

CONGRES EUROPEEN DE MATHEMATIQUES

TABLE RONDE

*PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES : POURQUOI ? COMMENT ?*

**Le platonisme transcendantal et le problème de l'objectivité**

**Jean PETITOT**

(Directeur du Séminaire d'Epistémologie des Mathématiques,  
École des Hautes Études en Sciences Sociales, 54 Bd Raspail, 75006 Paris, France)

Février 1998

“To be a mathematician  
is to be an out-and-out Platonist”.

David Mumford <sup>1</sup>

**1. Faire droit à la connaissance mathématique**

Le travail et la technique mathématiques n'ont plus besoin de philosophie. Le lien rationnel privilégié, miraculeux, qui s'était noué dès l'origine grecque entre mathématiques et philosophie et qui avait traversé les siècles s'est brutalement dénoué il y a un demi siècle. Depuis ce temps, l'opérativité mathématique se déploie de façon autonome dans l'oubli complet du souci de la philosophie. Est-ce un bien, est-ce un mal ? Je ne sais pas. Mais c'est un fait historique.

En revanche, le lien des mathématiques à la *rationalité* a, quant à lui, le plus grand besoin d'une auto-réflexion philosophique. Il en a besoin pour traiter des points évoqués par Hourya Sinaceur dans la présentation de cette Table Ronde, et en particulier pour clarifier le statut très particulier et très problématique de *l'objectivité* des idéalités mathématiques et de leur rapport au sens et à l'intelligible, pour expliciter la relation entre démonstrations et objets, pour penser la dialectique entre vérité objective et évolution historique, pour justifier le rôle constitutif des mathématiques dans la physique théorique, bref pour participer à l'élaboration d'une théorie de la connaissance comme l'expliquait Jean Cavaillès dans son débat avec Albert Lautman du 4 février 1939 à la Société française de philosophie en présence d'Henri Cartan, Paul Lévy, Maurice Fréchet, Charles Ehresmann et Jean Hyppolite :

---

<sup>1</sup> Préface à *The Aureal Life of Oscar Zariski* (Parikh [1991]).

“Je cherche, au moyen des mathématiques, à savoir ce que cela veut dire que connaître, penser; c'est au fond, très modestement repris, le problème que se posait Kant. La connaissance mathématique est centrale pour savoir ce qu'est la connaissance”<sup>2</sup>.

Les mathématiques sont indispensables pour évaluer la valeur de la connaissance comme valeur rationnelle de civilisation, comme “honneur de l'esprit humain”, ainsi que l'a rappelé Jean Dieudonné à la suite de Jacobi et Hilbert.

Hélas, dans la mesure où la communauté mathématique se sent désormais peu responsable de son auto-réflexion philosophique, c'est malgré elle, en dehors d'elle et même souvent contre elle que s'élaborent nombre de philosophies des mathématiques qui demeurent *externes* à la rationalité mathématique et cherchent même parfois à en disqualifier la part la plus essentielle.

En général, on adopte pour philosophie des mathématiques une philosophie des diverses *conditions d'accès* aux objets mathématiques (accès symbolique-syntaxique, ou psychologique-cognitif, ou social-institutionnel, etc.). On réduit les objets à ces modes d'accessibilité épistémiques ou sociologiques. Puis on explique alors aux mathématiciens que les mathématiques sont sans objets propres et que leur croyance réaliste en l'existence des idéalités qu'ils étudient est une croyance magique, quasi mystique, et qu'il serait grand temps qu'ils deviennent enfin nominalistes et acceptent de se soumettre au rasoir d'Ockham. Mais l'on omet en général de rappeler que tout nominalisme est inséparable d'une ontologie d'étants singuliers substantiels existant à titre d'entités individuées, indépendantes et séparées.<sup>3</sup> Or, il est évidemment impossible d'attribuer une telle ontologie aux idéalités mathématiques. Le nominalisme ne saurait donc être en l'occurrence une position philosophique consistante.

Dans ce contexte sceptique, le souci de renouer l'alliance entre mathématiques et philosophie est donc aussi un souci *éthique*. Comme l'a courageusement affirmé Stephen Simpson dans sa contribution au symposium “Hilbert's Program Sixty Years Later” (Washington, 29 décembre 1985), contre le scepticisme,

“mathematicians and philosophers of mathematics ought to get on with the task of defending their discipline”.

La tâche est importante car

“the attack on mathematics is part of a general assault against reason”.<sup>4</sup>

---

<sup>2</sup> Cf. Cavailles-Lautman [1939].

<sup>3</sup> Cf. par exemple l'étude de Pierre Alféri : *Guillaume d'Ockham. Le singulier* (Alféri [1989]).

<sup>4</sup> Cf. Simpson [1988].

Je partage, pour ma part, ce point de vue. Dans la philosophie des mathématiques telle que je la conçois et la pratique, il s'agit avant tout *de faire droit* à la *réalité* mathématique. Comme le demande Hao Wang :

“to do justice to what we know”.

Les mathématiques constituent le *factum rationis* par excellence. C'est de ce *factum rationis* qu'il faut partir pour répondre non pas à la question : “que doit être la réalité mathématique pour que telle philosophie positiviste, nominaliste, matérialiste, etc., ait raison ?”, mais bien plutôt à la question inverse : “de quelle philosophie avons-nous besoin pour faire droit à la réalité mathématique ?” Comme l'affirmait Albert Lautman :

“Il y a un réel physique et le miracle à expliquer, c'est qu'il soit besoin des théories mathématiques les plus développées pour l'interpréter. Il y a de même un réel mathématique et c'est un pareil objet d'admiration de voir des domaines résister à l'exploration jusqu'à ce qu'on les aborde avec des méthodes nouvelles (...). Une philosophie des sciences qui ne porterait pas tout entière sur l'étude de cette solidarité entre domaines de réalité et domaines d'investigation serait singulièrement dépourvue d'intérêt.”<sup>5</sup>

Ou encore, comme l'affirmait André Weil :

“Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes.”<sup>6</sup>

Mais pour faire droit philosophiquement à une telle réalité, encore faut-il évidemment pouvoir poser la *question de droit* : “comment les mathématiques peuvent-elles justifier leur prétention à être une connaissance objective et vraie portant sur des objets idéaux abstraits ?” Prétention que pratiquement toutes les philosophies de ce siècle leur dénie. Cette question de droit est, on l'aura reconnue, la question critique, la question transcendante que Kant a été le premier à poser à propos de la physique.

Philosophiquement, je cherche à développer, dans une perspective critique-transcendante, une *apologie*, une *défense*, de la réalité mathématique. J'aimerais à ce propos aborder trois points.

---

<sup>5</sup> Lautman [1937-1939], p. 281.

<sup>6</sup> Weil [1948].

## 2. L'entre-expression et l'inter-traductibilité des mathématiques

Je reviendrai plus bas, à propos du platonisme de Gödel, sur des problèmes de philosophie de la logique. Mais j'aimerais au préalable donner quelques très brèves indications sur des problèmes que pratiquement personne ne thématise philosophiquement alors qu'il serait pourtant bien urgent et bien intéressant de le faire.

Le premier point concerne ce que j'appelle *l'entre-expression* et *l'inter-traduction* des théories mathématiques.

Dans son débat avec Jean-Pierre Changeux, *Matière à Pensée*, Alain Connes a souligné certains critères d'objectivité pour les mathématiques. Par exemple :

1. La possibilité de *classifier* exhaustivement les objets définis par une axiomatique. (les corps finis, les corps localement compacts, les groupes finis simples, etc.).
2. Le fait que les théories mathématiques intéressantes ont *un contenu informationnel infini* comme le montre le théorème d'incomplétude.

“On peut considérer ce théorème [de Gödel] comme une conséquence des contraintes imposées par la théorie de l'information, à cause de la finitude de la complexité de tout système formel”.<sup>7</sup>

3. La *cohérence et l'harmonie* inter-théoriques *globales* des théories mathématiques. Bien “qu'inexpliquées” et constituant un problème central, elles sont incontestables et objectives. Elle sont “l'antidote de l'aléatoire”.

Ce dernier point est particulièrement important. Il a aussi été souligné par Gian-Carlo Rota qui, dans une conférence donnée en 1990 au Collège de France, affirmait à son propos :

“C'est là le mystère, et aussi la fierté et la gloire des mathématiques. (...) La fréquence de ces miracles est telle que leur existence appartient à l'essence des mathématiques, et aucune philosophie de cette science ne devrait être dispensée d'en rendre compte.”<sup>8</sup>

Or force est d'admettre que ce “mystère” constitue le continent inconnu de la philosophie des sciences. Il relie démonstration, vérité et objectivité à une dimension *herméneutique* intra-mathématique.<sup>9</sup> Sur le plan philosophique, il n'y a guère qu'Albert Lautman qui l'ait bien compris : c'est ce qu'il appelait *l'unité* des mathématiques. Lautman a thématisé le fait qu'une partie considérable des mathématiques modernes

---

<sup>7</sup> Changeux-Connes [1989], p. 213.

<sup>8</sup> Rota [1990], p. 59.

<sup>9</sup> Pour la redéfinition du concept d'herméneutique en sciences, cf. Petitot [1987b], [1990a], [1990b], [1991a], [1991b], [1992b] et Salanskis [1991].

consiste à traduire certaines propriétés de certaines structures par des propriétés ou par l'existence d'autres structures (cf. la topologie algébrique, la théorie analytique des nombres, etc.).

De théories en théories, les mathématiques *s'auto-interprètent* indéfiniment et c'est pourquoi la déduction n'y est que *locale*. C'est la *compréhension* de cette entre-expression qui régule, et même souvent domine, la mécanique démonstrative. Il existe donc bien comme une “herméneutique intrinsèque” des mathématiques pures qu'il est essentiel de thématiser philosophiquement.<sup>10</sup> Elle ouvre à une philosophie des *contenus*, à cette auto-réflexion philosophique *interne* aux mathématiques que Lautman a initiée, comme Jean Dieudonné l'a souligné dans son avant-propos à *Essai sur l'unité des mathématiques* :

“les philosophes contemporains qui s'intéressent à la mathématique s'occupent le plus souvent de ses origines, de ses relations avec la logique ou des ‘problèmes des fondements’ (...). Bien peu sont ceux qui cherchent à se faire une idée des grandes tendances des mathématiques de leur temps, et de ce qui guide plus ou moins consciemment les mathématiciens actuels dans leurs travaux. Albert Lautman, au contraire, semble avoir toujours été fasciné par ces questions. (...) Il avait acquis sur les mathématiques des années 1920-1930 des vues bien plus étendues et précises que n'en avaient la plupart des mathématiciens de sa génération, souvent étroitement spécialisés. (...) [II] avait pressenti cet extraordinaire développement de la mathématique, auquel le destin ne lui a pas permis d'assister; il l'eût rempli d'enthousiasme.”<sup>11</sup>

### 3. Les symétries en physique, l'Esthétique transcendantale et la philosophie de la géométrie

Un autre point philosophique que j'aimerais évoquer très brièvement concerne le rôle des mathématiques dans les théories physiques et, plus précisément, la façon dont des principes de relativité, des principes de *symétrie*, y sont transformés en principes *dynamiques* constitutifs de l'objectivité physique.

---

<sup>10</sup> Pour quelques exemples concernant les théories respectives des surfaces de Riemann, des groupes et des algèbres de Lie, des corps de nombres algébriques, des singularités, de la cohomologie des faisceaux, etc., cf. Petitot [1979-1982] et [1990a].

<sup>11</sup> Dieudonné [1977], pp.15, 19. Pour des précisions sur la philosophie d'Albert Lautman, cf. mon étude "Refaire le Timée" (Petitot [1987a]).

Ce *factum rationis* impose une conception philosophique de l'*objectivité physique* qui n'a plus guère à voir avec l'ontologie ou le sens commun. Comme j'ai tenté de le montrer ailleurs <sup>12</sup>, une telle doctrine est de nature transcendante. Elle repose sur une *philosophie de la géométrie*.<sup>13</sup>

À la suite de Kant, Riemann, Clifford, Poincaré, Elie Cartan, Weyl, il est pertinent de faire reposer la philosophie de la physique sur une philosophie de la géométrie. Et à la suite de Helmholtz <sup>14</sup>, il est également pertinent d'élaborer une théorie cognitive, neuro-physiologique et perceptive de la géométrie.<sup>15</sup>

Si je privilégie pour ma part la philosophie transcendante plutôt que le positivisme logique c'est parce qu'elle est la première philosophie (et l'une des très rares jusqu'ici) à avoir compris trois caractéristiques fondamentales des théories physiques.

1. Le fait que l'existence de symétries, c'est-à-dire de groupes de relativité, est constitutive du concept d'objectivité physique et disjoint celui-ci de toute ontologie substantialiste d'étants singuliers individués existant à titre d'entités séparées indépendantes. D'où, comme en mathématiques, la non pertinence d'une doctrine nominaliste de l'objectivité physique. Ce point a été fort bien vu par Hermann Weyl dans sa critique du substantialisme en physique.

2. Le fait que les principes de relativité imposent de fortes contraintes de covariance aux descriptions physiques. La covariance garantit la possibilité de l'objectivité. Elle la définit et lui confère clairement un contenu non ontologique. Tel est l'un des sens modernes d'une *Esthétique transcendante*.

3. Le fait qu'il existe une *corrélation* entre une Esthétique transcendante et les *objets* de la théorie physique, autrement dit que, comme le dira beaucoup plus tard Hermann Weyl en introduisant le concept d'invariance de jauge, des principes de relativité, de covariance et d'invariance peuvent être transformés en principes *dynamiques*. Chez Kant, cette corrélation correspond à la notion de *construction des catégories dynamiques* (substance, causalité, interaction). Il s'agit d'interpréter ces catégories *géométriquement*, c'est-à-dire à partir d'un enrichissement des principes de symétrie, soit, en dernière instance, à partir d'une Esthétique transcendante enrichie.

Dans mon étude *Transcendental Aesthetics for Modern Physics* <sup>16</sup>, j'analyse trois exemples spectaculaires.

---

<sup>12</sup> Cf. Petitot [1990a], [1991b], [1992a].

<sup>13</sup> Pour la philosophie de la géométrie, cf. le volume *1830-1930 : A Century of Geometry* paru chez Springer dans la Série *Lecture Notes in Physics* (actes du Colloque organisé à l'Institut Henri Poincaré en septembre 1989).

<sup>14</sup> Cf. l'article de Catherine Chevalley sur les rééditions de Helmholtz dans le numéro 53 de la *Gazette des Mathématiciens* (1992).

<sup>15</sup> Sur les problèmes de perception, cf. la conférence de David Mumford au Congrès ainsi que Petitot [1990d], [1992b].

<sup>16</sup> Petitot [1992a].

(a) *Le théorème de Noether et la construction de la catégorie de substance.*

Le formalisme lagrangien (ou hamiltonien) permet de *convertir* du “mathématique” en “dynamique” grâce au théorème de Noether qui dit que si un lagrangien est invariant sous un groupe à un paramètre de relativité, alors il existe une grandeur physique conservée au cours du mouvement (une intégrale première). Ce théorème relie principes de relativité (inobservabilité de grandeurs cinématiques absolues), symétries (invariance du lagrangien) et lois de conservation (observabilité et conservation) de grandeurs physiques corrélatives. C'est *le* théorème transcendantal par excellence. Il justifie physico-mathématiquement la réinterprétation transcendantale kantienne de la catégorie aristotélicienne de substance par les principes de conservation.

(b) *La relativité générale et la construction de la catégorie de cause (du concept de force).*

La construction du concept de force consiste à la ramener à un principe de relativité, c'est-à-dire à une généralisation de l'Esthétique transcendantale. C'est bien ce que fait la relativité générale. On peut montrer qu'en relativité générale, l'Esthétique transcendantale et les principes associés (Axiomes de l'Intuition, Anticipations de la Perception) sont passés du niveau *global et métrique*, qui est le leur en mécanique classique, au niveau *local et différentiable* sous-jacent. Le groupe de relativité de la théorie devient le groupe des *difféomorphismes* de l'espace-temps. Les contraintes de covariance deviennent par conséquent beaucoup plus importantes et cela permet de ramener la force, donc la catégorie de causalité, à un principe d'inertie généralisé. Les a priori géométriques ne sont plus de nature métrique mais, comme y a insisté Wheeler, de nature différentiable, en fait *cohomologique*.<sup>17</sup>

(c) *Les théories de jauge et la construction de la catégorie d'interaction*

Les théories de jauge ont réussi à déduire les interactions en faisant dépendre les symétries *internes* des systèmes (qui sont des symétries globales non spatio-temporelles associées aux nombres quantiques des particules) de la *position* spatio-temporelle. En localisant ainsi ces symétries internes et en exigeant que les théories demeurent invariantes, on doit introduire des termes correctifs et l'on constate que ceux-ci sont précisément les termes d'interaction. Les forces et les interactions apparaissent ainsi de façon générale comme dérivables de principes de conservation *locaux*.<sup>18</sup>

---

<sup>17</sup> John Archibald Wheeler a par exemple montré que l'a priori cohomologique  $d^2 = 0$  (qui se trouve à la base de la cohomologie des formes différentielles sur une variété différentiable) permettait de déduire a priori les équations du champ d'Einstein. Cf. Misner, Thorne, Wheeler [1973].

<sup>18</sup> Le développement étonnant des théories de jauge et les liens établis par Simon Donaldson et Edward Witten avec la géométrie des variétés de dimension 4 fournit un exemple particulièrement probant des *contenus* sur lesquels devrait porter une philosophie des mathématiques authentique.

Voilà quelques thèmes philosophiques que nous sommes quelques-uns à nous efforcer de redéployer. Pourquoi la réflexion à leur sujet, encore très riche au début du siècle s'est-elle tarie ? Je pense que cela est dû à une orientation positiviste.

#### 4. L'obstacle positiviste à la philosophie des mathématiques

La plupart des débats de philosophie *générale* en mathématiques concernent les apories du réalisme platonicien. Dans sa forme non technique, la question traditionnelle du réalisme platonicien est celle de l'acceptabilité d'une ontologie d'entités abstraites. Il est débattu en général à partir de cinq préjugés qui, au nom d'un a priori naturaliste, veulent conjurer l'attribution à la cognition mathématique de facultés magiques supposées permettre d'accéder à des entités suprasensibles et qui, au nom d'un a priori logiciste, pensent le réalisme en termes de sémantique vériconditionnelles.<sup>19</sup> Ces préjugés sont les suivants :

- (i) “objectivité” et “réalité” signifient “référence à des objets” existant à titre d'êtres individués, séparés et indépendants ;
- (ii) conformément à la théorie causale de la référence, la référence est la relation converse de la façon dont un sujet est causalement affecté par des objets physiques externes ;
- (iii) l'ontologie des objets physiques est une ontologie de “choses” matérielles ;
- (iv) il est sensé et légitime d'utiliser les méta-concepts de réalité extérieure, de matière, de chose, d'objet, de causalité, etc. *indépendamment* de toute constitution préalable de domaines d'objectivité spécifiques ;
- (v) la logique est universellement et indifféremment applicable aux objets d'un domaine quelconque.

Ces préjugés obligent évidemment à dénier toute réalité aux objets et aux structures mathématiques pour la raison triviale que si “exister objectivement” signifie “exister physiquement dans le monde externe en tant que chose matérielle”, alors il est impossible que nous puissions posséder un accès épistémique (un apprentissage, des croyances, des croyances vraies, des croyances vraies rationnellement justifiées, c'est-à-dire des connaissances) à des entités externes qui sont *abstraites*, et ne peuvent par conséquent posséder *aucun efficace causal*. Comme le souligne (après tant d'autres) Michael Resnik :

“If we have no physical traffic with the most basic mathematical entities and they are not literally the products of our own minds

---

<sup>19</sup> Sur ce point, cf. le bel exposé de Jacques Dubucs à la Table Ronde.



either, how can we learn any mathematics? How could it even be possible for us to acquire beliefs about mathematical objects?"<sup>20</sup>

La théorie causale de la référence interdit a priori, comme l'affirme Philip Kitcher, que des constructions et des manipulations symboliques

“provide any type of access to abstract reality”.<sup>21</sup>

Cette aporie monopolise le débat. On cherche en général à la dissoudre de façon éliminativiste. Un bel exemple est celui de l'antiplatonisme matérialiste de Jean-Pierre Changeux. Selon Changeux<sup>22</sup> les objets mathématiques sont des “êtres de raison”, des représentations mentales dont la réalité est cérébrale. Certes, leurs contenus objectaux sont réflexivement analysables et l'on peut clarifier axiomatiquement leurs propriétés, mais leur *réalité* est purement matérielle. Ces représentations sont sélectionnées par un processus évolutif contingent. Elles sont donc elles-mêmes *contingentes* (il n'existe pas de nécessité mathématique). L'historicisme évolutionniste, donc le hasard, peut seul expliquer leur nécessité. L'existence, la réalité, la cohérence, la vérité, la nécessité des mathématiques “résultent a posteriori de l'évolution”. L'épistémologie des mathématiques doit par conséquent reposer sur un “*darwinisme mental*”. Tout “scientifique averti, honnête avec lui-même” doit dénoncer tout platonisme comme une croyance religieuse, comme un “résidu mythique” des temps magico-théologiques archaïques, éliminable par “l'ascèse intellectuelle du matérialisme”.

Un autre exemple d'éliminativisme est celui de l'antiplatonisme instrumental d'Hartry Field.

Dans *Science without Numbers*<sup>23</sup>, Hartry Field abandonne complètement le problème de la vérité en mathématiques, c'est-à-dire celle des “truth-makers”. Reprenant l'ancienne problématique positiviste de l'éliminabilité des termes théoriques depuis Mach (Hempel, etc.) et s'inspirant des nombreux théorèmes de logique mathématique affirmant qu'une théorie formelle “forte” est en fait conservative sur une théorie formelle “faible”, il essaie de montrer que les théories scientifiques utilisant des mathématiques sont *conservatives* sur des théories nominalistes *sans* mathématiques.

De façon plus précise<sup>24</sup>, Field va supposer qu'il existe une théorie *logique générale* pouvant servir de cadre à la fois aux théories scientifiques et aux théories mathématiques. Soit ZFU la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec Urelemente. On ajoute à ZFU le prédicat  $M$  = “être un objet mathématique”, avec les

---

<sup>20</sup> Resnik [1988], p. 403.

<sup>21</sup> Kitcher [1988], p. 527.

<sup>22</sup> Cf. Changeux-Connes [1989]. Nous avons analysé en détail ce débat dans notre étude *Idéalités Mathématiques et Réalité Objective*, (Petitot [1991a]).

<sup>23</sup> Field [1980].

<sup>24</sup> Cf. Chihara [1990] pour un résumé et une discussion des travaux techniques de Field.

axiomes convenables (sic).<sup>25</sup> On obtient ZFU<sup>1</sup>. Soit  $N$  une théorie scientifique “nominaliste”, c'est-à-dire une théorie dont les variables ne portent que sur des entités non mathématiques. Le vocabulaire non logique de  $N$  n'interfère donc pas avec celui de ZFU<sup>1</sup>. Soit  $N^*$  la théorie obtenue en relativisant la quantification de  $N$  à  $\neg M$ . Soit ZFU<sup>2</sup>, la théorie obtenue à partir de ZFU<sup>1</sup> en permettant au vocabulaire de  $N$  d'apparaître dans l'axiome de compréhension. Le théorème de conservation de Field s'énonce alors :

Théorème. Pour tout énoncé  $\varphi$  de  $N$ , si  $N^* + \text{ZFU}^2 \vdash \varphi^*$  alors  $N^* \vdash \varphi^*$ .  $\square$

D'où la thèse :

“platonistic formulations of physical theories are simply conservative extensions of underlying nominalistic formulations.”<sup>26</sup>

De par son aspect technique, la thèse d'Hartry Field est évidemment séduisante. Mais elle n'est pas véritablement convaincante. En effet, pour éliminer par exemple les nombres entiers, Field est obligé d'introduire des *quantificateurs numériques* :  $\forall^k x$ , etc. Les énoncés numériques du genre  $\# \text{Ext}(A) = k$  (le cardinal de l'extension de  $A$  est  $k$ ) deviennent alors trivialement des *contreparties abstraites* (éliminables) d'énoncés logiques  $\forall^k x A(x)$ . De même, en ce qui concerne l'espace, Field est obligé d'admettre que les *points* et les *régions* de l'espace-temps sont des objets *physiques* concrets ( $\in \neg M$ ) (sic!) sur lesquels on peut quantifier (au premier ordre pour les points, au deuxième ordre pour les régions). Il introduit alors des relations de comparaison, d'incidence, de congruence entre points, segments, etc. et montre trivialement que la métrique (la distance) en est la contrepartie abstraite (éliminable).

Faire droit à la réalité mathématique, c'est aussi faire droit à un platonisme non naïf. Mais pour ce faire, il faut sortir de l'antinomie qui a paralysé la philosophie des mathématiques et remettre en cause les préjugés évoqués plus haut. En particulier, il faut remettre en cause l'idée d'une logique générale ontologiquement neutre où le rapport à la réalité se réduirait à la quantification existentielle dans une sémantique vériconditionnelle. Je pense que la sémantique logique ne possède aucun contenu ni cognitif ni ontologique. Sa validité ne concerne que les idéalités mathématiques (relation syntaxe-sémantique en théorie logique des modèles).<sup>27</sup> Elle ne peut donc prétendre expliquer les rapports référentiels et intentionnels entre un système cognitif et une réalité externe. Il est par conséquent inconsistant de l'utiliser en faveur d'arguments antiplatoniciens. De même, il est métaphysiquement dogmatique de poser que les méta-

<sup>25</sup> En particulier on postule qu'il existe dans l'univers de ZFC considéré un ensemble qui est l'extension du prédicat  $\neg M$ , i.e. dont les éléments sont les objets non mathématiques! On voit admirablement fonctionner ici le préjugé métaphysique postulant la légitimité scientifique d'une logique générale, ontologiquement indifférente.

<sup>26</sup> Field [1982], p. 20.

<sup>27</sup> Sur la philosophie de la théorie des modèles, cf. Sinaceur [1991], Salanskis [1991] et Petitot [1979-1982], [1989].

concepts de réalité extérieure, de matière, de chose, d'objet, de causalité, etc. possèdent un sens prédéfini qui *précèderait* logiquement les théories physico-mathématiques qui les déterminent. Il est scientifiquement illégitime de parler de réalité, d'existence objective ou de causalité en dehors d'une théorie particulière où ces concepts se trouvent schématisés et construits (au sens transcendantal).

La conséquence de cette critique transcendantale du dogmatisme logiciste est que, en ce qui concerne le statut des idéalités mathématiques, le problème n'est pas celui de leur existence et de leur réalité *mais celui de leur objectivité*. C'est l'objectivité qui constitue le problème central et la confusion "objectivité  $\equiv$  ontologie" est un obstacle épistémologique.

J'aborde donc, pour conclure ces remarques, un exemple où la question de l'objectivité me paraît pertinente.

## 5 Approche transcendantale du platonisme de Gödel <sup>28</sup>

Partons du programme de recherche anti-gödelien de la "reverse mathematics" développé par Takeuti et Feferman. Il s'agit, on le sait, d'un programme *réductionniste* qui cherche à réaliser partiellement le programme de Hilbert en réduisant des parties significatives de l'arithmétique du deuxième ordre à des systèmes plus faibles faisant intervenir les axiomes d'existence — i.e. les axiomes de compréhension, les axiomes d'induction et les axiomes de choix — les plus faibles possibles, les moins "engagés" ontologiquement.

Énormément de théories classiques sont ainsi réductibles à des systèmes faibles constructivement justifiés.

Mais il existe pourtant des arguments solides en faveur d'un platonisme non réductionniste à la Gödel, c'est-à-dire en faveur d'une ontologie ensembliste riche. Ils concernent en particulier les résultats *d'indépendance* pour des énoncés *combinatoires strictement finitistes* qui sont des versions finitistes de théorèmes classiques et qui ne sont pourtant pas prouvables dans  $PA^1$ , et cela à *cause du phénomène d'incomplétude*.

Un exemple particulièrement spectaculaire d'un tel phénomène est fourni par la version finitiste du théorème de Kruskal. Le théorème de Kruskal (1960) démontre que si  $T_n$  est une suite infinie dénombrable d'arbres finis (avec une racine), il existe nécessairement  $i < j$  et un homéomorphisme injectif  $h : T_i \rightarrow T_j$  (c'est-à-dire une injection préservant les *inf* de l'ordre partiel défini par la structure d'arbre).

La version *finie* de ce théorème est due à Harvey Friedman :

*Théorème F.*  $\forall k > 1 \exists n A(k, n)$  où  $A(k, n)$  est l'énoncé : si  $T_1, \dots, T_n$  est une suite d'arbres de cardinal  $\#T_i \leq k+i$  alors  $\exists i < j \leq n$  et un homéomorphisme injectif  $h : T_i \rightarrow T_j$ .  $\square$

---

<sup>28</sup> Pour des détails, cf. mon étude *Continu et Objectivité* (Petitot [1990c])

Une preuve *non* constructive dans ZFC s'obtient trivialement au moyen d'un argument de compacité : si  $\exists k > 1 \forall n \neg A(k, n)$  alors, par compacité, on obtient un contre exemple au théorème de Kruskal. Mais l'énoncé  $F$  est démonstrativement *extrêmement puissant*.

Soit en effet la suite de théories  $\mathcal{T}_0 = \text{PA}$ ,  $\mathcal{T}_{\alpha+1} = \mathcal{T}_\alpha + \text{Consistance } \mathcal{T}_\alpha$  et  $\mathcal{T}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{T}_\alpha$  pour les ordinaux limites  $\lambda$ .

*Théorème.* La théorie  $\mathcal{T}_0 + F$  possède la puissance démonstrative d'une théorie  $\mathcal{T}_\alpha$  avec  $\alpha$  supérieur à tous les ordinaux suivants :

$$\varepsilon_0 < \varepsilon_{\varepsilon_0} < \Gamma_0 < \Gamma_1 < \Gamma_\omega < \Gamma_{\varepsilon_0} < \Gamma_{\Gamma_0} \dots \quad \square$$

### Rappels

(i)  $\varepsilon_0 = \lim \omega^{\dots^\omega} \omega$  fois. Si  $\Phi(0, \alpha) = \omega^\alpha$ ,  $\varepsilon_0$  est le premier *point fixe* de  $\Phi : \Phi(0, \varepsilon_0) = \varepsilon_0$ .

(ii) Soit  $\Phi(1, \bullet)$  la fonction énumérant les points fixes de  $\Phi(0, \bullet)$ ,  $\Phi(1, 0) = \varepsilon_0$ ,  $\Phi(1, 1) = \varepsilon_1, \dots, \Phi(1, \varepsilon_0) = \varepsilon_{\varepsilon_0}$ . Soit  $\Phi(2, \bullet)$  la fonction énumérant les points fixes de  $\Phi(1, \bullet)$ , etc. On définit l'ordinal  $\Gamma_0$  comme le premier point fixe de  $\beta = \Phi(\beta, 0) : \Phi(\Gamma_0, 0) = \Gamma_0$ .  $\Gamma_0$  est un ordinal gigantesque inatteignable par la  $\Phi$ -hiérarchie. C'est le premier cardinal *non définissable prädicativement*.

(iii) On note  $\Gamma_\alpha$  la  $\alpha$ -ème solution de  $\Phi(\Gamma, 0) = \Gamma$ . L'ordinal  $\alpha$  du théorème est donc supérieur non seulement à  $\Gamma_0$ , mais à  $\Gamma_\omega$ , à  $\Gamma_{\varepsilon_0}$  et à  $\Gamma_{\Gamma_0}$ . Il est absolument "astronomique".

L'énoncé  $F$  est en fait *indépendant* de l'arithmétique formelle. Il fournit un excellent exemple d'énoncé  $\Pi^0_2 \forall k \exists n A(k, n)$  qui n'est pas démontrable dans PA alors que  $\exists n A(k, n)$  est pourtant prouvable pour tout  $k$  dans PA. Ce phénomène *d'immanence de l'incomplétude à des énoncés finitistes* est dû à la croissance vertigineuse du  $n = n(k)$  dont l'existence est affirmée et de la longueur des preuves successives de  $\exists n A(k, n)$ . Une telle croissance échappe complètement aux limites de l'arithmétique prädicative.

L'énoncé  $F$  implique la consistance de l'analyse et transcende donc les principes prädicatifs. Bien qu'il soit un énoncé "concret" de combinatoire finie, il n'admet que des preuves très imprädicatives. De tels résultats plaident incontestablement en faveur d'une ontologie ensembliste "riche". En effet, comme l'admet Feferman,

"the most favorable interpretation to be placed on these results is that they tend to support Gödel's doctrine."<sup>29</sup>

Comme le remarque Harvey Friedman, de tels résultats ouvrent une nouvelle crise des fondements dans la mesure où ils montrent que

---

<sup>29</sup> Feferman [1989], p. 34.

“strong abstract set theory will prove to play an essential role in a variety of more standard finite mathematical contexts”.<sup>30</sup>

La réponse de Feferman à cet argument solide en faveur de la doctrine de Gödel est la réduction possible à des systèmes “non platoniciens” *constructivement justifiés*. Et du fait que, grâce aux réductions de la “reverse mathematics”,

“higher set theory is dispensable in scientifically applicable mathematics”,

il conclut à une position philosophique radicale :

“I am convinced that the platonism which underlies Cantorian set theory is utterly unsatisfactory as a philosophy of our subject, despite the apparent coherence of current set-theoretical conceptions and method. To echo Weyl, *platonism is the medieval metaphysics of mathematics*; surely we can do better.”<sup>31</sup>

Je pense que cette conclusion de Feferman n'est philosophiquement acceptable que pour autant qu'elle concerne une forme vulgaire et naïve (transcendante) de platonisme ontologique selon laquelle ZFC serait une théorie qui, dans le cadre d'une théorie réaliste de la dénotation, porterait sur “a fixed and definite world”.<sup>32</sup> Mais tout change dès que l'on tient compte du fait que ce qui est en cause est la structure du *continu* et que celle-ci relève philosophiquement, comme nous y avons insisté avec Jean-Michel Salanskis, d'une *Esthétique transcendantale* et pas du tout d'une ontologie.

L'argument de Feferman n'est pas philosophiquement convaincant pour la raison suivante. Soit l'on restreint l'existence à la quantification existentielle, soit on lui attribue un contenu transcendant les mathématiques. Dans le premier cas, on ne saurait lui attribuer aucun contenu ontologique. Ce n'est que le préjugé selon lequel la même logique vaut pour les mathématiques et le monde réel qui peut induire et entretenir l'illusion d'un contenu ontologique intra-mathématique de la quantification. Dans le second cas, le moins est alors de s'interroger un peu sérieusement sur le statut de réalité externe du continu. Or, celui-ci n'est pas un objet. C'est une *intuition pure* au sens de Kant, une *forme* de donation et de manifestation de la réalité objective externe. Il constitue le fondement d'une Esthétique transcendantale objectivante et, à ce titre, son réalisme empirique ne saurait se doubler d'un réalisme transcendant. Le statut de “réalité” du continu externe est celui de *l'idéalité transcendantale*. Cela signifie qu'il

---

<sup>30</sup> Friedman [1986], pp. 92-93.

<sup>31</sup> Feferman [1989]. p. 42.

<sup>32</sup> Ibid. p. 43.

doit être déterminé par des idéalités mathématiques et qu'il ne confère à celles-ci aucun contenu ontologique.

L'idéalité transcendantale implique que la détermination mathématique ne peut pas être une détermination *complète*. Cette dernière ne constitue qu'un *horizon* de détermination. Le caractère logique de l'idéalité transcendantale est que les thèses *problématiques* d'existence appartiennent elles-mêmes au processus (incomplet) de détermination. Elles ne peuvent donc pas porter, par conséquent, sur des étants singuliers individués fixes et définis mais seulement sur des idéalités dont la valeur et la réalité objective sont en proportion de la portée opératoire de leur fonction de détermination.

Nous appelons *platonisme transcendantal* ce platonisme objectif qui insère l'existence mathématique dans un processus transcendantal de constitution d'objectivité. Le platonisme transcendantal est “négatif” et non pas “positif” comme le platonisme ontologique vulgaire. Il permet *d'inverser* les affirmations philosophiques de l'anti-platonisme et de transformer les phénomènes d'incomplétude et d'indécidabilité en *arguments* en faveur du platonisme.

Le platonisme transcendantal est assez proche de la philosophie *formaliste* telle que la concevait Abraham Robinson. Ainsi que l'a rappelé Hourya Sinaceur<sup>33</sup>, Robinson refusait *à la fois* l'existence de l'infini actuel (le réalisme platonicien transcendant naïf) et les veto de nature intuitionniste et constructiviste. Pour lui, il s'agissait de comprendre, dans le cadre d'une philosophie formaliste, pourquoi tout se passe “comme si” le réalisme platonicien naïf était valable.<sup>34</sup> Bien que non substantiellement existantes, les totalités infinies sont néanmoins formellement acceptables (ce sont des contenus formels au sens de Gilles Gaston Granger). Bien que non complètement descriptibles et déterminables, elles sont néanmoins source de prescription d'actes, de procédures, de théories. Bien que sans vérité au sens référentiel, elles possèdent néanmoins une “vérité potentielle”. Tous ces caractères sont des caractères du platonisme transcendantal.

C'est pourquoi, pour conclure, j'aimerais dire un mot sur la justification en quelque sorte *physique* du platonisme gödelien et, en particulier, de l'introduction d'axiomes d'existence de grands cardinaux pour élaborer une bonne théorie du continu.

Dans les travaux sur les grands cardinaux il ne s'agit pas d'élaborer un modèle du continu qui soit compatible aux contraintes constructivistes, mais bien au contraire de tenter de *reconstruire* au mieux, à l'intérieur même des mathématiques, la

---

<sup>33</sup> Sinaceur [1991], p. 401.

<sup>34</sup> On connaît l'importance de la problématique du “comme si” — du *als ob* — dans la philosophie transcendantale kantienne. La troisième Critique lui est en grande partie consacrée.

transcendance externe de cette réalité *donnée intuitivement* comme forme de l'extériorité physique.

L'Axiome de constructibilité est trop contraignant. Il implique en effet qu'il existe un bon ordre  $\Delta^1_2$  sur le corps des réels  $\mathbb{R}$  et donc qu'il existe un ensemble  $\Delta^1_2$  non mesurable Lebesgue. Or, un bon ordre sur  $\mathbb{R}$  devrait être hautement non constructible et indéfinissable. De façon générale, l'axiome du choix AC (qui reste vrai dans un univers constructif) implique l'existence d'ensembles très compliqués et très irréguliers qui sont néanmoins projectifs.<sup>35</sup> Ces ensembles devraient être hautement non constructifs. Or l'axiome de constructibilité les force à exister dans la hiérarchie des projectifs. D'où une inversion complète de stratégie pour pallier cette anomalie.

On cherche à démontrer de bonnes propriétés de régularité des projectifs  $A \subset \mathbb{R}$  : mesurabilité Lebesgue, propriété de Baire, propriété de l'ensemble de parfait ou, plus généralement, propriété de détermination au sens de Gale et Stewart.<sup>36</sup> On veut généraliser les résultats de Luzin et Suslin : tout  $\Sigma^1_1$  et tout  $\Pi^1_1$  sont mesurables Lebesgue ; tout  $\Sigma^1_1$  a la propriété de l'ensemble parfait. Gödel et Cohen ont montré que dès le niveau des  $\Sigma^1_2$  et des  $\Pi^1_2$  les difficultés de démonstration sont *méta-mathématiques* et sont en fait des conséquences de *l'incomplétude*. D'où l'idée gödelienne d'enrichir les axiomes de la théorie des ensembles *en précisant la grandeur de l'univers*. Pour cela, il faut introduire des axiomes "platoniciens" d'existence de grands cardinaux (inaccessibles, mesurables, etc.). Un fait fondamental est alors que la "bonne" structure du continu dans un univers de ZFC dépend très fortement de ces axiomes d'existence de grands cardinaux. Elle en est la *contrepartie*. On peut alors, comme l'ont proposé Gödel et Martin, justifier ces axiomes comme des sortes d'*hypothèses physiques*, portant non pas sur un monde fixe et complètement prédéterminé ontologiquement mais sur les *formes de l'objectivité* (les intuitions pures).

Il est essentiel de refaire droit à la conquête philosophique majeure que sont l'Esthétique transcendantale et le Synthétique à priori. L'objectivité mathématique rejoint la réalité externe en déterminant mathématiquement les formes pures de l'objectivité. Répétons encore une fois puisque cette évidence princeps à été dogmatiquement occultée depuis plus d'un demi siècle, que cette détermination ne peut pas être directement identifiée à une référence visant un monde d'étants singuliers existant substantiellement à titre d'entités séparées.

Rien ne s'oppose donc, bien au contraire, au redéploiement des conceptions platoniciennes des mathématiques, à condition évidemment qu'il s'agisse non plus d'un

---

<sup>35</sup> Rapellons que la hiérarchie des sous-ensembles projectifs  $\Sigma^k_n, \Pi^k_n, \Delta^k_n$  de  $\mathbb{R}$  s'obtient à partir des ouverts en itérant les opérations ensemblistes de complémentation, d'union dénombrable et de projection (image directe par application continue).

<sup>36</sup>  $A \subset \mathbb{R}$  est déterminé si dans le jeu où deux joueurs choisissent à tour de rôle un entier (ce qui, à la limite, donne un  $r \in \mathbb{R}$ ), l'un des joueurs a une stratégie gagnante pour  $r \in A$ .

platonisme classique, positif et transcendant mais d'un platonisme non classique, négatif et transcendantal, bref gödelien. Évidemment, demeure entière l'énigme de l'intuition pure et du synthétique a priori, c'est-à-dire de la façon dont nous sommes cognitivement affectés par l'extériorité. Mais ce problème n'est pas d'abord mathématique ou philosophique. Il est d'abord *physique et cognitif*.<sup>37</sup> Toutefois, quoi qu'il en soit des conclusions futures de telles recherches, le platonisme transcendantal apparaît en définitive comme la philosophie mathématique la plus plausible. Cela est assez satisfaisant pour l'esprit, tant il est vrai que “to be a mathematician is to be an out-and-out platonist”.

## BIBLIOGRAPHIE

- ALFERI, P., 1989. *Guillaume d'Ockham. Le singulier*, Paris, Editions de Minuit.
- BENACERRAF, P., PUTNAM, H. (eds.), 1964. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Englewood Cliffs, New-Jersey, Prentice Hall.
- CAVAILLES, J., LAUTMAN, A., 1939. “Discussion sur la Pensée mathématique”, *Société Française de Philosophie*, volume 40, séance du 4 février 1939. Publié en 1945.
- CHANGEUX, J.P., CONNES, A., 1989. *Matière à Penser*, Paris, Éditions Odile Jacob.
- CHIHARA, Ch., S., 1990. *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford, Clarendon Press.
- DIEUDONNE, J., 1977. Préface à *Lautman, 1937-1939*.
- FEFERMAN, S., 1989. “Infinity in Mathematics: Is Cantor Necessary ?”, *Philosophical Topics*, XVII, 2, 23-45.
- FIELD, H., 1980. *Science without Numbers*, Princeton University Press.
- FIELD, H., 1982. “Realism and Anti-Realism about Mathematics”, *Philosophical Topics*, 13, 45-69.
- FRIEDMAN, H. 1986. “Necessary Uses of Abstract Set-theory in Finite Mathematics”, *Advances in Mathematics*, 60, 92-122.
- GÖDEL, K., 1947. “What is Cantor's Continuum Problem”, *American Mathematical Monthly* (repris dans Benacerraf-Putnam 1964), 470-485.
- GÖDEL, K., 1958. “Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes”, *Dialectica*, 12, 280-287.
- KITCHER, Ph, 1988. “Mathematical Progress”, *PM*, 1988, 518-540.

---

<sup>37</sup> Cf. par exemple l'ouvrage de R. Penrose *The Emperor's New Mind* (Penrose [1989]). Cf. également le bel exposé de G. Longo à la Table Ronde. Je pense qu'une épistémologie de la géométrie arrivera sans doute à la conclusion que *la géométrie est un format non propositionnel et encapsulé* (orienté objet) pour l'organisation du flux d'informations et de la mémoire des systèmes cognitifs. Cela permettra de retrouver le sens authentique du synthétique a priori.



- LAUTMAN, A., 1937-1939. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, (réédition des ouvrages parus chez Hermann de 1937 à 1939 et, à titre posthume, en 1946), Paris, Bourgois, 1977.
- MISNER, C.W., THORNE, K.S., WHEELER, J.A., 1973. *Gravitation*, San Francisco, Freeman.
- MNS, 1989. *La Mathématique non-standard* (Barreau, H., Harthong, J., eds.), Paris, Éditions du CNRS.
- PARIKH, C., 1991. *The Aureal Life of Oscar Zariski*, Academic Press.
- PENROSE, R., 1989. *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press.
- PETITOT, J., 1979-1982. "Infinitesimale", "Locale/Globale", "Unità delle matematiche", *Enciclopedia Einaudi*, VII, 443-521 ; VIII, 429-490 ; XV, 341-352 ; XV, 1034-1085, Turin, Einaudi.
- PETITOT, J., 1987(a). "Refaire le 'Timée'. Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman", *Revue d'Histoire des Sciences*, XL, 1, 79-115.
- PETITOT, J., 1987(b). "Mathématiques et Ontologie", *La scienza tra filosofia e Storia in Italia nel Novecento*, F. Minazzi, L. Zanzi, eds.), 191-211, Rome, Edizione della Presidenza del Consiglio dei Ministri.
- PETITOT, J., 1989. "Rappels sur l'Analyse non standard", *La Mathématique non standard*, 187-209, Paris, Éditions du CNRS.
- PETITOT, J., 1990(a). "Logique transcendantale, Synthétique a priori et Herméneutique mathématique des Objectivités", *Fundamenta Scientiæ*, (numéro en l'honneur de L. Geymonat), 10, 1, 57-84.
- PETITOT, J., 1990(b). "Logique transcendantale et Herméneutique mathématique : le problème de l'unité formelle et de la dynamique historique des objectivités scientifiques", *Il pensiero di Giulio Preti nella cultura filosofica del novecento*, (F. Minazzi ed.), 155-172, Milano, Franco Angeli.
- PETITOT, J., 1990(c). "Continu et Objectivité", *Le Continu Mathématique* (J.M. Salanskis, H. Sinaceur eds.), Colloque de Cerisy (à paraître chez Springer).
- PETITOT, J., 1990(d). "Le Physique, le Morphologique, le Symbolique. Remarques sur la Vision" *Revue de Synthèse*, 1-2, 139-183.
- PETITOT, J., 1991(a). "Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale", *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, (G. Granel ed.), 213-282, Mauvezin, Éditions TER.
- PETITOT, J., 1991(b). *La Philosophie Transcendantale et le problème de l'Objectivité*, Entretiens du Centre Sèvres, (père F. Marty ed.), Paris, Editions Osiris.
- PETITOT, J., 1992(a). "Actuality of Transcendental Aesthetics fot Modern Physics", *1830-1930, A Century of Geometry* (L. Boi, D. Flament, J.M. Salanskis, eds.), Springer, Berlin.
- PETITOT, J., 1992(b) *Physique du Sens*, Paris, Éditions du CNRS.

- PM, 1988. *Philosophie des Mathématiques* (Ph. Kitcher ed.), *Revue Internationale de Philosophie*, 42, 167.
- RESNIK, M.D., 1988. "Mathematics from the Structural Point of View", *PM*, 1988, 400-424.
- ROTA, G.C., 1990. "Les ambiguïtés de la pensée mathématique", *Gazette des Mathématiciens*, 45, 54-64.
- SALANSKIS, J. M., 1991. *L'Herméneutique formelle : L'Infini–Le Continu– L'Espace*, Paris, Éditions du CNRS.
- SIMPSON, S.G., 1988. "Partial Realizations of Hilbert's Program", *The Journal of Symbolic Logic*, 53, 2, 349-363.
- SINACEUR, H., 1991. *Corps et Modèles*, Paris, Vrin.
- WEIL, A., 1948. "L'Avenir des Mathématiques", *Les grands courants de la pensée mathématique* (F. Le Lionnais éd.), 307-320, Cahiers du Sud.