

# Continu et Objectivité

## La bimodalité objective du continu et le platonisme transcendantal \*

Jean PETITOT

Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales  
École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris  
petitot@ehess.fr

1992

### Table des matières

1	Introduction . . . . .	2
2	Éléments de controverse : le spectre des positions en philosophie des mathématiques	4
2.1	Les apories du réalisme platonicien . . . . .	5
2.2	Dialectique des positions épistémologiques . . . . .	6
2.2.1	Le platonisme bien tempéré de Willard Van Orman Quine . . . . .	6
2.2.2	Le réalisme modéré de John Burgess . . . . .	7
2.2.3	Le platonisme cognitif et génétique de Penelope Maddy . . . . .	8
2.2.4	Le platonisme structuraliste de Michael Resnik . . . . .	8
2.2.5	Logicisme, conventionalisme grammatical, formalisme, constructivisme, intuitionnisme . . . . .	9
2.2.6	L'antiplatonisme cognitif de Philip Kitcher et de Jean-Pierre Changeux . . . . .	9
2.2.7	L'antiplatonisme instrumental et éliminativiste d'Hartry Field . . . . .	11
2.3	Phénoménologie des idéalités . . . . .	12
2.4	Le passage à la doctrine de l'objectivité . . . . .	14
3	Éléments pour une doctrine de l'objectivité (Rappels) . . . . .	17
3.1	Être et phénomène . . . . .	17
3.2	Le transcendantalisme kantien . . . . .	18
3.3	Précisions sur l'idée directrice . . . . .	19
4	Éléments transcendantsaux de l'objectivité symbolique des mathématiques formelles	19

---

\*Colloque de Cerisy, *Le Continu Mathématique*, 11-21 Septembre 1990.

4.1	L'esthétique transcendantale symbolique dans le "Über das Unendliche" de Hilbert . . . . .	19
4.2	Le transcendantalisme grammatical de Wittgenstein . . . . .	22
5	La bimodalité objective du continu . . . . .	24
6	Les interprétations divergentes de la réalité du continu . . . . .	28
6.1	Le finitisme radical . . . . .	28
6.2	La "reverse mathematics" et les réductions fondationnelles . . . . .	29
6.3	Quelques exemples . . . . .	32
6.4	La controverse sur la doctrine de Gödel et le platonisme transcendantal . .	37
6.5	Le continu algébrique . . . . .	41
6.6	L'analyse non standard . . . . .	42
6.7	Le transfini immanent au fini . . . . .	47
7	La bonne structure du continu et les grands cardinaux . . . . .	49
8	Conclusion : défense du platonisme transcendantal . . . . .	55

*"To be a mathematician  
is to be an out-and-out Platonist".*  
David Mumford<sup>1</sup>

## 1. Introduction

Le problème du continu est évidemment un problème logique et mathématique fort technique et à multiples facettes (indépendance de l'hypothèse du continu, modèles hyperfinis du continu en Analyse non standard, relations entre la "régularité" de la structure ensembliste du continu et les axiomes d'existence de grands cardinaux, etc.). Mais il se trouve également au cœur des débats généraux concernant le mode d'existence et le statut de réalité des idéalités mathématiques, celui de la vérité et de la nécessité des jugements mathématiques, celui de leur applicabilité aux sciences expérimentales.

Or, dès que ces questions épistémologiques et ontologiques concernant l'existence, la réalité, la nécessité, la vérité, l'applicabilité, etc. interviennent, c'est-à-dire dès que l'on tente de mettre les mathématiques en rapport avec une ontologie de la nature, une phénoménologie des idéalités ou une psychologie des représentations mentales, les débats deviennent contradictoires et indécidables. C'est pourquoi les interprétations philosophiques du continu sont multiples et *divergentes*.

Il s'agit là d'un fait épistémologique remarquable à prendre en considération. Il manifeste en effet l'existence de paralogismes et d'antinomies dialectiques œuvrant dans les conceptions dominantes des mathématiques. Cette négativité dialectique est elle-même le symptôme de profondes erreurs dans l'usage qui est fait des méta-concepts que nous venons d'évoquer. Elle témoigne d'un obstacle épistémologique. D'où l'importance d'une clarification. Même si elle n'atteint plus à la tension paroxystique qu'elle a pu manifester

---

1. Préface à *The unreal life of Oscar Zariski* (Parikh [1991]).

lors de la marginalisation scientifique de Brouwer par Hilbert en 1928<sup>2</sup>, la *Grundlagenstreit* est loin d'être close puisque les courants dominants de l'épistémologie des mathématiques ont en commun un éloignement grandissant et une méconnaissance croissante de la réalité mathématique effective.

D'où l'importance d'une clarification. Nous tenterons d'en proposer une à partir des hypothèses suivantes.

### Hypothèses

1. Le problème épistémologique est avant tout celui de *l'objectivité* des idéalités mathématiques.<sup>3</sup> Les notions (méta-concepts) d'existence, de réalité, de nécessité, de vérité, d'applicabilité, etc. doivent y être *subordonnées*. Elles ne sont pas primitives mais dérivées. Il est dogmatique (métaphysique au sens négatif) de poser qu'elles possèdent un sens précédant leur application aux idéalités mathématiques.

2. Pour, sinon résoudre, du moins clarifier les questions épistémologiques et ontologiques évoquées, il faut par conséquent impérativement disposer d'une doctrine de l'objectivité qui ne soit *ni* dogmatiquement ontologique, *ni* dogmatiquement psychologiste. La doctrine la plus plausible reste, selon nous, la doctrine *transcendantale*.

3. Si l'on se situe dans le cadre d'une doctrine transcendantale de l'objectivité, on doit prendre en compte *deux* objectivités différentes (toutes deux à constituer transcendentale-ment en tant que telles) : l'objectivité mathématique proprement dite et l'objectivité physique proprement dite.

4. *Le continu est une instance qui articule entre elles ces deux objectivités*, mais en possédant toutefois un statut, en occupant une position, en exerçant une fonction essentiellement différents dans les deux cas. D'où une *bimodalité objective* du continu.

5. Les difficultés qu'il y a à traiter philosophiquement du continu sont donc (au moins) de deux ordres :

- d'abord le penser transcendentale-ment en termes d'objectivité ;
- ensuite penser sa bimodalité objective à l'intérieur même d'une doctrine transcendantale de l'objectivité.

6. Le conflit dialectique opposant traditionnellement un platonisme ontologique — affirmant la transcendance des idéalités mathématiques — à un mentalisme représentationnel — affirmant au contraire leur immanence aux actes psychologiques corrélatifs — peut être, selon moi, résolu par l'introduction d'un platonisme objectif (non ontologique) et transcendantal (non transcendant).

7. Ce platonisme objectif transcendantal fournit une formulation philosophique rigoureuse du platonisme de Gödel qui, selon nous, représente (bien au-delà des caricatures qu'on a pu en donner) l'une des plus importantes philosophies des mathématiques de ce siècle.

Notre propos concernera essentiellement le problème de l'objectivité du continu. Mais toute réflexion proprement philosophique plaidant en faveur de l'objectivité des mathéma-

---

2. Sur "l'affaire" de l'exclusion par Hilbert de Brouwer du comité des *Mathematische Annalen*, cf. van Dalen [1990].

3. Sur ce point nous nous accordons avec Benacerraf et Putnam [1964] : "the problem is the objectivity of mathematics, not the existence of mathematical objects".

tiques comprend également une dimension éthique. Comme le disait déjà magnifiquement Hilbert à la suite de Jacobi, c'est "pour l'honneur de l'esprit humain" qu'il faut défendre les mathématiques pures contre les sceptiques. Ce point — que trop peu de mathématiciens et de philosophes osent aborder ouvertement — a été fort bien exposé par Stephen Simpson dans sa contribution au symposium "Hilbert's Program Sixty Years Later" (Washington, 29 décembre 1985).<sup>4</sup> Après avoir insisté sur le fait (idéologique) que "the validity of mathematics is under siege" étant donnés les assauts constants des divers nominalismes, pragmatismes, opérationnalismes ("with friends like these, who needs enemies?"), Simpson passe brièvement en revue les différentes écoles de philosophie des mathématiques susceptibles de répondre à ce scepticisme généralisé regardant la pertinence du concept de vérité en mathématiques (cf. Kline : "there is no truth in mathematics"<sup>5</sup>) : logicistes, formalistes, intuitionnistes, platoniciens. Il lui est évidemment facile de montrer qu'aucune de ces écoles n'est à même d'apporter "a comprehensive view of mathematics and its applications". C'est pourquoi, selon lui,

"there is urgent need for a philosophy of mathematics which would supply (...) a rational explanation of the usefulness of mathematics in the physical sciences".

"Mathematicians and philosophers of mathematics ought to get on with the task of defending their discipline".

La tâche est impérative car

"the attack on mathematics is part of a general assault against reason",  
 "the utility of mathematics can be argued only as part of a broad defense of reason, science, technology and Western civilization".

Il n'y a, selon nous, rien d'excessif dans ces fermes propos. Selon Simpson, le kantisme serait à l'origine de la "crise" du rationalisme scientifique. Nous nous proposons de montrer que tel n'est pas le cas et que c'est au contraire l'élimination du concept transcendantal d'objectivité qui rend la "crise" inévitable.

Nous ferons d'abord rapidement quelques rappels sur la doctrine transcendantale de l'objectivité. Cela nous permettra de formuler la bimodalité objective du continu et, sur cette base, d'évaluer de façon un peu plus technique les interprétations philosophiques divergentes de la question du continu.

## 2. Éléments de controverse : le spectre des positions en philosophie des mathématiques

Nous reviendrons à la section 6 sur les interprétations philosophiques divergentes de la question du continu ainsi que sur la question du platonisme sous sa forme technique. Nous nous restreindrons dans cette section à des considérations plus générales. Notre

---

4. Simpson [1988]. Nous reviendrons plus bas sur certains aspects techniques des travaux de Simpson.

5. Kline [1980].

propos restant toutefois centré sur un problème technique, nous nous bornerons à quelques rappels.

## 2.1. Les apories du réalisme platonicien

Dans sa forme non technique, la question traditionnelle du réalisme platonicien est celle de l'existence des idéalités mathématiques, c'est-à-dire de l'acceptabilité d'une ontologie d'entités abstraites. Comme le rappelle Crispin Wright,

“the traditional platonist answer is that the truth-conditions of pure mathematical statements are constituted by the properties of certain mind-independent abstract objects, the proper objects of mathematical reflection and study”.<sup>6</sup>

L'époque contemporaine restant encore dominée par la conception de la logique comme organon des sciences, ce réalisme est en général débattu à partir des hypothèses suivantes :

(i) “objectivité” et “réalité” signifient “référence à des objets” existant à titre d'entités séparées et indépendantes ;

(ii) conformément à la théorie causale de la référence, la référence est la relation converse de la façon dont un sujet est causalement affecté par des objets physiques externes, c'est-à-dire matériels et spatio-temporels ;

(iii) l'ontologie des objets physiques est une ontologie de choses matérielles, c'est-à-dire d'étants singuliers individués, identiques à soi et matériels ;

(iv) il est sensé et légitime d'utiliser les méta-concepts de réalité extérieure, de matière, de chose, d'objet, de causalité, etc. indépendamment de toute constitution préalable de domaines d'objectivité ;

(v) la quantification logique est universellement et indifféremment applicable aux objets d'un domaine quelconque : on peut quantifier sur les nombres, les fonctions, les grands cardinaux, les pommes, les rois de France (chauves ou non), les présidents de la République (actuels ou non).

Nous considérons que ces hypothèses sont problématiques et que leur acception a conduit la philosophie des sciences de ce siècle à une impasse épistémologique. Mais acceptons-les malgré tout un instant. Il est facile de voir qu'ils ne peuvent que conduire à une prolifération de positions entretenant entre elles des conflits dialectiques. En effet, ils obligent à dénier toute réalité aux objets et aux structures mathématiques pour la raison triviale que si “exister objectivement” signifie bien “exister physiquement dans le monde externe en tant que chose matérielle”, alors il est impossible que nous puissions posséder un accès épistémique (un apprentissage, des croyances, des croyances vraies, des croyances vraies rationnellement justifiées, c'est-à-dire des connaissances) à des entités externes qui sont abstraites, et ne peuvent par conséquent posséder aucune efficace causal. Comme le souligne (après tant d'autres) Michael Resnik :

“if we have no physical traffic with the most basic mathematical entities and they are not literally the products of our own minds either, how can we learn

---

6. Wright [1988], p. 426.

any mathematics? How could it even be possible for us to acquire beliefs about mathematical objects?"<sup>7</sup>

La théorie causale de la référence interdit a priori, comme l'affirme Philip Kitcher, que des constructions et des manipulations symboliques "provide any type of access to abstract reality".<sup>8</sup>

Si l'on admet l'impossibilité de développer une ontologie d'entités abstraites, alors le dilemme est immédiat. Il possède la structure d'une antinomie dialectique (au sens d'une Dialectique transcendantale) :

**Thèse.** Les mathématiques sont descriptives et vraies. Elles décrivent des entités abstraites réellement existantes.

Cette thèse ontologique n'est pas tenable car nous ne pouvons disposer d'aucun accès épistémique à de telles idéalités et à la vérité des énoncés les concernant.

**Antithèse.** Les mathématiques sont prescriptives et non descriptives. Analytiques et conventionnelles, elles ne concernent que des règles grammaticales d'usage de concepts.

Cette thèse syntaxique n'est pas tenable car, comme l'a montré Gödel, elle est réfutée par les théorèmes de limitation interne des formalismes (incomplétude, indécidabilité, etc.). D'autre part, on sait qu'elle ne permet pas de rendre compte de façon plausible de l'applicabilité des mathématiques.

## 2.2. Dialectique des positions épistémologiques

Une doctrine transcendantale de l'objectivité a pour vocation de dépasser (en les dissolvant) de telles antinomies. Si l'on refuse d'y recourir, alors l'antinomie se déploie en un spectre de positions rivales dont il est impossible de décider argumentativement de la valeur.<sup>9</sup>

### 2.2.1. Le platonisme bien tempéré de Willard Van Orman Quine

Quine a fort justement remarqué que les objets physiques postulés par les théories physiques sont tout aussi idéaux que les idéalités mathématiques et que donc il est tout aussi légitime (ou tout aussi illégitime) d'accepter les uns que les autres. On ne peut pas être à la fois réaliste en physique et nominaliste en mathématiques. En effet, les objets physiques sont eux aussi des idéalités explicatives qui permettent de réduire la complexité des sensations à une simplicité conceptuelle. À partir du moment où on les utilise comme réels, on doit accepter leur existence ("ontological commitment"). Or

"Platonist ontology (...) is, from the point of view of the strictly physicalistic conceptual scheme, as such a myth as that physicalistic conceptual scheme itself is for phenomenism".<sup>10</sup>

---

7. Resnik [1988], p. 403.

8. Kitcher [1988], p. 527.

9. Pour quelques indications sur l'actualité de ces débats, cf. par exemple (parmi une énorme bibliographie) : Maddy [1988], [1989] et Chihara [1990].

10. Quine [1948].

On doit donc aussi accepter l'existence des idéalités mathématiques. La refuser est une "intellectual dishonesty".<sup>11</sup> Quine critique par conséquent les positivistes qui veulent exclure comme non significatifs les énoncés d'existence d'objets abstraits. Les mathématiques appartiennent à la science et

"we can have reasons, and essentially scientific reasons, for including numbers or classes or the like in the range of values of our variables".<sup>12</sup>

Cette position nous paraît juste mais limitée par son refus d'aborder de front la problématique de la constitution des objectivités physique et mathématique. Pour Quine la justification de poser l'existence d'entités abstraites est en définitive celle d'un bénéfice pragmatique :

"the pragmatic benefits do count as evidence".

D'un autre côté, en ce qui concerne l'engagement ontologique des théories, Quine considère que les théories scientifiques doivent être réduites à des théories logiques extensionnelles (sans modalités) du premier ordre pour que l'on puisse y appliquer son critère de l'"ontological commitment". Or cela est impossible à réaliser pour les théories physiques sophistiquées.<sup>13</sup>

### 2.2.2. Le réalisme modéré de John Burgess

John Burgess<sup>14</sup> distingue trois formes de nominalisme, respectivement "instrumentaliste", "herméneutique" et "révolutionnaire". Pour le premier, la science est une fiction utile. pour le second, l'ontologie physico-mathématique procède d'une subreption ontologisante véhiculée par la langue naturelle ; une bonne analyse linguistique doit permettre de le dissoudre. Pour le troisième, l'élimination des assertions existentielles sur les idéalités abstraites est une obligation uniquement motivée par la "medieval superstition" du rasoir d'Ockham. Burgess critique alors ces trois positions.

"Unless he is content to lapse into a mere instrumentalist or 'as if' philosophy of science, the philosopher who wishes to argue for nominalism faces a dilemma : he must search either for evidence for an implausible hypothesis in linguistics, or else for motivation for a costly revolution in physics. Neither horn seems very promising, and that is why I am not a nominalist."<sup>15</sup>

Pour Burgess le problème de la possibilité d'une interaction causale avec des abstracta est un problème scientifique (et non philosophique) relevant des sciences cognitives.

---

11. Cf. Maddy [1989], p. 1131.

12. Quine [1969], p. 97.

13. Par exemple, comme l'a remarqué Hilary Putnam, toutes les théories physiques reposant sur un principe de moindre action (c'est-à-dire pratiquement toute la physique fondamentale, de la mécanique symplectique à la théorie quantique des champs) font intervenir de façon constitutive la modalité de la possibilité puisque la stationarité  $\delta(S) = 0$  de la fonctionnelle d'action y sélectionne une trajectoire actuelle dans un espace de phases fonctionnant comme univers des possibles.

14. Cf. Chihara [1990], pp. 181 sq.

15. Burgess [1983], p. 101.

“A philosopher’s confession that knowledge in pure and applied mathematics perplexes him constitutes no sort of argument for nominalism, but merely an indication that the philosopher’s approach to cognition is inadequate.”<sup>16</sup>

Selon Burgess, la seule épistémologie authentique est *interne* aux sciences et un argument typiquement externaliste comme celui dérivé de la théorie causale de la référence (les entités mathématiques sont causalement inertes et non spatio-temporelles, etc.) n’est par conséquent pas acceptable. Ce point de vue internaliste — que nous partageons pleinement — est conforme à la thèse qu’en science les “ontologies” sont toujours régionales (au sens de Husserl) et que les méta-concepts doivent toujours être relativisés à de telles régions.

### 2.2.3. Le platonisme cognitif et génétique de Penelope Maddy

Penelope Maddy a développé cette idée que la question du platonisme est un problème scientifique (relevant des sciences cognitives) et non pas philosophique. L’une de ses thèses principales est que les ensembles sont, du moins au départ c’est-à-dire au niveau de l’amorçage concret des chaînes causales, des entités perceptibles constituant une espèce naturelle et avec lesquelles nous pouvons entretenir une relation d’“acquaintance”. Tels qu’elle les décrit, ces ensembles concrets (naïfs et primitifs) sont des Gestalten perceptuelles localisées sur les agrégats d’objets qu’elles unifient et permettant de les dénombrer. Il existe, selon elle, des “sets detectors” dans notre esprit et par conséquent

“as in the case of knowledge of physical objects, it is the presence of the appropriate detector which legitimizes the gap between what is causally interacted with, and what is known about”.<sup>17</sup>

Bref, ces ensembles concrets — qui ne sont pas des entités séparées indépendantes — sont causalement responsables de croyances perceptuelles et celles-ci peuvent par conséquent être acquises par des sujets.<sup>18</sup> Évidemment, tout le problème est de ne pas tomber dans une régression à l’infini en ajoutant à l’agrégat physique des objets un double indiscernable qui serait l’ensemble concret les unifiant.<sup>19</sup>

### 2.2.4. Le platonisme structuraliste de Michael Resnik

Certains parmi les plus éminents philosophes des mathématiques (par exemple Stewart Shapiro)<sup>20</sup> ont tenté de résoudre le problème du platonisme en partant du fait basique que, dans les mathématiques modernes, les objets mathématiques sont en fait des *structures* abstraites (au sens hilberto-bourbakiste). Si l’on admet que les théories mathématiques décrivent et réfèrent à des structures obtenues par abstraction, alors, dans la mesure où elles ne sont au mieux déterminables qu’à isomorphisme près, la question ontologique se

---

16. Ibid.

17. Maddy [1980], p. 182.

18. Nous allons y revenir à la section 2.3.

19. Cf. Chihara [1990], pp. 201 sq.

20. Cf. Shapiro [1983].

trouve également réglée. Selon Michael Resnik, l'un des structuralistes actuellement les plus influents, la grande erreur de la philosophie des mathématiques est d'avoir cru que l'objectivité des mathématiques exigeait que les mathématiques portent sur des choses (des étants singuliers individués).<sup>21</sup> Selon lui, la quantification porte en mathématique sur des éléments de structure, c'est-à-dire sur des positions s'entre-déterminant à travers un réseau de relations. Cela permet de maintenir une conception référentielle de la sémantique tout en conjurant le spectre du platonisme (du moins sous sa forme ontologique naïve). Mais évidemment les préjugés que nous avons évoqués plus haut conduisent immédiatement à poser la question de l'identité et de l'individuation des structures. Celles-ci n'étant définies qu'à isomorphisme près et des objets différents pouvant être éléments de structures isomorphes, elles violent le principe d'identité et ses conséquences. Ainsi que le note Chihara,

“Resnik is a Platonist of sorts : he believes in the existence of abstract mathematical objects. But by characterizing these objects as mere positions in a structure and by adopting his extreme doctrine of the nonsensicality of trans-structural identity, he thought he could avoid the chief philosophical problems that have plagued the traditional Platonic views of mathematics. But (...) he has merely exchanged one set of problems for another”.<sup>22</sup>

### 2.2.5. Logicisme, conventionalisme grammatical, formalisme, constructivisme, intuitionnisme

Les options philosophiques de ces conceptions non platoniciennes sont suffisamment connues pour que nous n'ayons pas à y revenir maintenant. Nous retournerons plus tard (section 5) sur certains aspects techniques.

### 2.2.6. L'antiplatonisme cognitif de Philip Kitcher et de Jean-Pierre Changeux

Une des façons les plus classiques de régler la question du platonisme est de réduire les contenus mathématiques à des contenus de représentations et d'actes mentaux. Une telle option subordonne l'épistémologie des mathématiques à une psychologie cognitive et la fait donc dépendre des thèses sélectionnées pour la compréhension de la cognition.

On sait qu'il existe actuellement une alternative dominant les sciences cognitives.

- Soit l'on admet, dans la perspective dite fonctionnaliste (Hilary Putnam, Jerry Fodor, Zenon Pylyshyn, etc.), le parallèle cerveau/ordinateur et l'on admet alors que des représentations symboliques, constituant un langage formel interne à la machine cognitive, se trouvent compilées et implémentées comme un “software” dans le “hardware” neuronal, la structure logique du “software” étant indépendante de cette implémentation

---

21. On a là un bon exemple de l'obstacle épistémologique qu'a induit la promotion de la logique au rang d'organon depuis Frege et Russell. Il aura fallu attendre presque un siècle pour pouvoir réaffirmer ce truisme que les objets mathématiques ne sont pas des choses.

22. Chihara [1990], p. 145.

• Soit l'on admet au contraire, dans le cadre de la perspective dite éliminativiste (Paul et Patricia Churchland, Daniel Dennett, etc.) que les représentations, états, actes et contenus mentaux, se réduisent en réalité à des processus cérébraux et ne sont que des artefacts descriptifs. Dans ce dernier cas, on pourra faire usage des modèles connexionnistes pour comprendre comment les structures symboliques peuvent émerger de la dynamique physique des substrats neuronaux.<sup>23</sup>

Un bon exemple d'antiplatonisme cognitif d'orientation fonctionnaliste est fourni par les travaux de Philip Kitcher.<sup>24</sup> Selon ce dernier, les mathématiques constituent une activité symbolique nous permettant, par une suite d'approximations successives sédimentées dans les traditions, de structurer de plus en plus adéquatement notre expérience au moyen d'idéalités. Les mathématiques émergeraient, par ce processus d'idéalisation, de connaissances proto-mathématiques (perceptives par exemple, cf. P. Maddy) contraintes par la réalité du monde externe et ayant eu une fonction d'amorçage. Véhiculées historiquement et socialement par le patrimoine scientifique de l'humanité, elles progressent comme toutes les autres formations symboliques. Nul n'est donc besoin pour les comprendre d'invoquer un quelconque monde d'entités séparées auquel une incompréhensible intuition intellectuelle nous fournirait un quelconque accès. Le point de vue de Kitcher est par conséquent "évolutionniste" et accepte la théorie causale de la référence. Selon lui, les mathématiques sont avant tout une tradition, une pratique et une compétence. L'approche doit être psychologue mais, dans la mesure où il s'agit de compétence idéale, affranchie des limitations contingentes des performances concrètes, la psychologie dont il s'agit est celle d'agents idéaux. Autrement dit, les mathématiques spécifient progressivement "the constructive power of an ideal subject".<sup>25</sup>

Un bon exemple d'antiplatonisme cognitif éliminativiste est celui défendu par Jean-Pierre Changeux dans son débat avec Alain Connes.<sup>26</sup> Brièvement résumées, ses thèses sont les suivantes :

(i) Les objets mathématiques sont des "êtres de raison" (p.28), des représentations, des objets mentaux dont la réalité est purement cérébrale. Ils sont "codés dans le cerveau comme des formes" (p. 171) et donc sont "identifiables à des états physiques" (p. 30). Certes, leurs contenus objectaux sont réflexivement analysables et l'on peut clarifier axiomatiquement leurs propriétés, mais leur réalité est purement matérielle.

(ii) On pourrait chercher à sauver une autonomie du formel en admettant les thèses fonctionnalistes du mentalisme computationnel à la Putnam. Mais le fonctionnalisme n'est pas tenable biologiquement car le cerveau est une machine biologique évolutive possédant une embryogénèse.

(iii) Le matérialisme neuronal ne conduit pas forcément au solipsisme (idéalisme sub-

---

23. Dans le domaine sémio-linguistique nous avons développé depuis 1975 à la suite de René Thom des modèles morphodynamiques analogues à ceux du connexionnisme (usages des concepts dynamiques d'attracteur, de contrôle, de bifurcation, de l'opposition dynamiques rapides/lentes, etc.) à des fins syntactico-sémantiques. Cf. nos trois ouvrages Petitot [1985a], [1985b], [1991b].

24. Cf. par exemple Kitcher [1984] et [1988].

25. Kitcher [1984], p. 160.

26. Changeux-Connes [1989]. Nous avons analysé en détail ce débat dans notre étude "Idéalités Mathématiques et Réalité Objective", Petitot [1991a].

jectif). Les représentations mathématiques sont publiques, communicables, historiques et culturelles (p. 35). Elles sont sélectionnées par un processus évolutif contingent. Elles sont donc elles-mêmes contingentes. Il ne peut pas y avoir, pour des raisons de principe, d'ontologie mathématique. L'historicisme évolutionniste, donc le hasard, peut seul expliquer leur nécessité. L'existence, la réalité, la cohérence, la vérité, la nécessité des mathématiques "résultent a posteriori de l'évolution"(p. 59).

(iv) L'épistémologie des mathématiques doit donc désormais reposer sur un "darwinisme mental" (p. 116) qui est le prolongement en psychologie du darwinisme neural. Tout "scientifique averti, honnête avec lui-même"(p. 46) doit adopter un matérialisme radical et dénoncer tout platonisme comme une croyance religieuse, comme un "résidu mythique" (p. 45) des temps magico-théologiques archaïques, comme une croyance irrationnelle devant être éliminée par "l'ascèse intellectuelle du matérialisme" (p. 45).

### 2.2.7. L'antiplatonisme instrumental et éliminativiste d'Hartry Field

Dans *Science without Numbers*<sup>27</sup>, Hartry Field a développé une forme radicale — éliminativiste — d'antiplatonisme. Il abandonne complètement le problème de la vérité en mathématiques, c'est-à-dire celle des "truth-makers" (en particulier, contrairement aux structuralistes, aux constructivistes ou aux intuitionnistes, il ne cherche pas à changer la nature de la référence des énoncés mathématiques en passant d'objets à des structures ou à des constructions mentales). Reprenant l'ancienne problématique positiviste de l'éliminabilité des termes théoriques et s'inspirant des nombreux théorèmes de logique mathématique affirmant qu'une théorie formelle "forte" est en fait conservative sur une théorie formelle "faible"<sup>28</sup>, il essaie de montrer que les théories scientifiques utilisant des mathématiques sont en fait conservatives sur des théories sans mathématiques.

De façon plus précise<sup>29</sup>, Field va supposer qu'il existe une théorie logique générale pouvant servir de cadre *à la fois* aux théories scientifiques et aux théories mathématiques. Soit ZFU la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec Urelemente. On ajoute à ZFU le prédicat  $M =$  "être un objet mathématique", avec les axiomes convenables. On obtient ZFU<sup>1</sup>. Soit  $N$  une théorie scientifique "nominaliste", c'est-à-dire une théorie dont les variables ne portent que sur des entités non mathématiques. Le vocabulaire non logique de  $N$  n'interfère donc pas avec celui de ZFU<sup>1</sup>. Soit  $N^*$  la théorie obtenue en relativisant la quantification de  $N$  à  $\neg M$  (non- $M$ ). Soit ZFU<sup>2</sup>, la théorie obtenue à partir de ZFU<sup>1</sup> en permettant au vocabulaire de  $N$  d'apparaître dans l'axiome de compréhension. Le théorème de conservation de Field s'énonce alors :

**Théorème.** Pour tout énoncé  $\varphi$  de  $N$ , si  $N^* + ZFU^2 \vdash \varphi^*$  alors  $N^* \vdash \varphi^*$ .

D'où la thèse :

"platonistic formulations of physical theories are simply conservative extensions of underlying nominalistic formulations".<sup>30</sup>

27. Field [1980].

28. Nous rencontrerons par la suite plusieurs exemples de tels théorèmes.

29. Cf. Chihara [1990] pour un résumé et une discussion des travaux techniques de Field.

30. Field [1982], p. 20.

De par son aspect technique, la thèse d’Hartry Field est évidemment très séduisante. Mais elle n’est pas véritablement convaincante. En effet, pour éliminer par exemple les nombres entiers, Field est obligé d’introduire des quantificateurs numériques  $\exists^k x$  (il existe  $k$  objets  $x$  tels que ...), etc. Les énoncés numériques du genre  $\#ExtA = k$  (le cardinal de l’extension de  $A$  est  $k$ ) deviennent alors des contreparties abstraites (éliminables) d’énoncés logiques  $\exists^k x A(x)$ . De même, en ce qui concerne l’espace, Field est obligé d’admettre que les points et les régions de l’espace-temps sont des objets physiques concrets ( $\in \neg M$ ) (sic!) sur lesquelles on peut quantifier (au premier ordre pour les points, au deuxième ordre pour les régions). Il introduit alors des relations de comparaison, d’incidence, de congruence entre points, segments, etc. et montre que la métrique (la distance) en est la contrepartie abstraite (éliminable). Mais, ainsi que l’a souligné Michael Resnik, adopter une ontologie physique (en fait substantielle) de l’espace est inacceptable car

“no particular body of observable phenomena led to the introduction of space-time points”.<sup>31</sup>

En fait, il est en grande partie illusoire de vouloir distinguer, dans un cadre logique général, le vocabulaire physique et le vocabulaire mathématique des théories physiques. Comme nous le verrons, l’espace est une forme (et non pas un contenu) de la réalité physique et, à ce titre, il est indiscernablement physico-mathématique.

### 2.3. Phénoménologie des idéalités

Il est nécessaire de démêler dans ce spectre de positions épistémologiques ce qui relève d’authentiques et difficiles problèmes scientifiques et ce qui relève au contraire d’une argumentation proliférant sur des antinomies dialectiques que l’on refuse d’analyser en tant que telles. D’une façon assez vague et grossière, on peut dire que ce qui concerne une psychologie cognitive des états, actes et processus mentaux corrélatifs des objectivités mathématiques relève des premiers et que ce qui concerne le débat sur la réalité et l’existence de ces objectivités relève au contraire de la seconde.

Par exemple, le platonisme cognitif et génétique de Penelope Maddy et l’antiplatonisme cognitif de Philip Kitcher reprennent et prolongent tous deux, de façon implicite, les profondes analyses effectuées au début du siècle par la Gestalt théorie (Stumpf, Meinong, Ehrenfels) et la phénoménologie husserlienne. Dans “Idéalités Mathématiques et Réalité objective”<sup>32</sup>, nous avons analysé ces travaux à la lumière du remarquable ouvrage *Logic and The Objectivity of Knowledge* consacré par Dallas Willard<sup>33</sup> à la *Philosophie de l’Arithmétique*<sup>34</sup> et aux *Recherches Logiques*<sup>35</sup> de Husserl.

Les descriptions husserliennes des actes intuitifs de colligation et de comptage d’objets sont tout à fait remarquables : saisie de leurs différences, appréhension et représentation de leur simultanéité, successivité énumérative, unification spatiale par la délimitation d’une

---

31. Resnik [1985], p. 167.

32. Petitot [1991a].

33. Willard [1984].

34. Husserl [1891].

35. Husserl [1900-1901].

frontière virtuelle pour un agrégat, saisie aperceptive de l'unité, etc. Elles permettent de décrire de façon rigoureuse la chaîne d'actes noétiques (animé par une morphé intentionnelle) conduisant, dans un acte concret de colligation, d'une hylé sensorielle à une unité intentionnelle noématique (en l'occurrence l'unité idéale d'une totalité aperceptivement saisie comme intuition catégoriale). Il est évident que les problèmes abordés par Penelope Maddy constituent une version cognitive de ces analyses et qu'une naturalisation de la phénoménologie en terme de sciences cognitives y est à l'œuvre.<sup>36</sup>

Par exemple, les travaux récents sur la perception confirment pleinement un certain nombre d'affirmations de Maddy. De nombreux spécialistes actuels de la perception (Stephen Grossberg, David Marr, Jan Koenderink, etc.) considèrent que deux des routines visuelles les plus fondamentales sont celles de la détection de contours et celles de la diffusion. Soit alors  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  objets simples ( $n$  spots noirs par exemple) délimités par des bords  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Une routine de diffusion de contour  $D$  permet de faire diffuser le contour  $B = B_1 + \dots + B_n$  (à  $n$  composantes connexes) jusqu'à un contour virtuel  $\tilde{B}$  à une seule composante connexe.<sup>37</sup>  $D$  construit ce que l'on appelle en topologie différentielle un cobordisme  $C$  entre  $B$  et  $\tilde{B}$  et c'est ce cobordisme qui exprime géométriquement l'unité gestaltiste de l'agrégat  $A = A_1 + \dots + A_n$ , c'est-à-dire "l'ensemble"  $\tilde{A}$ . Ce que l'on appelle la théorie de Morse permet alors facilement de dénombrer  $A$  à partir de  $C$ . Cette géométrisation gestaltiste permet de justifier la plupart des affirmations de Maddy : il y a bien une perception des ensembles concrets naïfs et ceux-ci forment une espèce naturelle ; l'ensemble  $\tilde{A}$  (unité idéale) est bien distinct, comme expérience perceptive, de l'agrégat physique  $A$  ; l'ensemble  $\tilde{A}$  est bien localisé là où est localisé l'agrégat  $A$  ; il existe bien des "détecteurs cérébraux" de  $\tilde{A}$  ; etc. Elle permet aussi de comprendre pourquoi ces thèses n'impliquent, contrairement à ce que croient les philosophes de la logique, aucun paradoxe du type double indiscernable, troisième homme, régression à l'infini. En effet, le cobordisme  $C$  n'est pas un objet supplémentaire. C'est une forme — une structure géométrique — construite à partir de l'agrégat  $A$  et engendrant le moment d'unité  $\tilde{A}$ .

Le cognitivisme de Philip Kitcher est également le prolongement des profondes analyses phénoménologiques husserliennes sur le genre de compétence idéale qu'est la connaissance symbolique.

De même encore, il est évident que les progrès de l'informatique tant techniques que théoriques valident massivement la conception grammaticale des idéalités mathématiques (à la Carnap-Wittgenstein), ainsi que la conception intuitionniste et constructiviste des procédures mathématiques, mais en y ajoutant (ce qui change tout et fonde la validation) les dimensions de la compilation et de l'implémentation.<sup>38</sup>

---

36. En fait la Gestalt théorie et la phénoménologie, parce que descriptives et donc affranchies des contraintes de l'explication, sont allées beaucoup plus loin que les sciences cognitives contemporaines. Le temps est venu, semble-t-il, de reprendre leur héritage. Sur ce thème, cf par exemple Dreyfus (ed) [1982] et Smith (ed) [1982].

37. Cf. Petitot par exemple [1989c] pour des indications techniques sur ce formalisme perceptif.

38. Mon collègue Jean-Pierre Desclés m'a beaucoup aidé à comprendre la portée épistémologique de la compilation et de l'implémentation. Celles-ci permettent de définir une "sémantique intrinsèque" des énoncés qui soit non référentielle et en fait d'origine purement syntaxique. Sans les dimensions de la compilation et de l'implémentation, la conception syntaxique des mathématiques divorce de toute dimen-

## 2.4. Le passage à la doctrine de l'objectivité

Mais quels que soient l'intérêt et la pertinence de ces recherches, elles laissent entier le problème de l'existence et du statut de réalité des idéalités mathématiques.

En effet, ainsi que l'a déjà montré Husserl il y a fort longtemps dans sa critique du psychologisme, les mathématiques exigent, en plus d'une psychologie cognitive, une compréhension de la *normativité* du formel en tant que tel. Il existe une *légalité sui generis* du formel et celle-ci s'implique de façon constitutive (au sens d'une doctrine transcendantale de la constitution) dans l'objectivité mathématique.<sup>39</sup> Par exemple, le système symbolique des nombres de l'arithmétique formelle substitue aux nombres "concrets" (avec leur genèse cognitive évoquée plus haut) des nombres "systématiques" dont le calcul s'affranchit des limites de notre finitude cognitive. La conséquence en est que la formellité symbolique de l'arithmétique formelle n'est plus représentationnelle et échappe donc à toute psychologie cognitive, serait-elle formulée dans le cadre d'un mentalisme computationnel fonctionnaliste.<sup>40</sup>

Comme nous l'avons montré ailleurs<sup>41</sup>, la phénoménologie husserlienne résout les apories purement philosophiques du platonisme dans la mesure où elle montre comment des transcendances objectives peuvent, à titre d'invariants noématiques, être fondées dans l'immanence des actes cognitifs corrélatifs qui y donnent accès. Les idéalités mathématiques ne sont pas des entités séparées et indépendantes qui doivent être ontologiquement interprétées. Ce sont des idéalités noématiques donc dépendantes, dépendantes des synthèses noétiques corrélatives. Mais, dans la mesure où elles ne constituent pas des composantes *réelles* de ces dernières, elles ne sont pas cognitivement réductibles : "dépendantes" n'implique pas "réductibles".

D'ailleurs, à supposer que l'on arrive à montrer que l'on doit réduire les objectivités mathématiques aux actes qui y donnent accès, il faudrait alors appliquer le même raisonnement à la perception elle-même et donc opter pour un solipsisme radical.

C'est ce que remarque (après nombre d'autres) Alain Connes dans son débat avec Jean-Pierre Changeux, en retrouvant spontanément une argumentation à la Quine.<sup>42</sup> La seule chose qui prouve la réalité du monde externe est la *cohérence* des perceptions (thèse husserlienne). Pourquoi ne pas considérer par conséquent que les objets réels perçus ne

---

sion sémantique et ne peut retrouver celle-ci qu'à travers une conception dénotationnelle qui conduit aux apories du réalisme. On pourrait même penser que, pour la cognition humaine conçue dans le cadre d'un mentalisme computationnel, la réflexivité est la relation converse de la relation entre un concept formulé, à un niveau symbolique "macroscopique", comme un système de règles et le traitement physique d'informations neuronales "microscopiques" qu'il effectue à travers son implémentation. La réflexivité deviendrait alors une sorte "d'explémentation".

39. Cf. Petitot [1991a].

40. Comme nous le rappellerons plus bas, le point de vue néo-intuitionniste sur l'arithmétique et l'analyse non standard (Reeb, Harthong, Nelson, Cartier, Salanskis) ont remis au premier plan, mais à un niveau supérieur, cette distinction entre les entiers "concrets" cognitivement accessibles (même si le "cognitif" en question est un "cognitif" idéal ou informatique) et les entiers "formels", axiomatiquement légalisés, que Husserl appelait "systématiques".

41. Petitot [1991a].

42. Changeux-Connes [1989].

sont que

“des constructions mentales destinées à rendre compte de certains phénomènes visuels” (p. 41).

Si l'on admet des corrélats objectifs de la perception, alors on doit également admettre des corrélats objectifs des actes mathématiques. On ne peut pas être réaliste pour la perception et nominaliste pour les mathématiques. Le solipsisme ne se partage pas. Soit il s'applique à tout, soit il ne s'applique à rien. Selon Alain Connes, un certain réalisme est par conséquent justifié :

“la suite des nombres premiers, par exemple, a une réalité plus stable que la réalité matérielle” (p. 28).

La réalité mathématique est “aussi contraignante”, “aussi incontestable”, que la réalité physique (p. 49). D'ailleurs il existe des critères d'objectivité des idéalités mathématiques. Par exemple :

(i) La possibilité de classifier exhaustivement les objets définis par une axiomatique (corps finis, corps localement compacts, groupes finis simples, algèbres de Lie simples, etc.). Ces résultats manifestent l'existence de contraintes objectives contraignant les univers de possibles.

(ii) La cohérence et l'harmonie inter-théoriques globales des théories mathématiques (leur *unité* au sens d'Albert Lautman). Bien “qu'inexpliquées” (p. 33), elles sont incontestables et constituent un “problème central” (p. 197).

(iii) Le fait que les théories mathématiques intéressantes possèdent un contenu informationnel infini :

“n'est-ce pas là une caractéristique d'une réalité indépendante de toute création humaine ?” (p. 211).

C'est pourquoi, selon Alain Connes, on peut considérer que le constructivisme (et a fortiori le finitisme strict et l'intuitionnisme)

“ne remet pas en question l'existence d'un monde mathématique indépendant”

et que, dans la mesure où il prétend imposer la proscription de la transcendance objective du continu, il est même “conservateur et limitatif”.<sup>43</sup> Le théorème d'incomplétude montre seulement que l'information des théories mathématiques non élémentaires est infinie :

“on peut considérer ce théorème comme une conséquence des contraintes imposées par la théorie de l'information à cause de la finitude de la complexité de tout système formel.”<sup>44</sup>

On remarquera que ces critères d'objectivité ne sont satisfaits par aucun autre des systèmes symboliques (“jeux”, “grammaires”, etc.) auxquels on a voulu comparer les mathématiques.

---

43. Changeux-Connes [1989], p. 71.

44. Ibid. p. 213.

La question du contenu de l'objectivité des idéalités mathématiques (comme corrélats noématiques d'actes cognitifs) reste donc non seulement ouverte mais pratiquement inentamée. Nous allons, à notre tour, tenter d'y répondre partiellement.

Pour ce faire, nous remettrons en cause les hypothèses (en fait les préjugés) qui, selon nous, sont à l'origine des antinomies dialectiques distribuant le spectre des positions épistémologiques évoquées. Comme nous l'avons anticipé d'emblée, ces préjugés se ramènent aux thèses suivantes :

(i) "Réalité" et "Existence" ne peuvent être entendues qu'au sens d'une ontologie substantielle de choses matérielles spatio-temporelles, d'étants singuliers individués (numériquement uns et identiques à soi).

(ii) "Objectivité" ne peut être entendu qu'au sens référentiel (dénotation de tels individus par des symboles).

(iii) Tout est donc dit en ces matières par une théorie logique générale (sémantique) de la quantification et de la référence.

Ces préjugés procèdent d'une "superstition médiévale" scholastique (cf. John Burgess §2.2). Ils ne tiennent pas compte de la coupure qui existe entre la science moderne et le sens commun et, en particulier, du fait que, comme l'a admirablement montré Husserl, le concept de chose matérielle (avec ses caractères d'individuation, d'extension spatio-temporelle, de perceptibilité, etc.) n'a rien à voir avec un donné primitif mais est au contraire le résultat d'un procès transcendantal de constitution encore bien plus complexe que celui engendrant les objets physiques.<sup>45</sup>

Contrairement aux thèses positivistes dogmatiques, la science n'est pas une connaissance prédicative concernant une ontologie substantielle. Les énoncés scientifiques ne dénotent pas des choses et des états de choses. Ils déterminent objectivement — légalisent — des phénomènes, ce qui est tout à fait autre chose. La problématique de l'objectivité n'est pas une problématique sémantique de la référence, mais une problématique juridique de la détermination. En tant que telle, elle relève d'une doctrine de la constitution.

Les apories que nous avons rencontrées confirment toutes, d'une façon ou d'une autre, le célèbre verdict kantien — toujours, selon nous, pleinement valable — de la "Section III" de l'"Introduction à la Logique Transcendantale" dans la *Critique de la Raison Pure* :

"la logique générale, considérée comme organon, est toujours une logique de l'apparence, c'est-à-dire dialectique."

La logique générale (non transcendantale) n'est qu'un canon. Elle ne concerne que la forme de la connaissance et de la vérité, que la cohérence de la pensée. Elle n'est à ce titre valable que comme condition négative de la vérité. C'est pourquoi Kant affirme que l'utiliser

"comme d'un organon pour produire réellement, du moins en en donnant l'illusion, des affirmations objectives, [c'est] en fait [en] abuser".

Une des grandes erreurs philosophiques de ce siècle aura été d'avoir cru que les conquêtes de la logique formelle et en particulier celles de la quantification et de la sémantique

---

45. Cf. Husserl [1954].

formelle permettaient d'ignorer ce verdict et de refaire de la logique un organon pour la connaissance. Mais il n'en est hélas rien. Toute objectivité relève d'une logique transcendantale et c'est dans ce cadre qu'il faut donc penser l'objectivité des idéalités mathématiques et, en particulier, celle du continu.

### 3. Éléments pour une doctrine de l'objectivité (Rappels)

Notre idée directrice est donc qu'une approche transcendantale est susceptible de clarifier notablement les apories du réalisme platonicien. Pour la développer nous avons besoin de rappeler certains éléments de philosophie transcendantale. La place nous manquant ici, nous le ferons de façon très (trop) rudimentaire.<sup>46</sup>

#### 3.1. Être et phénomène

1. À la base de toute doctrine transcendantale il y a la *différence ontologique* entre phénomène et être. La *finitude* de principe de toute connaissance implique que "l'être en soi", la réalité indépendante, que vise une connaissance d'objet soit inaccessible en tant que tel à cette connaissance. Il peut bien sûr être un "fondement" pour la connaissance, mais il ne peut pas appartenir à son contenu. Par exemple, la réalité physique "en soi" (indépendante) n'est pas accessible à la connaissance physique (cf. le débat sur l'objectivité "faible" de la mécanique quantique ainsi que sur les théories à paramètres cachés). De même, nous allons le voir, la "réalité en soi" du continu est inaccessible aux théories mathématiques, etc.

2. La conséquence de la différence ontologique est que les méta-concepts de réalité, de nécessité, de vérité, etc. ne peuvent pas être définis relativement à cette "réalité en soi" (par exemple, la vérité ne peut pas être une adéquation, la réalité ne peut pas être ontologique, etc.).

3. L'être visé par la connaissance se manifeste à travers les *phénomènes*. Ceux-ci dépendent, par définition, de *formes de donation* (qui ne sont pas forcément perceptives : en mécanique quantique il s'agit de mesures). Si la réalité est relativisée à des phénomènes sans ontologie sous-jacente possiblement connaissable, elle ne peut pas être indépendante, c'est-à-dire transcendantale par rapport à leurs formes de donation. Elle doit y être *essentiellement* subordonnée.

4. Mais alors comment éviter le subjectivisme (comment dépasser le solipsisme, comment réfuter l'idéalisme) ? Deux gestes transcendantsaux interviennent ici :

(a) *déssubjectiviser* les formes de donation en les "épurer" de toute dimension psychologique ;

(b) penser l'objectivité en termes de *légalisation* et de *détermination* des phénomènes, c'est-à-dire opérer le passage d'une conception prédicative-dénotative-descriptive de la connaissance à une conception constitutive-déterminante-prescriptive (ce que Kant appelait sa "révolution copernicienne").

---

46. Pour quelques précisions, cf. Petitot [1989b], [1990a], [1991a] et [1991c].

5. Le “transcendantal” est le nom philosophique des procédures, i.e. des conditions de possibilité, qui permettent de transformer des phénomènes en des objets d’expérience et de connaissance. Il concerne les conditions de possibilité d’une objectivité qui ne soit pas pensée comme description d’une réalité ontologique.

6. Toute ré-ontologisation des conditions de possibilité et des objets d’une objectivité (transcendantalelement constituée et déterminée) en une réalité “en soi” indépendante conduit nécessairement à des apories fondationnelles de nature dialectique.

### 3.2. Le transcendantalisme kantien

Kant est le premier philosophe à avoir développé ces éléments de philosophie transcendantale dans sa *Critique de la Raison Pure* (CRP) et à les avoir appliqués à la compréhension d’une science “proprement dite”, en l’occurrence la mécanique rationnelle dans ses *Premiers Principes Métaphysiques de la Science de la Nature* (PPM) et dans l’*Opus Postumum* (OP).<sup>47</sup>

1. La différence ontologique être/phénomène se révèle dans la découverte d’un ordre de légalité *sui generis* et autonome des phénomènes sensibles : mise en position d’en soi de l’intelligible producteur qui était propre à la tradition métaphysique, jusqu’à Leibniz y compris, et promotion des phénomènes qui jusque-là n’étaient pensés que comme apparences confuses.

2. La découverte d’une forme de donation des phénomènes sensibles qui permette d’en désobjectiver la manifestation correspond à celle, majeure, de l’Esthétique transcendantale : comme intuitions pures, l’espace et le temps sont constitutifs de l’objectivité et fournissent la base de toutes les méthodes de détermination objective des phénomènes sensibles.<sup>48</sup> En conséquence, la physique n’est plus une logique mais une géométrie, et même une géométrie différentielle.<sup>49</sup>

3. La restriction et la relativisation des catégories de l’entendement aux phénomènes, puis leur réinterprétation complète comme principes de légalisation et de détermination correspondent d’abord à l’Analytique des Concepts et à la Dédution transcendantale, puis au Schématisme transcendantal et à l’Analytique des Principes.

4. Enfin la démonstration que toute ré-ontologisation des objets de l’expérience conduit nécessairement à des apories fondationnelles (paralogismes, antinomies) est effectuée dans la Dialectique transcendantale.

---

47. Kant [1781-1790] et [1796-1803]. Sur les PPM, cf. l’ouvrage de Jules Vuillemin [1955], *Physique et Métaphysique kantienne*. Sur l’OP, cf. l’introduction du père François Marty à sa traduction.

48. Pour une analyse actuelle de l’Esthétique transcendantale qui, sur bien des points, rencontre la nôtre, cf. Salanskis [1991].

49. Sur la pertinence d’une interprétation transcendantale de la physique moderne (mécanique symplectique, relativité générale, théorie quantique des champs des théories de jauge aux supercordes), cf. Petitot [1989b].

### 3.3. Précisions sur l'idée directrice

Notre approche transcendantale de l'objectivité du continu se propose de développer la thèse suivante.

**Thèse de la bimodalité objective du continu** : le continu fonctionne comme une *réalité en soi* pour l'objectivité propre des mathématiques formelles alors que, au contraire, il fonctionne comme *forme de la manifestation phénoménale* pour l'objectivité physique. Son statut transcendantal est donc *différent* dans les deux objectivités. C'est un *horizon nouménal* (impossible à déterminer complètement) pour les mathématiques formelles alors que, pour la physique, c'est au contraire un *donné originnaire*, une forme de donation et de présentation conditionnant universellement les phénomènes.

Les difficultés qu'il y a à penser philosophiquement le continu sont donc de deux ordres :

(i) les antinomies dialectiques qui proviennent de l'utilisation abusive de la logique formelle comme d'un organon pour la connaissance objective ;

(ii) les obstacles épistémologiques qui proviennent des tentatives d'univociser la bimodalité objective.

## 4. Éléments transcendants de l'objectivité symbolique des mathématiques formelles

### 4.1. L'esthétique transcendantale symbolique dans le "Über das Unendliche" de Hilbert

Peut-on faire l'hypothèse qu'il existe bien une légalité et une objectivité *sui generis* et autonomes des mathématiques formelles en tant que telles ? Nous pensons que tel est bien le cas, et que la "révolution copernicienne" marquant la naissance de cette objectivité s'identifie au chemin complexe conduisant des travaux de Bolzano, Frege, Russell, Peano, etc. à la "révolution" méta-mathématique du programme de Hilbert et à l'idée que les preuves elles-mêmes peuvent devenir objets de connaissance.

Il s'agit de prendre vraiment au sérieux, non seulement logiquement mais également philosophiquement, les affirmations de Hilbert dans le texte de 1925 : "Über das Unendliche"<sup>50</sup>.

"Kant already taught — and indeed it is part and parcel of his doctrine — that mathematics has at its disposal a content secured independently of all logic and hence can never be provided with a foundation by means of logic alone ; that is why the efforts of Frege and Dedekind were bound to fail. Rather, as a condition for the use of logical inferences and the performance of logical operations, something must already be given to our faculty of representation [in der Vorstellung], certain extralogical concrete objects that are intuitively [anschaulich] present as immediate experience prior to all thought.

---

50. Conférence du 4 juin 1925 donnée à la Société mathématique de Westphalie en l'honneur de Weierstrass. Hilbert [1925], p.228. Traduction anglaise dans Van Heijenoort (ed.) [1967].

If logical inference is to be reliable, it must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediately given intuitively, together with the objects, as something that neither can be reduced to anything else nor requires reduction. This is the basic philosophical position that I consider requisite for mathematics and, in general, for all scientific thinking, understanding, and communication. And in mathematics, in particular, what we consider is the concrete signs themselves, whose shape, according to the conception we have adopted, is immediately clear and recognizable.”

Cela reprend la déclaration de foi bien connue de la Conférence de Hambourg de 1922 :

“Pour moi — et en cela je m’oppose totalement à Frege et à Dedekind — les objets de la théorie des nombres sont les signes eux-mêmes dont nous pouvons reconnaître la forme en toute généralité et en toute sécurité. [...] Le point de vue philosophique solide que je considère comme indispensable pour les fondements des mathématiques pures — aussi bien que pour toute espèce de pensée, de compréhension et de communication scientifique — se résume comme suit : au commencement — c’est ainsi que nous nous exprimerons ici — est le signe.”<sup>51</sup>

Ce texte archi-célèbre est en général, pensons-nous, mal interprété. Soit on y retient l’affirmation que le formalisme réduit les énoncés mathématiques à des assemblages symboliques, mais c’est alors pour négliger la référence appuyée à Kant et à l’Esthétique transcendantale ; soit on y retient cette référence, mais c’est alors pour sous-estimer la légalité *sui-generis* du formel. Telle est par exemple l’interprétation de Gödel selon laquelle :

“What Hilbert means by ‘Auschanung’ is substantially Kant’s space-time intuition, confined, however, to configuration of a finite number of discrete objects. Note that it is Hilbert’s insistence on concrete knowledge that makes finitary mathematics so surprisingly weak and excludes many things that are just as incontrovertibly evident to every body as finitary number theory”.<sup>52</sup>

Notre interprétation sera différente. Nous prenons au sérieux la référence à Kant<sup>53</sup>, mais pour trouver chez Hilbert tous les gestes caractéristiques et tous les moments constitutifs du processus de constitution d’une objectivité, et d’une objectivité (*sui generis* et

---

51. Hilbert [1922].

52. Gödel [1958], p. 288. Cf. aussi Yourgrau [1989].

53. On peut spéculer que cette objectivité symbolique aurait sans doute été facilement acceptable pour Leibniz. Pour Kant lui-même c’est plus difficile. Certes, il y a ses réflexions sur l’algèbre. Pour Kant les “constructions symboliques” ne sont pas “ostensives” comme les constructions géométriques (alors qu’elles le sont pour Hilbert), mais cela ne signifie pas pour autant qu’elles soient “discursives” et relèvent de la logique ou d’une caractéristique universelle à la Leibniz. Elles sont *intuitives*, cet intuitif étant plus large que l’ostensif géométrique. Le symbole est intuitif à sa façon. Mais il n’est pas chez Kant la base d’une possible esthétique transcendantale pour une objectivité symbolique. On voit que la question est délicate.

autonome) qui est *propre* aux mathématiques formelles et donc *différente* de l’objectivité physique (mécanique) sur laquelle Kant s’est focalisé dans les PPM.

1. La différence ontologique être/phénomène (la disjonction noumène/phénomène) justifie la thèse que la phénoménalité mathématique est celle du *symbole*<sup>54</sup> : les phénomènes mathématiques objectivés sont des assemblages de symboles (des expressions symboliques).

2. La réalité en soi corrélative de ce type de phénoménalité est le *sens*, le contenu sémantique.

3. Il faut désobjectiviser le concept de signe et dégager sa forme de manifestation, c’est-à-dire son mode de donation originaire, extra-logique et immédiat, possédant les caractères de l’intuition : la présence, la différence, la succession. Ces caractères de l’Esthétique transcendantale kantienne sont repris par Hilbert et repensés à partir du concept primitif de signe. L’Esthétique transcendantale de la phénoménalité “sémiotique” des mathématiques formelles est symbolique (littérale). Elle constitue la base d’une légalité *sui generis* du *formel*. On peut donc parler d’*objectivité symbolique* des mathématiques formelles (cf. ce qu’a également affirmé Husserl, très proche sur ce point de Hilbert).

4. L’élément essentiel de cette légalisation objectivante et des procédures de détermination associées est le concept formel de *démonstration*. Un énoncé mathématique exprimé en langue naturelle est un simple “phénomène” pré-objectif, sans contenu objectif en tant que tel. Son objectivation (c’est-à-dire sa légalisation et sa détermination) consiste :

(i) en sa réduction à la forme de la manifestation, c’est-à-dire à sa traduction en expression symbolique ;

(ii) en sa démonstration.

5. Le rapport de l’objectivité symbolique à la contrainte — et à l’impératif — de la finitude correspond au finitisme méta-mathématique de Hilbert.

6. Enfin, le fait qu’une ré-ontologisation de l’objectivité conduit à des apories fondationnelles dialectiques, correspond précisément à la “crise des fondements”, à la *Grundlagenstreit*.

On obtient ainsi un parallèle précis entre l’objectivité symbolique des mathématiques formelles selon Hilbert et l’objectivité mécanique de la physique fondamentale selon Kant (cf. tableau 1).

---

54. Ce que Hilbert appelle “signes” sont des *types de symboles* (et non pas évidemment leurs tokens, leurs occurrences, ce que l’on pourrait être tenté de croire si, interprétant de façon naïve la référence à Kant, on veut faire des signes des phénomènes sensibles). Hilbert renvoie à l’Esthétique transcendantale et non pas à la perception.

	<b>Kant</b>	<b>Hilbert</b>
<b>Phénomènes donnés.</b>	Phénomènes perçus dans l'intuition sensible.	Énoncés mathématiques exprimés en langue naturelle.
<b>Phénomènes purs.</b>	Mouvements spatio-temporels.	Expressions symboliques.
<b>Esthétique transcendantale.</b>	Esthétique transcendantale spatio-temporelle : géométrie.	Esthétique transcendantale symbolique : syntaxe.
<b>Catégories et Principes Analytique transcendantale.</b>	Nécessité d'une légalisation objectivante. Instance légalisante = Analytique transcendantale.	Nécessité d'une légalisation objectivante. Instance légalisante = Grammaire, règles et démonstrations.
<b>Objets d'expérience.</b>	Phénomènes sensibles objectivés = objets physiques mesurés (observables).	Énoncés mathématiques objectivés = Propositions mathématiques démontrées (théorèmes).
<b>Inaccessibilité de la réalité ontologique sous-jacente aux objets.</b>	Inaccessibilité et non-sens de la réalité en soi.	Inaccessibilité et non-sens d'un sens des propositions.
<b>Synthétique a priori.</b>	L'objectivité physique du monde est prescriptive et non descriptive.	L'objectivité symbolique des mathématiques est prescriptive et non descriptive.

Ce tableau montre bien ce qui est commun à Kant et à Hilbert, à savoir :

1. Le rapport à la finitude.
2. Le fait que l'existence, la réalité, la causalité, la vérité, la certitude, la nécessité sont relatives aux instances de légalisation.
3. Le fait que toute réintroduction dogmatique d'une ontologie substantialiste conduit à des antinomies dialectiques.

Pouvoir faire apparaître des questions comme dénuées de sens relève d'une *dialectique transcendantale* qui témoigne du passage de l'ontologie (métaphysique précritique) à l'objectivité (constitution transcendantale).

#### 4.2. Le transcendantalisme grammatical de Wittgenstein

La méta-mathématique hilbertienne n'est pas explicitement une philosophie des mathématiques. Ne serait-ce que parce que, pour Hilbert, l'essence des mathématiques ne s'y réduit pas. Mais supposons un instant que l'on identifie — bien qu'il s'agisse d'une erreur philosophique — la méta-mathématique à l'essence des mathématiques. Si l'on explicite et thématise alors philosophiquement cette essence supposée, on en arrive à une épistémologie et à une ontologie des mathématiques d'un certain type. En fait, nous allons montrer

(brièvement) que si l'on applique la conception transcendantale de l'objectivité à cette nouvelle objectivité symbolique du formel, on obtient une philosophie des mathématiques très proche de la conception grammaticale de Wittgenstein.<sup>55</sup> On aura d'ailleurs remarqué que la colonne "Hilbert" du tableau précédent est en fait très "wittgensteinienne".

1. Les énoncés mathématiques isolés exprimés en langue naturelle (non formalisés et non démontrés) ne possèdent pas de contenu mathématique *objectif* en tant que tel. La subreption "ontologisante" qui en fait des énoncés apparemment descriptifs décrivant des états de choses, est une hypostase linguistique. Les énoncés doivent être objectivés (formalisés) et déterminés (démontrés). Leur légalisation objective repose donc sur leur démonstration qui les transforme en propositions mathématiques démontrées, c'est-à-dire en théorèmes. Une fois objectivés, ils perdent leur signification apparemment ontologique (leur contenu sémantique transcendant) au profit de leur détermination objective.

2. D'où une thèse anti-ontologique (anti-platonicienne) radicale qui est typiquement transcendantale. Les théories mathématiques ne sont pas de nature descriptive mais de nature prescriptive et normative. Elles ne dénotent pas (pas plus que les théories physiques). Elles déterminent, ce qui, nous l'avons vu, est tout à fait autre chose. Les propositions sont des règles de syntaxe fonctionnant comme conditions de possibilité de significations. Le sens (le "corps de signification" de Wittgenstein) est en position de réalité en soi pour l'objectivité symbolique formelle. On ne peut le viser comme objet. La guerre de Wittgenstein contre le sens n'est que l'aspect mathématique de la guerre de l'objectivité contre l'en soi. Dans les mathématiques formelles l'objectivité est une construction grammaticale sans ontologie sous-jacente.

3. Dans la mesure où seule la démonstration d'un énoncé détermine son contenu objectif, c'est-à-dire sa valeur proprement mathématique, il existe une différence essentielle entre conjectures et théorèmes. La valeur objective d'une proposition ne peut pas *précéder* sa démonstration. Elle en est, au contraire, le résultat.<sup>56</sup> Le sens mathématique ne peut être fondé dans une réalité indépendante transcendant les procédures d'objectivation (l'en soi est objectivement inaccessible). Accepter un sens préexistant c'est croire que la compréhension de la réalité mathématique peut transcender son objectivité. Il s'agit là d'une illusion transcendantale conduisant à des antinomies dialectiques.

4. Les propositions mathématiques ne sont ni analytiques (tautologiques) ni synthétiques a posteriori (vraies en fonction d'un contenu dénotant des états de choses) mais synthétiques a priori (a priorisme grammatical). Relativement aux énoncés, la grammaire des axiomatiques est une Analytique transcendantale. Elle est à la fois conventionnelle et déterminante, ce "à la fois" étant la marque du synthétique a priori. D'où le statut ni

---

55. Dans Petitot [1991a] nous avons développé ce point en analysant en particulier le remarquable ouvrage de Stuart Shanker [1987] : *Wittgenstein and the Turning Point in the Philosophy of Mathematics*. L'analyse des relations entre Kant et Wittgenstein est délicate. Cf. par exemple la belle étude d'Antonia Soulez [1990]. Nous ne nous situons évidemment pas ici au niveau de l'exégèse. Nous affirmons seulement que les thèses très spécifiques de Wittgenstein sur les mathématiques sont de nature typiquement transcendantale. Elles auraient été inacceptables pour Kant puisqu'elles portent sur une objectivité symbolique élaborée pour la première fois par Bolzano après Kant et explicitement contre Kant.

56. Régulatrices et heuristiques, les conjectures sont aux théorèmes, chez Wittgenstein, ce que, chez Kant, les jugements réfléchissants sont aux jugements déterminants.

logique, ni ontologique de la nécessité dans les mathématiques formelles. Les textes de Wittgenstein sur la nécessité et la certitude ne font que redécouvrir les caractères transcendants du synthétique a priori et, en particulier, tout ce qui concerne le réalisme empirique de l'idéalité transcendantale de la grammaire (la possibilité pour le conventionnel d'être pourtant constituant, la critique du réalisme transcendantal, la réfutation de l'idéalisme subjectif, le fait que le synthétique a priori précède la vérité, etc.).

5. Prescriptif, conventionnel et nécessaire, le synthétique a priori est indériverable (ni logiquement, ni ontologiquement). D'où les erreurs philosophiques complémentaires, d'un côté, du logicisme (croire qu'il procède d'une nécessité logique) et, de l'autre côté, du platonisme naïf (croire qu'il procède d'une réalité externe). L'Analytique grammaticale précède le vrai. Sa nécessité est transcendantale. Elle est sans base ontologique (il s'agit là d'une grande découverte de Kant et de Wittgenstein).

## 5. La bimodalité objective du continu

Ceci dit, on ne peut pas penser l'objectivité mathématique comme une objectivité autonome purement symbolique. La méta-mathématique n'épuise pas l'essence des mathématiques. D'abord, que les contenus mathématiques existent ou non comme des entités séparées, il faut leur faire droit, ainsi qu'à l'unité des mathématiques. Ensuite, il faut penser également la sémantique et la possibilité d'applicabilité des mathématiques. Cette applicabilité commence par la détermination mathématique des formes de la manifestation phénoménale physique, c'est-à-dire de l'Esthétique transcendantale géométrique comme cela est résumé dans la colonne de *droite* du tableau 2.

	Mathématiques				Physique
Phénomènes donnés.	Énoncés mathématiques non formalisés.				Phénomènes donnés dans l'intuition sensible.
Formes de la manifestation. Esthétique transcendantale.	Littéralité symbolique.		↑	⇒	Le continu comme <i>forme</i> . Spatio-temporalité et groupes de symétries.
Formes de l'algèbre.	Grammaires et règles de démonstration.		↑		Grammaire catégoriale. Analytique transcendantale.
Rapport entre manifestation et l'algèbre.	Calcul symbolique implémentable.		↑		Schématisme, Analytique des principes et Construction des catégories.
Typologie/objectivité.	Objectivité symbolique.		↑		Objectivité physique.
Actes subjectifs corrélatifs.	Synthèses noétiques et corrélation noèse/noème, idéalisations, etc. (cf. Husserl).		↑		Synthèses intuitives et catégoriales, lois de conservation, causalité, interaction, etc.
Réalité en soi.	Le continu comme <i>sens</i> .	⇒	↑		“Intériorité” substantielle de la matière et phénomènes d'organisation.

Cela conduit à se situer dans le cadre d'un *double* transcendantalisme physico-mathématique et à affronter par conséquent la difficulté centrale que nous avons appelée la bimodalité objective du continu : les *formes* de la manifestation phénoménale physique que les mathématiques déterminent — et avant tout *le continu comme intuition pure* — possèdent le statut d'une *réalité en soi* — et donc d'un *horizon* de détermination — pour ces mathématiques (heureusement d'ailleurs car sinon la physique mathématique serait un idéalisme).

Autrement dit, deux processus de constitution *s'enchaînent*, la “sortie” du premier (le continu comme sens mathématique) devenant “l'entrée” du second (le continu comme forme physique) conformément au tableau 2 et au chemin représenté par les flèches.<sup>57</sup>

57. Il faudrait également tenir compte du fait que la “sortie” du processus de constitution physique conduit à un *troisième* processus de constitution, celui des phénomènes d'(auto)-organisation et de structuration qualitative macroscopique des substrats matériels. On sait que ces phénomènes qui, jusqu'à une époque récente sont restés incompris, ont accédé ces vingt dernières années au statut de phénomènes objectifs grâce au progrès crucial des disciplines morphodynamiques (à ce sujet, cf. Petitot [1985b], [1991b]).

Sur le plan philosophique, la bimodalité objective du continu, associée qu'elle est, sur le plan technique, aux théorèmes d'incomplétude et aux limites intrinsèques du programme de Hilbert, conduit naturellement à des interprétations *divergentes*.

Une première grande alternative porte sur le statut extra- ou intra-mathématique du continu. En effet la réalité du continu externe peut elle-même être pensée de façon assez diversifiée.

1. Comme un continuum phénoménologique intuitif de nature aristotélicienne<sup>58</sup> caractérisé par le “fusionnement” de ses parties et l’infini *potentiel* de sa divisibilité (qui n’est pas composition)<sup>59</sup>. On trouve à l’époque moderne de telles conceptions néo-aristotéliciennes chez Peirce (le continu est inépuisable, non compositionnel, condition du général, etc.)<sup>60</sup>, chez Brentano, chez Stumpf (qui a élaboré le concept de fusionnement, i.e. de *Verschmelzung*), chez Husserl<sup>61</sup>, chez Brouwer et Weyl (le continu intuitif n’est pas compositionnel, ses “points” sont en puissance, donc *non* individués et *non* exactement localisés, ce qui empêche toute formalisation ensembliste, celle-ci étant nécessairement atomiste)<sup>62</sup>, chez Thom (le primat ontologique du continu comme homogénéité qualitative parfaite)<sup>63</sup>. Soit elles “psychologisent” le continu phénoménologique (Brentano et les Gestaltistes, Poincaré), soit elles “l’ontologisent” (Thom), soit elles le pensent comme proprement intuitif et phénoménologique (Peirce, Husserl, Weyl). Dans de telles conceptions, on considère en général :

(i) qu’un point du continu est une discontinuité (une marque, une hétérogénéité locale) engendrée par un processus de passage de la puissance à l’acte,

(ii) que ces points actuels, constituant des atomes singuliers et individués, peuvent être des référents de symboles et des objets de quantification,

(iii) que les systèmes de nombres ont pour fonction de dominer axiomatiquement de tels systèmes de marques,

(iv) que l’arithmétisation du continu consiste à faire équivaloir le continu phénoménologique intuitif à un infini actuel ensembliste (atomiste) nommé par un système de nombres,

(v) qu’une telle arithmétisation représente une prétention irréalisable violant le mode de donation originaire du continu.

2. Comme une intuition pure, c’est-à-dire comme un infini en acte intuitivement donné

---

Ces théories de l’organisation sont devenues fondamentales dans les sciences cognitives et devraient permettre de notablement clarifier les “entrées” des processus de constitution du tableau 2, c’est-à-dire (i) la phénoménologie de la perception spatiale et (ii) l’émergence cognitive du symbolique (cf. Petitot [1990b]).

58. *συνεχής*.

59. Cf. l’exposé de Pierre Aubenque au colloque et le texte de Hervé Barreau dans ce volume.

60. Cf. l’exposé de Marco Panza dans ce volume.

61. À propos du concept de *Verschmelzung* chez Stumpf et Husserl (en particulier dans la troisième *Recherche Logique*), cf. Petitot [1991b].

62. Cf. l’exposé de Jacques Bouveresse dans ce volume. Nous reviendrons plus bas sur la formalisation, proposée par Solomon Feferman, du système élaboré par Weyl dans *Das Kontinuum*, sous-système prédicatif faible de l’arithmétique du second ordre permettant de développer d’importantes parties de l’analyse.

63. Cf. l’exposé de René Thom dans ce volume.

et fonctionnant comme *forme* de la réalité externe. Tel est le cas de Kant (évidemment), de néo-kantiens comme Natorp, de géomètres comme Veronese (précurseur de l'analyse non standard)<sup>64</sup>, de philosophes des mathématiques comme Jean-Michel Salanskis<sup>65</sup>.

3. Comme un continu physique. Tel est le cas en général des positivistes instrumentalistes et éliminativistes, du second Carnap à Hartry Field.

À l'autre extrême du spectre, on trouve les platoniciens cantoriens qui, tels le dernier Gödel et les défenseurs des axiomes d'existence de grands cardinaux, considèrent qu'il faut, sur la base d'une ontologie ensembliste d'une richesse maximale, reconstruire ensemblistement le caractère inépuisable et potentiel du continu (cf. section 7). Certaines théories non archimédiennes du continu, de Poincaré et de Veronese aux ultraproducts de l'analyse non standard (sémantique) de Robinson, vont dans le même sens et établissent donc une médiation entre les deux termes de l'alternative.

À partir de cette alternative de base, plusieurs positions deviennent possibles, positions où se distribuent, en se mêlant à des considérations techniques de théorie de la récursivité, de théorie des ensembles et de théorie logique des modèles, les diverses options philosophiques du logicisme, de l'intuitionnisme, du constructivisme, du formalisme, du réalisme, etc. Nous en retiendrons quatre.

1. Une position finitiste radicale (éliminativiste) pour laquelle, dans la mesure où le continu fonctionne (en tant qu'infini actuel) comme une réalité en soi et un horizon pour l'objectivité symbolique des mathématiques formelles, il doit être éliminé des mathématiques (et avec lui l'infini en général). En général, cette position admet un continuum phénoménologique externe se donnant intuitivement comme infini en puissance.

2. Une position intermédiaire de nature méta-mathématique qui consiste à chercher quelle est la part des mathématiques (en particulier de l'Analyse) réductible au finitisme hilbertien ou à une version généralisée de ce finitisme. C'est la poursuite du programme de Hilbert.

3. Une position modélisatrice consistant à utiliser les résultats de théories logiques des modèles — par exemple les modèles non standard (en particulier de l'arithmétique non standard) — pour voir quelle part des mathématiques modélisant la réalité externe peut être traduite, c'est-à-dire modélisée, dans telle ou telle théorie. Ici le finitisme n'est plus méta-mathématique, mais intra-mathématique, sans être toutefois radical (éliminativiste). Néo-intuitionniste, il consiste à s'en tenir à l'objectivité mathématique stricte (symbolique, arithmétique, algorithmique) — c'est-à-dire à la grammaire du fini — et à voir quels objets externes (extra-mathématiques) cette objectivité permet de modéliser.

4. Une position platonicienne anti-finitiste qui consiste au contraire à viser une reconstruction du continu reflétant au maximum la *transcendance* de celui-ci par rapport à l'objectivité symbolique formelle. Elle cherche à rapatrier dans l'univers mathématique les modes phénoménologiques, intuitifs et physiques du continu.

---

64. À propos des rapports entre Natorp et Veronese, cf. la remarquable étude de Madame Renée Peiffer-Reuter [1989], et sa contribution dans ce livre.

65. Cf. Salanskis [1991].

## 6. Les interprétations divergentes de la réalité du continu

### 6.1. Le finitisme radical

Dans un finitisme radical (à la Wittgenstein par exemple), l'infini est nécessairement un infini potentiel qui doit être exploré au moyen de processus itératifs et récursifs. Il ne peut pas être traité ensemblistement comme une totalité actuelle et il est illégitime de quantifier sur des ensembles infinis. Par exemple les entiers sont les corrélats de l'induction et non pas les éléments d'un ensemble. Selon Wittgenstein, un énoncé arithmétique universel  $\forall n f(n)$  essaye de dire ce que montre l'induction. La différence entre fini et infini est grammaticale et c'est une erreur catégoriale, une infraction à la grammaire de l'infini, que de traiter ensemblistement de l'infini.<sup>66</sup> En effet, l'infini n'est pas une propriété de cardinalité de certaines extensions, c'est une loi grammaticale. Les totalités extensionnelles infinies ne peuvent pas être des objets de connaissance.<sup>67</sup> De même le continu géométrique n'est pas descriptible comme un ensemble de points. Les réels sont les corrélats de règles d'approximation successives, donc de lois arithmétiques, et non pas des réalités objectales autonomes. Certes les constructions géométriques sélectionnent (distinguent) des points (des intersections de courbes, des extrema de fonctions, etc.), mais cela ne signifie pas que ceux-ci préexistent. Ils "n'existent" qu'en puissance et c'est la construction qui les détermine qui les fait passer de la puissance à l'acte.

Une telle conception — qui, nous l'avons vu, est d'essence transcendantale — est fort satisfaisante. Elle se trouve d'ailleurs techniquement confirmée par l'informatique. Mais, comme nous l'avons montré dans notre hommage à Jean-Toussaint Desanti "Idéalité Mathématique et Réalité objective"<sup>68</sup>, elle demeure cependant irrémédiablement insuffisante, et cela pour plusieurs raisons. D'abord elle ne permet de rendre compte de façon plausible ni de l'unité théorique globale des mathématiques, ni de leur applicabilité. Ensuite, ainsi que les intuitionnistes et les constructivistes l'ont montré, on doit admettre en mathématiques des constructions abstraites qui ne satisfont pas aux contraintes éliminativistes du finitisme radical. Enfin, comme l'a fort justement montré Hourya Sinaceur, des résultats méta-mathématiques comme ceux des principes de transfert remettent en cause la thèse centrale que seule la démonstration permet de déterminer le sens d'un énoncé mathématique :

"on ne peut plus affirmer universellement qu'un résultat mathématique n'a de sens que par rapport à la démonstration dont il résulte".<sup>69</sup>

Il existe des contenus mathématiques (des "contenus formels" au sens de Gilles Gaston Granger) qui sont largement indépendants de leur preuve formelle.

---

66. Cf. les exposés de J. Bouveresse et G. Wallet dans ce volume. Cf. également Petitot [1991a].

67. Cette critique de Wittgenstein constitue également un argument typiquement transcendantal. Elle est en tout point analogue à celle des totalités infinies (comme "le monde") dans la Dialectique transcendantale : passer par subreption de l'unité distributive de l'entendement à un tout de l'expérience...

68. Petitot [1991a].

69. Sinaceur [1991], p. 16.

Les principes de transfert sont fondés sur la complétude de certaines théorie du premier ordre comme la théorie  $CC_0$  des corps algébriquement clos de caractéristique zéro ou la théorie  $CRC$  des corps réellement clos. Le premier principe de transfert connu — dit principe de Lefschetz — découle du théorème de Steinitz affirmant que la théorie élémentaire de  $\mathbb{C}$ ,  $T = CC_0$ , est *complète* et que donc, tous les modèles de  $T$  étant élémentairement équivalents (c'est-à-dire possédant la même théorie du premier ordre), tout énoncé du premier ordre démontré par voie transcendante pour  $\mathbb{C}$  est valable pour tout corps  $\mathbb{K}$  algébriquement clos de caractéristique 0 même si la preuve transcendante n'a plus aucun sens pour  $\mathbb{K}$  (une preuve non transcendante existe pour  $\mathbb{K}$ , mais sa complexité peut être telle qu'elle soit en fait impraticable).<sup>70</sup> De même, la théorie élémentaire  $CRC$  des corps réels clos étant complète, un énoncé du premier ordre de  $CRC$  et démontré par voie non élémentaire (par exemple transcendante) pour  $\mathbb{R}$  est vrai pour tout corps réel clos (principe de transfert de Tarski-Seidenberg).

L'existence de contenus qui, sans être évidemment indépendants de toute démonstration, peuvent être néanmoins largement indépendants d'une démonstration particulière, exige de mieux problématiser la signification méta-mathématique réelle des contraintes finitistes. C'est ce que permettent de faire les *réductions fondationnelles*.

## 6.2. La “reverse mathematics” et les réductions fondationnelles

Initialement, le programme de Hilbert consistait, on le sait, à trouver une preuve finitiste de la consistance de l'arithmétique du second ordre  $PA^2$  qui sert de cadre formel à l'analyse. L'arithmétisation de l'analyse au 19ème siècle (Dedkind, Cantor, Weierstrass) avait ouvert la question du dépassement du finitisme kroneckerien et de l'introduction de totalités problématiques. D'où l'idée de transformer le contenu du finitisme en le faisant passer au niveau méta-mathématique de façon à démontrer de façon finitiste la consistance des théories.

Les résultats de Gödel ne forcent pas à abandonner ce programme mais seulement à le relativiser, par exemple, comme l'a tout de suite proposé Paul Bernays, en admettant au-delà des preuves strictement finitistes des preuves constructives. Le programme de Hilbert devient ainsi un programme de *réduction* de parties significatives de  $PA^2$  à des systèmes significativement plus faibles. Une des questions centrales sera alors celle des *axiomes d'existence* ensemblistes que l'on peut et doit introduire suivant les cas.

“Which set existence principles are sufficient (and necessary) to prove central facts ?”<sup>71</sup>.

Comme le remarquent Wilfried Sieg, Stephen Simpson et Solomon Feferman dans leurs contributions au Symposium sur le Programme de Hilbert tenu à Washington en 1985<sup>72</sup>, il existe deux grandes postérités du programme de Hilbert ainsi relativisé :

(i) développer au mieux l'analyse classique dans des extensions élémentaires conservatives de la théorie des nombres élémentaires ;

70. Pour des précisions, cf. Petitot [1979a], [1989a].

71. Sieg [1988], p. 344.

72. Sieg [1988], Simpson [1988], Feferman [1988b].

(ii) donner des preuves constructives de consistance relative pour des parties imprédicatives de l'arithmétique du second ordre  $PA^2$ .

Il existe deux grands types de réduction :

(1) Les *réductions fondationnelles* cherchant à trouver une base constructive pour des parties fortes et problématiques de  $PA^2$ . Elles répondent à la question :

“What more than finitist mathematics do we have to know to recognize the (partial) correctness of a strong theory?”

(2) Les *réductions computationnelles* cherchant à trouver des preuves algorithmiques computationnellement effectuables pour des parties faibles et non problématiques, mais mathématiquement significatives, de l'arithmétique. Elles répondent à la question :

“What more than its truth do we know, if we have proved a theorem by restricted means?”<sup>73</sup>

Les trois questions fondamentales sont donc :

(i) “Which formal theories are adequate (and necessary) for which parts of classical mathematical practice?”

(ii) “To which constructive theories can classical theories be reduced?”

(iii) “What contribution our understanding of (the nature of) mathematics do reduction make?”<sup>74</sup>

Disons quelques mots des réductions fondationnelles. Leur schéma est le suivant<sup>75</sup> : on veut réduire, en ce qui concerne la force démonstrative, un système formel  $T_1$  justifié par un cadre conceptuel “riche”  $C_1$  (en général infinitaire, ou imprédicatif, ou non constructif, ou “circumscriptif” c'est-à-dire inductif par le haut) à un système plus faible  $T_2$  justifié par un système conceptuel “pauvre”  $C_2$ , moins “engagé ontologiquement” (en général finitaire, ou prédicatif, ou constructif, ou “génétique” c'est-à-dire inductif par le bas), et cela de façon à ce que la réduction soit démontrable dans le système *faible*  $T_2$ . L'idéal finitiste de Hilbert était de montrer que  $T_1 = PA^2$  justifiée dans  $C_1 = ZFC$  était conservative sur  $PRA$  (arithmétique récursive primitive) justifiée dans  $C_2 =$  mathématique finitiste, relativement aux énoncés  $\Pi_1^0$ .<sup>76</sup>

Rappelons que dans une théorie d'ordre supérieur comme  $PA^2$ , on définit la hiérarchie des énoncés  $\Pi_k^n$  de la façon suivante.

(i)  $\Pi_k^0, \Sigma_k^0$  : un énoncé  $\varphi \in \Pi_k^0$  (resp.  $\Sigma_k^0$ ) si sa forme prénexe comprend  $k$  quantificateurs alternés commençant par  $\forall$  (resp.  $\exists$ ) et portant sur les *Urelemente*  $x \in \mathbb{N}$  de l'ensemble de base  $\mathbb{N}$  (variables de type 0). On a évidemment  $\Sigma_k^0 = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Pi_k^0\}$ . On note  $\Delta_k^0 = \Pi_k^0 \cap \Sigma_k^0$ . Si l'on considère les sous-ensembles  $A_\varphi \subset \mathbb{N}$  définis par des  $\varphi \in \Sigma_1^0$  et  $\Pi_1^0$ , les  $A_\varphi \in \Sigma_1^0$  correspondent aux sous-ensembles récursivement énumérables et donc les  $A_\varphi \in \Delta_1^0$  aux sous-ensembles récursifs.

(ii)  $\Pi_k^1$  :  $\varphi \in \Pi_k^1$  si sa forme prénexe comprend  $k$  quantificateurs alternés commençant par  $\forall$ , ces quantifications portant sur les sous-ensembles  $X \subset \mathbb{N}$  (c'est-à-dire sur des

73. Sieg [1988], p. 346.

74. Ibid., p. 347.

75. Cf. Feferman [1988b].

76. Ibid.

variables de type 1), les quantifications sur les *Urelemente*  $x \in \mathbb{N}$  étant quelconques. De même pour  $\Sigma_k^1$  et  $\Delta_k^1$ .

(iii)  $\Pi_k^n : \varphi \in \Pi_k^n$  si sa forme prénexe comprend  $k$  quantificateurs alternés sur les variables de type  $n$  commençant par  $\forall$ , sans restriction sur les quantifications de type  $< n$ . De même pour  $\Sigma_k^n$  et  $\Delta_k^n$ .

Mais le théorème de Gödel implique que l'énoncé  $\Pi_1^0$  affirmant la consistance de  $PA^1$  (arithmétique du premier ordre) est démontrable dans  $PA^2$  sans l'être dans  $PRA$ . On cherche donc quelles parties de  $PA^2$  sont conservatives sur  $PRA$  relativement aux énoncés  $\Pi_1^0$ .

Pour exposer brièvement cette problématique<sup>77</sup>, nous devons rappeler quelques notions de base.

D'abord, qu'est-ce plus précisément que réduire une théorie "forte"  $T_1$  à une théorie "faible"  $T_2$ ? (On suppose que  $T_1$  et  $T_2$  sont deux extensions de  $PRA$  formulées dans des langages formels respectifs  $L_1$  et  $L_2$ ). C'est, étant donnée une classe récursive primitive de formules  $\Phi \subset L_1 \cap L_2$ , trouver une méthode effective (récursive) pour transformer toute preuve  $p$  de  $T_1$  de conclusion  $\varphi_p \in \Phi$  en une preuve  $M(p)$  de  $T_2$  de façon à ce que la preuve de la transformation appartienne elle-même à  $T_2$  (notation  $M : T_1 \leq T_2 \text{ rel } \Phi$ ). On dit d'autre part que  $T_1$  est *conservative* sur  $T_2$  pour  $\Phi$  si l'on a

$$\forall \varphi (\varphi \in \Phi \wedge T_1 \vdash \varphi \Rightarrow T_2 \vdash \varphi) .$$

Évidemment, si  $M : T_1 \leq T_2 \text{ rel } \Phi$ ,  $T_1$  est conservative sur  $T_2$  pour  $\Phi$ . Mais la réciproque n'est pas vraie en général sauf si la conservativité est prouvable dans la théorie "faible"  $T_2$ . C'est pourquoi, ainsi que le souligne Feferman :

"conservation results do not by themselves guarantee that we have a *foundational reduction* at hand".

$T$  étant une telle théorie, soit  $\text{Pr}T$  le prédicat arithmétique de prouvabilité dans  $T$ .  $\text{Pr}T(\ulcorner \varphi_p \urcorner, \ulcorner p \urcorner)$  est vrai si  $\ulcorner p \urcorner$  code la preuve  $p$  dans  $T$  de la formule  $\varphi_p$  de code  $\ulcorner \varphi_p \urcorner$ . Cela permet de formaliser le concept de théorème :  $T \vdash \varphi$  ssi  $\text{Th}T(\ulcorner \varphi \urcorner)$  avec

$$\text{Th}T(\ulcorner \varphi \urcorner) \equiv \exists p \text{Pr}T(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner p \urcorner) .$$

Comme l'énoncé affirmant la consistance de  $T$  est l'énoncé

$$\text{Const}T \equiv \neg \text{Th}T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$$

c'est-à-dire

$$\text{Const}T \equiv \forall p \neg \text{Pr}T(\ulcorner 0 = 1 \urcorner, \ulcorner p \urcorner) ,$$

il est trivial de vérifier que si  $M : T_1 \leq T_2 \text{ rel } \Phi$  avec  $0 = 1 \in \Phi$ , alors

$$T_2 \vdash (\text{Const}T_2 \Rightarrow \text{Const}T_1) .$$

---

77. Cf. Feferman [1988b], [1989].

En effet, si  $\neg\text{Const}T_1$  alors

$$\exists p \text{Pr}T_1(\ulcorner 0 = 1 \urcorner, \ulcorner p \urcorner) ,$$

et par conséquent

$$\exists q \text{Pr}T_2(\ulcorner 0 = 1 \urcorner, \ulcorner q \urcorner) (q = M(p)) ,$$

donc  $\neg\text{Const}T_2$ .

Techniquement, les problèmes posés par le réalisme platonicien renvoient avant tout aux axiomes d'existence ensemblistes et fonctionnels que sont les axiomes de *compréhension* et les axiomes de *choix* admis dans la théorie  $T$  considérée. Soit  $\Phi$  une classe de formules (en général une classe de la hiérarchie  $\Pi_k^1, \Sigma_k^1, \dots, \Pi_\infty^1$ ). L'axiome de compréhension pour  $\Phi$  est le schéma d'axiomes :

$$\Phi - CA : \exists X \forall n (n \in X \Leftrightarrow \varphi(n)) ,$$

pour tout  $\varphi \in \Phi$ .

L'axiome d'induction peut quant à lui se formuler alors de plusieurs manières :

(i) Relativement à une classe  $\Phi$  de formules :

$$\Phi - IA : \varphi(0) \wedge \forall n (\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)) \Rightarrow \forall n \varphi(n) ,$$

pour tout  $\varphi \in \Phi$ .

(ii) Relativement à une variable d'ensemble de type 1,  $X \subset \mathbb{N}$  :

$$IA_0 : \forall X [0 \in X \wedge \forall n (n \in X \Rightarrow (n+1 \in X)) \Rightarrow \forall n (n \in X)] ,$$

la quantification universelle  $\forall X$  dépendant des ensembles dont l'existence est affirmée par les axiomes de compréhension de  $T$ .

(iii) Relativement à la classe admise de fonctions :

$$IA'_0 : \forall f [f(0) \wedge \forall n (f(n) \Rightarrow f(n+1)) \Rightarrow \forall n f(n)] .$$

Dans une ontologie ensembliste forte,  $CA$  et  $IA$  sont admis pour l'ensemble  $\Phi$  maximal (toutes les formules de  $\mathcal{L}$ ). On note  $(\Phi - CA)$  la théorie  $PA^2 + \Phi - CA$ ,  $PA^2 \upharpoonright$  la théorie  $PA^2$  avec  $IA$  remplacé par  $IA_0$  et  $(\Phi - CA) \upharpoonright$  la théorie  $PA^2 \upharpoonright + \Phi - CA$ . On a  $PA^1 \subset (\Phi - CA) \upharpoonright$  si  $\Pi_\infty^0 \subset \Phi$ .

### 6.3. Quelques exemples

Comme exemple de réduction considérons le fragment de  $PA^2$  noté  $WKL_0$  ( $WKL =$  "Weak König Lemma"). Son langage est celui de  $PA^2$ , sa logique comprend la loi du tiers exclu et il comprend l'induction  $\Sigma_1^0 - IA$  pour les formules  $\Sigma_1^0$ . On a  $PRA \subset WKL_0$ . Mais  $WKL_0$  est strictement plus fort que  $PRA$  car il contient le lemme faible de König qui est hautement non constructif dans la mesure où il est équivalent à la compacité de l'espace de Cantor  $2^{\mathbb{N}}$ . Ce lemme affirme que les arbres infinis de séquences binaires finies possèdent un chemin infini<sup>78</sup>.

---

78. Le lemme de König affirme que l'on peut sélectionner une branche descendante infinie dans tout arbre infini à branchements finis. Le lemme "faible" se restreint aux arbres à branchements binaires.

On peut montrer (Simpson, Brown, Smith, Friedman, etc.) que beaucoup de théorèmes d'analyse classique sont des théorèmes de  $WKL_0$  et qu'ils sont même équivalents à  $WKL_0$  sur le système  $RCA_0$  de Friedman qui est le système du deuxième ordre très faible<sup>79</sup> :

$$RCA_0 = PRA + \Delta_1^0 - CA + \Sigma_1^0 - IA .$$

Les exemples les plus frappants concernent :

- (i) Le théorème de Heine-Borel-Lebesgue pour les fermés bornés d'un espace métrique séparable complet comme  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii) Les propriétés de base des fonctions  $f(x)$  continues sur  $\mathbb{R}^n$  : continuité uniforme sur les fermés bornés, l'intégrabilité Riemann, etc.
- (iii) L'existence locale de solutions d'équations différentielles ordinaires.
- (iv) Le théorème de Hahn-Banach pour les Banach séparables.
- (v) L'existence d'idéaux premiers dans les anneaux commutatifs dénombrables.
- (vi) L'existence et l'unicité de la clôture algébrique d'un corps  $K$  dénombrable.
- (vii) L'existence et l'unicité de la clôture réelle d'un corps réel  $K$  dénombrable.

Or, on a le :

**Théorème de Friedman.**  $M : WKL_0 \leq PRA$  rel  $\Pi_2^0$ , autrement dit  $WKL_0$  est conservatif sur  $PRA$  relativement aux énoncés  $\Pi_2^0$  et cette réductibilité est  $PRA$ -démontrable.

Ce théorème affirme une forme de réduction de l'infini *non dénombrable* au finitaire.

De même, on peut considérer un système strictement plus fort que  $WKL_0$ , le système  $WKL_0^+$  de Simpson et Brown où est valide le théorème de Baire pour l'espace de Cantor  $2^{\mathbb{N}}$ . Par forcing, on montre que  $WKL_0^+$  est conservatif sur  $RCA_0$  pour les énoncés  $\Pi_1^1$  et sur  $PRA$  pour les énoncés  $\Pi_2^0$ , la conservativité étant  $PRA$ -démontrable (réductibilité). Or,  $WKL_0^+$  contient des théorèmes hautement non constructifs n'appartenant pas à  $WKL_0$  (comme l'open mapping theorem et le théorème du graphe fermé pour les Banach séparables).<sup>80</sup> On peut ainsi faire énormément d'analyse classique dans des systèmes réductibles.

Un autre bel exemple est fourni par le système constructif  $VT_\mu \uparrow$  ( $VT =$  "Variable Types",  $\mu =$  "unbounded minimum operator") que Solomon Feferman a construit à la suite de sa réflexion sur *Das Kontinuum*, l'ouvrage fondamental d'Hermann Weyl de 1918. Il s'agit de trouver un système  $S$  où l'on puisse formaliser l'essentiel des mathématiques tout en gardant une fondation dénombrable, c'est-à-dire une conservativité sur  $PA^1$ . Pour ce faire,  $S$  doit posséder suffisamment de *types* (pour pouvoir traiter par

---

79. Pour  $\Delta_n^k = \Pi_n^k \cap \Sigma_n^k$ , l'axiome de compréhension est :

$$\Delta_n^k - CA : \forall n (\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n)) \Rightarrow \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow \varphi(n)) \quad ,$$

avec  $\varphi \in \Pi_n^k$  et  $\psi \in \Sigma_n^k$ .  $\Delta_0^1 - CA$  est le plus faible des axiomes de compréhension : l'axiome de compréhension *récurusif*.

80. Ainsi qu'y insiste Stephen Simpson, ces systèmes  $WKL_0$  et  $WKL_0^+$  ne sont pas *ad hoc*. Ils expriment en fait deux propriétés topologiques fondamentales, la compacité et la propriété de Baire : "they are two different ways of affirming the existence of 'enough points' in continuous media".

exemple de fonctionnelles et d'opérateurs sur des espaces vectoriels de fonctions) et de types *variables* (pour pouvoir traiter de *genres* de structures, celles-ci étant définies sur des ensembles de types différents).  $S$  est donc, en quelque sorte, une version faible de la théorie des ensembles qui est réductible à  $PA^1$ .

Dans le système constructif  $S = VT_\mu$  le concept fondamental est celui de *fonction*. On y dispose de variables  $X, Y, Z$  et de constantes pour des types d'ensembles, des produits  $U \times V$  d'ensembles déjà définis et des ensembles d'applications  $U \rightarrow V$  entre ensembles déjà définis, de variables individuelles  $x^U, y^U$  pour chaque type  $U$ . Les formules bornées sont les formules sans quantification sur des variables d'ensembles. Si  $U$  est un ensemble et  $A$  une formule bornée, alors  $\{x^U \mid A\}$  est un ensemble. On définit alors les opérations ensemblistes classiques par les équivalences définitionnelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in U \equiv \exists x^U (t = x^U), \\ \{x \in U \mid A\} \equiv \{x^U \mid A\}, \\ (\exists x \in U) A(x) \equiv \exists x^U A(x^U), \\ (\forall x \in U) A(x) \equiv \forall x^U A(x^U). \end{array} \right.$$

Ces notions sont conditionnées par les axiomes usuels. En ce qui concerne  $\mathbb{N}$ ,  $VT_\mu \upharpoonright$  comprend, outre évidemment la fonction "successeur"  $n \rightarrow n' = n + 1$ , un récursur primitif  $R$  qui  $\forall a \in \mathbb{N}$  et  $\forall g \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ <sup>81</sup> engendre une fonction  $f = R(a, g) \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  caractérisée par  $f(0) = a$  et  $\forall n \in \mathbb{N} (f(n') = g(n, f(n)))$ .

L'axiome d'induction est l'axiome  $IA_0$  restreint aux ensembles  $X$  décidables, c'est-à-dire tels que  $X$  soit l'ensemble des zéros d'une fonction  $f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  :

$$(\exists f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \in X \Rightarrow f(n) = 0) .$$

Mais surtout  $VT_\mu \upharpoonright$  comprend un opérateur "minimum"  $\mu \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$  qui à toute fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  associe

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \min_{n \in \mathbb{N}} (f(n) = 0) \text{ si } (\exists n \in \mathbb{N}) (f(n) = 0) \\ &= 0 \text{ sinon .} \end{aligned}$$

Cela signifie que l'on dispose de la formule ( $\mu$ ) :

$$(\forall f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \forall n (f(n) = 0 \Rightarrow (f(\mu(f)) = 0) \wedge (\mu(f) \leq n)) .$$

L'introduction d'un opérateur tel que  $\mu$  correspond à l'admission d'un type d'axiome de choix.  $\mu$  est réminiscent de l'opérateur de choix transfini  $\varepsilon$  de Hilbert qui, parce qu'il

---

81. La notation n'est pas la notation habituelle  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  car  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est ici le type de l'ensemble des applications  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

permet d'éliminer les quantificateurs a joué un rôle prépondérant dans les premières tentatives de démonstration finitistes de la consistance de l'arithmétique.<sup>82</sup>

**Théorème (Feferman 1985).**  $VT_\mu \uparrow$  est une extension conservative de l'arithmétique du premier ordre  $PA^1$ , relativement à la classe  $\Phi$  des énoncés arithmétiques, la preuve de conservativité étant finitaire (réductibilité).

Or, on peut faire beaucoup d'analyse classique dans le système  $VT_\mu \uparrow$ . Non seulement on peut y démontrer le lemme de König, mais on peut aussi y développer par exemple la théorie de la mesure de Lebesgue (bien que les ensembles non mesurables n'y soient pas définissables) ou la théorie spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints sur un espace de Hilbert.<sup>83</sup>

Des résultats de ce genre appartiennent au programme de recherche de la “reverse mathematics”, lancé en particulier par Friedman, Takeuti et Feferman, qui consiste à résoudre le problème suivant :

“Given a specific theorem  $T$  of ordinary mathematics, which set existence axioms are needed in order to prove  $T$  ?”<sup>84</sup>.

Il nous semble que ce programme de recherche qui *inverse* la “forward mathematics” (c'est-à-dire la mathématique déductive) pour développer une stratégie *abductive* qui “remonte” des théorèmes aux axiomes d'existence est extrêmement significatif, non seulement mathématiquement, mais également philosophiquement.

---

82. Dans Petitot [1979a], [1987], nous avons, comme le faisait d'ailleurs déjà Albert Lautman, beaucoup insisté sur la signification philosophique éminente de l'opérateur  $\varepsilon$  de Hilbert. En effet, il permet d'évacuer le contenu ontologique de la quantification existentielle et de le remplacer par une propriété de consistance auto-référentielle. On a en effet l'équivalence fondamentale  $\exists x f(x) \Leftrightarrow f(\varepsilon_f)$  où  $\varepsilon_f = \mu(f)$ . Plus précisément, soit  $f(x)$  une formule. On introduit un symbole d'individu  $\varepsilon_f = \varepsilon_x f(x)$  (de même type que la variable  $x$ ) qui symbolise “l'idée” d'un individu satisfaisant  $f$ . La quantification existentielle  $\exists x f(x)$  est alors introduite à travers l'équivalence :  $\exists x f(x) \Leftrightarrow f(\varepsilon_f)$ . Les  $\varepsilon$ -termes  $\varepsilon_f$  ont un statut particulièrement intéressant, longuement discuté, entre autres par Ackerman et Herbrand. On démontre ( $\varepsilon$ -théorèmes de Hilbert) que l'on peut ainsi construire un calcul logique  $CP_\varepsilon$  équivalent au calcul des prédicats  $CP$ . Or, “l'ontologie” de  $CP_\varepsilon$  est très différente de celle de  $CP$ . Sur le plan syntaxique,  $\varepsilon_f$  est un corrélat individuel (objectal) de  $f$  et l'existence équivaut à l'affirmation de consistance (de cohérence)  $f(\varepsilon_f)$ . Sur le plan sémantique, les  $\varepsilon$ -termes  $\varepsilon_f$  sont des entités *intensionnelles* possédant la double interprétation *de dicto/de re* des entités intensionnelles. Dans l'interprétation *de re* (qui était celle de Hilbert)  $\varepsilon_f$  dénote un élément choisi a priori dans l'extension  $X_f$  de  $f$ . L'opérateur  $\varepsilon$  est donc un opérateur de choix, une “fonction de choix transfinie”. Mais l'extension de  $f$  et le référent de  $\varepsilon_f$  peuvent changer suivant “les mondes possibles” (en l'occurrence les modèles de  $f$ ). Dans l'interprétation *de dicto*,  $\varepsilon_f$  dénote un élément *générique* typique de  $X_f$ , type dont les éléments “concrets” de  $X_f$  sont des spécialisations. L'opérateur  $\varepsilon$  permet immédiatement de “skolemiser” les énoncés, c'est-à-dire d'éliminer les quantificateurs d'un énoncé au moyen de fonctions de Skolem. On voit à quel point il est fallacieux de vouloir interpréter ontologiquement la quantification existentielle. Dans les mathématiques formelles, l'identité et l'individuation des éléments ne peuvent pas dépasser ce qui est permis par les opérateurs de choix à la Hilbert-Skolem.

83. Pour une analyse plus technique et plus épistémologique des systèmes de Weyl et de Feferman, cf. la belle analyse de Giuseppe Longo [1989], le compte rendu par celui-ci de Feferman [1988a] dans *The Journal of Symbolic Logic*, ainsi que Petitot [1992] (où est traité en particulier le rapport entre l'opérateur  $\mu$  de Feferman et l'opérateur de choix transfini  $\varepsilon$  de Hilbert).

84. Simpson [1988], p. 355.

Étant donné un théorème  $T$ , on cherche à identifier un sous-système  $S(T)$  de  $PA^2$  naturel tel que  $S(T) \vdash T$ . Pour cela, on montre que la force démonstrative obtenue en adjoignant  $T$  est équivalent à l'axiome d'existence principal de  $S(T)$ , l'équivalence étant démontrable dans un système  $S'$  plus faible que  $S(T)$  et dans lequel  $T$  n'est pas démontrable. Par exemple le théorème  $T$  d'existence locale des solutions d'une équation différentielle ordinaire se démontre à partir du théorème d'Ascoli. Mais en fait  $T$  est démontrable dans le système "faible"  $WKL_0$  alors que le théorème d'Ascoli ne l'est pas. On a même  $T \equiv WKL_0$  sur  $RCA_0$ . Mais, évidemment, la preuve de  $T$  dans  $WKL_0$  est incroyablement plus compliquée que la preuve classique.

Comme l'affirme Stephen Simpson, la "reverse mathematics" montre que

"many branches of infinitistic mathematics depend on a few key non constructive existence theorems".<sup>85</sup>

Cette réalisation partielle du programme de Hilbert est "a remarkable vindication of Hilbert".

On trouvera dans l'article cité de Solomon Feferman toute une liste de théorèmes fondamentaux de réduction pour tout un ensemble de systèmes avec des axiomes d'induction, des axiomes de compréhension et des axiomes de choix plus ou moins forts (i.e. valables uniquement pour certains niveaux, très bas, de la hiérarchie  $\Pi_k^n, \Sigma_k^n, \Delta_k^n$ ). Citons quelques exemples particulièrement significatifs.

(i) Le théorème de Pearson (1970) :  $(\Sigma_1^0 - IA) \leq PRA \text{ rel } \Pi_2^0$  réduit l'infini dénombrable (car  $\Sigma_1^0 - IA$  fait appel à la totalité infinie  $\mathbb{N}$ ) au finitaire.

(ii) Le théorème de Friedman (1977) et Sieg (1985) :  $(\Sigma_1^0 - AC_{0,0}) = (\Sigma_1^0 - IA) + (WKL) \leq PRA \text{ rel } \Pi_2^0$  réduit l'infini non dénombrable au finitaire.  $\Sigma_1^0 - AC_{0,0}$  appartient à une classe d'axiomes du choix dans une théorie avec suffisamment de types  $\sigma, \tau, \sigma \rightarrow \tau$ , etc. d'ensembles. Le schéma général de  $\Phi - AC_{\sigma,\tau}$  est

$$\forall x^\sigma \exists y^\tau \varphi(x, y) \Rightarrow \exists f^{\sigma \rightarrow \tau} \forall x \varphi(x, f(x)), \text{ pour tout } \varphi \in \Phi .$$

$\Sigma_1^0 - AC_{0,0}$  affirme donc que pour tout  $\varphi(p, q) \in \Sigma_1^0$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ) le fait que  $\varphi$  soit une correspondance, i.e.  $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ , permet de sélectionner pour tout  $x$  un  $y(x)$  tel que l'on ait  $\varphi(x, y(x))$ , la correspondance  $x \in \mathbb{N} \rightarrow y(x) \in \mathbb{N}$  étant fonctionnelle, i.e.  $y(x) = f(x)$  avec  $f \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

(iii) Les théorèmes  $(\Sigma_1^1 - AC) \upharpoonright \leq (\Pi_\infty^0 - CA) \upharpoonright \text{ rel } \Pi_2^1$  et  $(\Pi_\infty^0 - CA) \upharpoonright \leq PA1 \text{ rel } \Pi_\infty^0$  réduisent le continu à l'infini dénombrable.

(iv) Le théorème de Friedman (1970) :  $(\Sigma_1^1 - AC) \leq (\Pi_1^0 - CA)_{<\varepsilon_0} \text{ rel } \Pi_2^1$  réduit l'imprécaditivité du continu au prédicatif, où la notation  $(\Phi - CA)_{<\alpha}$  signifie la chose suivante. Soit  $F$  un opérateur  $Y = F(X)$  défini sur les ensembles. On considère l'itération de  $F$  le long de suites  $(X_\beta)_{\beta \leq \alpha}$  indexées par des ordinaux.  $(\Phi - CA)_\alpha$  est l'axiome exprimant qu'il existe une telle suite  $(X_\beta)_{\beta \leq \alpha}$  permise par  $\Phi - CA$  et produite par l'itération de  $F$ .  $(\Phi - CA)_{<\alpha}$  signifie que l'on a  $(\Phi - CA)_\beta \forall \beta < \alpha$ . Le prédicatif concernant ce qui peut être réduit à l'infini dénombrable, les systèmes  $(\Pi_\infty^0 - CA)$  et  $(\Pi_1^0 - CA)_{<\varepsilon_0}$  sont

---

85. Ibid., p. 361.

prédicatifs. Mais  $(\Sigma_1^1 - AC)$  est un système imprédicatif car sa justification fait appel à des principes d'existence non prédicatifs.

Outre son éminent intérêt mathématique intrinsèque, ce programme de recherche de la “reverse mathematics” possède également, comme nous l'avons déjà affirmé, une remarquable signification philosophique. En effet, il est ontologiquement de nature “déflationniste” et permet de développer sur de solides bases techniques des arguments anti-platoniciens. C'est ce qu'a fait magistralement Solomon Feferman dans son étude “Infinity in Mathematics : Is Cantor Necessary ?” en critiquant ce qu'il appelle la “doctrine” de Gödel.

#### 6.4. La controverse sur la doctrine de Gödel et le platonisme transcendantal

La doctrine de Gödel repose sur la thèse platonicienne que la détermination de l'opération  $\mathcal{P}(X) = \text{“ensemble des parties de } X\text{”}$  et son itération à travers la chaîne de tous les ordinaux sont nécessaires pour démontrer certains énoncés  $\Pi_1^0$ , comme les énoncés de consistance qui, sans cela, resteraient indécidables. Selon Feferman, elle est bien “platonicienne” dans la mesure où elle postule que  $\mathcal{P}(X)$  existe et existe de façon bien définie dès que  $X$  existe. Elle élimine donc *a priori* les délicats problèmes *d'imprédicativité* repérés par Poincaré et Weyl et analysés par exemple par Nelson (définition de certains  $A \subset \mathbb{N}$  en termes de  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , définition de certains  $x \in \mathbb{R}$  en termes de  $\mathbb{R}$ , comme par exemple dans le cas des coupures de Dedekind, etc.).

Considérons par exemple l'arithmétique du premier ordre  $PA^1$  et l'énoncé  $\Pi_1^0$  de sa consistance  $\text{Const}PA^1$ . On peut prouver  $\text{Const}PA^1$  à condition de disposer de l'axiome de compréhension “fort”  $\Delta_1^1 - CA$ . Soit  $C_k$  l'ensemble des codes des énoncés  $\varphi$  de  $PA^1$  de complexité logique  $c(\varphi) \leq k$ . Soit  $V(X, k)$  la formule exprimant que  $X$  est l'ensemble des codes des énoncés *vrais* de  $C_k$ . Au moyen de l'axiome de compréhension  $\Pi_\infty^0 - CA$  on montre que :

$$\forall X \forall k [V(X, k) \Rightarrow \exists Y (V(Y, k+1) \wedge Y \cap C_k = X)] .$$

Donc par induction, on obtient :

$$(\Pi_\infty^0 - CA) \vdash \forall k \exists! X V(X, k) .$$

On peut alors définir le prédicat de vérité  $V(\ulcorner \varphi \urcorner)$  (“ $\varphi$  est vrai”) de deux façons différentes :

$$\exists k \exists X [c(\varphi) \leq k \wedge V(X, k) \wedge \ulcorner \varphi \urcorner \in X] ,$$

ou

$$\forall k \forall X [c(\varphi) \leq k \wedge V(X, k) \Rightarrow \ulcorner \varphi \urcorner \in X] .$$

Le premier énoncé est  $\Sigma_1^1$ , le second est  $\Pi_1^1$ . On a donc :

$$(\Delta_1^1 - CA) \vdash \exists X \forall \varphi (\ulcorner \varphi \urcorner \in X \Leftrightarrow V(\ulcorner \varphi \urcorner)) .$$

L'existence d'un tel ensemble  $X$  permet alors de prouver facilement la consistance de  $PA^1$ . On montre d'abord :

$$(\Delta_1^1 - CA) \vdash \forall \varphi (\text{Pr}PA^1(\ulcorner \varphi \urcorner) \Rightarrow V(\ulcorner \varphi \urcorner)) .$$

Comme on a  $\neg V(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$  on ne peut donc pas avoir  $\text{Pr}PA^1(\ulcorner 0 = 1 \urcorner)$  et donc  $(\Delta_1^1 - CA) \vdash \text{Const}PA^1$ . Or  $\text{Const}PA^1$  n'est pas prouvable dans  $PA^1$ . C'est l'adjonction de l'axiome "platonicien" de compréhension  $\Delta_1^1 - CA$  qui permet la preuve.

Pour démontrer les théorèmes de consistance successifs, on doit donc pouvoir itérer transfiniment les axiomes d'existence constitutifs des axiomes d'induction et de compréhension nécessaires. Cela est possible si l'on admet la doctrine de Gödel.

Pour critiquer cette doctrine, Feferman remarque d'abord que l'on n'a pas besoin des formules du deuxième ordre permettant de *définir* le prédicat de vérité  $V(\ulcorner \varphi \urcorner)$ . Il suffit d'introduire des extensions du premier ordre de  $PA^1$  par un tel prédicat  $V$  satisfaisant des axiomes (du premier ordre) appropriés. Autrement dit, pour démontrer les théorèmes de consistance conjurant le phénomène d'incomplétude, on n'a pas besoin de définir formellement le concept de vérité mais seulement de l'introduire axiomatiquement. Il suffit même d'introduire le schéma de réflexion

$$\text{Pr}PA^1(\ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner p \urcorner) \Rightarrow \varphi$$

qui leur est prouvablement équivalent. En itérant de telles extensions sur des ordinaux seulement *constructifs*, on peut développer une alternative à la doctrine de Gödel.

Mais il existe toutefois des arguments plus puissants en faveur de la doctrine de Gödel. Comme nous allons le voir, ils concernent les résultats *d'indépendance* pour des énoncés combinatoires strictement *finitistes*.

On savait déjà (solution négative du 10ème problème de Hilbert) grâce aux travaux de Martin Davis, Hilary Putnam, Julia Robinson (~1960) et Yuri Matijasevic (1970) que tous les sous-ensembles récursivement énumérables ( $\Sigma_1^0$ )  $A$  de  $\mathbb{N}$ , et donc y compris les récursivement énumérables *non* récursifs, étaient définissables par des équations diophantiennes du type

$$x \in A \Leftrightarrow \exists y_1 \dots y_n (p(x, y) = 0) ,$$

avec  $p$  polynôme et  $n \leq 9$ . Cela implique qu'il existe des  $A \in \Pi_1^0$  de la forme

$$\forall x \forall y_1 \dots \forall y_n p(x, y) \neq 0$$

qui sont *non prouvables*.

Mais il existe également des énoncés *combinatoires* qui sont des versions *finitistes* de théorèmes classiques (théorème de Ramsey, théorème de Kruskal) et qui ne sont pourtant pas prouvables dans  $PA^1$  (théorème de Paris-Harrington, théorème de Friedman) et cela à cause du phénomène d'*incomplétude*. Comme l'admet Feferman,

"the most favorable interpretation to be placed on the results is that they tend to support Gödel's doctrine."<sup>86</sup>

---

86. Feferman [1989], p. 34.

En effet, pour prouver ces théorèmes, on doit se situer dans  $(\Pi_\infty^0 - CA)$  (pour le théorème de Paris-Harrington concernant la version finitiste du théorème de Ramsey) ou dans  $(\Pi_1^1 - CA) \uparrow$  (pour le théorème de Friedman concernant la version finitiste du théorème de Kruskal). Le système  $(\Pi_\infty^0 - CA)$  étant prédicativement justifié dans la mesure où les variables du second ordre y réfèrent à des  $X \subset \mathbb{N}$  arithmétiquement définissables, le problème n'est pas trop critique dans le premier cas. Mais il le devient dans le second cas puisque le système  $(\Pi_1^1 - CA) \uparrow$  est imprédictif. Il est en effet basé sur l'axiome de compréhension :

$$\exists X \forall n (n \in X \Leftrightarrow \forall Y A(n, Y))$$

où  $A$  est un énoncé arithmétique. Or, un tel axiome n'est justifié que si l'on admet que  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  existe "as a fixed definite totality".

En fait (Friedman, Buchholz, 1986), il existe même des énoncés combinatoires qui sont indépendants sur des versions de  $ZFC$ . Comme le remarque Harvey Friedman, de tels résultats ouvrent une nouvelle crise des fondements dans la mesure où ils montrent que

"strong abstract set theory will prove to play an essential role in a variety of more standard finite mathematical contexts."<sup>87</sup>

La réponse de Feferman à ce solide argument en faveur de la doctrine de Gödel est précisément la réduction. Des systèmes comme  $(\Pi_1^1 - CA) \uparrow$  sont finitairement réductibles à des systèmes "non platoniciens" *constructivement justifiés*, comme les systèmes intuitionnistes  $ID_\omega^i = \bigcup_{n < \omega} ID_n^i$  où l'on peut itérer dénombrablement des définitions inductives.

"What the above reductions demonstrate is that the classical systems in question have an *alternative constructive justification* which does not require any thing like belief in a pre-existing totality of subsets of  $\mathbb{N}$ ."<sup>88</sup>

Du fait que, grâce aux réductions de la "reverse mathematics",

"higher set theory is dispensable in scientifically applicable mathematics"<sup>89</sup>,

Feferman conclut à une position philosophique radicale :

"I am convinced that the platonism which underlies Cantorian set theory is utterly unsatisfactory as a philosophy of our subject, despite the apparent coherence of current set-theoretical conceptions and method. To echo Weyl, *platonism is the medieval metaphysics of mathematics*; surely we can do better."<sup>90</sup>

Nous pensons que cette conclusion de Feferman n'est acceptable que pour autant qu'elle concerne une forme vulgaire et naïve (transcendante) de platonisme ontologique selon laquelle  $ZFC$  serait une théorie qui porterait "about a fixed and definite world"<sup>91</sup>.

---

87. Friedman [1986], p. 92-93.

88. Feferman [1989], p. 35.

89. Ibid., p. 37.

90. Ibid., p. 42.

91. Ibid., p. 43.

D'après un tel platonisme transcendant, un énoncé comme celui de l'hypothèse du continu  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$  devrait posséder une valeur de vérité bien définie et absolue. Comme tel n'est pas le cas, puisque les théorèmes d'indépendance (Gödel, Cohen) montrent que l'hypothèse du continu est

“an inherently indefinite problem which will never be solved”<sup>92</sup>,

ce type de platonisme se trouve *réfuté*.

Mais l'argument n'est pas convaincant pour la raison suivante. Soit l'on restreint l'existence à la quantification existentielle, soit on lui attribue un contenu transcendant les mathématiques. Dans le premier cas, on ne saurait lui attribuer aucun contenu ontologique puisque des logiques alternatives à la logique des prédicats, comme l' $\varepsilon$ -calcul de Hilbert, montrent que l'on peut éliminer les quantificateurs d'une théorie formelle en introduisant suffisamment d'éléments idéaux génériques. Ce n'est que le préjugé (en fait scholastique et “médiéval”) selon lequel la *même* logique vaut pour les mathématiques et le monde réel — ce qui implique, par conséquent, qu'une quantification existentielle ne puisse référer qu'à des étants singuliers individués existant réellement à titre d'entités séparées, indépendantes et transcendantes — qui peut induire et entretenir l'illusion d'un contenu ontologique intra-mathématique de la quantification.

Dans le second cas, le moins est alors de s'interroger un peu sérieusement sur le statut de la réalité externe du continu. Or, celui-ci n'est pas un objet. C'est une intuition pure, une forme de donation, de présentation et de manifestation de la réalité objective externe. Il constitue le fondement d'une Esthétique transcendantale objectivante et, à ce titre, son réalisme empirique ne saurait se doubler d'un réalisme transcendant. Comme on le sait depuis Kant et comme nous l'avons rappelé plus haut, le statut de “réalité” du continu externe est celui de l'idéalité transcendantale. Cela signifie qu'il doit être *déterminé* par des idéalités mathématiques mais qu'il ne confère pour autant à celles-ci aucun contenu ontologique. D'où les trois thèses suivantes.

(i) Pour autant qu'elles déterminent des intuitions pures, c'est-à-dire des formes de l'objectivité, les idéalités mathématiques n'acquièrent *aucun* contenu ontologique. Elles acquièrent en revanche une *valeur* et une *réalité objectives*.

(ii) L'idéalité transcendantale implique que la détermination mathématique ne peut pas être une détermination complète. Cette dernière ne constitue qu'un *horizon* de détermination.

(iii) Le caractère logique de l'idéalité transcendantale est que les thèses problématiques d'existence appartiennent elles-mêmes au processus (incomplet) de détermination. Elles ne portent donc pas, par conséquent, sur des étants singuliers individués fixes et définis mais sur des idéalités dont la valeur et la réalité objectives sont en proportion de la force opératoire de leur fonction de détermination (thèse quinième “revisitée”).

Nous appelons *platonisme transcendantal* ce platonisme objectif qui subordonne l'existence mathématique à un processus transcendantal de constitution d'objectivité. Le platonisme transcendantal est “négatif”, et non pas “positif” comme le platonisme ontologique naïf. Il permet *d'inverser* les affirmations philosophiques de l'anti-platonisme et de

---

92. Ibid., p. 42.

transformer les phénomènes d'incomplétude et d'indécidabilité en arguments en faveur du platonisme. Ceux-ci sont en effet la manifestation du fait que, transcendentalement parlant, l'objectivité n'est jamais identifiable à un réel ontologique.

Cela se manifeste par l'extrême diversité des formalisations du continu, du continu algébrique à l'analyse non standard. Si l'on admet une ontologie platonicienne riche de *ZFC*, on rapatriera toute la richesse du continu dans l'univers mathématique et la problématique deviendra essentiellement une problématique sémantique de théories des modèles. Si, au contraire, l'on refuse une telle ontologie au nom d'un certain finitisme on développera alors une conception de la modélisation en fait assez proche des perspectives formalistes de la réduction fondationnelle.

Donnons quelques exemples.

- Au premier ordre, la théorie des ordres denses étant complète, on ne peut pas différencier  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$ .
- Au deuxième ordre on peut définir  $\mathbb{R}$  et ses propriétés topologiques.
- Au premier ordre, la théorie  $CC_0$  des corps algébriquement clos de caractéristique 0 est, comme nous l'avons déjà vu section 6.1, complète. Cela fournit une caractérisation algébrique de  $\mathbb{C}$ .
- Une des grandes réussites de la théorie d'Artur Schreier des corps réels clos — si bien analysée historiquement, techniquement et épistémologiquement par Hourya Sinaceur<sup>93</sup> — est d'avoir élaboré une approche purement algébrique du continu.

## 6.5. Le continu algébrique

Rappelons qu'un corps  $\mathbb{K}$  est réel si  $-1$  ne peut pas s'y écrire comme somme de carrés et qu'il est réel clos si aucune extension algébrique  $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$  de  $\mathbb{K}$  n'est réelle.  $\mathbb{K}$  est alors ordonnable de façon unique.  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}_A$  (le corps des réels algébriques, clôture réelle de  $\mathbb{Q}$ ) et  $\mathbb{R}$  sont réels,  $\mathbb{R}_A$  et  $\mathbb{R}$  sont réels clos. La clôture réelle est donc une notion strictement plus faible que la complétude de l'ordre puisque la clôture réelle de  $\mathbb{Q}$  est  $\mathbb{R}_A$  alors que la clôture pour l'ordre est  $\mathbb{R}$ . Tout corps réel  $\mathbb{K}$  admet une clôture algébrique réelle  $\overline{\mathbb{K}}$  unique à isomorphisme près et si  $\mathbb{K}$  est réel clos alors  $\mathbb{K}(i)$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) est algébriquement clos (et réciproquement). Tarski a montré que la théorie élémentaire  $T_{RC}$  de  $\mathbb{R}$  comme corps réel clos est complète (cette théorie constitue ce que l'on appelle "l'algèbre réelle"). D'où d'ailleurs le principe de transfert de Tarski-Seidenberg déjà évoqué à la section 6.1 : tout énoncé du premier ordre de  $T_{RC}$  démontré pour  $\mathbb{R}$  par voie non élémentaire est vrai pour tout modèle  $\mathbb{K}$  de  $T_{RC}$ . Cela implique en particulier que  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}_A$  sont élémentairement équivalents :  $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}_A$  et qu'il existe donc une caractérisation (élémentaire) purement algébrique (non topologique, non géométrique, non analytique) de la continuité.

Le continu algébrique ainsi défini permet de démontrer par voie purement algébrique de nombreux théorèmes classiques élémentaires de l'analyse faisant intervenir la notion de continuité :

- (i) le théorème de la valeur intermédiaire : si  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$  pour une fonction  $f$  continue, alors  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = 0$ ,

---

93. Sinaceur [1991].

(ii) le théorème de Rolle : si  $f$  est dérivable et si  $f(a) = 0$  et  $f(b) = 0$ ,  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ ,

(iii) le théorème des accroissements finis : si  $f$  est dérivable  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ , etc.

Mais pour cela il faut évidemment se restreindre à des fonctions  $f \in \mathbb{K}[x]$  *polynomiales*. De façon générale, le continu algébrique — dont le modèle de base est  $\mathbb{R}_A$  et non  $\mathbb{R}$  car  $\mathbb{R}_A$  est le seul corps réel clos qui soit algébrique sur son corps premier  $\mathbb{Q}$  — n'est un continu auto-suffisant que si l'on restreint les fonctions utilisées à des polynômes. Or, les polynômes sont formellement des expressions symboliques informationnellement finies et géométriquement des fonctions pour lesquelles la structure locale au voisinage d'un point détermine la structure globale.<sup>94</sup> Or, pour être convenablement mathématisées, les structures physiques exigent l'utilisation de fonctions seulement différentiables et même de structures topologiques non différentiables (par exemple fractales). Mais, on sait que les algèbres de fonctions différentiables ou continues ne possèdent aucune des bonnes propriétés des algèbres de polynômes (pas de prolongement analytique du local au global, non cohérence des faisceaux associés, etc.). Le continu algébrique reste donc irrémédiablement insuffisant.

Le fait que la théorie élémentaire  $T_{RC}$  des corps réels clos (du continu algébrique) soit "faible" se manifeste par un certain nombre de propriétés, par exemple sa décidabilité (l'ensemble des théorèmes est non seulement récursivement énumérable mais récursif, c'est-à-dire qu'il existe un algorithme effectif de décision pour la prouvabilité des énoncés)<sup>95</sup> et l'éliminabilité des quantificateurs, c'est-à-dire le fait que tout énoncé de  $T_{RC}$  est équivalent à un énoncé sans quantificateur.<sup>96</sup> Cette dernière propriété est liée au fait que  $T_{RC}$  est *modèle-complète* : pour toute extension  $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$  de modèles de  $T_{RC}$  et tout énoncé existentiel  $\varphi$  du langage étendu  $L_{\mathbb{K}}$  qui est le langage  $T_{RC}$  avec des noms de constantes pour tous les éléments de  $\mathbb{K}$ ,  $\varphi$  est vrai dans  $\mathbb{K}'$  si et seulement si il l'est dans  $\mathbb{K}$ .<sup>97</sup> En effet, une théorie (finiment axiomatisable) est modèle-complète si et seulement si elle admet l'élimination des quantificateurs.

## 6.6. L'analyse non standard

Venons-en à l'Analyse non standard (*ANS*) qui est une version particulièrement riche du continu multiéchelle à la Veronese. Le platonisme transcendantal est en effet philosophiquement assez proche de la philosophie formaliste telle que la concevait Abraham Robinson. Ainsi que l'a rappelé Hourya Sinaceur<sup>98</sup>, Robinson refusait à la fois l'existence

94. Pour une analyse de cette dialectique local/global, cf. Petitot [1979b].

95. Cette décidabilité est une conséquence du théorème qui fournit un critère de résolubilité dans  $\mathbb{R}$  de tout système d'équations polynomiales et permet de décider élémentairement du nombre exact de racines d'un polynôme  $P(x)$  existant dans un intervalle  $(a, b)$ . Cf. Sinaceur [1991].

96. Nous avons vu plus haut (à propos de l' $\varepsilon$ -calcul de Hilbert) que l'on peut toujours éliminer les quantificateurs d'une théorie en ajoutant suffisamment d'éléments idéaux. Ici, l'élimination se fait sans adjonction de tels éléments. Elle constitue donc une propriété fondamentale et forte de la théorie.

97. Pour une introduction à cette notion fondamentale due à Abraham Robinson, cf. Petitot [1979a].

98. Sinaceur [1991], p. 401.

de l'infini actuel (le réalisme platonicien transcendant naïf) et les veto de nature intuitionnistes et constructiviste. Pour lui, il s'agissait de comprendre, dans le cadre d'une philosophie formaliste, pourquoi tout se passe "comme si" le réalisme platonicien naïf était valable.<sup>99</sup> Bien que non réellement existantes, les totalités infinies sont néanmoins formellement acceptables (ce sont des contenus formels) ; bien que non complètement descriptibles et déterminables, elles sont néanmoins source de prescription d'actes, de procédures, de théories ; bien que sans vérité au sens référentiel, elles possèdent néanmoins une "vérité potentielle". Tous ces caractères sont des caractères du platonisme transcendantal.

Sans se poser véritablement les problèmes philosophiques du statut de l'existence en mathématiques, on peut supposer que le continu nous est originairement donné d'une façon ou d'une autre comme un continuum phénoménologique et/ou une forme de la réalité mais qu'il doit être pensé, compris, exploré, modélisé mathématiquement, cette compréhension prenant la forme d'une détermination et d'une domination axiomatique.<sup>100</sup> La question est alors double :

(i) savoir à quel degré de compréhension peuvent conduire les différentes théories mathématiques en fonction de leur forces respectives ;

(ii) savoir quel est le lien entre cette compréhension mathématique formalisée et la pré-compréhension du continu associée à sa donation.

Dans une telle optique, les mathématiques formelles modélisent un donné, elles l'interprètent. La problématique est donc *herméneutique*. Nous retrouvons ici les réflexions remarquables de Jean-Michel Salanskis.<sup>101</sup>

Il s'agit bien de problèmes d'interprétation puisque même l'ANS qui se voulait une bonne approximation formelle du continu intuitif multiéchelle a subi une remarquable inversion de statut philosophique en passant de sa formulation sémantique initiale par Abraham Robinson à sa version syntaxique développée par Edward Nelson et l'École strasbourgeoise de Georges Reeb et Jacques Harthong. Un bon symptôme en est celle de la transformation du titre de l'article de Robinson : "Formalism 64"<sup>102</sup> en "Intuitionnisme 84" chez Harthong-Reeb<sup>103</sup>.

Dans l'approche sémantique de Robinson, on admet une "ontologie" riche de la théorie des ensembles et l'on conjure les apories du platonisme naïf au moyen d'une philosophie formaliste. On considère l'univers ensembliste  $\mathcal{U}$  hiérarchisé en types construit sur la base  $\mathbb{R}$  et un modèle non standard  $^*\mathcal{U}$  de  $\mathcal{U}$  obtenu par exemple au moyen d'un ultra-produit. L'extension  $\mathcal{U} \prec ^*\mathcal{U}$  est élémentaire, mais la théorie du premier ordre de  $\mathcal{U}$  s'identifiant à la théorie d'ordre supérieur de  $\mathbb{R}$ , elle constitue un modèle non standard de l'analyse. Cela ne viole pas, on le sait, le théorème d'incomplétude de Gödel à cause de la distinction entre ensembles internes et ensembles externes de  $^*\mathcal{U}$ . Alors que  $\mathcal{U}$  est l'univers complet

99. On connaît l'importance de la problématique du "comme si" — du *als ob* — dans la philosophie transcendantale kantienne. La troisième *Critique* lui est en grande partie consacrée. Cf. Petitot [1990c].

100. L'opposition entre "donné" et "pensé" est ici réminiscente de l'opposition kantienne entre *gegeben* (donné) et *gedacht* (pensé) qui se trouve à la base de toute la problématique transcendantale.

101. Cf. Salanskis [1989], [1990]. En ce qui concerne la dimension herméneutique en mathématiques et en physique, cf. également Petitot [1987], [1990a], [1991a].

102. Robinson [1985].

103. Harthong-Reeb [1989].

de base  $\mathbb{R}$ ,  ${}^*\mathcal{U}$  n'est pas l'univers complet de base  ${}^*\mathbb{R}$ . Autrement dit, par exemple, tous les sous-ensembles  $X$  de  ${}^*\mathbb{R}$  n'appartiennent pas à  ${}^*\mathcal{U}$ . C'est ce phénomène qui permet de transférer à  ${}^*\mathcal{U}$  les théorèmes de  $\mathcal{U}$  : un théorème transféré ne reste vrai que si la quantification y est restreinte aux entités *internes*.

Un modèle  ${}^*\mathcal{U}$  d'ANS modélise un continu "très riche", un continu aristotélien au sens de Peirce et de Veronese possédant la propriété d'auto-similitude et bien plus riche que le modèle de la droite numérique  $\mathbb{R}$ . En effet, comme chez Veronese, la construction de Cantor-Dedekind s'y effectue à une infinité d'échelles incommensurables. De façon imagée, on dira avec Peirce que dans chaque coupure de Dedekind on a inséré des exemplaires entiers de  $\mathbb{R}$  en itérant cela à l'infini (inépuisabilité — c'est-à-dire auto-similitude — du continu). Dans cette approche sémantique, la droite numérique  $\mathbb{R}$  fournit donc un très mauvais modèle du continu "tel qu'en lui-même". Mais, dans le même temps, les modèles non standard  $\mathbb{N} \prec {}^*\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z} \prec {}^*\mathbb{Z}$  de l'arithmétique inclus dans  ${}^*\mathcal{U}$  fournissent d'excellentes approximations hyperfinies des constructions de l'analyse.

On peut donc dire en quelque sorte que le continu non standard "riche" ( ${}^*\mathbb{R}$ ) permet de modéliser le continu "inépuisable" et auto-semblable qu'est le continu phénoménologique et/ou le continu comme forme de réalité externe alors que le discret non standard "riche" (hyperfini)  ${}^*\mathbb{Z}$  permet de modéliser le continu "pauvre" ( $\mathbb{R}$ ) de l'analyse classique. C'est en ce sens qu'il faut, selon nous, comprendre la dialectique *continu-discret* de l'ANS actuelle.

Celle-ci part en effet de  ${}^*\mathbb{Z}$ , y considère un entier non standard infini  $\omega$  et reconstruit un modèle de l'analyse en prenant  $\omega$  comme unité.<sup>104</sup> Quand on se ramène à l'unité normale, on obtient alors  $\mathbb{Q}$  mais avec l'adjonction d'infinitésimales, donc en fait  ${}^*\mathbb{Q}$ , et l'on sait que l'on peut reformuler l'analyse classique à partir de  ${}^*\mathbb{Q}$ . Cela permet de représenter et de traduire l'analyse classique dans des modèles hyperfinis et donc de modéliser, en respectant la grammaire du fini, le continu conçu comme réalité externe aux mathématiques. Le fini (idéal, i.e. hyperfini) suffit à fonder l'analyse qui devient ainsi quasi-arithmétique. Comme l'affirme Harthong :

"toute la théorie du continu (calcul différentiel et intégral, géométrie, équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, distributions, analyse complexe, etc.,) est contenue dans l'analyse combinatoire classique..."

On développe donc des modèles hyperfinis permettant de modéliser adéquatement — dans une optique constructiviste et néo-intuitionniste — la "réalité" de l'analyse. Le continu est ici conçu comme une réalité externe, quasi-physique, dont les mathématiques formelles doivent faire la théorie. Le formalisme apparaît alors comme une "métaphysique dogmatique" identifiant théorie et réalité. L'inversion de philosophie par rapport au formalisme de Robinson se trouve consommée.

On peut même pousser plus loin la réduction finitaire de l'analyse au moyen de l'ANS en utilisant la version syntaxique de celle-ci provoquée par Nelson.<sup>105</sup> On sait en effet que l'on peut axiomatiser l'ANS en introduisant un prédicat primitif supplémentaire *st* (stan-

104. Cf. Harthong [1989] et Salanskis [1991].

105. Cf. Nelson [1977], [1986]. Cf également Salanskis [1991] et Petitot [1989a] ainsi que les exposés de P. Cartier, R. Lutz, J.R. Reveillès, J. Harthong et J.M. Salanskis dans ce volume.

dard) dont l'usage est gouverné par les schémas d'axiomes de transfert, d'idéalisation et de standardisation. Des modèles dénombrables de l'arithmétique non standard ainsi axiomatisée permettent d'importer dans  $\mathbb{N}$  lui-même l'opposition entre fini et hyperfini propre aux modèles non standard  ${}^*\mathbb{N}$ . L'opposition  $y$  devient alors celle entre le fini "concret" (naïf, effectif, informatique) et le fini "formel". De cette façon on peut modéliser de façon strictement finitiste les constructions de l'analyse classique au moyen du fini formel.<sup>106</sup>

Sur le plan de la théorie des modèles, cette stratégie rejoint celle des réductions fondationnelles. On peut citer à ce propos les résultats de Jerome Keisler et Ward Henson sur la force démonstrative de l'arithmétique et de l'analyse non standard.

Considérons l'arithmétique de Peano du premier ordre  $PA^1 = PA$  et, à la Nelson, le prédicat supplémentaire  $N$  pour "entier standard". Les axiomes du modèle non standard  ${}^*PA$  sont, dans le langage  $L({}^*PA)$  obtenu en enrichissant  $L(PA)$  par le prédicat  $N$  :

- $PA^{(N)}$  c'est-à-dire les axiomes de  $PA$  relativisés à  $N$ .
- $\exists a \neg N(a)$  (il existe un entier non standard, ce qui remplace l'axiome classique de l'infini).

- L'axiome de transfert :  $(\forall x_1, \dots, x_k \in N)(\varphi^{(N)} \Leftrightarrow \varphi)$  où  $\varphi$  est une formule de  $PA$  possédant  $x_1, \dots, x_k$  comme variables libres et où  $(\forall x \in N) \varphi(x)$  signifie  $\forall x (N(x) \Rightarrow \varphi(x))$ . Dans un modèle de  ${}^*PA$  l'extension du prédicat  $N$  est  $\mathbb{N}$ .

- $(\forall x \in N) \forall y (y < x \Rightarrow N(y))$  (l'extension  $\mathbb{N}$  de  $N$  est un segment initial).
- ${}^*\Pi_\infty$ -induction, i.e. l'induction sur  $N$  pour toutes les formules de  $L({}^*PA)$ .

On a alors le résultat fondamental suivant :

**Théorème (Keisler).**  *${}^*PA$  est une extension conservatrice de  $PA$ , i.e. pour tout  $\varphi \in L(PA)$  si  ${}^*PA \vdash \varphi$  alors  $PA \vdash \varphi$ .*

Autrement dit, pour chaque ensemble fini d'énoncés  $\Sigma \subset \text{Th}({}^*PA)$ , chaque modèle  $M$  de  $PA$  admet une extension élémentaire  ${}^*M$  qui est un modèle de  $\Sigma$  et telle que  $M = {}^*M^{(N)}$ .

Mais l'on montre que si l'on adjoint à  ${}^*PA$  des axiomes de *saturation* et si l'on prend en considération les ensembles externes alors on obtient "a surprisingly great proof-theoretic strength"<sup>107</sup>. En particulier  $PA^2$  (et donc l'analyse) devient canoniquement interprétable dans  ${}^*PA$ . L'interprétation repose sur celle de la relation d'appartenance  $\in$ . Soit  $x \in N$ . Soit  $y \in N$  et  $p_y$  le  $y$ -ème nombre premier. On note  $(x)_y$  la valuation de  $x$  en  $p_y$  i.e. l'exposant de  $p_y$  dans la décomposition de  $x$ . On pose  $y \in x$  si  $(x)_y = 1$ . La fonction  $(x)_y$  est récursive primitive et possède donc un symbole dans le langage  $L(PA)$ .

Pour  ${}^*PA$  on a une hiérarchie analogue à celle des  $\Pi_k^0$  :

- ${}^*\Pi_0 = {}^*\Sigma_0 = \{\varphi \in L({}^*PA) \text{ avec uniquement des quantificateurs relativisés à } N\}$ ,
- ${}^*\Pi_{n+1} = \{\forall a \varphi(a) \mid \varphi(a) \in {}^*\Sigma_n\}$ ,
- ${}^*\Sigma_{n+1} = \{\exists a \varphi(a) \mid \varphi(a) \in {}^*\Pi_n\}$ .

Les axiomes de saturation sont du type :

$$\Sigma - SA : (\forall x \in N) \exists a \varphi(x, a) \Rightarrow \exists a (\forall x \in N) \varphi(x, (a)_x)$$

106. L'analyse de cette possibilité proposée par J.M. Salanskis ([1991]) est tout à fait remarquable.

107. Henson *et al.* [1984], p. 1039.

où  $\varphi \in \Sigma$  avec  $\Sigma = {}^*\Pi_n, {}^*\Sigma_n, L({}^*PA)$ , etc. Ils signifient que l'on peut d'abord construire une fonction  $f(x)$  telle que  $(\forall x \in N) \varphi(x, f(x))$  et ensuite que l'on peut représenter  $f$  par un entier  $a$  tel que  $\forall x((a)_x = f(x))$ .

“The saturation scheme is similar to the choice scheme in second order arithmetic, except that non standard integers have more structure than subsets of the integers”.<sup>108</sup>

On considère alors l'arithmétique du second ordre  $PA^2$  (comprenant les axiomes de  $PA$ , plus l'axiome de compréhension  $\exists X \forall x(x \in X \Leftrightarrow \varphi(x))$  pour les  $\varphi$  sans quantificateurs, plus les axiomes d'induction  $IA_0$  et de choix jusqu'à certains niveaux de la hiérarchie  $\Pi_k^1$ ). Soit  $\mathcal{M}$  un modèle de  ${}^*PA$ . On peut interpréter canoniquement  $PA^2$  dans  $\mathcal{M}$ . C'est le modèle  $\mathcal{M}^2$  dont la partie du premier ordre est  $\mathcal{M}^{(N)}$ . Les  $X \subset N^{\mathcal{M}}$  sont ceux représentables par des  $b \in M$  (base de  $\mathcal{M}$ ) c'est-à-dire les  $X = \{x \in N^{\mathcal{M}} \mid x \in b\}$ .

Soit alors  $T$  une théorie de base  ${}^*PA$ ,  ${}^*PA \subset T$ . Soit  $T^{(2)} = \{\varphi \in L(PA^2) \mid T \vdash \varphi \text{ interprétée}\}$  ce qui signifie que  $T^{(2)}$  est la théorie de la classe des  $\{\mathcal{M}^2 \mid \mathcal{M} \vdash T\}$ . On peut comparer  $T$  à une théorie du deuxième ordre. On a le résultat :

**Théorème.**  $PA^2 + \Sigma_m^1 - IA + \Pi_n^1 - CA \equiv ({}^*PA + {}^*\Sigma_m - IA + {}^*\Pi_n - SA)^2$  pour les énoncés arithmétiques  $\varphi \in L(PA)$  où  $IA =$  axiome d'induction,  $CA =$  axiome du choix,  $SA =$  axiome de saturation et où  $\Pi_n^1 - CA$  est le schéma (pour les  $\varphi \in \Pi_n^1$ ) :  $\forall x \exists y \varphi(x, y) \Rightarrow \exists Y \forall x \varphi(x, Y_{(x)})$  avec  $Y_{(x)}$  défini par  $u \in Y_{(x)} \Leftrightarrow 2^x 3^u \in Y$ .

On peut même montrer qu'en renforçant l'axiome de saturation,  ${}^*PA$  devient d'une force démonstrative équivalente à  $ZFC$ . Pour le montrer, il suffit d'introduire un bon ordre  $<$  sur les entiers non standard. Les axiomes régissant  $<$  expriment d'abord que  $<$  est un ordre dont  $<^{(N)}$  est un segment initial, puis que  $<$  est un bon ordre puisque, si  $<_x$  dénote le segment initial  $\{y \mid y < x\}$ , alors il existe  $z$  tel que tout sous-ensemble de  $<_x$  soit codé par un élément de  $<_z$  (axiome de puissance). L'axiome de saturation est alors celui de  ${}^*PA$  mais avec la quantification relativisée  $(\forall x \in N)$  remplacée par la quantification bornée  $\forall y < x$ . On montre alors le :

**Théorème.**  ${}^*PA(<) \equiv ZFC$  pour les énoncés arithmétiques  $\varphi \in L(PA)$ .

De tels résultats vont clairement dans le même sens que ceux, déflationistes, des réductions fondationnelles : l'usage de  $ZFC$  et de son ontologie platonicienne n'est pas une nécessité pour démontrer des énoncés arithmétiques puisque des modèles dénombrables d'arithmétique non standard suffisent.

Mais cela ne signifie pas pour autant qu'un point de vue non “déflationiste” ne soit pas développable à l'intérieur même de la conception syntaxique (nelsonienne) de l' $ANS$ . Considérons en effet le système  $IST$  (Internal Set Theory) de Nelson sur lequel repose la conception syntaxique. Son axiome d'idéalisation dit que pour toute formule *interne*  $\varphi(x, y)$  on a  $\forall^{st} \text{ fini } z \exists x \forall y \in z \varphi(x, y) \Leftrightarrow \exists x \forall^{st} y \varphi(x, y)$ . C'est un axiome analogue aux axiomes de compréhension et de saturation qui affirme l'existence de “gros” ensembles.  $IST$  est une extension conservative de  $ZFC$  qui admet une “idéalisation” illimitée mais n'admet pas les ensembles externes.

---

108. Ibid. p. 1045.

Hrbáček a proposé un système un peu différent,  $NS$ , comprenant non seulement le prédicat supplémentaire  $st$  (standard) mais également le prédicat  $I$  (interne). Les axiomes sont (informellement) les suivants : (i) les axiomes de  $ZFC$  relativisés à  $st$ , (ii)  $\forall x(st(x) \Rightarrow I(x))$ , (iii) la transitivité de l'univers des entités internes, (iv) l'axiome de transfert, (v) un affaiblissement de l'axiome d'idéalisation, (vi) un renforcement de l'axiome de standardisation, (vii) les axiomes d'extentionnalité, de paire, d'union et de compréhension pour les entités externes.

L'axiome de fondation ne peut trivialement pas être satisfait puisque tout ordinal fini non standard admet une chaîne descendante infinie. Hrbáček a montré que l'on ne peut pas adjoindre de façon consistante à  $NS$  les axiomes de remplacement, des parties (pour les ensembles externes) et de choix. Pour échapper à ces difficultés, Peter Fletcher a proposé de borner les idéalizations par les cardinaux qui interviennent dans le problème considéré. Autrement dit, il considère  $\varphi$  avec  $|\text{domaine}(\varphi) \cap S| \leq \kappa$  ( $S$  univers des entités standard,  $\kappa$  cardinal et  $|A| = \text{cardinal de } A$ ) et il restreint dans l'axiome d'idéalisation les  $z$  standard *finis* et les  $y$  standard à  $\text{domaine}(\varphi) \cap S$ , en exigeant en plus que les  $x$  soient internes. Ces  $\kappa$ -idéalisation permettent de construire un univers interne  $I_\kappa$  que l'on peut saturer pour les parties. On obtient ainsi un système  $SNST$  (théorie des ensembles  $NS$  stratifiée).  $SNST$  est conservative sur  $ZFC$  et sa restriction à l'univers des entités internes redonne  $IST$ . L'intérêt de ce système est d'étendre l'univers standard par des éléments non standard dépendant d'une certaine échelle. Comme l'explique Fletcher :

“the way to visualise  $SNST$  is to regard any infinite internal set  $A$  as an inexhaustible source of elements”.

“How many element you find in  $A$  depends on how hard you look ;  $\forall x^\alpha \in A$  means ‘for all elements  $x$  of  $A$  discoverable by looking with degree of thoroughness  $\alpha$ ’”.<sup>109</sup>

On retrouve l'idée peircienne-veronesienne-robinsonnienne d'ensembles infinis (en particulier d'un continu) “inépuisables”.

## 6.7. Le transfini immanent au fini

Comme nous l'avons vu plus haut, il existe des théorèmes combinatoires strictement finitistes qui ne sont pourtant pas arithmétiquement prouvables. Nous avons également vu que c'est à leur propos que s'opposent par exemple un constructivisme à la Feferman et un platonisme original comme celui d'Harvey Friedman.

Un exemple particulièrement spectaculaire d'un tel phénomène (encore plus spectaculaire que le théorème de Paris-Harrington) est fourni par la version finitiste du théorème de Kruskal.<sup>110</sup>

Le théorème de Kruskal (1960) démontre que si  $T_n$  est une suite infinie dénombrable d'arbres finis (avec une racine), il existe nécessairement  $i < j$  et un homéomorphisme

---

109. Fletcher [1989], p. 1007.

110. Cf. Smorynski [1980].

injectif  $h : T_i \rightarrow T_j$  (c'est-à-dire une injection préservant les inf. de l'ordre partiel défini par la structure d'arbre). La version finitiste **F** de ce théorème est due à Harvey Friedman :

**Théorème F.**  $\forall k > 1 \exists n A(k, n)$ , où  $A(k, n)$  est l'énoncé : si  $T_1, \dots, T_n$  est une suite d'arbres de cardinal  $\#T_i \leq k + i$  alors  $\exists i < j \leq n$  et un homéomorphisme injectif  $h : T_i \rightarrow T_j$ .

Une preuve *non* constructive de **F** dans *ZFC* s'obtient trivialement au moyen d'un argument de compacité : si  $\exists k > 1 \forall n \neg A(k, n)$  alors, par compacité, on obtient un contre exemple au théorème de Kruskal. Mais l'énoncé **F** est démonstrativement *extrêmement puissant*. Soit en effet la suite de théories  $T_0 = PA$ ,  $T_{\alpha+1} = T_\alpha + \text{Const}T_\alpha$  et  $T_\lambda = \cup_{\alpha < \lambda} T_\alpha$  pour les ordinaux limites  $\lambda$ .<sup>111</sup>

**Théorème.** La théorie  $T_0 + \mathbf{F}$  possède la puissance démonstrative d'une théorie  $T_\alpha$  avec  $\alpha$  supérieur à tous les ordinaux suivants.

(i)  $\varepsilon_0 = \lim \omega^{\omega^{\dots \omega}}$ ,  $\omega$  fois. Si  $\varphi(0, \alpha) = \omega^\alpha$ ,  $\varepsilon_0$  est le premier point fixe de  $\varphi : \varphi(0, \varepsilon_0) = \varepsilon_0$ .

(ii) Soit  $\varphi(1, \bullet)$  la fonction énumérant les points fixes de  $\varphi(0, \bullet)$ ,  $\varphi(1, 0) = \varepsilon_0$ ,  $\varphi(1, 1) = \varepsilon_1, \dots, \varphi(1, \varepsilon_0) = \varepsilon_{\varepsilon_0}$ , etc. Soit  $\varphi(2, \bullet)$  la fonction énumérant les points fixes de  $\varphi(1, \bullet)$ , etc. On définit l'ordinal  $\Gamma_0$  comme le premier point fixe de  $\beta = \varphi(\beta, 0) : \varphi(\Gamma_0, 0) = \Gamma_0$ .  $\Gamma_0$  est un ordinal immense *inatteignable* par la  $\varphi$ -hiérarchie. C'est le premier ordinal *non définissable prédicativement*.

(iii) On note  $\Gamma_\alpha$  la  $\alpha$ -ème solution de  $\varphi(\Gamma, 0) = \Gamma$ . On a :

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_{\varepsilon_0} < \Gamma_0 < \Gamma_1 < \Gamma_\omega < \Gamma_{\varepsilon_0} < \Gamma_{\Gamma_0} \dots$$

L'ordinal  $\alpha$  du théorème de Friedman est donc supérieur non seulement à  $\Gamma_0$ , mais à  $\Gamma_\omega$ , à  $\Gamma_{\varepsilon_0}$  et à  $\Gamma_{\Gamma_0}$ .<sup>112</sup> Il est incroyablement plus grand que tous les nombres "astronomiques" pensables. L'énoncé **F** est en fait *indépendant* de l'arithmétique formelle. Il fournit un remarquable exemple d'énoncé  $\Pi_2^0 \forall k \exists n A(k, n)$  qui n'est pas démontrable dans *PA* alors que  $\exists n A(k, n)$  est pourtant prouvable pour tout  $k$  dans *PA*. Ce phénomène *d'immanence de l'incomplétude à des énoncés finitistes* est dû à la croissance vertigineuse du  $n = n(k)$  dont l'existence est affirmée et de la longueur des preuves successives de  $\exists n A(k, n)$ <sup>113</sup>. Une telle croissance échappe complètement et irrémédiablement aux limites de l'arithmétique prédicative.

L'énoncé **F** implique la consistance de l'analyse et transcende donc les principes prédicatifs. Bien qu'il soit un énoncé "concret" de combinatoire finie, il n'admet que des preuves très imprédicatives. De tels résultats plaident incontestablement en faveur d'une ontologie ensembliste "riche".

111. Rappelons que  $\text{Const}T$  est l'énoncé affirmant la consistance de  $T$ . Le théorème de Gödel démontre que si  $PA \subset T$ , il existe un énoncé indécidable  $\varphi$  tel que  $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \neg \text{Pr}T(\ulcorner \varphi \urcorner)$  mais tel que  $T + \text{Const}T \vdash \neg \text{Pr}T(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$ . Cela implique  $T \vdash \neg \varphi \Leftrightarrow \text{Const}T$ .

112. Si *PH* est l'énoncé du théorème de Paris-Harrington, on montre que la force démonstrative de  $T_0 + PH$  est "seulement" celle de  $T_{\varepsilon_0}$ .

113. Par exemple pour  $k = 10$ , la preuve comprend déjà plus de  $2^{2^{\dots 2}}$  (1000 fois) symboles, soit incommensurablement plus que le nombre "ridiculement petit" d'atomes de l'univers estimé à "seulement"  $10^{80}$ .

Il en va de même des résultats de certaines expériences de pensée destinées à améliorer notre “intuition” du continu. Dans une telle perspective, ceux de Chris Freiling paraissent significatifs. En ce qui concerne la négation de l’hypothèse du continu  $HC$ , ce dernier a montré que l’existence de grands cardinaux<sup>114</sup> était une conséquence “d’intuitions” sur le continu obtenues à partir de “Gedanken experiment” simples apportant des arguments “philosophiques” contre  $HC$ .<sup>115</sup>

Si l’on jette au hasard une “fléchette” sur  $\mathbb{R}$ , la probabilité est 0 qu’elle arrive dans  $\mathbb{Q}$  ou dans un autre  $A \subset \mathbb{R}$  dénombrable choisi à l’avance. Assignons à  $x \in \mathbb{R}$  considéré comme une fléchette un sous-ensemble dénombrable  $f(x) \subset \mathbb{R}$ . Si  $y \neq x$  la probabilité que la fléchette  $y$  arrive dans  $f(x)$  est égale à 0. Mais la réciproque est vraie par symétrie. D’où le schéma d’axiome “intuitif” suivant. Notons  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\aleph_0}$  une application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  telle que  $\forall x |f(x)| = \aleph_0$ . L’axiome  $A_{\aleph_0}$  dit que :

$$\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\aleph_0} \exists x_1 \exists x_2 ((x_2 \notin f(x_1)) \wedge (x_1 \notin f(x_2)))$$

( $x_1$  et  $x_2$  étant les buts des deux fléchettes aléatoires indépendantes).

**Théorème.**  $(ZFC \vdash A_{\aleph_0}) \equiv \neg HC$ .

Si l’on généralise au schéma d’axiome  $A_{\aleph_0}^n$  disant que  $\forall f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_{\aleph_0}$  il existe  $x_1, \dots, x_n$  distincts tels que pour tout  $i = 1, \dots, n$  on ait  $x_i \notin f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  alors on obtient le

**Théorème.**  $(ZFC \vdash A_{\aleph_0}^n) \equiv 2^{\aleph_0} \geq \aleph_n$ .

On voit donc à quel point l’hypothèse du continu est contre-intuitive. Sa formulation est d’ailleurs grossièrement fautive dans le fini ( $n+1 = 2^n$ ). Il est donc naturel d’investiguer les conditions de possibilité d’une détermination formelle du continu qui soit en accord avec son intuition. C’est ce que permet l’introduction d’existence de grands cardinaux.

## 7. La bonne structure du continu et les grands cardinaux

Dans les travaux sur les grands cardinaux il ne s’agit pas d’élaborer un modèle du continu comme réalité *externe* (extra-mathématique), modèle qui, comme dans les versions néo-intuitionnistes de l’Analyse non standard, soit compatible aux contraintes finitistes, intuitionnistes ou constructivistes de l’objectivité symbolique, mais bien au contraire de tenter de *reconstruire* au mieux, à l’intérieur même des mathématiques, la transcendance relative de cette réalité *donnée intuitivement*. Cette idée d’objectiver formellement l’horizon herméneutique du continu prolonge l’idéal de Cantor-Dedekind et les dernières considérations de Gödel :

- déterminer “complètement” le continu ;
- penser le “finitisme” non plus sur le mode kroneckerien d’une réduction de l’infini au fini, ni sur le mode hilbertien d’un finitisme démonstratif méta-théorique mais, de façon plus leibnizienne, comme une *analogie* entre le fini et l’infini.

114. Nous allons revenir sur les grands cardinaux dans la section suivante.

115. Freiling [1986].

Toute une série d'arguments plaident en faveur de l'introduction de grands cardinaux<sup>116</sup>. Ils sont assez sophistiqués et concernent en particulier la difficulté qu'il y a à bien évaluer l'hypothèse du continu  $HC$  affirmant que  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ . Le théorème de Cantor-Bendixon (1884)<sup>117</sup> montre que l' $HC$  est vraie pour les sous-ensembles *fermés* de  $\mathbb{R}$  et que donc, s'il existe de tels fermés de cardinal  $\aleph_1$ , alors l' $HC$  est vraie. En fait (Young 1906, Hausdorff 1914 et 1916, Alexandroff 1916), ce résultat est vrai pour les ensembles  $\Pi_2^0$  et même pour les boréliens définis par la hiérarchie suivante qui est le début de la hiérarchie dite *projective* des sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  :<sup>118</sup>

- les  $\Sigma_1^0$  sont les ouverts de  $\mathbb{R}$  et les  $\Pi_\alpha^0$  sont les complémentaires des  $\Sigma_\alpha^0$  (les  $\Pi_1^0$  sont donc les fermés de  $\mathbb{R}$ ).  $\Delta_\alpha^0 = \Pi_\alpha^0 \cap \Sigma_\alpha^0$  ;
- les  $\Sigma_{\alpha+1}^0$  sont les réunions dénombrables de  $\Pi_\alpha^0$  ;
- les  $\Sigma_1^1$  sont les projections (image directe par application continue) de fermés et les  $\Pi_\alpha^1$  sont les complémentaires des  $\Sigma_\alpha^1$  ;  $\Delta_\alpha^1 = \Pi_\alpha^1 \cap \Sigma_\alpha^1$  ;
- les  $\Sigma_{\alpha+1}^1$  sont les projections des  $\Pi_\alpha^1$  ;
- les boréliens sont les  $\Delta_1^1$ .

Il y a très peu de boréliens :  $2^{\aleph_0}$  boréliens contre  $2^{2^{\aleph_0}}$  éléments de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

Mais l' $HC$  est beaucoup plus contraignante puisqu'elle concerne beaucoup plus que les boréliens. Elle a été démontrée par Gödel en 1938 sous l'hypothèse de l'Axiome de *constructibilité*  $V = L$  disant que l'univers total  $V$  est identique à son sous-univers  $L$  des ensembles constructibles.<sup>119</sup> La contrainte de définissabilité restreint en effet énormément la construction des  $\mathcal{P}(X)$  à chaque étape.  $V = L$  implique par exemple qu'il existe un bon ordre  $\Delta_2^1$  sur  $\mathbb{R}$  et donc qu'il existe un ensemble  $\Delta_2^1$  *non mesurable Lebesgue* (d'après Fubini, un bon ordre sur  $\mathbb{R}$  ne peut pas être mesurable Lebesgue). Or, un bon ordre sur  $\mathbb{R}$  devrait être hautement non constructible et indéfinissable. De façon générale, l'axiome du choix  $AC$  (qui est également vrai dans  $L$ ) implique l'existence d'ensembles très compliqués et très irréguliers qui sont néanmoins projectifs : bon ordre sur  $\mathbb{R}$ , ensembles non mesurables Lebesgue, ensembles non dénombrables sans sous-ensemble parfait, etc. Ces ensembles devraient être hautement non constructibles. Or l'axiome de constructibilité les force à exister dans la hiérarchie des projectifs<sup>120</sup>. De même l' $HC$  implique l'existence de  $A \subset \mathbb{R}$  de cardinal  $2^{\aleph_0}$  et qui sont pourtant "très petits", bien "plus petits" que des

116. Cf. l'excellente présentation donnée par Penelope Maddy dans son étude *Believing the Axioms*. Maddy [1988].

117. Chaque sous-ensemble  $X \subset \mathbb{R}$  infini et fermé est soit dénombrable, soit contient un ensemble parfait (propriété de l'ensemble parfait) et possède donc la cardinalité du continu. En effet, les ensembles parfaits sont les fermés sans point isolé et ont la puissance du continu.

118. *Rappel*. Dans la théorie descriptive des ensembles (fondée en France par Baire, Borel et Lebesgue, en Russie par Luzin, Suslin et Alexandroff et en Pologne par Sierpinski, Banach et Kuratowski), les  $A \subset \mathbb{R}$  définissables à partir des intervalles ouverts par les opérations ensemblistes simples d'union, d'intersection, de complémentation et de projection, constituent la hiérarchie de Luzin, dite *projective*, parallèle à la hiérarchie  $\Pi_k^n$  des énoncés.

119.  $X \subset A$  est définissable si  $X = \{x \in A \mid A \models \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}$  avec  $\varphi \in ZF$ ,  $a_i \in A$  et  $\in$  restreinte à  $A$  dans l'interprétation de  $\varphi$ . La hiérarchie des constructibles est engendrée par l'itération des définitions prédicatives (sous-ensembles définissables).

120. En fait, comme le remarque Penelope Maddy, l' $AC$  est vrai dans  $L$  non parce qu'il existe des ensembles compliqués mais parce qu'il existe un bon ordre sur  $\mathbb{R}$  artificiellement simple.

ensembles de Cantor de mesure nulle.

Par ailleurs, en utilisant sa méthode du *forcing*, Paul Cohen a construit (1962) des univers de *ZFC* où l'*HC* est fautive. *HC* est donc *indécidable* dans *ZFC*.

Nombreux sont ceux qui pensent que l'*HC* et l'*HC* généralisée sont “intuitivement” fautes. Selon ces auteurs, l'indécidabilité de l'*HC* montre simplement que *ZFC* ne fournit pas une *description complète* du continu.<sup>121</sup> Pour mieux évaluer ce que signifie l'*HC* on peut par conséquent essayer d'adjoindre des axiomes *supplémentaires* à *ZFC* en se laissant guider par des intuitions et des principes heuristiques.

On cherchera d'abord à démontrer de bonnes propriétés de régularité des projectifs  $A \subset \mathbb{R}$ , propriétés qui généralisent les premiers résultats de Luzin et Suslin : tout  $\Sigma_1^1$  et tout  $\Pi_1^1$  est mesurable Lebesgue ; tout  $\Sigma_1^1$  a la propriété de l'ensemble parfait. Mais Gödel et Cohen ont montré que, dès le niveau des  $\Sigma_2^1$  et des  $\Pi_2^1$ , les difficultés de démonstration rencontrées pour généraliser ces résultats sont méta-mathématiques et sont en fait des conséquences de l'incomplétude. D'où l'idée gödelienne d'enrichir les axiomes de la théorie des ensembles en précisant la grandeur de l'univers. Pour ce faire, il faut introduire des axiomes d'existence de grands cardinaux qui jouent pour les ensembles de cardinal inférieur un rôle équivalent à celui de l'axiome de l'infini pour les ensembles finis. Un fait fondamental est alors que la “bonne” structure du continu dans un univers de *ZFC* dépend très fortement de ces axiomes d'existence. Elle en est la contrepartie.

(i) Le premier axiome est celui de l'existence de cardinaux *inaccessibles* (Tarski, Gödel). Une légitimation heuristique proposée par Gödel dans le cadre de l'analogie fini-infini est l'uniformité de l'univers  $V$  à toutes les échelles, c'est-à-dire un principe d'auto-similarité. Relativement au fini,  $\aleph_0$  est inaccessible. Relativement à la chaîne transfinie issue de  $\aleph_0$ , il doit exister également un cardinal inaccessible. L'idée est très peircienne-veronesienne.

Un autre principe heuristique de légitimation est que, comme *totalité*,  $V$  est *absolument* infini, i.e. impossible à déterminer complètement. L'idée est cette fois très kantienne (cf. la Dialectique transcendantale). Les propriétés globales de  $V$  doivent *se refléter* dans un segment initial  $R_\alpha < ORD$  (où  $ORD$  est la classe des ordinaux de  $V$ ). Or  $V$  est fermé par remplacement et parties. Il est par conséquent naturel de faire l'hypothèse qu'il existe un cardinal inaccessible. Il s'agit là, selon Gödel, d'une sorte d'hypothèse “physique”.

(ii) Des cardinaux encore plus grands sont les cardinaux *mesurables* (Ulam 1930). Naïvement, une mesure sur un cardinal  $\kappa$  est une partition de ses sous-ensembles qui est analogue à celle que l'on obtient sur  $\mathbb{N}$  en étendant le filtre des sous-ensembles cofinis en un ultrafiltre libre.  $\aleph_0$  est mesurable relativement au fini et les mêmes principes heuristiques que dans (i) poussent à admettre l'existence d'un cardinal mesurable. Une conséquence fondamentale en est le théorème de Scott (1961) :  $V \neq L$ . Il implique qu'une mesure sur  $\kappa$  ne peut pas être constructible.

Des résultats de Solovay et Martin (1967-1970) démontrent que l'existence d'un cardinal mesurable implique par exemple :

---

121. Il faut bien faire la différence entre un modèle de cette réalité qu'est le continu (supposé être extra-mathématique) et la détermination axiomatique complète de cette réalité (considérée comme intra-mathématique) par adjonction d'axiomes d'existence à *ZFC*.

- la mesurabilité des ensembles de niveau 2,
- le fait que les  $\Sigma_2^1$  ont la propriété de l'ensemble parfait,
- le fait que les  $\Sigma_1^1$  et les  $\Pi_1^1$  sont déterminés (cf. plus bas). Mais les conséquences de

l'incomplétude réapparaissent un cran plus haut dans la hiérarchie projective.

Une façon systématique d'étendre les considérations précédentes consiste à imposer de bonnes propriétés de *détermination* à la hiérarchie des *projectifs*, ce qui interdit, contrairement à ce qui se passe dans le cas de l'axiome de constructibilité ( $V = L$ ), que des ensembles trop complexes et irréguliers puissent être forcés à être projectifs.

La détermination est une forte propriété de régularité qui implique par exemple la mesurabilité Lebesgue, la propriété de Baire et la propriété de l'ensemble parfait. On dit que  $A \subset \mathbb{R}$  est déterminé si dans le jeu où deux joueurs choisissent à tour de rôle un entier (ce qui, à la limite, donne un  $r \in \mathbb{R}$ ), l'un des joueurs a une stratégie gagnante pour  $r \in A$ . Gale et Stewart ont montré en 1953 que les ouverts sont déterminés. On a montré ensuite que les  $\Sigma_n^0$ ,  $n \leq 4$ , et les boréliens sont déterminés (Wolfe 1955, Davis 1964, Paris 1972, Martin 1975). On peut alors introduire des axiomes exprimant essentiellement que *tous* les projectifs  $A \subset \mathbb{R}$  sont déterminés. On peut, comme l'a proposé Martin, justifier également ceux-ci comme une sorte d'hypothèse "physique". Ils vont dans le même sens que l'axiome des cardinaux mesurables car ils forcent les ensembles très irréguliers (comme un bon ordre sur  $\mathbb{R}$ , un ensemble non mesurable Lebesgue, un ensemble non dénombrable sans sous-ensemble parfait, etc.) à exister à l'extérieur de la hiérarchie projective.

Il existe tout un ensemble de résultats remarquables de Solovay, Martin, Steel, Moschovakis, Harrington, Woodin, etc. (cf. le célèbre Séminaire *Cabal* de Los Angeles), d'un extraordinaire intérêt non seulement mathématique mais également philosophique, concernant la relation entre divers axiomes de détermination pour la hiérarchie projective et divers axiomes d'existence de grands cardinaux.

L'axiome de détermination *complète*  $AD$  : tout sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  (et pas seulement les projectifs) est déterminé, rend l' $HC$  complètement fausse puisque  $\mathbb{R}$  peut alors être appliqué sur de très grands cardinaux. Mais dans le même temps, l' $HC$  demeure partiellement valable car il n'existe pas d'ensembles de réels de cardinalité intermédiaire entre  $\aleph_0$  et  $2^{\aleph_0}$  (puisque  $A \subset \mathbb{R}$  est déterminé et que par conséquent si  $A$  est non dénombrable il contient un sous-ensemble parfait). Ce paradoxe apparent est lié au fait que  $AD$  est contradictoire avec l' $AC$  et implique qu'il n'existe pas de bon ordre sur  $\mathbb{R}$ . Dans un tel univers,  $\mathbb{R}$  n'est donc pas un aleph.

Les axiomes, plus faibles, ne garantissant que la détermination des projectifs permettent d'obtenir des renseignements essentiels sur la structure du continu. Ils sont liés à des axiomes d'existence de cardinaux encore beaucoup plus grands que les cardinaux mesurables. La théorie du continu devient alors très "bonne". Les projectifs de  $\mathbb{R}$  possèdent les bonnes propriétés de régularité que l'on attend, cela parce que la complexité "pathologique" dérivable de l' $AC$  a suffisamment de place pour s'exprimer dans des parties non déterminées de l'univers. D'où un succès considérable du programme de Gödel. Mais ces résultats ne permettent de comprendre que la structure des projectifs, c'est-à-dire d'une partie infime de  $\mathbb{R}$ .

Il ne faudrait pas croire par conséquent que la négation de l' $HC$  et l'introduction de

grands cardinaux qui saturent l'ontologie du transfini soit une fantaisie spéculative de logiciens. Bien au contraire. Il nous semble qu'elle est philosophiquement légitime dès que l'on cherche, en fidélité avec la philosophie "anti-kroneckerienne" de Cantor, à construire dans l'univers  $V$  un continu qui soit assez riche pour être fidèle à notre "intuition" du continu, autrement dit, dès que l'on veut au maximum reconquérir mathématiquement "l'en soi" et l'horizon herméneutique que représente le continu intuitif pour l'objectivité symbolique des mathématiques formelles.

On voit ainsi que, selon nous, l'introduction de grands cardinaux correspond à la *bimodalité objective du continu* que nous avons développée dans la première partie de cette étude.

De façon plus précise, l'introduction de grands cardinaux permet d'élaborer un modèle ensembliste adéquat (différent dans l'esprit des modèles robinsoniens de l'*ANS*) du continu comme forme de la réalité externe. Et cela à partir d'une conception de l'infini qui renoue en partie avec un infini potentiel de type néo-aristotélicien. La performance est tout à fait remarquable.<sup>122</sup>

Comme nous l'avons vu, l'une des idées maîtresses des modèles robinsoniens de l'*ANS*, idée remontant aux premières intuitions de Peirce et aux premières constructions de Veronese, est que des continus entiers peuvent être insérés dans les coupures de Dedekind et que la construction de Dedekind doit donc s'effectuer à une infinité d'échelles incommensurables. C'est le principe d'auto-similitude. Il se trouve ici transféré à l'univers  $V$  lui-même. De même que l'*ANS* a relativisé l'opposition fini/infini, on relativise ici l'opposition ensemble/classe et l'on considère des extensions élémentaires d'univers  $j : V \rightarrow {}^*V$  où certains ordinaux de  ${}^*V$  (et donc des ensembles) représentent des classes de  $V$ . Cela permet de traiter la classe *ORD* des ordinaux de  $V$  comme un ordinal et par conséquent de parler des ordinaux  $ORD + 1$ ,  $ORD + ORD$ , etc.<sup>123</sup> Ainsi saturé par auto-similitude, l'univers devient "inépuisable". De même que l'*ANS* permet de modéliser le continu de  $\mathbb{R}$  comme infini potentiel, de même on modélise ici l'infini potentiel d'un univers dont la structure ordinale transfinie se répète à une infinité d'échelles incommensurables. Comme dans la philosophie formaliste de Robinson, la "potentialité" se manifeste par le fait que les ensembles idéaux sont des entités en fait intensionnelles dont l'extension varie suivant "le monde possible" choisi. Une telle construction ensembliste permet alors de construire dans cet univers "inépuisable" un continu qui soit assez riche pour s'identifier au continu comme forme de la réalité physique externe, c'est-à-dire au continu qui — en tant que forme de donation, en tant qu'infini actuel originairement, immédiatement et intuitivement donné — fonctionne comme réalité "en soi" et comme horizon pour l'objectivité symbolique des mathématiques formelles.

Sur le plan épistémologique, de tels travaux confirment le bien fondé du platonisme de Gödel. Nous voudrions donc, pour conclure, faire quelques remarques à ce sujet. Gödel a souvent affirmé que la signification des résultats d'incomplétude et d'indécidabilité est que les conditions de justification des énoncés mathématiques dépassent les ressources

122. Cf. les travaux de Reinhardt et Maddy [1988].

123. Dans l'univers  ${}^*V$ , l'ordinal critique  $j(ORD)$  qui mesure  $j$  est un ordinal de cardinal super compact (les cardinaux super compacts étant encore bien "plus grands" que les cardinaux mesurables).

formelles (syntaxiques) des preuves effectives, c'est-à-dire qu'il existe un écart irréductible entre le concept computationnel de démontrabilité formelle et ce qu'il appelait

“le concept hautement transfini de vérité mathématique objective”.

Selon lui, les axiomes de *ZFC* ne fournissent pas une “description complète” du *réel* mathématique. Il a souvent insisté à ce propos :

(i) sur *l'objectivité* des mathématiques : les objets mathématiques ne sont pas des constructions mentales ;

(ii) sur le fait que nous possédons un accès “intuitif” aux objectivités mathématiques bien au-delà des contraintes du constructivisme (pénétrabilité cognitive) ;

(iii) sur la nécessité d'introduire une “ontologie” ensembliste riche pour résoudre des problèmes finitistes et axiomatiser fidèlement le donné intuitif<sup>124</sup> ;

(iv) sur le fait que l'esprit n'est pas mécanique et computationnel (n'est ni simulable par une machine de Turing, ni physiquement explicable) ;

(v) sur son opposition à l'idéologie dominante, à “l'atmosphère intellectuelle”, de son époque (analyticité des mathématiques, conventionalisme syntaxique, antiplatonisme).<sup>125</sup>

Il existe deux façons d'évaluer de telles affirmations. Si on les évalue à partir de “l'idéologie dominante”, alors l'intuition gödelienne deviendra une intuition intellectuelle analogue à celle de la tradition métaphysique, le platonisme gödelien deviendra un platonisme ontologique transcendant naïf, etc. On s'apitoiera alors sur la naïveté métaphysique du grand génie, comme on s'est apitoyé sur la non moindre naïveté métaphysique de l'autre grand génie qui était son meilleur ami à Princeton, Albert Einstein.

Mais ne serait-il pas plus juste de s'apitoyer au contraire sur le dogmatisme de doctrines philosophiques qui conduisent à une telle incompréhension de l'essence des mathématiques et de la physique ? Tel est plutôt notre position : il est impossible d'évaluer des thèses comme celles de Gödel sans disposer d'une doctrine idoine de l'objectivité du physico-mathématique. La conception transcendantale est une telle doctrine idoine. Il en existe peut-être d'autres. Celle de Peirce par exemple, ou celle de Whitehead. Nous avons privilégié ici la première. Si l'on évalue les affirmations gödeliennes à partir d'elle, alors leur pertinence philosophique s'impose.<sup>126</sup>

L'opposition entre la calculabilité syntaxique et la transcendance sémantique objective reprend l'opposition transcendantale de base entre le “discursif” (le formel, l'analytique) et l’“intuitif”. À l'intérieur du cadre de la logique formelle — philosophiquement dominé par l'idéologie de la logique comme organon — Gödel a reconquis à propos du continu une phénoménologie de l'intuition pure. Il a reconquis la problématique de l'*Anschauung*, de l'Esthétique transcendantale et du synthétique a priori. Mariant les thèses apparemment

---

124. Comme le note judicieusement Palle Yourgrau (Yourgrau [1989], p. 398) : “borrowing and adapting a distinction from David Kaplan, we can say that Gödel prefers grammatical conservativeness and ontological imagination to grammatical reconstruction and ontological minimalism”.

125. Cf. Wang [1987] ainsi que son excellent compte-rendu par Jacques Dubucs.

126. Pour éviter tout malentendu il faut insister sur le fait que Gödel lui-même n'était pas philosophiquement un transcendantaliste mais un réaliste platonicien. Un tel réalisme n'étant pas compatible avec le concept moderne d'objectivité, il a été rejeté. Mais il peut être réinterprété dans un cadre transcendantaliste.

contradictoires de la pénétrabilité cognitive (de l'accessibilité épistémique) et de la transcendance objective, sa conception de l'intuition est en fait typiquement transcendantale. Elle concerne l'intuition (d'abord géométrique) des formes de la réalité physique. Elle relève d'une problématique de la constitution. Il est donc naturel que Gödel se soit tant intéressé à Husserl et à sa solution (corrélation noèse-noème) des apories du platonisme naïf<sup>127</sup>. Par exemple, l'affirmation :

“that something besides the sensation actually is immediately given follows (independently of mathematics) from the fact that even our ideas referring to physical objects contain constituents qualitatively different from sensation or mere combinations of sensation e.g. the idea of object itself”<sup>128</sup>

semble proche des propos husserliens sur les intuitions catégoriales et les objectivités noématiques.

Sans doute, ainsi que l'a bien analysé Roger Penrose, la seule erreur de Gödel aura été dans l'affirmation du caractère computationnel de la physique. Cette affirmation est sans doute fautive<sup>129</sup>. Mais, à ceci près, le platonisme de Gödel fournit, selon nous, un exemple remarquable et convaincant de platonisme transcendantal, même si sa thématique métaphysique par Gödel lui-même est d'orientation plutôt leibnizienne.

## 8. Conclusion : défense du platonisme transcendantal

Sur le plan philosophique, cette étude aura montré, du moins nous l'espérons, plusieurs choses.

1. D'abord la question de la réalité des idéalités mathématiques ne peut pas être philosophiquement clarifiée tant que l'on en reste à une interprétation ontologique substantielle de l'existence et de la quantification existentielle. Dans son interprétation ontologique dogmatique de l'existence et de la réalité, confondant qui plus est ontologie substantielle et physique des phénomènes spatio-temporels<sup>130</sup>, la logique formelle confirme le verdict kantien : quand elle opère comme organon, elle se transforme d'elle-même en logique dialectique (au sens négatif, critique, du terme).

2. Les idéalités mathématiques sont constitutives de la réalité objective pour autant qu'elles déterminent les formes de cette réalité, c'est-à-dire les intuitions pures qui en sont

---

127. Les héros philosophiques de Gödel étaient Platon, Leibniz, Husserl (et non pas Aristote, Kant, Wittgenstein).

128. Gödel [1947].

129. Par exemple, on peut généraliser la théorie de la récursivité de  $\mathbb{N}$  à  $\mathbb{R}$ . On démontre alors que la plupart des ensembles de Julia de fractions rationnelles sur la sphère de Riemann sont non récursivement énumérables sur  $\mathbb{R}$ . Leurs compléments (à savoir les bassins d'attraction de la dynamique holomorphe considérée) fournissent donc des exemples naturels d'ensembles récursivement énumérables indécidables sur  $\mathbb{R}$ . Or, les ensembles de Julia interviennent en physique, par exemple dans l'analyse des phénomènes critiques (pour une introduction à ces problèmes, cf. Petitot [1991b]).

130. On sait que, comme y a insisté Hermann Weyl, la caractéristique de la physique mathématique moderne est d'avoir rompu avec toute ontologie substantialiste. (Cf. sur ce point Petitot [1989b] et [1990a]). La méconnaissance de ce *factum rationis* rend impossible toute élaboration d'une doctrine plausible de l'objectivité.

les modes de donation phénoménologique. Ces *formes* de la réalité, qui s’opposent au contenu matériel empirique de celle-ci, confèrent un *contenu* (formel) aux théories mathématiques qui les déterminent. L’opposition forme/contenu change donc de statut lorsque l’on passe de la réalité empirique à la réalité mathématique. Ce qui fonctionne comme forme pour la première devenant contenu pour la seconde.

	<b>Forme de détermination</b>	<b>Contenu intuitif</b>
<b>Mathématiques</b>	Syntaxe logique	Continu
	<b>Forme de manifestation</b>	<b>Contenu empirique</b>
<b>Physique</b>	Espace-temps	Phénomènes

3. Qui dit Esthétique transcendantale dit logique transcendantale et synthétique a priori. Seule une problématique (renouvelée) du synthétique a priori permet de dépasser les apories du platonisme ontologique naïf et les limites évidentes du nominalisme.

4. L’ambivalence forme/contenu du continu se manifeste par sa bimodalité objective : comme forme de la réalité externe, le continu se donne intuitivement, alors que comme contenu pour une théorie mathématique, il constitue un horizon non complètement déterminable par une syntaxe logique. Les résultats d’incomplétude et d’indécidabilité confirment cette bimodalité objective.

5. La bimodalité objective a été bien vue par certains logiciens même s’ils ne l’ont pas thématifiée en tant que telle. Comparons par exemple les deux affirmations suivantes de Chris Freiling :

(i) “Infinite sets, being mathematical abstractions, do not always have a clear-cut connection to the real world in which we live”.

(ii) “The continuum has a strong connection to the real world (...)”.<sup>131</sup>

La conséquence en est que le continu doit être formellement déterminé et que c’est lui qui va conférer un contenu extra-logique à la théorie des ensembles et permettre de comprendre l’applicabilité des mathématiques. D’où l’affirmation plus complète dont le “as well” affirme une bimodalité :

“The continuum, therefore, has a strong connection to the real world as well as to the world of set theory”.

Stephen Simpson a également fort bien explicité la bimodalité. D’un côté, il affirme, nous l’avons vu à la section 6.3, que le finitisme méta-mathématique est essentiel pour penser les rapports entre mathématiques et réalité. Mais, d’un autre côté, il souligne à son tour l’importance du continu comme forme de la réalité externe et retrouve à ce propos des accents néo-aristotéliens :

“In my opinion Hilbert’s discussion of this point would have profited from an examination of Aristotle’s distinction between actual and potential infinity.

---

131. Freiling [1986], p.190.

According to Aristotle, there is no actual infinity, but potential infinity exists and first manifest itself to us in the continuous, via infinite divisibility".<sup>132</sup>

"Finitistic reductionism is not the only plausible method by which to validate infinitistic mathematics. One might try to show that a substantial part of infinitistic mathematics is directly interpretable in the real world".

"Continuous real-world processes have not been sufficiently exploited. Aristotle's notion of potential infinity could be of value".<sup>133</sup>

6. Nous avons vu à plusieurs reprises qu'une "ontologie" ensembliste "riche" est parfaitement admissible si l'on admet que certaines idéalités problématiques possèdent le statut d'entités *intensionnelles* (modalisées) dont l'extension varie en fonction de mondes possibles (ce que Hilbert faisait déjà implicitement dans son  $\varepsilon$ -calcul ; ce que Lautman a bien analysé ; ce que faisait Robinson à propos de l'*ANS* dans un cadre formaliste ; ce que fait Reinhardt à propos des univers non standard). Cette approche intensionnelle invalide l'argument anti-platonicien classique selon lequel "exister" ne peut signifier qu'exister dans un monde fixe et complètement déterminé. Les idéalités mathématiques dont les axiomes d'existence non constructifs d'une "ontologie" ensembliste "riche" postulent la réalité, dépendent en fait de situations contrefactuelles. Le platonisme qui leur convient est donc en quelque sorte un platonisme "intensionnel" modal.

7. Mais un platonisme intensionnel est identifiable à un platonisme transcendantal. En effet, le fait que le continu ne soit pas "complètement" déterminable à partir de *ZFC* et ne puisse être mieux déterminé que par l'introduction d'une hiérarchie infinie d'axiomes supplémentaires non constructifs d'existence de grands cardinaux qui sont autant d'entités intensionnelles admises à titre d'hypothèses physiques, ce fait est compatible avec l'interprétation de la nécessité du synthétique a priori proposée par le logicien kantien Gordan Brittan en termes de mondes réels possibles.<sup>134</sup>

Une des problématiques de l'objectivité est en effet une problématique des mondes réels possibles, c'est-à-dire des mondes possibles conditionnés par les formes de la réalité, autrement dit par une Esthétique transcendantale. Mais cette forme ne peut pas être elle-même une réalité ontologique (rejet du réalisme transcendantal). Son statut de réalité est celui de l'idéalité transcendantale. L'idéalité transcendantale est logiquement exprimable par le défaut d'identité et d'individuation des entités mathématiques intensionnelles qui permettent la détermination mathématique (ensembliste) "incomplète" des intuitions pures comme forme de la réalité.

8. Rien ne s'oppose donc, bien au contraire, au redéploiement des conceptions platoniciennes des mathématiques, à condition évidemment qu'il s'agisse non plus d'un platonisme classique, positif et transcendant mais d'un platonisme non classique, négatif et transcendantal, bref post-gödelien. Évidemment, demeure entière l'énigme de l'intuition pure, c'est-à-dire de la façon dont nous sommes affectés par l'extériorité. Ce problème n'est pas d'abord mathématique mais physique et cognitif. Comme Kant l'avait déjà entraperçu

---

132. Simpson [1988], p.350.

133. Ibid. p. 362.

134. Cf. Brittan [1978].

dans ses réflexions ultimes de *l'Opus Postumum* à propos du “phénomène du phénomène”, c’est une sorte de physique cognitive fondamentale non mécaniste et non atomiste qui devrait en dernière instance permettre d’élaborer une *genèse physico-cognitive* des intuitions pures elles-mêmes et du synthétique a priori<sup>135</sup>. Cette spéculation ultime est devenue un problème scientifique neuf et très actuel situé à l’interface de la biophysique et des sciences cognitives. Il s’agit de comprendre comment la biophysique interfère avec notre appareil cognitif de façon à engendrer l’intuition pure du continu comme une “mise au format” non propositionnelle. Mais, quoi qu’il en soit des conclusions futures de telles recherches, le platonisme transcendantal apparaît en définitive comme la philosophie mathématique la plus plausible. Cela est assez satisfaisant pour l’esprit, tant il est vrai que “to be a mathematician is to be an out-and-out Platonist”.

## Références

- [1] Benacerraf, P., Putnam, H. (eds.), 1964. *Philosophy of Mathematics : Selected Readings*, Englewood Cliffs, New-Jersey, Prentice Hall, 1964.
- [2] Brittan, G., 1978. *Kant’s Theory of Science*, Princeton University Press, 1978.
- [3] Brown, D.K., 1987. *Fonctional Analysis in Weak Subsystems of Second-order Arithmetic*, Ph. D. Thesis, Pennsylvania State University, 1987.
- [4] Buchholz, W., 1986. “An Independance Result for  $(\Pi_1^1 - CA) + BI$ ”, *Annals of Pure and Applied Logic*, 33, (1986), 131-155.
- [5] Burgess, J., 1983. “Why I am not a Nominalist”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24, (1983), 93-105.
- [6] Changeux, J.-P., Connes, A., 1989. *Matière à Pensée*, Paris, Éditions Odile Jacob, 1989.
- [7] Chihara, Ch. S., 1990. *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford, Clarendon Press, 1990.
- [8] Dalen, D. van, 1990. “The war of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the Mathematische Aunalen”, *The Mathematical Intelligencer*, 12, 4, (1990), 17-31.
- [9] Dubucs, J., 1991. “La philosophie de Kurt Gödel”, *L’Âge de la Science*, 53-68.
- [10] Feferman, S., 1964-1968. “Systems of Predicative Analysis” I, II, *The Journal of Symbolic Logic*, 29, (1964), 1-30 ; 33, (1968), 193-220.
- [11] Feferman, S., 1988a. “Weyl Vindicated : *Das Kontinuum* 70 Years Later”, *Temi e prospettive della logica e della filosofia della scienza contemporanea*, 1, (1988), 59-93, Bologne, Clueb.
- [12] Feferman, S., 1988b. “Hilbert’s Program Relativized : Proof-Theoretical and Foundational Reductions”, *The Journal of Symbolic Logic*, 53, 2, (1988) 364-384.

---

135. Sur ce point particulièrement délicat, cf. Petitot [1991c].

- [13] Feferman, S., 1989. "Infinity in Mathematics : Is Cantor Necessary?", *Philosophical Topics*, XVII, 2, (1989), 23-45.
- [14] Field, H., 1980. *Science without Numbers. A Defence of Nominalism*, Princeton University Press, 1980.
- [15] Field, H., 1982. "Realism and Anti-Realism about Mathematics", *Philosophical Topics*, 13, (1982), 45-69.
- [16] Freiling, C., 1986. "Axioms of Symetry : throwing darts at the real number line", *The Journal of Symbolic Logic*, 51, 1, (1986), 190-200.
- [17] Fletcher, P., 1989. "Nonstandard Set Theory", *The Journal of Symbolic Logic*, 54, 3 (1989), 1000-1008.
- [18] Friedman, H., 1986. "Necessary Uses of Abstract Set-theory in Finite Mathematics", *Advances in Mathematics*, 60, (1986), 92-122.
- [19] Gödel, K., 1947. "What is Cantor's Continuum Problem", *American Mathematical Monthly*, 54, 9, (1947), 515-525. Repris dans *Benacerraf-Putnam 1964*, 470-485.
- [20] Gödel, K., 1958. "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes", *Dialectica*, 12, (1958), 280-287.
- [21] Harthong, J., 1989. "Une théorie du continu", *MNS 1989*, 307-329.
- [22] Harthong, J., Reeb, G., 1989. "Intuitionnisme 84", *MNS 1989*, 213-252.
- [23] Heijenoort, J. van (ed), 1967. *From Frege to Gödel : a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Cambridge, Harvard University Press, 1967.
- [24] Henson, C.W., Kaufmann, M., Keisler, H.J., 1984. "The Strenght of Nonstandard Methods in Arithmetic", *The Journal of Symbolic Logic*, 49, 4, (1984), 1039-1058.
- [25] Henson, C.W., Keisler, H.J., 1986. "The Strenght of Nonstandard Analysis", *The Journal of Symbolic Logic*, 51, (1986), 377-386.
- [26] Hilbert, D., 1922. "Neue Begründung der Mathematik. Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 1, (1922), 157-177. Trad. J. Largeault dans *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Paris, Vrin, 1992.
- [27] Hilbert D., 1925. "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, 95 (1926), 161-190. Trad. française J. Largeault dans *Logique mathématique, Textes*, Paris, A. Colin, 1972. Trad. anglaise dans *Heijenoort 1967*, 367-392.
- [28] Husserl, E., 1891. *Philosophie der Arithmetik*. Trad J. English, *Philosophie de l'arithmétique*, Presses Universitaires de France, 1972.
- [29] Husserl, E., 1900-1901. *Logische Untersuchungen*. Trad. H. Elie, L. Kelkel, R. Schérer, *Recherches Logiques*, Paris, Presses Universitaires de France, 1969-1974.
- [30] Husserl, E., 1913. *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*. Trad. P. Ricœur, *Idées Directrices pour une Phénoménologie*, 1950, Paris, Gallimard, 1982.

- [31] Husserl, E., (posthume) 1954. *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendente Phänomenologie*, Husserliana VI. Trad. G. Granel, *La Crise des Sciences Européennes et la Phénoménologie Transcendantale*, Paris, Gallimard, 1976.
- [32] Kant E, 1781-1790. *Œuvres philosophiques* (F. Alquié ed.), Paris, Gallimard, Bibliothèque de la Pléiade, 1980-1986.
- [33] Kant, E., 1786. *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. Trad. J. Gibelin, *Premiers Principes métaphysiques de la Science de la Nature*, Paris, Vrin, 1971.
- [34] Kant I., 1796-1803. *Opus Postumum*, trad. F. Marty, Paris, Presses Universitaires de France, 1986.
- [35] Keisler, H.J., Kunen, K., Miller, A., Leth, S., 1989. “Descriptive Set Theory over Hyperfinite Sets”, *The Journal of Symbolic Logic*, 54, 4, (1989), 1167- 1180.
- [36] Kitcher, Ph, 1988. “Mathematical Progress”, *PM 1988*, 518-540.
- [37] Kitcher, Ph., 1976. “Hilbert’s epistemology”, *Philosophy of Science*, 42, (1976), 99-115.
- [38] Kitcher, Ph., 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York, Oxford University Press, 1984.
- [39] Kline, M., 1980. *Mathematics : the loss of certainty*, New-York, Oxford University Press, 1980.
- [40] Lautman, A., 1937-1939. *Essai sur l’unité des mathématiques et divers écrits*, (réédition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946), Paris, Bourgeois, 1977.
- [41] Longo, G., 1989. “Some Aspects of Impredicativity”, *Logic Colloquium’87*, (H.D. Ebbinghaus et al., eds), Elsevier, North-Holland, 1989.
- [42] Maddy, P., 1980. “Perception and Mathematical Intuition”, *The Philosophical Review*, 89, (1980), 163-196.
- [43] Maddy P., 1988. “Believing the Axioms I, II”, *The Journal of Symbolic Logic*, 53, 2, (1988), 481-511 ; 53, 3, (1988), 736-764.
- [44] Maddy P., 1989. “The Roots of Contemporary Platonism”, *The Journal of Symbolic Logic*, 54, 4, (1989), 1121-1144.
- [45] MNS, 1989. *La mathématique non-standard* (H. Barreau, J. Harthong, eds.), Paris, Éditions du CNRS.
- [46] Nelson, E., 1977. “Internal Set Theory”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83, 6, (1977).
- [47] Nelson, E., 1986. *Predicative Arithmetic*, Princeton University Press, 1986.
- [48] Parikh, C., 1991. *The Unreal Life of Oscar Zariski*, Cambridge, MA, Academic Press, 1991.
- [49] Peiffer-Reuter R., 1989. “L’infini relatif chez Veronese et Natorp. Un chapitre de la préhistoire de l’analyse non-standard”, *MNS 1989*, 117-142.

- [50] Petitot, J., 1979a. “Infinitesimale”, *Enciclopedia Einaudi*, VII, 443-521, Turin, Einaudi, 1979.
- [51] Petitot, J., 1979b. “Locale/Globale”, *Enciclopedia Einaudi*, VIII, 429-490, Turin, Einaudi, 1979.
- [52] Petitot, J., 1985a. *Les Catastrophes de la Parole. De Roman Jakobson à René Thom*, Paris, Maloine, 1985.
- [53] Petitot, J., 1985b. *Morphogenèse du Sens. Pour un Schématisme de la Structure*, Paris, Presses Universitaires de France, 1985.
- [54] Petitot, J., 1987. “Refaire le Timée. Introduction à la philosophie mathématique d’Albert Lautman”, *Revue d’Histoire des Sciences*, XL, 1, (1987), 79- 115.
- [55] Petitot, J., 1989a. “Rappels sur l’Analyse non standard”, *MNS 1989*, 187-209.
- [56] Petitot, J., 1989b. “Actuality of Transcendental Aesthetics for Modern Physics”, *1830-1930, A Century of Geometry*, (L. Boi, D. Flament, J.M. Salanskis, éd.), Springer, Lecture Notes in Physics 405, 1992, 273-304.
- [57] Petitot, J., 1989c. “Modèles morphodynamiques pour la Grammaire cognitive et la Sémiotique modale”, *Recherches Sémiotiques/ Semiotic Inquiry*, 9, 1-2-3, (1989), 17-51.
- [58] Petitot, J., 1990a. “Logique transcendantale, Synthétique a priori et Herméneutique mathématique des objectivités”, *Fundamenta Scientiæ*, (numéro en l’honneur de L. Geymonat), 10, 1, (1990), 57-84.
- [59] Petitot, J., 1990b. “Le Physique, le Morphologique, le Symbolique. Remarques sur la Vision”, *Revue de Synthèse*, 1-2, (1990), 139-183.
- [60] Petitot, J., 1990c. “Premiers Principes Métaphysiques d’une Science de la Forme”, *Colloque de Cerisy autour de la Critique de la Faculté de Juger*, (à paraître).
- [61] Petitot, J., 1991a. “Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale”, *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, (G. Granel, ed.), 213-282, Mauvezin, Editions TER.
- [62] Petitot, J., 1991b. *Physique du Sens*, Éditions du CNRS, Paris, 1991.
- [63] Petitot, J., 1991c. *La philosophie transcendantale et le problème de l’objectivité*, Entretiens du Centre Sèvres, (père F. Marty ed.), Paris, Editions Osiris, 1991.
- [64] Petitot, J., 1992. “L’objectivité du continu et le platonisme transcendantal”, *Document du CREA*, Paris, École Polytechnique, 1992.
- [65] PM, 1988. “Philosophie des mathématiques” (P. Kitcher, ed.), *Revue Internationale de Philosophie*, 42, 167, (1988).
- [66] Quine, W. V. O., 1948. “On what there is”, repris dans *From a Logical Point of View*, Cambridge, Harvard University Press, 1961.
- [67] Quine, W. V. O., 1960. *Word and Object*, Cambridge, The MIT Press, 1960.
- [68] Quine, W. V. O., 1969. “Existence and Quantification”, *Ontological Relativity and other Essays*, 91-113, New-York, London, Columbia University Press, 1969.

- [69] Reinhardt, W.N., 1974. "Remarks on reflection principles, large cardinals and elementary embeddings", *Axiomatic set theory*, (T.J. Jech, ed.), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 13, Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1974, 189-205.
- [70] Resnik, M.D., 1985. "How Nominalist is Hartry Field's Nominalism?", *Philosophical Studies*, 47, (1985), 163-181.
- [71] Resnik, M.D., 1988. "Mathematics from the Structural Point of View", *PM 1988*, 400-424.
- [72] Robinson, A., 1965. "Formalism 64", *Proceeding of the International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Jerusalem 1964, Amsterdam, North-Holland, 1965.
- [73] Robinson, A., 1979. *Selected Papers* (Keisler, H.J., Körner, S., Luxemburg, W.A.J., Young, A.D., eds.), New Haven, Yale University Press, 1979.
- [74] Salanskis, J.-M., 1989. "Le Potentiel et le Virtuel", *MNS 1989*, 275-303.
- [75] Salanskis, J. M., 1991. *L'Herméneutique formelle : L'Infini-Le Continu-L'Espace*, Paris, Éditions du CNRS, 1991.
- [76] Shanker, S.G., 1987. *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press, 1987.
- [77] Shapiro, S., 1983. "Mathematics and Reality", *Philosophy of Science*, 50, (1983), 523-548.
- [78] Sieg, W., 1985. "Fragments of Arithmetic", *Annals of Pure and Applied Logic*, 28, (1985), 33-71.
- [79] Sieg, W., 1988. "Hilbert's Program Sixty Years Later", *The Journal of Symbolic Logic*, 53, 2, (1988), 338-348.
- [80] Simpson, S.G., 1985a. "Friedman's Research on Subsystems of Second order Arithmetic", *Harvey Friedman's Research in the Foundation of Mathematics* (Harrington, L., Morley, M., Scedrov, A., Simpson, S.G., eds.), 432-446, Amsterdam, North-Holland, 1985.
- [81] Simpson, S.G., 1985b. "Reverse Mathematics", *Recursion Theory*, (Nerode, A., Shore, R., eds.), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 43, 461-471, Providence, American Mathematical Society, 1985.
- [82] Simpson, S.G., 1988. "Partial Realizations of Hilbert's Program", *The Journal of Symbolic Logic*, 53, 2, (1988), 349-363.
- [83] Sinaceur, H., 1991. *Corps et Modèles*, Paris, Vrin, 1991.
- [84] Smith, B. (ed.) 1982. *Parts and Moments. Studies in Logic and Formal Ontology*, Philosophia Verlag, 1982.
- [85] Smorynski, G., 1980. "Some rapidly growing functions", *The Mathematical Intelligencer*, 2, 3, (1980), 149-154.

- [86] Soulez, A., 1990. “La Structure-miroir de la pictorialité de la pensée : ou Kant et les jeux de langage chez Wittgenstein”, 1790-1990. *Le destin de la philosophie transcendantale*, Colloque de Cerisy (à paraître).
- [87] Vuillemin, J., 1955. *Physique et Métaphysique kantienne*, Paris, Presses Universitaires de France, 1955.
- [88] Wang, H., 1987. *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge, The MIT Press, 1987.
- [89] Weyl, H., 1918. *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig, Veit, (trad. anglaise Lanham, University Press of America, 1987).
- [90] Willard, D., 1984. *Logic and the Objectivity of Knowledge*, Ohio University Press, 1984.
- [91] Wright, C., 1988. “Why Numbers can believably be : a Reply to Hartry Field”, *PM* 1988, 425-473.
- [92] Yourgrau, P., 1989. “Review Essay : Reflections on Kurt Gödel”, *Philosophy and Phenomenological Research*, 1, 2, (1989), 391-408.