Pour l'hommage du 17 février 2014 à l'ENS

Jean Cavaillès et le Continu

Jean PETITOT [*]

1 Introduction

Je remercie beaucoup les organisateurs de cette rencontre, et en particulier Jacques Bouveresse, pour leur invitation. Il est pour moi très émouvant d'être ici dans la mesure où Jean Cavaillès a été pour moi un maître et un idéal en philosophie des mathématiques et aussi parce que je partage sa culture protestante.

Je vais parler de philosophie des mathématiques et plus précisément de *Transfini et Continu*. Dans cet ouvrage, Cavaillès aborde plusieurs problèmes et je retiendrai ici trois d'entre eux.

1. Le problème du continu et l'insuffisance de son arithmétisation à la Dedekind.
2. La théorie des ensembles constructibles de Gödel.
3. La nécessité de concilier la permanence de la vérité objective et le devenir de la dialectique historique en mathématique.

Je commence par ce dernier point qui repose sur une conception *évolutionniste* de l'intuition. Je vais retrouver à son propos un certain nombre de choses déjà exposées par Gerhard Heinzmann.

2 Intuition et Histoire

La conception de l'intuition que l'on trouve chez Cavaillès est particulièrement intéressante. Il part de Kant, de la problématique centrale du schématisme et de la construction de concept, mais pour en *historiciser* le contenu. Cavaillès fait partie de ces philosophes qui, comme les néo-kantiens de Marburg, ou Antonio Banfi, ou encore Ferdinand Gonseth, ont cherché à historiciser Kant sans pour autant l'hegelianiser. Comme Hourya Sinaceur y a insisté,

[*]EHESS & CREA.

> "l'opposition de l'histoire [héritée de Léon Brunschvicg] à la logique marquera l'itinéraire de Cavaillès."[1].

L'*autonomie* des mathématiques si chère à Cavaillès est inséparable d'"un devenir historique original", interne et intrinsèque. Sa thèse (déjà citée par Heinzmann) est que :

> "L'intuition dans sa quiddité progresse parallèlement à l'enchaînement dialectique des concepts" (p. 273).[2]

Cela signifie que l'intuition *n'est pas donnée* en tant qu'"irréductible", passive et originaire, mais qu'elle est elle-même évolutive, historique au sens d'une temporalité évolutionniste. Il n'y a pas d'absolu initial. Cavaillès développe ainsi l'idée particulièrement riche d'une *actualisation continue* de l'intuition, l'idée d'une "superposition intuitive".

Une telle thèse exige évidemment une redéfinition de l'intuition. Pour Cavaillès

> "elle [l'intuition] n'est que la manifestation pour la conscience empirique d'une indépendance relative des méthodes et des théories" (p. 273),
>
> "Intuitif est synonyme de conscience effective (ou effectuante), transcendantal de constitutif (ou constituant), relativement à un système conceptuel donné". (p. 274, cf. l'exposé de G. Heinzmann).

Le conceptuel *s'implique* donc dans l'intuitif et c'est pourquoi la solution d'un problème est à même de réactualiser l'intuition. On comprend dès lors pourquoi chez Cavaillès l'intuition, dans la mesure même où elle est réactualisable, peut accompagner la dialectique du concept et pourquoi, en ce sens,

> "le lien entre cette superposition intuitive et la dialectique du concept reste le problème fondamental de la philosophie mathématique".

On voit ainsi comment les deux ordres transcendantaux kantiens hétérogènes de l'intuition et du concept se retrouvent *historicisés* :

- l'intuition (l'esthétique transcendantale) s'historicise en superposition intuitive réactualisée, intuition liée à des pratiques effectives et non plus à une donation originaire à la Husserl ;
- la catégorialité (l'analytique transcendantale) s'historicise en dialectique du concept.

1. Sinaceur [1994], p. 11.
2. Les références à *Transfini et Continu* dans le recueil *Philosophie mathématique* de 1962 seront faites dans le texte.

C'est en ce sens que Cavaillès développe ce que j'appelle un *transcendantalisme évolutionniste* adaptant à une philosophie transcendantale des mathématiques l'affirmation que les a posteriori de la phylogenèse sont des a priori de l'ontogenèse.

La conquête majeure effectuée par Cavaillès dans cette perspective est alors celle d'une historicisation du *schématisme* et du processus de *construction de concept* qui, chez Kant, relient les ordres hétérogènes de l'intuition et du concept.

(i) Le schématisme constitue une inspiration fondamentale pour Cavaillès car *c'est lui qui fait de l'objet le corrélat de la méthode*, le corrélat d'actes réglés, et permet de rompre avec les hypostases platoniciennes d'objets transcendants.

(ii) Mais Cavaillès reprend aussi, et surtout, le concept de construction qui approfondit le schématisme et reformule l'affirmation kantienne que, dans la construction (exemple du triangle)

> "je dois sortir du concept pour aller à des propriétés qui ne se trouvent pas dans le concept, mais qui pourtant lui appartiennent" (*Critique de la Raison pure*, Pléiade p. 1301, A 718 / B 746),

cet acte de "sortir" du concept (*überhinausgehen*) se révélant être la condition de possibilité des *jugements synthétiques*, "se trouver dans le concept" correspondant aux jugements analytiques alors que "ne pas se trouver dans le concept tout en lui appartenant" correspond aux jugements synthétiques.

L'opposition analytique / synthétique renvoie ainsi chez Kant, par rapport aux contenus conceptuels, à une opposition intériorité / extériorité. Cavaillès reprend cette thèse centrale. Chez lui la "construction de l'intuition" concilie la "domination" conceptuelle avec une multiplicité d'objets

> "qui lui procure [à l'objet] une sorte d'indépendance par rapport à tout contenu actuel de pensée" (p. 271).

Il y a bien comme chez Kant une "extériorité". Mais chez Kant, et Cavaillès le critique sur ce point, il y a en plus

> "l'idée d'une connaissance intuitive où multiplicité et extériorité *subsistent par essence*",

et par conséquent l'idée

> "d'une construction intuitive, qui soumet cette extériorité à l'unité sans l'abolir comme telle, parce qu'elle reste à la fois à l'intérieur et à l'extérieur du concept" (p. 272).

Pour *historiciser* cette conception kantienne, ainsi parfaitement reformulée en approfondissant la thèse de Brunschvicg que

> "la théorie de la vérité n'est pas extérieure au processus historique de la connaissance",

il faut

> "que la référence à l'intuition suppose *une relativité* de cette intuition à d'autres schèmes, d'autres enchaînements réglés" (p. 272).

Ainsi, à chaque progrès mathématique, la "zone intuitive" se trouve constituée des systèmes de schèmes qui, à un étage inférieur, opèrent dans les formalismes précédents.

Cavaillès trouve donc dans l'historicisation de Kant les sources d'une conception *pratique* (pragmatique même) des mathématiques en tant *qu'activité constructive effective* se distinguant de l'analyse conceptuelle purement logique. Hourya Sinaceur a bien insisté sur cet aspect des choses. Et c'est précisément en arrivant à historiciser le transcendantal que Cavaillès peut concilier vérité objective et valeur historique car

> "ce qui marque l'histoire est la soumission du transcendantal à ses étapes" (p. 274).

Et l'histoire transcendantale "dépasse l'histoire empirique".

> "C'est leur *développement dialectique* [celui des liaisons intellectuelles schématisantes] qui assure à la fois le mouvement de celles-ci et [...] la permanence de leur validité" (p. 274).

3 Le problème du continu

Se référant à Leibniz pour qui, on le sait, le continu était un "labyrinthe", Cavaillès considère que

> "le problème du continu reste, comme au temps de Leibniz, une "croix" ou la croix de la philosophie mathématique" (p. 255).

Et il insiste sur le fait que l'arithmétisation à la Dedekind reste très insuffisante dans la mesure où il y demeure *une intuition géométrique sous-jacente*

> "fondant l'originalité et l'unité du représenté par rapport aux relations arithmétiques accidentellement réunies pour lui dans un enchaînement extrinsèque" (p. 255).

Il existe donc en quelque sorte *un "excès" intuitif* sur la maîtrise et la "domination" symbolique.

Cavaillès est très clair sur ce point anti-logiciste puisqu'il va jusqu'à affirmer que

> "*l'imagination spatiale* reste aussi bien un *guide* pour l'enrichissement des raisonnements qu'une *garantie* pour leur évidence".

Heuristique, "garantie", "évidence", on retrouve ici une thèse récurrente de tous les continuistes (ou synéchologistes) aristotéliciens de Herbart à Thom en passant par Peirce, Poincaré, Enriques, Weyl, etc. Selon Cavaillès, l'espoir de Cantor et Dedekind de pouvoir

> "éliminer le géométrique de l'analyse grâce à la notion d'ensemble" (p. 255)

et de ramener l'espace et le temps au nombre n'a pas été réalisé.

Cavaillès pointe très bien la difficulté centrale.

1. "L'arbitraire de la loi d'engendrement [de la plupart] des irrationnels" (p. 255).
2. "La séparation apparue dès les premiers travaux de Cantor entre théorie cardinale et théorie ordinale".

Les deux problèmes sont liés. Si la puissance du continu $2^{\aleph_\alpha}$ "reste inconnue", c'est parce qu'il n'y a pas de loi d'engendrement des réels et que

> "c'est la notion [non effective, non constructible] du *quelconque* qui donne sa base logique à l'unité de l'ensemble et à la réalité de sa puissance" (p. 256).

Pour reprendre l'expression de Solomon Feferman, on pourrait dire que la question de la valeur de $2^{\aleph_\alpha}$ est "inherently vague".

Cavaillès avait une conscience très nette du fait que la définition des ordinaux est ZF-absolue alors que celle des cardinaux ne l'est pas du tout, et même que ZF et ZFC laissent l'arithmétique des cardinaux maximalement *sous-déterminée*. En termes contemporains, postérieurs au forcing de Cohen, cette indétermination est magnifiquement mise en lumière par le théorème d'Easton.

Dans un univers modèle de ZFC, soit $F(\alpha)$ la fonction définie sur les ordinaux α telle que $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{F(\alpha)}$. On démontre les deux propriétés de base suivantes :

(i) F est monotone croissante : si $\alpha \leq \beta$ alors $F(\alpha) \leq F(\beta)$.

(ii) Loi de König : $cf\left(\aleph_{F(\alpha)}\right) > \aleph_\alpha$, où l'on définit la *cofinalité* $cf(\alpha)$ d'un ordinal α comme le plus petit cardinal χ tel qu'il existe un sous-ensemble X de cardinal χ qui soit cofinal dans α (i.e. $\operatorname{Sup} X = \alpha$). On dit que le cardinal χ est *régulier* si $cf(\chi) = \chi$.

Si l'Hypothèse généralisée du continu (HGC) est vérifiée, la loi de König est évidente car alors $F(\alpha) = \alpha + 1$. Or tout cardinal de la forme $\aleph_{\alpha+1}$ est régulier et donc $cf\left(\aleph_{\alpha+1}\right) = \aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha$.

Théorème d'Easton. *Pour les* $\aleph_\alpha$ réguliers *on peut imposer dans ZFC la loi* $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{F(\alpha)}$ *pour (pratiquement)*[3] *toute fonction* F *satisfaisant les propriétés de base (i) et (ii).*$\square$

Cavaillès explique fort bien comment les $\aleph_n$ sont définis comme cardinaux des classes successives d'ordinaux ($\aleph_0 = \#\{\text{ordinaux finis}\}$, $\aleph_1 = \#\{\text{ordinaux dénombrables}\}$, etc.) et que tout le problème est de *positionner* les $2^{\aleph_n}$ dans la série des $\aleph_n$:

> "La difficulté fondamentale devant laquelle se trouvait placé Cantor était évidemment de préciser le rapport entre ces deux séries de puissances" (p. 258).

L'HGC (hypothèse généralisée du continu : $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$) est la solution la plus simple.

> "Ainsi se trouvait unifié l'édifice des ensembles".

À mon avis Cavaillès n'insiste pas assez sur les raisons, bien plus profondes que celles de simple commodité, qui justifient l'HC. Elles sont liées à des théorèmes allant de celui de Cantor-Bendixson jusqu'à celui de Souslin (que Cavaillès connaissait) qui affirment qu'elle est vraie pour des classes entières de sous-ensembles de réels. Ces résultats ont été par la suite considérablement approfondis par la théorie descriptive des ensembles.

4 La théorie descriptive des ensembles

Dans la théorie descriptive des ensembles on travaille sur $\mathbb{R}$ ou, plus communément, sur $\mathcal{N} = \mathbb{N}^\mathbb{N}$ (ou $\mathcal{N} = \omega^\omega$), ou encore sur l'ensemble de Cantor $\mathcal{C} = 2^\mathbb{N}$, qui sont tous des espaces polonais $\mathcal{X}$ (i.e. métriques, séparables et complets) parfaits (i.e. fermés sans point isolé) et on définit dans ces $\mathcal{X}$ des classes naturelles de sous-ensembles dont on cherche à démontrer la "régularité".

On commence par la hiérarchie des *boréliens* en partant des *ouverts* et en itérant la complémentation et les "projections" de produits avec $\mathbb{N}$, $\mathcal{X} \times \mathbb{N} \to \mathcal{X}$. Si $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathbb{N}$ (autrement dit, si P est une famille

3. "Pratiquement" renvoie à des conditions techniques peu contraignantes.

de $P_n \subseteq \mathcal{X}$ paramétrés par des n de $\mathbb{N}$), on considère $\exists^\omega P = \exists^{\mathbb{N}} P = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists n\ P(x,n)\}$. On note Σ^0_1 les ouverts et Π^0_1 les fermés et on définit ensuite récursivement les classes :

$\Pi^0_n = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Sigma^0_n\}$, $\Sigma^0_{n+1} = \exists^\omega \neg\Sigma^0_n = \exists^\omega \Pi^0_n$, $\Delta^0_n = \Pi^0_n \cap \Sigma^0_n$.

On obtient ainsi une hiérarchie *stricte* :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Sigma^0_n & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \Delta^0_n & & & & \Delta^0_{n+1} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \Pi^0_n & & \end{array}$$

On définit ensuite la hiérarchie des *projectifs* (dite aussi hiérarchie de Lusin (1925)) en admettant, en plus, des projections par applications *continues*. En fait, comme tout espace polonais $\mathcal{X}$ est l'image d'une surjection continue de source $\mathcal{N}$, $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$, il suffit de considérer des projections $\mathcal{X} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X}$, notées $\exists^{\mathcal{N}}$. On obtient ainsi une nouvelle hiérarchie, commençant avec la classe $\Sigma^1_1 = \exists^{\mathcal{N}} \Pi^0_1$ et continuant avec les classes :

$\Pi^1_n = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Sigma^1_n\}$, $\Sigma^1_{n+1} = \exists^{\mathcal{N}} \neg\Sigma^1_n = \exists^{\mathcal{N}} \Pi^1_n$, $\Delta^1_n = \Pi^1_n \cap \Sigma^1_n$.

Par exemple, $P \subseteq \mathcal{X}$ est Σ^1_1 s'il existe un fermé $F \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$ tel que :

$P(x) \Leftrightarrow \exists\alpha\ F(x,\alpha)$.

De même, $P \subseteq \mathcal{X}$ est Σ^1_2 s'il existe un ouvert $G \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ tel que :

$P(x) \Leftrightarrow \exists\alpha\ \forall\beta\ G(x,\alpha,\beta)$, etc.

On démontre qu'on obtient aussi une hiérarchie *stricte*.

Le lien entre ces deux hiérarchies, boréliens et projectifs, est établi par le :

Théorème de Souslin. $B = \Delta^1_1$ *(où B est la classe de tous les boréliens (i.e. la plus petite classe contenant les ouverts et fermée par complémentation et union dénombrable) ($B \subset \Delta^1_1$ est facile à montrer).*$\square$

Ce théorème remarquable est un *principe de construction* puisqu'il affirme que l'opération (compliquée) de projection continue peut être ramenée à une itération d'opérations plus simples d'union et de complémentation. Il en va de même du :

Théorème de Sierpinski. *Tout Σ^1_2 est une union de $\aleph_1$ boréliens.*$\square$

Il existe en analyse et en topologie des Π^1_n et des Σ^1_n *stricts* dont la définition est tout à fait naturelle. Considérons par exemple l'espace fonctionnel $C[0,1]$ des fonctions réelles sur $[0,1]$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On montre que le sous-ensemble des $f \in C\,[0,1]$ qui sont différentiables est un vrai Π^1_1 et que le sous-ensemble des $f \in C\,[0,1]$ qui satisfont le théorème de la moyenne est un vrai Π^1_2 (Woodin). D'autres exemples sont fournis par les compacts $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$. Pour $n \geq 3$, l'ensemble des $K \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ tels que K soit connexe par arcs est un vrai Π^1_2 (Becker).

L'école française (Borel, Baire, Lebesgue) et l'école polonaise (Souslin, Lusin, Sierpinski) ont commencé l'analyse des propriétés de ces ensembles particuliers. Ils ont obtenu tout un ensemble de théorèmes sur leur *régularité* et leur *représentation*. "Régularité" signifie ici par exemple être mesurable Lebesgue, ou avoir la propriété de l'ensemble parfait (i.e. être dénombrable ou posséder sinon un sous-ensemble parfait), ou encore avoir la propriété de Baire (i.e. être approximable par un ouvert au sens où il existe un *ouvert* P^* tel que la différence symétrique $P\Delta P^* = (P - P^*) \cup (P^* - P)$ est *maigre*, i.e. réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses).

L'un des premiers théorèmes de régularité est le :

Théorème de Cantor-Bendixson. *Si A est fermé alors A est décomposable de façon unique en une somme disjointe $A = P + S$ où P est* parfait *et S* dénombrable.$\square$

Comme tout espace polonais parfait P est isomorphe à $\mathcal{N}$ et donc de cardinal $\#P = 2^{\aleph_0}$, cela montre que *l'hypothèse du continu HC est vraie pour les fermés.*

Un autre grand théorème classique de régularité est le :

Théorème de Souslin. *Les "analytiques" (Σ^1_1) possèdent la propriété de l'ensemble parfait et HC est donc vraie pour les Σ^1_1.*$\square$

On montre de même que les Σ^1_1 ont la propriété de Baire et que les Σ^1_1 et les Π^1_1 sont mesurables. Mais *on ne peut pas* montrer dans ZF que, par exemple, les Δ^1_1 et les Σ^1_2 ont la propriété de l'ensemble parfait. De même, on ne peut pas montrer dans ZFC que les Δ^1_2 ont la propriété de Baire. Il s'agit là d'un problème fondamental. Il existe de nombreuses propriétés "naturelles" qui sont *au-delà* des ressources démonstratives de ZF et ZFC. Cela montre que les axiomes de ces théories *ne sont pas suffisamment contraignants.* L'appartenance, les opérations logiques, les opérations ensemblistes comme les projections, les produits, etc., les relations bien fondées, l'ensemble $\mathbb{N}$ sont ZF-absolus au sens où ils sont définis par la même formule dans tous les modèles M de ZF. Mais en revanche $\mathcal{N}$, $\mathbb{R}$, $Card(x)$, $x \to \mathcal{P}(x)$, *ne sont pas* ZF-absolus. Ces notions varient considérablement suivant les modèles d'univers M considérés et il faut donc *classer* ces modèles.

Face à une telle situation, deux stratégies opposées sont envisageables. Elles ont toutes deux été introduites par Gödel et l'on peut donc considérer que c'est bien en connaissance de cause que celui-ci a en définitive clairement choisi la seconde. Ce sont les stratégies que nous appellons respectivement "minimaliste-constructive" VS "maximaliste-transcendante".

5 L'univers des constructibles $V = L$

La première stratégie consiste à *restreindre* l'univers V. C'est la stratégie gödelienne $V = L$ de l'univers L des constructibles (Gödel 1938).

Une façon simple de définir L est de remplacer, dans le processus de construction de la hiérarchie cumulative de V au moyen de $x \rightarrow \mathcal{P}(x)$, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(x)$ — qui n'est pas ZF-absolu — par un ensemble plus petit $\mathcal{D}(x) = \{y \subseteq x \mid y \text{ est élémentaire}\}$ [4] — qui est, lui, ZF-absolu. On définit alors L par une induction transfinie sur la classe des ordinaux On (qui est ZF-absolue) : $L_0 = \emptyset$, $L_{\xi+1} = \mathcal{D}(L_\xi)$, $L_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi$ si λ est un ordinal limite et, finalement, $L = \bigcup_{\xi\in On} L_\xi$. En utilisant le fait que la construction de L est ZF-absolue, on montre alors (Gödel 1938-1940) que si $V = L$ on peut définir *un bon ordre global* sur L, ce qui est une forme globale extrêmement forte d'AC. Gödel a également montré que dans ZF on a $V = L \vdash HCG$.

L est en fait *le plus petit modèle intérieur* de l'univers $\mathcal{U}$ considéré. Cela signifie :

(i) $On \subset L$,

(ii) L est transitif : si $y \underset{\mathcal{U}}{\in} x \underset{L}{\in} L$, alors $y \underset{L}{\in} L$,

(iii) $(L, \in|_L)$ est un modèle de ZF.

L peut être défini dans $\mathcal{U}$ par un *énoncé* $L(x) =$"x est constructible" qui est *indépendant* de $\mathcal{U}$ (i.e. ZF-absolu).

On montre que dans L on a $\mathcal{N} \subseteq L$ (i.e. tout sous-ensemble de $\mathcal{N}$ est constructible). [5] Cela implique qu'il existe une bijection $\rho : \mathcal{N} \leftrightarrow \aleph_1$ telle que la relation $\alpha \leq_L \beta \Leftrightarrow \rho(\alpha) \leq \rho(\beta)$ soit un bon ordre sur $\mathcal{N}$ de classe Δ^1_2 ! Comme d'après un théorème de Fubini un tel bon ordre ne peut pas être mesurable il existe donc dans L des Δ^1_2 non mesurables ! Cette propriété est *la plus stricte* qui soit consistante avec ZF. En effet, un théorème de Kunen et Martin implique qu'un bon ordre Σ^1_1 sur $\mathcal{N}$ devrait être de longueur dénombrable. Par ailleurs, s'il existe un bon ordre $<$ sur $\mathcal{N}$ qui est Σ^1_2, alors d'après un théorème de Schönfield l'ordinal de $<$ est $< \aleph_2$ et l'HC est donc valide.

Ces résultats sont fondamentalement *contre intuitifs*. Ils proviennent du fait que l'AC, qui implique l'existence d'ensembles très compliqués et très irréguliers, reste vrai dans L. L'axiome $V = L$ les force par conséquent à exister dans la hiérarchie projective et donc dans des classes d'ensembles pourtant relativement "simples".

4. Une partie y de x est élémentaire si elle est définissable par une formule du premier ordre de la structure $< x, \in, \{s | s \in x\} >$.

5. Cf. Moschovakis [1980], pp. 486 sq.

Cavaillès commente le théorème de Gödel sur le fait que l'univers des constructibles $V = L$ constitue un modèle de l'AC et de l'HC. Il explique extrêmement bien que

> "le principe est de substituer à l'indétermination radicale de l'ensemble des parties d'un ensemble, une édification progressive de cet ensemble en supposant formalisées toutes les définitions possibles des parties" (p. 268),

il résume le modèle L_{ω_ω} : $L_0 = \emptyset$, $L_1 = \mathcal{P}_{\text{const}}(L_0)$, $L_2 = \mathcal{P}_{\text{const}}(L_1)$, $L_{\omega_0} = \bigcup_{\alpha<\omega_0} L_\alpha$, etc., et il évoque le

Théorème. *Si $x \in L_{\omega_\alpha}$ son ordre (i.e. le μ tel que $x \in L_{\mu+1} - L_\mu$) est $\leq \omega_{\alpha+1}$.*□

- AC est valide dans L car les éléments de tous les ensembles sont énumérés et on n'a qu'à y choisir les *premiers* éléments.
- HC est valide dans L car $\#L_{\omega_\alpha} = \aleph_\alpha$ par construction et donc les parties de L_{ω_α} ont pour cardinal $2^{\aleph_\alpha}$. Mais d'après le théorème ci-dessus, chaque partie est d'ordre $\leq \omega_{\alpha+1}$. Donc l'ensemble des parties de $L_{\omega_\alpha} \in L_{\omega_{\alpha+1}}$ et donc son cardinal est $\leq \aleph_{\alpha+1}$. Par conséquent $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+1}$, mais d'après Cantor $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$ et donc en définitive $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+1}$.

Il est intéressant de noter que Cavaillès, pour qui

> "on ne saurait exagérer l'importance de ce résultat",

considère *qu'il arrête l'histoire*.

> "Il [ce résultat] achève l'unification vainement poursuivie par Cantor entre la théorie cardinale et la théorie ordinale des ensembles" (p. 270).

Une telle affirmation est étonnante car, dans ce même article *Transfini et Continu*, Cavaillès insiste précisément, comme tout bon évolutionniste, sur l'ouverture historique *indéfinie* des problèmes. Et l'histoire a effectivement continué : le modèle des constructibles de Gödel n'a pas du tout été la fin de l'histoire, et cela à cause de Gödel lui-même qui a inversé sa stratégie. Et, qui plus est, les raisons pour lesquelles Gödel a accompli ce switch sont des raisons parfaitement "cavaillésiennes", à savoir une *intuition* en excès par rapport à la domination symbolique, une intuition qui continuait à guider heuristiquement Gödel dans

> "l'enrichissement des procédés et le développement des raisonnements".

L'intuition ici en jeu est celle de la *régularité du continu*. On sait que Gödel considérait que les axiomes de ZFC étaient incomplets et qu'il fallait des axiomes supplémentaires justifiés de façon évidente par l'intuition, comme des sortes d'hypothèses "physiques" "s'imposant à nous comme étant vraies". C'est ce qu'il a fait pour le problème du continu, et j'aimerais pour conclure dire un mot de cette histoire mathématique sublime à laquelle le sacrifice à une autre histoire, celle de l'horreur politique, a empêché Cavaillès de participer.

6 Les grands cardinaux et l'hypothèse du continu

L'univers des constructibles étant ZF-absolu et en même temps riche car il itère ses constructions sur la classe On de tous les ordinaux qui, bien que ZF-absolue, est pourtant hautement non constructive, il peut paraître "achever" l'histoire cantorienne. Mais il n'en est rien car, comme nous l'avons vu, les propriétés du continu y deviennent non intuitives dans la mesure où la plupart des projectifs y sont "pathologiques". C'est pourquoi Gödel a considéré qu'il était par conséquent légitime de changer complètement de stratégie et de chercher des axiomes *supplémentaires* "naturels" pour ZFC.

Plusieurs stratégies sont envisageables :

(i) Faire une récurrence transfinie de théories $T_{\alpha+1} = T_\alpha +$ consistance T_α en partant de ZF ou ZFC.

(ii) Postuler des bonnes propriétés de régularité des projectifs, et donc du continu. Pour des raisons méta-mathématiques, celles-ci ne sont plus démontrables dans ZFC dès le niveau 2. Quel est donc le "prix" en termes "d'ontologie" ensembliste d'une bonne théorie du continu ?

(iii) *Rigidifier* la théorie du continu, [6] i.e. chercher à quelles conditions *on ne peut plus modifier* les propriétés de $\mathbb{R}$ par forcing. [7]

Ces trois stratégies convergent dans l'introduction d'axiomes d'existence de *grands cardinaux*.

6. Cf. le Séminaire Bourbaki de P. Dehornoy [1988].

7. Rappelons la définition du forcing de Cohen. On veut construire des sur-modèles M' d'un modèle M de ZF ou de ZFC (i.e. M est un modèle intérieur de M') possédant des propriétés désirées. Pour ce faire, on se donne des ensembles *ordonnés* C de conditions à satisfaire. Un ensemble de condition C est dense si tout p appartenant à C admet un minorant.

On définit alors des classes *génériques* G de conditions. G est générique si (i) $p \in G$ et $p < q \Rightarrow q \in G$, (ii) $\forall p, q \in G$, $\exists$ minorant $r < p$, $r < q$ tel que $r \in G$, (iii) $\forall$ ensemble dense de conditions, $\exists p \in C$ tel que $p \in G$.

Le théorème du forcing dit qu'il existe $\mathcal{A} = M[G]$ modèle de ZF tel que (1) M soit un modèle intérieur de $\mathcal{A}$, (2) G est un *ensemble* dans $\mathcal{A}$, (3) Si $\mathcal{A}'$ est un autre modèle de ZF statisfaisant (1) et (2), alors il existe $j : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}'$ tel que $j(\mathcal{A})$ soit un modèle intérieur de $\mathcal{A}'$ et $j|_M = Id(M)$, (4) $\mathcal{A}$ est unique à isomorphisme près (les isomorphismes étant l'identité sur M).

Le rejet dogmatique, pour raison d'antiplatonisme, d'une "ontologie" ensembliste forte a fait que ces stratégies n'ont été que fort peu étudiées philosophiquement, voire même occultées . Elles sont pourtant essentielles car elles montrent qu'une des conséquences des théorèmes de limitation interne comme le théorème d'incomplétude de Gödel est précisément qu'une "bonne" théorie du continu exige une ontologie ensembliste en quelque sorte *maximale* (et pas du tout minimale). Comme l'a fort bien noté Patrick Dehornoy :

> "les propriétés mettant en jeu des objets aussi "petits" que les ensembles de réels (du point de vue de la cardinalité et de celui du nombre minimal d'itérations de l'opération "passer à l'ensemble des parties" nécessaires à leur construction à partir de l'ensemble vide) sont liées à d'autres propriétés mettant en jeu des ensembles "immenses" qui paraissent très éloignés de ces mêmes points de vue."[8]

Il existe de très nombreux théorèmes montrant que le coût d'une "bonne" théorie du continu est très élevé. Avant de l'expliciter dans le cas des propriétés dites de détermination, donnons l'exemple de deux théorèmes particulièrement frappants de Robert Solovay. Soit CM l'axiome d'existence d'un cardinal mesurable (cf. plus bas pour une définition). Le premier théorème est le :

Théorème de Solovay (1969). $ZFC + CM \vdash \forall\Sigma^1_2$ *est "régulier" (i.e. a la propriété de Baire, est mesurable et a la propriété de l'ensemble parfait).*[9]$\square$

L'autre théorème concerne la possibilité d'étendre la mesure de Lebesgue à une mesure μ rendant mesurables *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (ce qui est contradictoire avec l'AC). Pour cela il faut que la puissance du continu $2^{\aleph_0}$ soit très grande — ce qui va radicalement à l'encontre de l'HC.

Théorème de Solovay-Jensen (1967).

(i) $ZFC + CM$ *et* $ZFC + \exists\mu$ *sont des théories equiconsistantes.*

(ii) Si κ *est le plus petit cardinal tel que un* $A \subseteq \mathbb{R}$ *de mesure* $\mu(A) > 0$ *soit l'union de* κ *sous-ensembles de* μ*-mesure nulle (c'est aussi le plus grand* κ *tel que* μ *soit* κ*-additive), alors* $\aleph_0 \leq \kappa \leq 2^{\aleph_0}$ *(trivial),* κ *est faiblement inaccessible (Ulam) et donc* $2^{\aleph_0}$ *l'est également, et* κ *est le* κ*ème cardinal faiblement inaccessible et donc* $2^{\aleph_0}$ *est très grand.*[10]$\square$

Une hypothèse de régularité que l'on a beaucoup étudiée depuis les années 60 dans la mesure où elle implique toutes les autres est celle dite

8. Dehornoy [1988].
9. Cf. Moschovakis [1980], p. 284.
10. Cf. Solovay [1971].

de *détermination*. On considère des jeux infinis à information parfaite sur des ensembles X. Chaque joueur (I et II) choisit à tour de rôle un élément a de X :

$$\begin{array}{llcccccl} I & a_0 & & & a_2 & & & \dots \\ & & \searrow & \nearrow & & \searrow & & \\ II & & a_1 & & & & a_3 & \end{array}$$

A la fin de la partie on obtient une suite $f \in X^{\mathbb{N}}$. Soit alors $A \subset X^{\mathbb{N}}$. On dit que le joueur I (resp. II) *gagne* la partie f du jeu $G = G_X(A)$ associé à A si $f \in A$ (resp. $f \notin A$).

Définition. *On dit que A est* déterminé *(noté* $\mathrm{Det}(A)$ *ou* $\mathrm{Det}\, G_X(A)$*) si l'un des joueurs possède une stratégie gagnante. A est donc déterminé ssi :* $\exists a_0 \forall a_1 \exists a_2 ... (a_0, a_1, a_2, ...) \in A.\square$

Il s'agit d'une forte propriété de "régularité". En effet on montre que $\forall B \subset \mathbb{R}$, $\exists A \subset \mathcal{N}$ tel que A déterminé $\Leftrightarrow B$ a la propriété de Baire, la propriété de l'ensemble parfait et est mesurable.

Le premier théorème liant la détermination et la hiérarchie projective a été le théorème de Gale et Stewart qui généralise celui de Cantor-Bendixson :[11]

Théorème de Gale et Stewart (1953). *Dans ZFC, les fermés A de $X^{\mathbb{N}}$ (i.e. les Π^0_1) sont déterminés.*$\square$

La preuve est élémentaire. Mais dès que l'on monte dans la hiérarchie des boréliens et a fortiori dans la hiérarchie des projectifs, très vite les preuves de détermination deviennent très complexes et, pour les projectifs, exigent des hypothèses *plus fortes que ZFC*.

Le résultat fondamental pour les boréliens, résultat qui a clos une première période de recherche, a été le remarquable et difficile :

Théorème de Martin (1975). $ZFC \vdash$ *les boréliens (i.e. les Δ^1_1) sont déterminés.*$\square$

Ce résultat remarquable est la *limite* de ce que l'on peut obtenir dans ZFC. ZFC ne peut en effet impliquer que les Σ^1_1 soient déterminés, car alors tout Σ^1_1 aurait par exemple la propriété de l'ensemble parfait. Or dans le modèle constructible $V = L$ de ZFC il existe des Σ^1_1 ne possédant pas cette propriété. Il en va de même pour les Π^1_1. En effet la détermination des Π^1_1 implique que tous les Σ^1_2 sont mesurables Lebesgue. Or il existe dans L un bon ordre Δ^1_2 , et donc a fortiori Σ^1_2, sur $\mathcal{N}$. D'après Fubini un tel bon ordre ne peut pas être mesurable.

Pour démontrer des résultats de détermination pour les projectifs au-delà de Δ^1_1, il faut introduire dans ZFC des axiomes d'existence de grands cardinaux. Les plus connus sont les cardinaux *mesurables* introduit par Stan Ulam (avant qu'il ne construise les premiers ordinateurs avec von Neumann).

11. Cf. Grigorieff [1976] et Moschovakis [1980], p. 288.

Définition. *Un cardinal* mesurable *est un cardinal $\chi > \omega$ qui supporte un ultrafiltre libre (i.e. non principal) $\mathcal{U}$ qui est χ-*complet *(i.e. stable par $\bigcap_{\lambda<\chi} X_\lambda$ pour tout $\lambda < \chi$). Il est équivalent de dire que χ supporte une* mesure *μ à valeurs binaires $0, 1$ (avec $\mu(\chi) = 1$), diffuse ($\forall \xi \in \chi(\mu(\{\xi\}) = 0)$) et χ-additive. La correspondance s'établit à travers les équivalences $\mu(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}$ et $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \chi - A \in \mathcal{U}$.*$\square$

Un résultat typique est par exemple un autre théorème de Donald Martin.

Théorème de Martin (1970). *S'il existe χ mesurable alors $Det(\Sigma_1^1)$* .$\square$

D'où comme corollaire le théorème de Solovay (1969) : $ZFC+CM \vdash \Sigma_2^1$ "réguliers".

Théorème de Scott (1961). *L'hypothèse CM (il existe un cardinal mesurable) est fausse dans $V = L$ et l'on a donc $ZFC \nvdash CM$.*$\square$

Un cardinal mesurable χ est très grand. Il est *régulier* (i.e. il n'existe pas de $f : \lambda \to \chi$ avec $\lambda < \chi$ qui soit non bornée), *fortement inaccessible* (i.e. $\forall \lambda < \chi$, $2^\lambda < \chi$) et possède au moins χ cardinaux fortement inaccessibles avant lui.

Il possède une propriété *combinatoire* fondamentale de partition qui est une propriété *à la Ramsey* et qui est cruciale pour la démonstration de Martin.[12] Soit $\chi^{[n]}$ l'ensemble des parties de χ de cardinal n et $\chi^{<\omega} = \bigcup_n \chi^{[n]}$ l'ensemble des parties finies de χ.

Définition. *Une* partition *de $\chi^{[n]}$ est une application $F : \chi^{[n]} \to \lambda$ (les classes d'équivalence sont les fibres de F). On dit alors qu'une partie $I \subseteq \chi$ est F-*homogène *si $I^{[n]}$ est entièrement inclus dans une fibre de F, autrement dit, si $\forall A, B \in I^{[n]}$ $(F(A) = F(B))$. Si $F : \chi^{<\omega} \to \lambda$ est une partition des parties finies de χ, I est F-homogène si $\forall n \forall A, B \in I^{[n]}$ $(F(A) = F(B))$. Par ailleurs, un ultrafiltre $\mathcal{U}$ est dit* normal *s'il satisfait :*

$\forall f \in \chi^\chi \left[f(\xi) < \xi \ \mathcal{U}\text{-p.p.} \Rightarrow \exists \lambda_0 < \chi \ \ (f(\xi) = \lambda_0 \ \mathcal{U}\text{-p.p.})\right]$.$\square$

On montre qu'un cardinal mesurable possède un ultrafiltre normal. On a alors le :

Théorème de Rowbottom (1971). *Si χ est mesurable, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre normal et si F est une partition de χ avec $\lambda < \chi$, alors il existe une partie homogène I de χ telle que $I \in \mathcal{U}$ (et est donc très grande).*$\square$

Plus généralement, on a le :

Théorème. *Si χ est mesurable, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre normal et si pour tout i on se donne une partition $F_i : \chi^{<\omega} \to \lambda$, alors il existe une partie* simultanément *homogène I de χ telle que $I \in \mathcal{U}$.*$\square$

12. Cf. Moschovakis [1980], p. 368.

Quand on monte dans la hiérarchie des projectifs il faut considérablement renforcer les axiomes d'existence d'infinis d'ordre supérieur. La détermination des Δ_2^1 exige déjà des hypothèses plus fortes que l'existence d'un nombre quelconque de cardinaux mesurables. Pour "mesurer" la grandeur des grands cardinaux que l'on introduit, le mieux est d'utiliser les phénomènes associés de *réflexion.*[13] Pierre Cassou-Noguès a insisté sur le rôle que joue la réflexivité en mathématiques chez Cavaillès et Gödel dans leurs rapports délicats et inverses (négatifs pour Cavaillès, positifs pour Gödel) à la phénoménologie husserlienne.

Intuitivement, un phénomène de réflexion signifie que ce qui se passe dans une totalité peut déjà de lire dans une partie stricte de cette totalité.

Définition. *On dit que le cardinal* χ reflète *une relation* $\Phi(x, y)$ *si on a l'implication :*

$\forall\alpha(\in On) < \chi \ [\exists\beta \geq \chi \ \Phi(\alpha, \beta) \Rightarrow \exists\beta^* < \chi \ \Phi(\alpha, \beta^*)]$.$\square$

Soit j un plongement élémentaire $j : M \hookrightarrow M^*$ de modèles de ZFC.[14] On s'intéresse au cas où M^* est un modèle intérieur de M. La réflexion de M dans un de ses propres modèles intérieurs s'identifie à une hypothèse d'existence de grands cardinaux. En effet, si $\alpha \in On(M)$ est un ordinal de M, on a $j(\alpha) \in On(M^*) \subset On(M)$ et, à cause de l'élémentarité de j, $\alpha < \beta \Leftrightarrow j(\alpha) < j(\beta)$. Cela implique $j(\alpha) \geq \alpha$. On montre alors qu'il existe nécessairement un α tel que $j(\alpha) > \alpha$. Soit χ le plus petit de ces α. χ s'appelle *l'ordinal critique* de j. C'est un grand cardinal, qui devient de plus en plus grand au fur et à mesure que M^* se rapproche de M, la limite $M^* = M$ étant *inaccessible* (inconsistante) d'après un théorème de Kunen. En fait on montre que les ordinaux critiques sont exactement les cardinaux mesurables.

Il s'agit bien d'un phénomène de réflexion. Soit en effet $\Phi(\alpha, \chi)$ une relation qui est vraie dans M pour $\alpha < \chi$. Si M^* est assez proche de M pour que $\Phi(\alpha, \chi)$ reste vraie dans M^*, alors $M^* \models \exists(x < j(\chi))\Phi(\alpha, x)$ (il suffit de prendre $x = \chi$). Mais d'après l'élémentarité de j cela est équivalent à $M \models \exists(x < \chi)\Phi(\alpha, x)$.

Pour aller au-delà des cardinaux mesurables on a utilisé la technique suivante. Soit V_ξ la hiérarchie cumulative des ensembles jusqu'au rang ξ. Pour χ critique (donc mesurable) comme ci-dessus, on a $V_\chi^{M^*} = V_\chi^M$ (i.e. égalité de M et de M^* jusqu'au rang χ).

13. Cf. l'article fondamental Martin-Steel [1989] et le bel exposé Bourbaki de Patrick Dehornoy [1989] qui lui est consacré.

14. Si A est une sous-structure d'une structure B, on dit que l'injection $A \hookrightarrow B$ est un plongement élémentaire si B a la même théorie du premier ordre que A (i.e. est "discursivement" indiscernable de A) dans le langage formel (riche) où il existe un symbole de constante *pour chaque* élément de A. La logique du premier ordre d'un univers hierarchisé en types est identifiable à la logique d'ordre supérieur de ses éléments. Pour une introduction pédagogique à ce concept, cf. Petitot [1979], [1989b].

Définition. *On dit que* χ *est* superfort *dans* M *s'il existe un plongement élémentaire intérieur* j *tel que* $V^{M^*}_{j(\chi)} = V^{M}_{j(\chi)}$.□

Entre les mesurables et les superforts, Woodin a introduit d'autres cardinaux, dits *de Woodin.*

Définition. *Un cardinal* δ *est de Woodin si* $\forall F : \delta \to \delta$, $\exists \kappa < \delta$ *et un plongement élémentaire* j *d'ordinal critique* κ *tel que* κ *soit clos (invariant) par* F *(i.e.* $F|_\kappa : \kappa \to \kappa$*) et* $V^{M^*}_{j(F(\kappa))} = V^{M}_{j(F(\kappa))}$ (i.e. $M = M^*$ *jusqu'au rang* $j(F(\kappa))$*).*□

On montre :

(i) que si δ est de Woodin, il existe une infinité de χ mesurables $\chi < \delta$, et

(ii) que si λ est superfort, il existe une infinité de δ de Woodin $\delta < \lambda$.

Le théorème clé est alors le :

Théorème de Martin-Steel (1985). *Si dans* M *(modèle de ZFC) il existe* n *cardinaux de Woodin* δ_i *et un cardinal mesurable* $\kappa > \delta_i \ \forall i$, *alors* Det $\left(\Pi^1_{n+1}\right)$.□

La réciproque est due à Woodin.

Corollaire. *Si dans* M *il existe* λ *superfort, alors l'axiome DP de* détermination projective *(tous les projectifs sont déterminés) est valide dans* M.□

On a également le résultat remarquable :

Théorème de Martin-Steel-Woodin. *Si dans* M *il existe* λ *superfort alors* $L(\mathcal{N})$ *(le plus petit modèle intérieur de ZF contenant* $\mathcal{N}$*) satisfait l'axiome de détermination complète AD :* $\forall A \subset \mathcal{N}$ *est déterminé.*□

Les travaux de Woodin et Shelah ont également montré que s'il existe dans M un cardinal κ *supercompact* (encore plus grand qu'un superfort) alors aucune propriété de $\mathcal{N}$ ne peut plus être modifiée par forcing. Autrement dit, il y a *"rigidification" de la théorie des réels*. On peut considérer que ce résultat explicite la nature des axiomes "platoniciens" nécessaires à une "bonne" théorie, régulière, du continu.

L'histoire de l'épopée cantorienne-gödelienne continue donc, mais il semble toutefois que l'on s'achemine vers un nouveau moment conclusif avec les extraordinaires travaux récents de Hugh Woodin sur l'Ω-logique qui vont dans le sens de la conclusion que l'HC est *fausse*. Toute cette histoire est un exemple spectaculaire de la philosophie des mathématiques de Cavaillès et prolonge ce que lui-même avait pu en écrire dans *Transfini et Continu.*

7 Bibliographie

AST, 1971. *Axiomatic Set Theory*, (D. Scott ed.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol XIII, Providence, AMS.

BECKER, H., 1992. "Descriptive Set Theoretic Phenomena in Analysis and Topology", see *STC [1992]*, 1-25.

CAVAILLES, J., 1938. *Méthode axiomatique et Formalisme. Essai sur le problème des fondements des mathématiques*, Paris, Hermann, 1981.

CAVAILLES, J., 1947. *Transfini et Continu*, Paris, Hermann.

CAVAILLES, J., 1962. *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann

FEFERMAN, S., 1989. "Infinity in Mathematics : Is Cantor Necessary ?", *Philosophical Topics*, XVII, 2, 23-45.

FRIEDMAN, H., 1986. "Necessary Uses of Abstract Set-theory in Finite Mathematics", *Advances in Mathematics*, 60, 92-122.

GÖDEL, K., 1938. "The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 25, 556-557.

GÖDEL, K., 1940. "The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory", *Annals of Math. Studies*, Study 3, Princeton Univ. Press, Princeton.

GÖDEL, K., 1947. "What is Cantor's Continuum Problem ?", *American Mathematical Monthly*, 470-485.

GÖDEL, K., 1958. "Über eine bisher noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes", *Dialectica*, 12, 280-287.

GRIGORIEFF, S., 1976. "Détermination des jeux boréliens d'après Martin", *Séminaire Bourbaki* 478.

JACKSON, S., 1989. "AD and the very fine structure of $L(\mathbb{R})$", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 21, 1, 77-81.

KEISLER, H.J., KUNEN, K., MILLER, A., LETH, S., 1989. "Descriptive Set Theory over Hyperfinite Sets", *The Journal of Symbolic Logic*, 54, 4, 1167-1180.

MADDY, P., 1988. "Believing the Axioms I, II", *The Journal of Symbolic Logic*, 53, 2, 481-511 ; 53, 3, 736-764.

MARTIN, D., 1975. "Borel Determinacy", *Annals of Mathematics*, 102, 363-371.

MARTIN, D., STEEL, J., 1989. "A Proof of Projective Determinacy", *Journal of the American Mathematical Society*, 2, 1, 71-125.

MNS, 1989. *La Mathématique non-standard* (Barreau, H., Harthong, J., eds.), Paris, Editions du CNRS.

MOSCHOVAKIS, Y., 1980. *Descriptive Set Theory* , North-Holland.

PETITOT, J., 1989. "Rappels sur l'Analyse non standard", see *MNS[1989]*, 187-209.

PETITOT, J., 1991. "Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale", *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, (G. Gra-

nel ed.), 213-282, Editions TER, Mauvezin.
PETITOT, J., 1992. "Continu et Objectivité. La bimodalité objective du continu et le platonisme transcendantal", *Le Labyrinthe du Continu*, (J.-M. Salanskis, H. Sinaceur eds.), 239-263, Springer, Paris.
SINACEUR, H., 1994. *Jean Cavaillès, Philosophie mathématique*, Paris, Presses Universitaires de France
SOLOVAY, R. M., 1971. "Real-Valued Measurable Cardinals", see *AST [1971]*, 397-428.
STC, 1992. *Set Theory of the Continuum*, (H. Judah, W. Just, H. Woodin, eds.), Berlin, Springer.
STERN, J., 1976. "Le problème des cardinaux singuliers d'après Jensen et Silver", *Séminaire Bourbaki* 494.
STERN, J., 1984. "Le problème de la mesure", *Séminaire Bourbaki* 632.
YOURGRAU, P., 1989. "Review Essay : Reflections on Kurt Gödel", *Philosophy and Phenomenological Research*, 1, 2, 391-408.ß