traversée de la strate de Maxwell K_1 de K, les trajectoires se "réfractent". Ekeland a donné des modèles locaux au voisinage des strates plus singulières de K, en particulier des strates de cusps et de points triples, ainsi qu'au voisinage d'un point de tangence d'une trajectoire et de K_1 (*cf.* Ekeland [68]).

6.7 Hydrodynamique

On doit citer également l'analyse des bifurcations en hydrodynamique (*cf.* entre autres Benjamin [12]). Un bon exemple en est donné par le "six roll mill" analysé par Michael Berry (*cf.* Berry-Mackley [22] et Poston-Stewart [145] sections 11-11, 11-14). On considère le système dynamique constitué par le champ $u(x,y)$ des vitesses d'un fluide planaire entraîné par six rouleaux disposés en hexagone. Si l'on suppose le fluide incompressible et son domaine simplement connexe, il existe une fonction φ telle que $u_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ et $u_2 = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ (équations de Hamilton) dont les lignes de niveau sont les trajectoires du champ u. Dans la situation parfaitement symétrique (égalité des vitesses des rouleaux), si l'écoulement est irrotationnel (*i.e.* si $\Delta\varphi = 0$) alors l'on doit avoir $\varphi \sim x^3 - 3xy^2$. En variant les vitesses et en brisant la symétrie, on peut alors déployer cet ombilic elliptique dans l'espace des paramètres W et, pour chaque $w \in W$, observer le champ u_w ainsi que les transformations qualitatives qu'il subit à la traversée de l'ensemble catastrophique K.

6.8 Dynamique qualitative et TG

Ceci nous conduit à la théorie généralisée TG où l'on déploie dans les espaces externes W non plus des singularités de fonctions potentiel mais des instabilités de systèmes dynamiques généraux. Ce modèle, dont nous avons souvent évoqué l'extrême complexité mathématique et que nous avons effleuré en 4.6, possède évidemment des applications innombrables dont il est exclu de faire ici le bilan. En effet, il inclut toutes les bifurcations de systèmes dynamiques et donc, par exemple, toutes les dites "structures dissipatives" : phénomène de Bénard, écoulements de Taylor et de Couette en hydrodynamique, réactions chimiques oscillantes (*i.e.* structurées temporellement) et présentant des ondes (*i.e.* structurées spatialement), etc., etc. (*cf.* entre autres Marsden-McCraken [121], Prigogine [146] et sa bibliographie, Guckenheimer [90], Field-Noyes [74], Lozi [114], Rössler [150], [151], Winfree [201], [202], [203], Tyson [192], [193] et Bertrand-Chaix [25] pour un beau panorama des exemples expérimentaux de bifurcations en chimie).

Mais il inclut également les travaux profonds et extensifs effectués sur la turbulence à partir de l'hypothèse de Ruelle-Takens. On commence[88] à bien connaître la structure "chaotique" des "attracteurs étranges" que peuvent présenter génériquement les systèmes dynamiques généraux et on peut les utiliser comme modèles de la turbulence. Il s'agit là d'un domaine fascinant et hautement technique qui exigerait à lui seul (au moins) tout un papier (*cf.* par exemple Bardos [11], Bergé-Pomeau [15], Bowen-Ruelle [33], BPMP [34], Chenciner [41], Eckmann [67], Ioos [96], Lanford [111], Lesieur [113], Mc Laughlin [124], Marsden [120], Ott [133], Rössler [150], [151], Ruelle [153], [154], [155], Ruelle-Takens [156], Zeeman [208]). Heureusement, Pierre Bergé, Yves Pomeau et Christian Vidal en ont publié en 1984 une excellente présentation : *L'Ordre dans le Chaos* [14]. Le lecteur intéressé pourra s'y référer.

Bibliographie

[1] Aharony, A., 1976. Dependence of Universal Critical Behaviour on Symmetry and Range of Interaction, *PTCP*, Vol. 6, 358-424.

[2] Airy, G., 1838. On the Intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 6, 379-403.

[3] Argémi, J., 1978. Approche qualitative d'un problème de perturbations singulières dans $\mathbb{R}^4$, *Equadiff. 78*, (R. Conti, G. Sestini, Villari, eds.), 333-340, Florence.

[4] Argémi, J., 1982. Autour d'un point pseudo-singulier sur la fronce, *LTC 1988*.

[5] Argémi, J., Rossetto, B., 1981. Solutions périodiques discontinues pour l'approximation singulière d'un modèle neurophysiologique dans $\mathbb{R}^4$, *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique*, CNRS, Marseille.

[6] Arnold, V.I., 1968. Singularities of Smooth Mappings, *Russian Mathematical Surveys*, 23, 1, 3-44.

[7] Arnold, V.I., 1972. Normal Forms for Functions near Degenerate Critical Points, the Weyl Groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian Singularities, (trad. anglaise), *Functional Anal. Appl.*, 6, (1973), 254-272.

[8] Arnold, V.I., 1973. Remarks on the Stationary Phase Method and Coxeter Numbers, *Russian Mathematical Surveys*, 28, 19-48.

[9] Arnold, V.I., 1976(a). *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Editions Mir, Moscou.

[10] Arnold, V.I., 1976(b). Wave Front Evolution and Equivariant Morse Lemma, *Comm. Pure Appl. Math.*, 29, 557-582.

[11] Bardos, C., 1978. Equations de Navier-Stokes et Modèle de la Turbulence, *Journ. de Phys.*, 39, 8, C5, 53-59.

[12] Benjamin, T.B., 1978. Bifurcation Phenomena in Steady Flows of a Viscous Fluid, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 359, 1-26 et 27-43.

[88] Note de 2010. "On commence" en 1982.

[13] Benoit, E., Callot, J.L., Diener, F.,Diener, M., 1980. Chasse au canard, *Publications IRMA*, Strasbourg.
[14] Bergé, P. Pomeau, Y., Vidal, Ch., 1984. *L'Ordre dans le Chaos*, Hermann, Paris.
[15] Bergé, P., Pomeau, Y., 1980. La Turbulence, *La Recherche*, 110, 422-432.
[16] Berry, M.V., 1975(a). Cusped Rainbows and Incoherence Effects in the Rippling-Mirror Model for Particle Scaterring from Surfaces, *J. Phys. A*, 8, 566-584.
[17] Berry, M.V., 1975(b). Catastrophes and Semi-classical Mechanics, *Cargèse 1975*, 133-136.
[18] Berry, M.V., 1976. Waves and Thom's Theorem, *Adv. Phys.*, 25, 1-25.
[19] Berry, M.V., 1977. Etude de la Fonction de Wigner, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres.
[20] Berry, M.V., 1979(a). Catastrophe and Stochasticity in Semi-Classical Quantum Mechanics, *SSP 1979*, 122-125.
[21] Berry, M.V., 1979(b). Catastrophe and Fractal Regimes in Random Wawes, *SSP 1979*, 43-50.
[22] Berry, M.V., Mackley, M.R., 1979. The Six-Roll Mill Unfolding an Unstable Persistently Extentional Flow, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, Londres.
[23] Berry, M.V., Nye, J.F., Wright, F.J. , 1979. The Elliptic Umbilic Diffraction Catastrophe, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, Londres, 291, 453-484.
[24] Berry, M.V., Upstill, C., 1980. Catastrophe Optics: Morphologies of Caustics and their Diffraction Patterns, *Progress in Optics*, (E. Wolf ed.), 258-345, North-Holland, Amsterdam.
[25] Bertrand, G., Chaix, J.M., 1982. Exemples expérimentaux de bifurcations en chimie, *BTEA 1982*, 15-38.
[26] Blanchard, P., 1984. Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere, *IMA Preprint Series n° 52*, University of Minnesota.
[27] Boccara, N., 1976. *Symétries brisées*, Hermann, Paris.
[28] Bouligand, Y., 1969. Sur l'existence de "pseudomorphoses cholestériques" chez divers organismes vivants, *Journal de Physique*, 11-12, C4, 30, 90-102.
[29] Bouligand, Y., 1972. Recherches sur les textures des états mésomorphes I, *Journal de Physique*, 33, 525-547.
[30] Bouligand, Y., 1974. Recherches sur les textures des états mésomorphes VI, *Journal de Physique*, 35, 959-981.
[31] Bouligand, Y., 1981. Symétries et brisure de symétrie en biologie, *SBS 1981.*
[32] Bouligand, Y., (ed.), 1980. *La Morphogenèse : de la Biologie aux Mathématiques, Recherches interdisciplinaires*, Maloine, Paris.
[33] Bowen, R., Ruelle, D., 1975. The Ergodic Theory of Axiom-A Flows, *Inventiones Math.*, 29, 181-202.
[34] BPMP, 1980. *Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Topics* (C. Bardos, D. Bessis eds.), Reidel, Dordrecht, Londres, Boston.
[35] Brezin, E., Le Guillou, J.C., Zinn-Justin, J., 1976. Field Theoretical Approach to Critical Phenomena, *PTCP*, Vol.6, 127-247.
[36] Brolin, H., 1965. Invariant Sets under Iteration of Rational Functions, *Arkiv für Mathematik*, 6, 103-144.
[37] BTEA, 1982. Bifurcations, théorie ergodique et applications, *Astérisque*, 98-99.
[38] Cargèse, 1975. *Rencontre de Cargèse sur les singularités et leurs applications*, (F. Pham ed.), Université de Nice.
[39] Chazarain, J., 1975. Solutions asymptotiques et caustiques, *Cargèse 1975.*
[40] Chenciner, A., 1980. Singularités des fonctions différentiables, *Encyclopædia Universalis*, Paris.
[41] Chenciner, A, 1984. Systèmes dynamiques différentiables, *Encyclopædia Universalis*, Paris.
[42] Chillingworth, D.R.J., 1975. The Catastrophe of a Buckling Beam, *DSW 1975*, 86-91.
[43] Chillingworth, D.R.J., 1981. Universal Bifurcations Problems, *Mechanics of Solids*, (H.G. Hopkins, M.J. Sewell eds.), Pergamon Press, Oxford.

[44] Collet, P., 1982. Local C^∞ Conjugacy on the Julia Set for Some Holomorphic Perturbations of $z \to z^2$, *IMA Preprint n° 18*, University of Minnesota.
[45] Collet, P., Eckmann J.P., 1978(a). Bifurcations et groupe de renormalisation, *Preprint*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques.
[46] Collet, P., Eckmann, J.P., 1978(b). *A Renormalization Group Analysis of the Hierarchical Model in Statistical Mechanics*, Lecture Notes in Physics 74, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[47] Collet, P., Eckmann, J.P., 1980. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston.
[48] Cosnard, M., 1982. Etude de solutions de l'équation fonctionnelle de Feigenbaum, *BTEA 1982*, 143-162.
[49] Coullet, P., Tresser, C., 1978. Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *Journ. de Phys.*, 39, 8, C5, 25-28.
[50] CPPS, 1973. *Collective Properties of Physical Systems*, Nobel Symposium XXIV, Academic Press.
[51] Dangelmayr, G., 1979. Catastrophes and Bifurcations in Variational Problems, *SSP 1979*, 84-103.
[52] Dangelmayr, G., Güttinger, W., Veit, W., 1979. Semi-classical Path Integrals in Terms of Catastrophes, *SSP 1979*, 104-121.
[53] de Gennes, P.G., 1974. *The Physics of Liquid Cristals*, Clarendon Press, Oxford.
[54] Derrida, B., 1978. Propriétés universelles de certains systèmes discrets dans le temps, *Journ. de Phys.*, 39, 8, C5, 49-52.
[55] Derrida, B., 1980. Critical Properties of One Dimensional Mappings, *BPMP*, 137-154.
[56] Derrida, B., De Sèze, L., Itzykson, C., 1983. Fractal Structure of Zeros in Hierarchical Models, *Journal of Statistical Physics*, 33, 3, 559-569.
[57] Derrida, B., Eckmann, J.P., Erzan, A., 1983. Renormalisation Groups with Periodic and Aperiodic Orbits, *Journ. of Phys. A : Math. Gen.*, 16, 893-906.
[58] Derrida, B., Flyvbjerg, H., 1985. A new Real Space Renormalisation Method and its Julia Set, *Journ. of Phys. A: Math. Gen.*, 18, L 313-318.
[59] Derrida, B., Itzykson, C., Luck, J.M. , 1984. Oscillatory Critical Amplitudes in Hierarchical Models, *Commun. Math. Phys.*, 94, 115-132.
[60] Douady, A., 1982. Systèmes dynamiques holomorphes, *Séminaire Bourbaki*, 599, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[61] Douady, A., 1985. L'étude dynamique des polynômes quadratiques complexes et ses réinvestissements, *A.G. de la Société Mathématique de France* (26-01-1985).
[62] Douady, A., Hubbard, J.H., 1982. Itération des polynômes quadratiques complexes, *C.R. Acad. Sc.*, 294.
[63] Douady, A., Hubbard, J.H., 1984. Etude dynamique des polynômes complexes, *Publications Mathématiques d'Orsay.*
[64] DSW, 1975. *Dynamical Systems, Warwick 1974*, (A. Manning ed.), Lecture Notes in Mathematics, 468, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[65] Duistermaat, J.J., 1974. Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities, *Com. Pure Appl. Math.*, 207-281.
[66] Eckmann, J.P., 1980. Bifurcations for Maps, *BPMP 1980*, 115-135.
[67] Eckmann, J.P., 1981. Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems, *Review of Modern Physics*, 53, 643 sq.
[68] Ekeland, I., 1977. Discontinuités de champs hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations, *Publications Mathématiques de l'IHES*, 47, 5-32.
[69] Fatou, P., 1919-1920. Mémoire sur les équations fonctionnelles, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 47 (1919), 161-271, 47 (1920), 33-94 et 208-314.
[70] Feigenbaum, M., 1978. Quantitative Universality for a Class of non-linear Transformations, *J. Stat. Phys.*, 19, 25-52.
[71] Feigenbaum, M., 1979. The Universal Metric Properties of Non-linear Transformations, *J. Stat. Phys.*, 21, 669-706.

[72] Feigenbaum, M., 1980. The Transition to Aperiodic Behavior in Turbulent Systems, *Commun. Math. Phys.*, 77, 65-86.
[73] Feigenbaum, M.J., Kadanoff, L.P., Shencker, S.J., 1982. Quasiperiodicity in Dissipative Systems: a Renormalisation Group Analysis, *Physica 5D*, 370-386.
[74] Field, R.J., Noyes, R.M., 1974. Oscillations in Chemical Systems IV, *Journal of Chemical Physics*, 60, 1877-1884.
[75] Fisher, M.E., 1980. Critical Phenomena in Statistical Mechanics. Aspects of Renormalization Group Theory, *BPMP*, 61-68.
[76] Fowler, D.H., 1972. The Riemann-Hugoniot Catastrophe and Van der Waals' Equation, *Towards a Theoretical Biology*, (C.H. Waddington ed.), Edinburgh University Press.
[77] Friedel, J., 1964. *Dislocations*, Pergamon Press, Oxford.
[78] Golubitsky, M., 1975. Regularity and Stability of Schock Waves for a Simple Conservation Law, *Cargèse 1975*, 84-88.
[79] Golubitsky, M., Schaeffer, D., 1975. Stability of Shock Waves for a Simple Conservation Law, *Adv. in Math.*, 16, 65-71.
[80] Golubitsky, M., Schaeffer, D., 1979. Imperfect Bifurcation in the Presence of Symmetry, *Comm. Math. Phys.* 67, 205-232.
[81] Grandy, W.T., 1979. Phase Transitions as Catastrophes : a Perspective, *SSP 1979*, 210-215.
[82] Griffiths, R.B., Kaufman, M., 1982. Spin Systems on Hierarchical Lattices. Introduction and Thermodynamic Limit, *Physical Review B*, 26, 9, 5022-5032.
[83] Gromoll, D., Meyer, W., 1969. On Differentiable Functions with Isolated Critical Points, *Topology*, 8, 361-370.
[84] Guckenheimer, J., 1970. Endomorphisms of the Riemann Sphere, *Proceedings of Symposium of Pure Mathematics*, Vol. 14, (S. Chern et S. Smale, eds.), American Mathematical Society, Providence.
[85] Guckenheimer, J., 1972. Caustics, *Proceedings of the UNESCO Summer School*, 281-289, Trieste.
[86] Guckenheimer, J., 1973. Catastrophes and Partial Differential Equations, *Ann. Inst. Fourier*, 23, 31-59.
[87] Guckenheimer, J., 1974. Caustics and Non-Degenerate Hamiltonians, *Topology* 13, 127-133.
[88] Guckenheimer, J., 1975(a). Solving a Single Conservation Law, *DSW 1975*, 108-134.
[89] Guckenheimer, J., 1975(b). Shocks and Rarefactions in Two Space Dimensions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 59, 281-291.
[90] Guckenheimer, J., 1976. Constant Velocity Waves in Oscillating Chemical Reactions, *SSTCAS 1976*, 99-103.
[91] Guckenheimer, J., 1979. Sensitive Dependance to Initial Conditions for One Dimensional Maps, *Commun. Math. Phys.*, 70, 133-160.
[92] Guckenheimer, J., Holmes, P., 1983. *Non-linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New-York, Heidelberg, Berlin.
[93] Gumowski, I., Mira, C., 1980. *Recurrences and Discrete Dynamic Systems*, Lecture Notes in Mathematics, 809, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[94] Hui, D., Hansen, J.S., 1980. The Swallowtail and Butterfly Cuspoids and their Applications in the Initial Post-Buckling of Simple-mode Structural Systems, *Quarterly of Applied Mathematics*, 38, 17-36.
[95] Hunt, G.W., 1978. Imperfections and Near-coincidence for Semi-symmetric Bifurcations, *Annals N.Y. Acad. Sc.*, 316, 572-589.
[96] Ioss, G., 1978. Bifurcations Successives et Stabilité, *Journ. de Phys.*, 39, 8, C5, 99-105.
[97] Itzykson, C., Luck, J.M., 1983. Zeroes of the Partition Function for Statistical Models on Regular and Hierarchical Lattices, *Critical Phenomena, Theoretical Aspects. Brasov School Conference* (V. Ceausescu, G. Costache, V. Georgescu eds.), 45-82, Boston, Birkhaüser.
[98] Itzykson, C., Pearson, R.B., Zuber, J.B., 1983. Distribution of Zeros in Ising and

Gauge Models, *Nuclear Physics*, B220, [FS8], 415-433.
[99] Jänich, K., 1974. Caustics and Catastrophes, *Math. Ann.*, 209, 161-180.
[100] Jänich, K., 1975. Caustics and Catastrophes, *DSW 1975*, 98-99.
[101] Julia, G., 1918. Itération des applications fonctionnelles, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 47-245.
[102] Kadanoff, L.P., 1973. Critical Behavior, Universality and Scaling, *Proceedings of the International School "Enrico Fermi"*, New-York.
[103] Kadanoff, L.P., 1983. Roads to Chaos, *Physics Today*, 30, 46-53.
[104] Kaufman, M., Griffiths, R.B. , 1981. Exactly Soluble Ising's Models on Hierarchical Lattices, *Physical Review B*, 24, 1, 496-498.
[105] Keller, K., Dangelmayr, G., Eikemeier, H., 1979. Phase Diagrams and Catastrophes, *SSP 1979*, 186-198.
[106] Kléman, M., 1977-1978. *Points, lignes, parois dans les solides cristallins et les fluides anisotropes*, Editions de Physique, Orsay.
[107] Kléman, M., 1978. Aspects classiques et aspects récents de la théorie des défauts, *Journ. de Phys.*, 39, 8, C5, 23-24.
[108] Kléman, M., Toulouse, G., 1976. Principles of Classification of Defects in Ordered Media, *Jour. de Phys.*, 37, L 149.
[109] Komorowski, J., 1978. Gas-Liquid Phase Transitions and Singularities, *Preprint*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette.
[110] Landau, L., Lifshitz, E., 1967. *Physique statistique*, Editions Mir, Moscou, Edition anglaise, Pergamon Press, (1958).
[111] Lanford, O.E., 1973. *Bifurcation of Periodic Solutions into Invariant Tori*, Lecture Notes in Mathematics, 322, 159-192, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[112] Lanford, O.E., 1981. Smooth Transformations of Intervals, *Séminaire Bourbaki*, 563, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[113] Lesieur, M., 1982. La turbulence développée, *La Recherche*, 139, 1412-1425.
[114] Lozi, R., 1982. Bifurcations de motifs dans la réaction de Belousov-Zhabotinskii, *LTC 1988*.
[115] LTC 1988. *Logos et Théorie des Catastrophes. Colloque de Cerisy à partir de l'oeuvre de René Thom*, (J. Petitot ed.), Editions Patiño, Genève.
[116] Magnus, R.J., 1977. Universal Unfoldings in Banach Spaces: Reduction and Stability, *Math. Report 107*, Battelle Advanced Studies Center, Genève.
[117] Magnus, R., Poston, T, 1977. On the Full Unfolding of the Von Kármán Equations at a Double Eigenvalue, *Math. Report 109*, Battelle Advanced Studies Center, Genève.
[118] Magnus, R., Poston, T., 1979. Infinite Dimensions and the Fold Catastrophe, *SSP 1979*, 63-83.
[119] Mandelbrot, B., 1980. Fractal Aspects of the Iteration of $z \to \lambda z(1-z)$ for Complex λ and z, *Annals N.Y. Acad. of Sc.*, 357, 249-259.
[120] Marsden, J., 1974. *Applications of Global Analysis in Mathematical Physics*, Publish or Perish, Berkeley.
[121] Marsden, J., Mc Cracken, M., 1976. *The Hopf Bifurcation and its Applications*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 19, Springer, New-York, Berlin.
[122] Maslov, V.P., 1972. *Perturbation Theory and Asymptotic Methods*, Dunod, Paris.
[123] MBM, 1980. *La Morphogenèse : de la biologie aux mathématiques*, (Y. Bouligand, ed.), Maloine, Paris.
[124] Mc Laughlin, J.B., 1976. Successive Bifurcations Leading to Stochastic Behavior, *Jour. Stat. Phys.*, 15, 4, 307-326.
[125] Michel, L., 1980. Symmetry Defects and Broken Symmetry, *Rev. Mod. Phys.*, 52, 617-751.
[126] Milnor, J., Thurston, P., 1977. On Iterated Maps of the Interval, *Preprint*, Princeton.
[127] Misiurewicz, M., 1980. Invariant Measures for Continuous Transformations of [0,1] with Zero Topological Entropy, *Lecture Notes in Mathematics*, 729, 144-152.
[128] Myrberg, P., 1962. Sur l'Itération des Polynômes Réels Quadratiques, *Journal de*

Mathématiques Pures et Appliquée, 9, 41, 339-351.
[129] Nabarro, F.R.N., 1967. *Theory of Crystal Dislocations*, Oxford University Press, Oxford.
[130] Niemeijer, Th., van Leeuwen, J.M.J., 1976. Renormalization Theory for Ising-like Spin Systems, *PTCP*, Vol. 6, 425-505.
[131] Nye, J.F., 1979. Optical Caustics and Diffraction Catastrophes, *SSP 1979*, 54-60.
[132] O'Shea, D., 1977. An Exposition of Catastrophe Theory and its Applications to Phase Transitions, *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, 47.
[133] Ott, E., 1981. Strange Attractors and Chaotic Motions of Dynamical Systems, *Review of Modern Physics*, 53(4), 655-671.
[134] Pearcey, T., 1946. The Structure of an Electromagnetic Field in the Neighbourhood of the Cusp of a Caustic, *Philos. Mag.*, 37, 311-317.
[135] Peitgen, H.O., Richter, P., 1986. *The Beauty of Fractals*, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[136] Petitot, J., 1977. Introduction à la théorie des catastrophes, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 59, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.
[137] Petitot, J., 1978(a). Catastrophes (Théorie des), *Encyclopædia Universalis*.
[138] Petitot, J., 1978(b). Caustiques et catastrophes, *Mathématiques et Sciences Humaines*, 64, 9-26, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.
[139] Petitot, J., 1985. *Morphogenèse du Sens. Pour un Schématisme de la Structure*, Presses Universitaires de France, Paris.
[140] Petitot, J., 1988. Nouveaux aspects de la méthode de Newton pour la détermination des racines, *L'à-peu-près*, 143-164, Editions de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.
[141] Petitot, J., 1989(a). Forme, *Encyclopaedia Universalis*, XI, 712-728, Paris.
[142] Petitot, J., (ed.) 1989(b). *Logos et Théorie des catastrophes,* Genève, Editions Patiño.
[143] Poénaru, V., 1976. *Singularités en présence de symétries*, Lecture Notes in Mathematics, 510, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[144] Porteous, I.R., 1981. The Normal Singularities of Surfaces in $\mathbb{R}^3$, *Proceedings of the A.M.S. Summer Institute on Singularities*, Arcata, Californie.
[145] Poston, T., Stewart, I, 1978. *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman Publishing, Londres.
[146] Prigogine, I., 1980. *Physique, Temps et Devenir*, Masson, Paris.
[147] PTCP, 1972-1985. *Phase Transitions and Critical Phenomena*, (Domb, C., Green, M.S. eds.), Academic Press, Londres, New-York.
[148] Rasetti, M., 1979. Structural Stability in Statistical Mechanics, *SSP 1979*, 159-175.
[149] Rössler, O.E., 1976. Chaos in Abstract Kinetiks - Two Prototypes, *Bull. Math. Biol.*, 39, 275-289.
[150] Rössler, O.E., 1979(a). Chaotic Oscillations: an Example of Hyperchaos, *Lectures in Appl. Mech.*, 17, 141-156.
[151] Rössler, O.E., 1979(b). Chaos, *SSP 1979*, 290-309.
[152] Ruelle, D., 1969. *Statistical Mechanics*, Benjamin, New-York.
[153] Ruelle, D., 1974. Turbulence and Axiom-A Attractors, *Proc. Inst. School Math. Phys.*, 162-181, Camerino.
[154] Ruelle, D., 1982. Repellers for Real Analytic Maps, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2, 99-108.
[155] Ruelle, D., 1984. Déterminisme et prédictibilité, *Pour la Science*, 82, 58 sq.
[156] Ruelle, D., Takens, F., 1971. On the Nature of Turbulence, *Communications in Mathematical Physics*, 20, 167-192.
[157] SAD, 1976. *Singularités d'applications différentiables*, Lecture Notes in Mathematics, 535, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[158] SBS, 1981. *Symmetries and Broken Symmetries*, (N. Boccara ed.), Idset.
[159] Schaeffer, D., Golubitsky, M., 1979. Boundary Conditions and Mode Jumping in the Buckling of Rectangular Plate, *Commun. Math. Phys.*, 69, 209-236.

[160] Schulman, L.S., 1973. Tricritical Points and Type Three Phase Transitions, *Phys. Rev.*, B7, 5, 1960-1967.
[161] Schulman, L.S., Revzen, M., 1972. Phase Transitions as Catastrophes, *Collect. Phenom.*, 1, 43-47.
[162] Schwarz, G., 1975. Smooth Functions Invariant under the Action of a Compact Lie Group, *Topology*, 14, 63-68.
[163] SDEDS, 1971. *Symposium of Differential Equations and Dynamical Systems*, (D.R.J. Chillingworth ed.), Lecture Notes in Mathematics, 206, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[164] Sewell, M.J., 1966. On the Connexion between Stability and the Shape of the Equilibrium Surface, *J. Mech. Phys. Solids*, 14, 203-230.
[165] Sewell, M.J., 1976. Some Mechanical Examples of Catastrophe Theory, *Bull. Inst. Math. Applic.*, 12, 163-172.
[166] Siegel, C.L.C., 1942. Iteration of Analytic Functions, *Annals of Mathematics*, 43, 607-612.
[167] Sotomayor, J., Gutierrez, C., 1982. Structurally Stable Configurations of Lines of Principal Curvature, *BTEA 1982*, 195-215.
[168] SSP 1979. *Structural Stability in Physics*, (W. Güttinger, H. Eikemeier eds.), Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[169] SSTCAS, 1976. *Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences*, (P.J. Hilton ed.), Lecture Notes in Mathematics, 525, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[170] Stanley, H.E., 1971. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford.
[171] Sturtevant, B., Kulkarny, V.A., 1976. The Focusing of Weak Schock Waves, *J. Fluid Mech.*, 73, 651-671.
[172] Sullivan, D., 1980. Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur S^1, *Séminaire Bourbaki*, 554, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[173] Sullivan, D., 1982-1983. Quasi-Conformal Homeomorphisms and Dynamics, I, II, III, *Preprints*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette.
[174] Takens, F., 1975. Constrained Differential Equations, *DSW 1975*, 80-82.
[175] Takens, F., 1976. Constrained Equations: a Study of Implicit Differential Equations and their Discontinuous Solutions, SSTCAS 1976, 143-234.
[176] Teissier, B., 1974. Introduction to Equisingularity Problems, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. XXIX, *Algebraic Geometry*, Arcata, American Mathematical Society, Providence.
[177] Teissier, B., 1975. Sur la version catastrophique de la règle des phases de Gibbs et l'invariant δ des singularités d'hypersurfaces, *Cargèse 1975*, 105-113.
[178] Thom, R., 1972(a). *Stabilité structurelle et Morphogenèse*, Benjamin, New-York, Ediscience, Paris.
[179] Thom, R., 1972(b). Phase Transitions as Catastrophes, *Statistical Mechanics, New Concepts, New Problems, New Applications*, (S. Rice ed.), University of Chicago Press, Chicago.
[180] Thom, R., 1973. La théorie de Hamilton-Jacobi et l'optique géométrique, *Caratheodory Symposium*, Athènes.
[181] Thom, R., 1976. Symmetries Gained and Lost, *Mathematical Physics and Physical Mathematics*, (K. Maurin, R. Raczka eds.), 293-320, Polish Scientific Publishers, Varsovie.
[182] Thom, R., 1979. Stable Defects in Ordered Media, *SSP 1979*, 129-133.
[183] Thom, R., 1981. Mathematical Concepts in the Theory of Ordered Media, *Cours des Houches : Physique des Défauts*, 388-420, North-Holland, Amsterdam.
[184] Thompson, J.M.T., 1979. Bifurcations Aspects of Catastrophe Theory, *Annals N.Y. Acad. Sc.*, 316, 553-571.

[185] Thompson, J.M.T., 1981. *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering*, John Wiley, Londres.
[186] Thompson, J.M.T., Gaspar, Z., 1977. A Buckling Model for the Set of Umbilic Catastrophes, *Math. Proc. Comb. Phil. Soc.*, 82, 497-507.
[187] Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., 1973. *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley, Londres.
[188] Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., 1975. Towards a Unified Bifurcation Theory, *J. Applied Math. Phys.*, 26, 581-604.
[189] Toulouse, G., 1980. Topologie et défauts dans les milieux ordonnés, *MBM 1980*, 67-69.
[190] Toulouse, G., Pfeuty, P., 1975. *Introduction au groupe de renormalisation et à ses applications*, Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble.
[191] Tresser, C., Coullet, P., 1978. Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 287, 577-580.
[192] Tyson, J.J., 1976. *The Belousov-Zhabotinskii Reaction*, Lecture Notes in Biomathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[193] Tyson, J.J., 1978. On the Appearance of Chaos in a Model of the Belousov Reaction, *J. Math. Biol.*, 5, 351-362.
[194] UC, 1984, *Universality in Chaos*, (Predrag Cvitanovic ed.), Adam Hilger, Bristol.
[195] Wallace, D.J., 1976. The ε-Expansion for Exponents and the Equation of State in Isotropic Systems, *PTCP*, Vol. 6, 294-424.
[196] Wasserman, G., 1975. Stability of Caustics, *Math. Ann.*, 216, 43-50.
[197] Widom, B., Bensimon, D., Kadanoff, L.P., Shenker, S.J., 1983. Strange Objects in the Complex Plane, *Journal of Statistical Physics*, 32, 3, 443-454.
[198] Widom, B., Griffiths, R.B., 1973. Multicomponent-fluid Tricritical Points, *Phys. Rev.*, A 8, 2173.
[199] Wilson, K., Kogut, I., 1974. The Renormalization Group, *Physical Reports*, 12 C, 75.
[200] Wilson, K.G., 1976. The Renormalization Group. Introduction, *PTCP*, Vol.6, 1-5.
[201] Winfree, A.T., 1973. Time and Timelessness in Biological Clocks, *Temporal Aspects of Therapeutics*, (Urguardt, J., Yates, F.E. eds.), New-York.
[202] Winfree, A.T., 1974. Rotating Chemical Reactions, *Scientific American*, 230, 6, 82-95.
[203] Winfree, A.T., 1980, *The Geometry of Biological Time*, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.
[204] Wood, D.W., 1985. Zeroes of the Partition Function for the Two-dimensional Ising Model, *Journal of Physics*, *A*, *Math. Gen.*, 18, L 481-485.
[205] Wright, F.J., 1979. Wave Front Dislocations and their Analysis Using Catastrophe Theory, *SSP 1979*, 141-156.
[206] Yang, C.N., Lee, T.D., 1952. Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions, *Physical Review*, 87, 404-410.
[207] Zeeman, E.C., 1977. *Catastrophe Theory: Selected Papers 1972-1977*, Addison-Wesley, Mass.
[208] Zeeman, E.C., 1981. Bifurcation, Catastrophe and Turbulence, *Proc. of Centenial Conf., Case Western Reserve University*, Cleveland, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.

Index

Aharony, 27, 34, 45
Airy, 3
Argémi, 68
Arnold, 3, 6, 11, 69

Bardos, 71
Benjamin, 70
Benoit, 69
Bergé, 54, 56, 71
Berry, 3, 11, 70
Bertrand, 71
Blanchard, 58, 62
Boccara, 20, 23, 27, 29, 43
Bouligand, 26, 67, 68
Bowen, 71
BPMP, 71
Brézin, 37, 38
Brolin, 58

Callot, 69
Chaix, 71
Chazarain, 3
Chenciner, 24, 71
Chillingworth, 66, 67
Collet, 51, 58
Cosnard, 51, 58
Coullet, 52, 55
CPPS, 12

Dangelmayr, 11
de Gennes, 67
de Sèze, 49
Derrida, 46, 48–52, 56, 57
Diener, 69
Domb, 12, 27
Douady, 58
Duistermaat, 3

Eckmann, 51, 57, 58, 71
Ekeland, 70
Erzan, 51

Fatou, 58
Feigenbaum, 51, 52
Field, 71
Fisher, 44
Flyvbjerg, 46
Fowler, 13
Friedel, 67

Güttinger, 11
Gaspar, 66
Ginzburg, 23
Golubitsky, 26, 66, 67, 69, 70
Grandy, 18
Green, 12, 27
Griffiths, 46–48
Gromoll, 67
Guckenheimer, 3, 51, 69–71
Gumowski, 52
Gutierrez, 5

Hansen, 66
Hubbard, 58
Hui, 66
Hunt, 66, 67

Ioos, 71
Itzykson, 46, 47, 49, 50

Julia, 58

Kaufman, 46–48
Keller, 13, 21, 45
Kléman, 67, 68
Kogut, 27
Komorowski, 13, 18
Kulkarny, 69

Landau, 12, 17, 20, 23
Lanford, 51, 52, 71
Leeuwen, 28
Lesieur, 71
Lifschitz, 12, 17, 20
Lozi, 71
Luck, 50

Mackley, 70
Magnus, 11, 67
Marsden, 71
Mc Laughlin, 71
McCraken, 71
Meyer, 67
Michel, 26
Milnor, 51
Mira, 52
Misurewicz, 51
Myrberg, 52, 58

Nabarro, 67
Niemeijer, 28
Noyes, 71
Nye, 3, 10

O'Shea, 18
Ott, 71

Pearcey, 3

Peitgen, 60, 61
Pfeuty, 21, 27, 28, 30, 31, 33, 39, 40, 42–44
Poénaru, 26
Pomeau, 54, 56, 71
Portéous, 5
Poston, 4, 11, 13, 67, 69, 70
Prigogine, 71
PTCP, 12

Rössler, 69, 71
Rasetti, 31
Revzen, 18
Richter, 60, 61
Rossetto, 68
Ruelle, 12, 58, 71

Schaeffer, 26, 66, 67, 69, 70
Schulman, 18, 20, 21
Schwarz, 26
Sewell, 66, 67
Siegel, 58
Sotomayor, 5
Stanley, 12
Stewart, 4, 13, 67, 69, 70
Sturtevant, 69
Sullivan, 58

Takens, 68–71
Teissier, 24
Thom, 3, 11, 18, 26, 67, 68
Thompson, 66, 67
Thurston, 51
Toulouse, 21, 27, 28, 30, 31, 33, 39, 40, 42–44, 67, 68
Tresser, 52, 55
Tyson, 71

Upstill, 3

Veit, 11
Vidal, 54, 56, 71

Wallace, 37, 38, 44
Wassermann, 3
Wilson, 27
Winfree, 71
Wright, 3

Zeeman, 66, 67