

CONVENTIONNALISME GEOMETRIQUE ET SYMETRIES DE JAUGE

Montréal 15 Mai 1995

Jean Petitot

CAMS-EHESS, 54 bd Raspail, 75 006 Paris

I. PARTIE PHILOSOPHIQUE

À propos du beau livre de Luciano Boi sur *Le problème mathématique de l'espace*, j'aimerais proposer quelques remarques sur une nouvelle interprétation du conventionnalisme géométrique de Poincaré. Je rappelle les deux thèses d'Henri Poincaré pour la physique mathématique exposées, entre autres, dans les chapitres IV et V de *La Science et l'Hypothèse* : "L'espace et la géométrie", "L'expérience et la géométrie".

1. La thèse selon laquelle la géométrie appliquée à la physique est conventionnelle (ni vraie ni fausse), que l'on peut décrire les mêmes contenus factuels physiques dans des cadres géométriques alternatifs. En tant que convention, une géométrie fixe un langage de description et ne possède pas de vérité empirique expérimentale.
2. La thèse que le concept de géométrie se fonde sur celui de groupe et que le concept de groupe est une forme a priori de l'entendement qui "préexiste dans notre esprit au moins en puissance".

Je rappelle aussi la conclusion de "L'espace et la géométrie", chapitre IV de *La Science et l'Hypothèse* où est exposée la thèse du conventionnalisme géométrique.

"Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un "groupe" particulier; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement.

Seulement, parmi tous les groupes possibles, il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'étalon auquel nous rapporterons les phénomènes naturels.

L'expérience nous guide dans ce choix qu'elle ne nous impose pas ; elle nous fait reconnaître non quelle est la géométrie la plus vraie, mais quelle est la plus *commode*."

Cette thèse est approfondie dans le Chapitre V de *L'expérience et la géométrie* où Poincaré explique que les principes de la géométrie ne sont pas des faits

expérimentaux. On peut toujours exprimer un même fait physique en changeant la convention du cadre géométrique et en changeant les lois physiques (par exemple on peut garder la géométrie euclidienne et ne pas garder le principe que les rayons lumineux sont des géodésiques).

Ce point de vue avait déjà été admirablement anticipé par Clifford: il existe une équivalence entre

- (1) des causes physiques de changements dans un espace pensé a priori comme plat ;
- (2) une géométrie non triviale (courbe) de l'espace.

Les expériences physiques portent toujours sur des corps et jamais sur l'espace. Elles ne peuvent donc pas *décider* de la géométrie. Dans le §8.4 de son livre "Géométrie/physique: courbure, espace, matière" (p. 457), L. Boi étudie ces idées profondes de Clifford sur la courbure comme propriété dynamique de l'espace permettant de ramener les contenus physiques à la géométrie.

Bref, les thèses sont:

1. La géométrie est une convention i.e. un *a priori* (grammatical si on veut) de l'expérience. Elle fixe un langage de description et ne possède pas de vérité expérimentale. A priori n'a ici rien à voir avec un a priori logique ou un a priori innéiste cognitif. C'est un a priori au sens de *conditions de possibilité déterminantes*.
2. L'a priori de la géométrie se ramène essentiellement à l'a priori des groupes : groupes d'invariance, groupes de relativité, groupes de symétrie des théories physiques.
3. L'a priori ne pouvant pas être décidé par l'expérience, il doit être *choisi*. Ce n'est pas un a priori innéiste.
4. Le critère du choix est pragmatique : c'est celui de la commodité.

J'aimerais montrer que, en ce qui concerne l'évolution de la physique mathématique, on peut observer, à travers le mouvement, toujours plus accentué et profond, de *géométrisation* de la physique, une évolution qui *motive* le choix des conventions géométriques et possède le statut philosophique d'une *réduction à l'a priori géométrique des contenus physiques empiriques*.

Je m'explique. La thèse philosophique sous-jacente à cette affirmation est que la physique mathématique moderne n'a fait qu'approfondir et amplifier de façon considérable un statut très particulier, non ontologique, transcendantal, de l'objectivité physique dont la première formulation philosophique rigoureuse a été donnée par Kant dans les *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* si remarquablement analysés par Jules Vuillemin dans *Physique et Métaphysique kantienne*.

Je n'ai pas le temps de revenir ici sur la façon dont on peut reformuler le point de vue transcendantal de façon à le généraliser et à le libérer des critiques apparemment dirimantes qui lui ont été adressées. Je me permets de renvoyer à mon étude "Actuality of transcendental Aesthetics for Modern Physics" et je me borne à indiquer que le prix

minimum à payer pour une actualisation du point de vue transcendantal est de disjointre les deux considérations suivantes.

1) La problématique de la *constitution* de l'objectivité (que les positivistes, Hans Reichenbach en tête, considéraient comme une découverte philosophique éminente) : il existe des principes objectifs *prescriptifs* (non descriptifs) qui sont constitutifs du concept de réalité physique (pour les positivistes ces principes étaient logiques et "grammaticaux", i.e. analytiques, pour Kant ils étaient synthétiques a priori, i.e. géométriques et concernaient avant tout les *symétries* et les *principes de relativité* des théories physiques). Ces principes sont *déterminants*. Ce sont des principes de détermination des phénomènes.

Comme l'a affirmé Jules Vuillemin,

"c'est le principe de la phoronomie (la relativité galiléenne), i.e. de l'existence d'un groupe de symétrie, qui fournit la véritable démonstration de l'Esthétique Transcendantale",

"c'est la relativité du mouvement qui rend transcendentale nécessaire la subjectivité de l'espace"¹ (subjectivité c.a.d. *idéalité transcendantale*).

2) Le fait que ces principes constitutifs ont une base *cognitive* (théorie des représentations, doctrine des facultés, etc.). Comme le notait Schlick, chez Kant les principes constitutifs sont caractéristiques de notre conscience représentationnelle.

Une fois faite cette distinction libérant l'a priori du fixisme cognitif qu'il a chez Kant, rien ne s'oppose plus, bien au contraire, à une lecture transcendantale de la physique moderne.

En particulier on peut redonner toute leur opérativité:

- (i) aux catégories légalisant l'expérience physique et ses objets ;
- (ii) à leur schématisation-construction au moyen d'une géométrie de l'espace-temps.

On sait que l'on distingue dans la perspective transcendantale deux classes fondamentalement différentes de catégories constitutives de l'objectivité :

(i) les catégories "mathématiques" concernant l'espace-temps et *l'essence* des phénomènes possibles ;

(ii) les catégories "dynamiques" proprement physiques concernant *l'existence* des phénomènes réels.

En mécanique classique, les premières concernent

- (i) la relativité galiléenne et son groupe de symétrie,
- (ii) la métrique de l'espace (i.e. sa géométrie) ("Phoronomie" kantienne),

¹ Vuillemin [1955].

(iii) le fait que les observables physiques doivent être exprimées mathématiquement par des données différentielles possédant une signification intrinsèque, i.e. *covariantes* (“Dynamique” kantienne).

Les secondes concernent avant tout les catégories proprement physiques de la relation : substance, causalité, communauté. Celles-ci s’interprètent respectivement comme *lois de conservation*, comme *forces* et comme *interactions*.

À partir de ces rappels, revenons sur la conventionnalité de la géométrie pour la physique. Par exemple en relativité générale, elle signifie que l’on choisit une métrique de façon à ce que des rayons lumineux soient des courbes de longueur nulle et que les mouvements en chute libre soient géodésiques. Comme l’a expliqué Adolph Grünbaum dans sa critique de la *Géomérodynamique* de John Archibald Wheeler, Charles Misner et Kip Thorne², ces deux classes de trajectoires sont empiriquement données et ce n’est que le choix conventionnel de la métrique qui les qualifie géométriquement. L’ontologie physique dépend de ces conventions.

Cette conception du conventionnalisme peut facilement s’interpréter de façon transcendantale. La dépendance de l’objectivité physique par rapport à des conventions fixant la qualification géométrique des données empiriques, en particulier le fait que les symétries des théories soient mathématiquement déterminantes pour le contenu physique de ces théories, est la forme moderne de *l’idéalité transcendantale* de l’espace. Cette idéalité transcendantale s’oppose aussi bien à un réalisme ontologique qu’à un idéalisme subjectif (psychologique). Elle est prescriptive, i.e. à la fois conventionnelle et normative (déterminante).

Ceci dit, on peut aller beaucoup plus loin dans l’interprétation du conventionnalisme géométrique que ne l’a fait Poincaré en adoptant un point de vue pragmatique de “commodité”. Il semble exister en effet un “télös” de la géométrisation en physique. Il a été fort bien formulé par Hermann Weyl dans son introduction du concept d’invariance de jauge : transformer des principes de symétrie en principes dynamiques, ou encore réduire les principes dynamiques à des principes de symétrie.

Transcendantale ment parlant, ce télös de la géométrisation en physique peut s’explicitier en disant qu’il s’agit de “résorber” les catégories dynamiques dans les catégories mathématiques, autrement dit, de faire apparaître la construction mathématique des catégories physiques de l’existence comme une conséquence de la construction mathématique des catégories de l’essence. Tout se joue évidemment ici sur les mathématiques.

Paraphrasant des affirmations de Jean-Marie Souriau à propos de la quantification géométrique, on peut dire que

² Grünbaum [1973].

“philosophiquement [la géométrisation] c’est ramener la physique à des symétries géométriques pour faire de la physique a priori” (c’est-à-dire “rationnelle”).

Autrement dit, comme le dit encore Souriau,

“il n’y a *rien de plus* dans les théories physiques que les groupes de symétrie *si ce n’est la construction mathématique* qui permet précisément de montrer qu’il n’y a rien de plus”.

Cela est une parfaite définition de la réduction à l’a priori : il n’y a rien de plus si ce n’est les mathématiques permettant de montrer qu’il n’y a rien de plus.

Ce principe est devenu le principe de découverte majeur des théories physiques actuelles. S’il y a des structures physiques empiriques supplémentaires c’est qu’il y a des symétries supplémentaires et que l’on n’a pas choisi un groupe de symétrie approprié.

Il existe donc en fait un principe de décision qui peut *motiver* théoriquement ce qui, dans le conventionnalisme géométrique de Poincaré, peut apparaître comme relevant de choix motivés seulement pragmatiquement : la motivation est de ramener les contenus proprement physiques à des conséquences mathématiques de symétries, le concept de groupe de symétrie étant, comme l’affirme Poincaré, une forme a priori de l’entendement.

Ce rôle *déterminant* des symétries en physique confère à l’objectivité physique un statut très particulier, qui oppose cette objectivité à toute ontologie substantialiste d’étants singuliers et individués, existant de façon transcendante comme entités séparées. Cette vieille tradition métaphysique aristotélicienne est incompatible avec la physique moderne. L’objectivité physique est transcendante au sens où c’est une objectivité “faible” (au sens de la mécanique quantique) qui inclut dans son concept même d’objet les *conditions d’accès* et les *conditions de possibilité de détermination* de ses objets. Plus précisément : ce qui est *accessible* à la théorie, son contenu positif, y est défini *négativement*, c’est-à-dire par ce qui lui est *inaccessible* (à cause des symétries). Les symétries imposent une auto-limitation à ce que la théorie peut connaître et dire qu’elles sont constitutives c’est dire que *ce que la théorie peut connaître est en partie déterminé par ce que la théorie ne peut pas connaître*. Il s’agit là du principe de base qui disjoint l’objectivité physique de toute ontologie. On peut le qualifier de *principe galoisien* dans la mesure où il a été formulé pour la première fois de façon claire par Galois dans la façon dont celui-ci a complètement repensé le problème de la résolution des équations algébriques.

Dire philosophiquement que l’objectivité physique est transcendante c’est dire techniquement qu’elle est galoisienne. Cette nature galoisienne a été excellemment soulignée par l’éminent spécialiste de géométrie symplectique et des travaux de Witten qu’est Daniel Bennequin, en particulier dans son long article en hommage à René

Thom : “Questions de physique galoisienne”³. C’est elle qui, selon moi, exige la reprise d’une problématique transcendantale.

Pour moi, le sens moderne du *synthétique a priori* concerne cette caractéristique des théories physiques modernes, à savoir que le maximum d’économie et de puissance théorique s’obtient en ramenant les contenus physiques d’abord à des principes dynamiques (conservations, forces, interactions) et ensuite ces principes eux-mêmes à des conséquences physiques de symétries qui expriment que l’on doit pouvoir *éliminer* dans les théories physiques les éléments mathématiques conventionnels (coordonnées, repères, jauges, etc.) nécessaires à la description. Le fait que, par exemple dans une théorie de jauge à la Yang-Mills, une propriété physique comme une self-interaction de bosons de jauge soit reliée au fait que le groupe des symétries globales internes est non commutatif, est, pour moi, un exemple typique de synthétique a priori. Cela n’a rien à voir avec une nécessité logique. D’ailleurs déjà chez Kant, le synthétique a priori est toujours corrélatif de la contingence radicale de l’expérience.

II. PARTIE TECHNIQUE

J’aimerais maintenant évoquer brièvement la façon dont les théories de jauge permettent de ramener les forces et les interactions à des principes de symétrie élargis et cela en utilisant les profondes idées géométriques introduites par Elie Cartan et Hermann Weyl avec la théorie des connexions, idées résumées par L. Boi dans le §5.1 de son ouvrage (p. 228 sq.).

Dans les théories de jauge c’est non seulement la catégorie dynamique de force (comme dans la relativité générale) mais aussi la catégorie dynamique d’interaction qui se trouve ramenée à des principes de symétries. Comme l’explique Yuri Manin dans *Gauge Field Theory and Complex Geometry*⁴ :

“From a philosophical point of view, one can speak of the geometrization of physical thought; more precisely, of a new wave of geometrization which for the first time is sweeping far beyond the boundaries of general relativity.”

Ce sont de telles stratégies de détermination objective des phénomènes qui font dire aux physiciens, par exemple à Michio Kaku⁵ :

"the secret of this mystery [unified theories] most likely lies in the power of *gauge symmetry*".

“Nature *demands* symmetry”.

“Symmetry, instead of being a purely aesthetic feature of a particular model, now becomes its most important feature” (p. 8).

³ Bennequin [1994].

⁴ Manin [1988].

⁵ Kaku [1988].

Depuis les travaux pionniers de Chen Ning Yang et Robert Mills (1954) sur l'invariance de jauge concernant l'isospin, il existe dans les théories de jauge *deux* classes de champs.

1) Les champs *fermioniques* de matière qui sont interprétés comme des sections de fibrés sur l'espace-temps, fibrés dont le groupe structural reflète les interactions dans lesquelles les particules sont engagées. Les coordonnées des fibres sont les degrés *internes* de liberté. Le groupe structural des *symétries internes* est le groupe de symétrie des fibres.

2) Les champs *bosoniques* de jauge qui sont des champs d'interactions véhiculées par des particules virtuelles d'échange (des bosons) et sont interprétés comme des connexions sur ces fibrés. Les particules véhiculant les interactions sont par conséquent les quanta des champs de connexions sur les fibrés de matière.

Les dérivations covariantes permettent d'exprimer géométriquement les interactions. Le lagrangien de Yang-Mills est alors la norme de la *courbure* des connexions. Il est invariant sous l'action du groupe de jauge et l'espace-temps y contribue comme champ de jauge à travers la courbure scalaire de sa connexion.

Rappelons qu'en théorie quantique des champs, on a une chaîne de procédures de déterminations objectives conduisant de principes constitutifs à des modèles explicites.

Les principes de relativité et de symétrie fournissent des lagrangiens L , plus précisément des densités de lagrangien $L(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ dépendant des champs $\varphi(x, t)$ considérés et de leurs dérivées premières $\partial_\mu \varphi$. Cela permet de définir des actions $S(\Gamma)$ sur des chemins Γ conduisant d'un état initial $\varphi_i = \varphi(x, t_1)$ à un état final $\varphi_f = \varphi(x, t_2)$:

$$S(\Gamma) = \int L d^4x = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbf{R}^3} L(\varphi, \partial_\mu \varphi) d^3x dt .$$

Les axiomes de la mécanique quantique conduisent alors de l'action $S(\Gamma)$ à la formule de Feynman (intégrale de chemin) pour l'amplitude de probabilité de transition (\hbar est la constante de Planck):

$$\langle \varphi_f | \varphi_i \rangle = \int_{\Gamma} \exp\left(\frac{2i\pi}{\hbar} S(\Gamma)\right) d\Gamma .$$

Il s'agit d'une intégrale fonctionnelle dans l'espace fonctionnel des chemins. Elle n'est pas bien définie comme objet mathématique (c'est l'un des principaux problèmes mathématique de la théorie quantique des champs), mais elle fournit néanmoins un algorithme de calcul extraordinairement puissant.

Il est bien connu que cette formule (qui est analogue aux fonctions de partition Z de la mécanique statistique) encode une quantité énorme d'information. Il est possible d'en dériver un nombre considérable de modèles explicites, quantitatifs et prédictifs des phénomènes en utilisant des outils mathématiques appropriés comme par exemple :

(i) les développements perturbatifs ;

- (ii) le théorème de Wick disant que tous les moments d'une loi de probabilité gaussienne peuvent s'exprimer en fonction de ses moments d'ordre 2 ;
- (iii) le théorème de la phase stationnaire disant qu'une intégrale oscillante $e^{i\tau\varphi(x)}$ se concentre pour $\tau \rightarrow \infty$ sur les points critiques de la phase $\varphi(x)$;
- (iv) le groupe de renormalisation.

On rencontre ici un splendide exemple d'une détermination objective conduisant de principes constitutifs à des modèles spécifiques et diversifiés : les principes constitutifs (groupes de relativité, symétries) fournissent des Lagrangiens, qui fournissent à leur tour des intégrales de Feynman, qui fournissent elles-mêmes les modèles :

A priori constitutifs \rightarrow Groupes de relativité et symétries \rightarrow Lagrangiens \rightarrow
 Action \rightarrow Intégrales de chemins \rightarrow Modèles spécifiques de phénomènes.⁶

Dans ce contexte, les théories de jauge ont réussi à construire *a priori* les interactions en faisant dépendre les symétries *internes* des systèmes (qui sont des symétries globales apparemment non spatio-temporelles associées aux nombres quantiques des particules) de la *position* spatio-temporelle. Si on localise ainsi ces symétries internes et si l'on exige que les théories demeurent invariantes, on doit introduire des termes correctifs. On constate alors que ceux-ci redonnent exactement les termes d'interaction. Les forces et les interactions apparaissent ainsi de façon générale comme dérivables de principes de conservation *locaux*.⁷

Le cas le plus simple (découvert par Hermann Weyl) est celui du "couplage minimal" entre un électron et un champ électro-magnétique F . Soit ψ la fonction d'onde de l'électron. Son évolution est régie par l'équation de Dirac. Le Lagrangien de Dirac L_D est invariant sous la symétrie interne globale $\psi \rightarrow e^{-ie\vartheta}\psi$ (où e est la charge de l'électron et ϑ une phase). Le groupe des symétries internes est le groupe des phases, i.e. le groupe *commutatif* $U(1)$ des rotations du cercle. D'autre part, le Lagrangien de Maxwell (champ électro-magnétique) L_M est invariant sous une transformation de jauge $A \rightarrow A + d\Lambda$, où A est le potentiel vecteur du champ électro-magnétique F , Λ une fonction et $d\Lambda$ la différentielle de Λ . Si l'on admet que le facteur de phase ϑ peut dépendre de la *position* spatio-temporelle x , alors le Lagrangien de Dirac L_D *n'est plus* invariant. Mais le terme de correction qui apparaît peut être *exactement compensé* par la transformation de jauge $A \rightarrow A + d\vartheta$. Il s'agit là d'une sorte de "miracle" dont la signification tant physico-mathématique que transcendantale est remarquable.

⁶ Cf. par exemple Itzykson, Zuber [1985] et Le Bellac [1988].

⁷ Cf. par exemple Quigg [1983] et Kaku [1988].

Géométriquement, le potentiel vecteur A s'interprète comme une *connexion* définie sur un fibré vectoriel \mathcal{F} au-dessus de l'espace temps \mathcal{E} et le champ F s'identifie à la *courbure* de cette connexion. Le groupe de relativité est maintenant *encore plus large* que le groupe $Diff(\mathcal{E})$ de la relativité générale. C'est le groupe — dit groupe de jauge — des automorphismes du fibré \mathcal{F} de base \mathcal{E} . Cet élargissement permet de ramener la catégorie dynamique d'interaction à un principe de relativité, et donc de la construire. Dans le cas non abélien, le groupe des symétries internes G ($G = SU(2)$, $SU(3)$, etc.), n'est plus commutatif. Cela introduit des difficultés profondes dans la théorie, mais les idées principales subsistent.

BIBLIOGRAPHIE

- BAILIN, D., LOVE, A., 1994. *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing, London.
- BENNEQUIN, D., 1994. "Questions de physique galoisienne", *Passion des Formes*, à René Thom (M. Porte ed.), 311-410, E.N.S. Editions Fontenay-Saint Cloud.
- BOI, L., 1995. *Le problème mathématique de l'espace*, Berlin, Springer.
- BRITTAN, G., 1978. *Kant's Theory of Science*, Princeton University Press.
- COHEN-TANNOUJJI, G., SPIRO, M., 1986. *La Matière - Espace - Temps*, Paris, Fayard.
- d'ESPAGNAT, B., 1985. *Une incertaine réalité*, Paris, Gauthier-Villars.
- GRÜNBAUM, A., 1973. *Philosophical Problems of Space and Time*, Dordrecht - Boston, Reidel.
- ITZYKSON, C., ZUBER, J.B., 1985. *Quantum Field Theory*, Singapour, Mc Graw-Hill.
- KAKU, M., 1988. *Introduction to Superstrings*, New-York, Springer.
- KANT, I., 1786. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Kants gesammelte Schriften, Band IV, Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Georg Reimer, 1911. *Premiers Pincipes métaphysiques de la Science de la Nature*, Trad. J. Gibelin, Paris, Vrin, 1971.
- KANT, I., 1796-1803. *Opus Postumum*, trad. F. Marty, Paris, Presses Universitaires de France, 1986.
- LE BELLAC, M., 1988. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*, Paris, InterEditions - C.N.R.S.
- LOCHAK, G., 1994. *La géométrisation de la physique*, Paris, Flammarion.
- MANIN, Y., 1988. *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer.
- MISNER, C.W., THORNE, K.S., WHEELER, J.A., 1973. *Gravitation*, San Francisco, Freeman.

PETITOT, J., 1992b. "Actuality of Transcendental Aesthetics for Modern Physics", *1830-1930 : A Century of Geometry*, (L. Boi, D. Flament, J.-M. Salanskis eds), Berlin, New-York, Springer.

POINCARÉ, H., 1902. *La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion.

QUIGG, C., 1983. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, Reading, Benjamin-Cummings.

SOURIAU, J.M., 1975. *Géométrie symplectique et physique mathématique*, Coll. Internat. du C.N.R.S., 237, Paris.

VUILLEMIN, J., 1955. *Physique et Métaphysique kantienne*, Paris, Presses Universitaires de France.

WEYL, H., 1922. *Space - Time - Matter*, New-York, Dover.