

Hommage à Alain Berthoz
 par Jean Petitot
 Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales,
 École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris.
 Juillet 2024

C'est avec joie et gratitude que j'aimerais rendre hommage à Alain Berthoz. Depuis que nous nous sommes rencontrés et que nous avons commencé à collaborer dans le cadre du DEA de Sciences Cognitives Paris VI, EHESS, École Polytechnique, Alain a été l'une des principales étoiles qui a guidé ma circumnavigation dans l'interdiscipline de la géométrie de la perception. Ce DEA créé par Michel Imbert en 1987 a été un véritable "miracle" institutionnel.¹ Il m'a permis de m'initier aux neurosciences intégratives et computationnelles avec des guides aussi éminents qu'Alain, Michel, Yves Frégnac ou Jean Lorenceau.

Géométrie et perception 1970-1980

Depuis longtemps déjà (le début des années 1970) je m'étais intéressé à la géométrie de la perception en utilisant des modèles morphologiques. Par exemple René Thom avait consacré en 1972 un bel article à la notion de "cut-locus" (aussi dit "axe de symétrie généralisé" ou "squelette") d'un contour plan fermé C , notion introduite dans les théories sensori-motrices de l'époque par Harry Blum au début des années 1970 (cf. son article pionnier de 1973 "Biological Shape and Visual Science"²). Ce concept était déjà bien connu depuis longtemps en géométrie différentielle et l'article technique de Thom "Sur le cut-locus d'une variété de plongée"³ en avait approfondi la théorie mathématique. La découverte de sa réalité psychophysique était assez remarquable car le cut-locus K d'un contour fermé C revient à considérer que le contour C est "actif" et qu'il se propage comme un front d'onde, K étant le lieu *singulier* de cette propagation. Dans les années 1980, surtout à partir de la publication posthume de "Vision" de David Marr en 1982⁴, le cut-locus devint un outil largement utilisé dans les modèles de vision computationnelle.

J'avais aussi beaucoup travaillé dans les années 1970-1980 sur les descriptions phénoménologiques de la perception chez Husserl, chez les Gestalt-théoriciens (de Stumpf, Wertheimer, Köhler, Koffka et Klüver à Kanizsa) et chez Merleau-Ponty. J'avais également été très frappé par des articles de spécialistes de la psychologie et de la psychophysique de la perception qui introduisaient des relations précises avec les premiers résultats en neurosciences sur l'architecture fonctionnelle des aires visuelles primaires. Ces derniers faisaient suite aux expériences décisives de Vernon Mountcastle, David Hubel et Torsten Wiesel sur les hypercolonnes d'orientation de V1 dans les années 1950 ainsi qu'à leurs premiers modèles par Valentino et Carla Braitenberg. J'aimerais évoquer en particulier Jan Koenderink et son papier de 1987 "Representation of local geometry in the visual system"⁵ ainsi que William Hoffman et son papier de 1989 "The visual cortex is a contact bundle"⁶. Ces articles fondamentaux ont introduit dans la modélisation des architectures

1 Ce fut pour moi un honneur et une joie de succéder à Michel en 2000. En 2004, pour s'adapter à la réforme européenne des diplômes universitaires, le DEA est devenu le CogMaster ENS-PSL, EHESS, Paris Cité.

2 Blum, H., "Biological Shape and Visual Science", *J. Theoret. Biol.*, 1973, 38, 205–287.

3 Thom, R., "Sur le cut-locus d'une variété plongée", *Journal of Differential Geometry*, 1972, 6/4, 577-586. Repris dans *Œuvres Mathématiques*, III, 125-133, Société Mathématique de France, Paris, 2021. Cf. aussi "Perception et préhension" (republié plus tard dans *Apologie du Logos* en 1990).

4 Marr, D., *Vision*, W.H. Freeman, San Francisco, 1982.

5 Koenderink, J., Van Doorn, A.J., "Representation of local geometry in the visual system", *Biological Cybernetics*, 1987, 55, 367-375.

6 Hoffman, W., "The visual cortex is a contact bundle", *Applied Mathematics and Computation*, 1989, 32, 137-167.

fonctionnelles des aires visuelles primaires la géométrie de ce que l'on appelle les espaces de jets (qui sont une version intrinsèque des dérivées successives d'une fonction, cf. plus bas).

Je pense aussi aux nombreux modèles géométriques de vision computationnelle comme par exemple ceux de David Mumford “Elastica in computer vision”⁷ (1992) ou ceux de Pierre-Louis Lions, Jean-Michel Morel, Luis Alvarez ou encore ceux de Jitendra Malik et Pietro Perona, Michael Gage, Richard Hamilton, Matthew Greyson utilisant des équations de diffusion non linéaires qui effectuent un blurring de l'image tout en respectant les bords des objets.

Bref, au début des années 1990 j'avais déjà pas mal navigué dans les eaux de la géométrie de la perception visuelle. Mais tous ces modèles restaient assez loin de la révolution effectuée dans les neurosciences par des nouvelles méthodes comme, par exemple, celles de “in vivo optical imaging” introduites précisément au début des années 1990 par des spécialistes comme Amiram Grinvald ou Tobias Bonhöffer. C'est dans le cadre du DEA de Sciences Cognitives que j'ai pris contact avec nombre de données expérimentales fascinantes comme celles de Gregory DeAngelis sur les profils récepteurs des neurones visuels ou celles de William Bosking du laboratoire de David Fitzpatrick sur les cartes d'orientation de V1 et leurs réseaux de pinwheels. Ce fut un véritable choc et cela conduisit à un profond changement dans l'orientation de mes recherches.

Le passage vers les neurosciences. Géométrie et perception 1990-2000

C'est dans ce contexte que ma rencontre avec Alain fut déterminante. Des coopérations se mirent en place qui furent pour moi d'une grande richesse pour (au moins) trois raisons.

- (i) D'abord ce fut un privilège de pouvoir m'initier à tant de résultats originaux avec pour guide un spécialiste aussi éminent qu'Alain.
- (ii) Ensuite, complémentirement, ce fut un plaisir de pouvoir dialoguer avec lui dans la mesure où il s'intéressait lui-même beaucoup à deux de mes thèmes favoris, d'un côté les liens entre géométrie et perception dans la grande tradition allant de Riemann et Helmholtz jusqu'à Thom et Mumford en passant par Poincaré, et d'un autre côté la philosophie de la perception, en particulier la phénoménologie de Husserl et de Merleau-Ponty.
- (iii) Et enfin, c'est à la générosité institutionnelle sans pareille d'Alain qu'un grand nombre d'initiatives ont pu se mettre en place grâce à l'accueil du LPPA au Collège de France.

Une interdiscipline “intrinsèque”

Ainsi se sont nouées de riches collaborations relevant de ce que j'appelle une interdiscipline *intrinsèque*. J'insiste sur le qualificatif d'intrinsèque. Il existe en effet plusieurs types d'interdisciplines. Les interdisciplines disons “informatives” qui consistent à permettre à chaque discipline reconnue comme telle institutionnellement (par exemple par une commission du CNRS) de s'informer sur la situation des autres. Beaucoup d'échanges académiques sont de ce type. Il y a aussi les interdisciplines que l'on pourrait appeler “de projet” qui consistent à réunir plusieurs compétences différentes dont on a besoin pour mener à bien un projet techno-scientifique complexe (par exemple une fusée interplanétaire ou la restauration de Notre-Dame de Paris). Mais il y a aussi les interdisciplines intrinsèques et “objectives” imposées par la nature même de leur objet. Les interdisciplines intrinsèques ont pour vocation de devenir à terme de nouvelles disciplines. Un ordinateur est par exemple une machine physique électronique matérielle (hardware) qui implémente des programmes logiques (software). C'est un objet technique intrinsèquement physique et logique étudié par l'informatique. Il y a beaucoup d'autres exemples, comme celui de la biologie moléculaire.

⁷ Mumford, D., “Elastica in computer vision”, in *Algebraic Geometry and Applications* (C. Bajaj, dir.), Springer, Heidelberg, 1992, 491-506.

C'est également le cas des neurosciences de la vision où l'on étudie l'implémentation neurale d'algorithmes engendrant le perçu à partir des inputs sensoriels. Il existe une relation *constitutive* entre d'une part le niveau biophysique micro des réseaux neuronaux (neurones, axones, synapses, potentiels d'action, etc.) et d'autre part la géométrie méso et macro des percepts visuels qui en émergent. J'ai proposé dans les années 1990 de qualifier cette interdiscipline intrinsèque de *neurogéométrie*. Elle couple des données fines sur les architectures fonctionnelles visuelles avec des structures géométriques sophistiquées que ces architectures fonctionnelles implémentent.

Ce n'est pas le lieu d'entrer ici dans les détails mais signalons qu'on y utilise des concepts de géométrie différentielle omniprésents dans les théories physiques mais très peu présents jusqu'ici en neuromathématiques. Par exemple les formes différentielles et leurs conditions d'intégrabilité (ce que l'on appelle "le problème de Pfaff", Pfaff, Frobenius, Lie, Darboux, Cartan, Goursat), les fibrations, les structures de contact (géométrie des jets), les structures symplectiques, les groupes et les algèbres de Lie (en particulier le groupe de Heisenberg et le groupe $SE(2)$ des déplacements du plan), les connexions à la Cartan et leur dérivation covariante (calcul différentiel fibré), les modèles variationnels et le contrôle optimal, les géométries sous-riemanniennes et leurs géodésiques, l'analyse harmonique non commutative et les processus de diffusion, la représentation des groupes de Lie, les opérateurs différentiels et leur analyse spectrale, les états cohérents.⁸

De précieuses collaborations

C'est dans ce contexte que les relations d'une grande richesse avec Alain ont été pour moi particulièrement précieuses. Il serait hors de propos d'en faire ici une liste mais j'aimerais quand même en évoquer quelques unes.

(i) Par exemple quelques exposés que j'ai pu donner au séminaire d'Alain au Collège de France : sur "la perception par esquisses chez Husserl et la théorie des singularités" en 1996⁹ ou sur la "neurogéométrie de la vision" en 2003. Ou aussi en avril 2007 la participation à une table ronde autour de l'ouvrage d'Alain et de Jean-Luc Petit sur "Physiologie de l'action et phénoménologie" centrée sur l'actualité du thème de la constitution de l'espace.

(ii) De son côté, Alain a donné en 2007 une conférence au séminaire de Philosophie et Mathématiques que je co-organisais à l'ENS, "Poincaré avait-il raison : le mouvement 'naturel' est-il un des fondements des concepts de la géométrie?".

(iii) J'aimerais également rappeler les exposés qu'Alain a donné régulièrement au cours des années 2000 au séminaire "Cerveau et Cognition" que je co-organisais avec Patrick Charnay pour les élèves de Polytechnique afin de leur permettre de découvrir les neurosciences. Le thème de base en était "les bases neurales et la modélisation de la perception de l'espace". C'était l'époque où je dirigeais le CREA et ce fut vraiment une excellente collaboration permettant au CREA d'être un élément dynamique d'un projet global de développement des Sciences cognitives sur la région parisienne.

(iv) J'aimerais aussi souligner tout l'intérêt que j'ai éprouvé à participer à des activités et à des rapports dirigés par Alain et qui illustrent fort bien cette interdiscipline intrinsèque qui a réorienté nombre de mes recherches. Par exemple de 2001 à 2005 la participation au comité de l'Action Concertée Incitative "Neurosciences intégratives et computationnelles" dont Alain était responsable. Ou en 2003-2005 la participation au texte présenté par Alain à l'Académie des Sciences dans le cadre du rapport sur la science et la technologie (n° 20) *Les mathématiques dans le*

⁸ Le lecteur intéressé pourra consulter la longue propédeutique à ces concepts disponible sur notre site à l'URL <jeanpetitot.com/Petitot_ENG_II.pdf>. L'ouvrage doit paraître chez Springer.

⁹ Séminaire *Philosophie de l'action et Neurosciences* d'Alain Berthoz avec Jean-Luc Petit. Le lien des neurosciences avec la théorie phénoménologique des kinesthèses qu'a explicité Jean-Luc Petit est vraiment passionnant. Voir A. Berthoz, J-L Petit, *Physiologie de l'action et phénoménologie*, Odile Jacob, Paris, 2006.

*monde scientifique contemporain*¹⁰. Ce rapport, dont le regretté Jean-Christophe Yoccoz était l'animateur et le coordinateur, était consacré aux interactions des mathématiques avec les autres disciplines en relation avec les profonds bouleversements expérimentaux, technologiques et théoriques de l'époque ainsi qu'avec les transformations sociales, académiques et institutionnelles corrélatives.

Y étaient représentées bien sûr les disciplines déjà fortement mathématisées depuis longtemps comme la physique (par exemple la théorie quantique des champs), l'astronomie ou la chimie, également l'informatique mais aussi des disciplines plus “sciences humaines” comme l'économie. Une place relativement importante y était faite aux sciences biologiques, médicales et écologiques. Dans ce contexte, Alain avait en charge le thème “Les liens entre mathématiques et neurosciences” (chapitre 7). Avec la générosité qui le caractérise, il réunit une équipe¹¹ et nous fit figurer comme co-auteurs.

Je garde un souvenir très vif de ce travail collectif. Il était fort intéressant à la fois sur le plan des contenus techniques et sur le plan épistémologique. En effet, contrairement à ce qui se passe en physique (par exemple en théorie de la gravitation) où une mathématisation peut s'identifier à une théorie, en biologie, les modèles mathématiques restent très partiels et extrêmement limités et ne sauraient s'identifier à la théorie d'un organisme vivant interagissant avec son *Umwelt*. Néanmoins de nombreux modèles existent. Ils font souvent intervenir des outils connus mais en leur posant de nouvelles questions (cf. par exemple le transfert de la physique statistique des verres de spins aux réseaux de neurones pour modéliser les mécanismes d'apprentissage, ou également l'utilisation de géodésiques de géométries neuralemment implémentées pour expliquer les contours illusoires modaux). Dans le rapport, de nombreux modèles sont évoqués. Les équations différentielles non linéaires pour l'influx nerveux ; la représentation des signaux par des ondelettes, les profils récepteurs de différentes classes de neurones, leur plasticité et leur dynamique ; les réseaux de neurones (avec des poids synaptiques asymétriques, ce qui empêche l'existence d'une fonction “énergie”) ; la structure géométrique fibrée modélisant les hypercolonnes d'orientation de V1, sa structure de contact modélisant le système de ses connexions cortico-corticales “horizontales” ; les équations de diffusion non-linéaires déjà évoquées permettant d'effectuer un “scale-space filtering” des images (au sens de D. Marr, A. Witkin, J. Koenderink) mais en inhibant la diffusion des discontinuités constituant les bords des objets ; les modèles variationnels de segmentation des images (David Mumford et Jayant Shah) ; la synchronisation des réseaux d'oscillateurs (Yoshiki Kuramoto, Hiroaki Daido).

Mais le rapport insistait aussi sur le fait que les neurosciences permettent de renouer avec la belle tradition de grands géomètres comme Poincaré, Weyl ou Enriques qui, ayant un “sens du vivant”, s'étaient intéressés à la genèse intuitive et sensori-motrice de l'espace et à la relation intrinsèque entre les constructions géométriques abstraites et les structures sensori-motrices de la perception et de l'action.

J'aimerais aussi remercier Alain pour avoir accepté d'accueillir au LPPA pendant plusieurs années un groupe de travail très spécialisé focalisé sur les cartes d'orientation des aires visuelles primaires et leurs modèles neurogéométriques. Il y eut des discussions passionnantes avec Yves Frégnac, Daniel Bennequin, Jean Lorenceau, Chantal Milleret, Jacques Droulez. Avec d'autres rencontres, en particulier tout un ensemble de colloques de la Fondation des Treilles organisés par Bernard Teissier, David Mumford et Jean-Michel Morel, ce groupe de travail a été pour moi essentiel.

¹⁰ Académie des Sciences, *Rapports sur la science et la technologie*, n°20, Editions TEC&DOC, chap. 7, 175-211.

¹¹ Daniel Andler, Daniel Bennequin, Jacques Droulez, Olivier Faugeras, Giuseppe Longo, Stéphane Mallat, Jean Petitot.

Un peu de simplexité

J'aimerais enfin évoquer ma contribution en 2014 à l'ouvrage *Simplexité-Complexité* regroupant des études sur l'ouvrage d'Alain consacré en 2009 à la *simplexité*¹². Elle était focalisée sur “La simplexité de la notion géométrique de jet”¹³.

Alain a introduit le néologisme de “simplexité” pour qualifier tout un ensemble de solutions originales qu'a trouvé l'évolution biologique pour traiter la complexité intraitable du réel. La simplexité consiste selon lui à

“décomposer les problèmes compliqués en sous-problèmes plus simples, grâce à des modules spécialisés, quitte à devoir ensuite recomposer l'ensemble.” (Berthoz 2009, p.22)

La notion de *jet* (d'ordre 1) fournit un fort bel exemple de simplexité. Le problème complexe est de calculer des *dérivées* de certaines fonctions relativement aux variables de position rétinienne $a = (x, y)$. Comme l'a souligné Jan Koenderink, il est trop complexe pour être effectué par des processeurs *ponctuels* comme les neurones. La micro-anatomie hypercolumnnaire et l'architecture fonctionnelle de l'aire visuelle primaire *VI* constituent une solution *simplexe* trouvée par l'évolution à ce problème complexe qui permet de n'utiliser que des opérations simples de type "prendre la valeur d'une fonction en un point". Les idées force sont les suivantes :

1. on ajoute une nouvelle variable indépendante p aux variables de position rétinienne $a = (x, y)$: il s'agit de la variable d'orientation à laquelle sont sensibles les neurones "simples" de *VI* ;
2. on organise en modules spécialisés les valeurs des trois variables, c'est-à-dire les triplets (a, p) (dits "éléments de contact" en géométrie différentielle) couplant une position et une orientation, en hypercolonnes d'orientation ;
3. le traitement d'un input consiste alors simplement à mesurer les valeurs ponctuelles des (a, p) activés ;
4. mais il faut recomposer et, pour recomposer, on introduit une architecture fonctionnelle qui garantit que prendre des valeurs ponctuelles relativement aux trois variables (x, y, p) équivaut bien à dériver relativement aux variables initiales (x, y) .

Or c'est exactement cette “simplexité” que formalise le concept mathématique de jet, l'architecture fonctionnelle correspondant à une structure géométrique bien précise, celle de la “structure de contact” de l'espace des jets.

Conclusion

L'articulation, pour la vision de bas niveau, des outils mathématiques de géométrie différentielle avec les neurosciences intégratives et computationnelles dans les années 1990-2000 a constitué pour moi un “tournant neurogéométrique” qui a été depuis l'un de mes principaux centres d'intérêt. Je ne saurais trop remercier Alain pour l'aide qu'il m'a apportée tant sur le plan scientifique, qu'institutionnel et humain. Oui. Alain a bien été une étoile qui a guidé ma circumnavigation dans cette interdiscipline intrinsèque.

¹² Berthoz, A., *La simplexité*. Odile Jacob, Paris, 2009.

¹³ Petitot, J., “La simplexité de la notion géométrique de jet”, in A. Berthoz, J-L. Petit dir., *Simplexité-Complexité*, Leçons du Collège de France, OpenEdition Books.