RAPPELS SUR L'ANALYSE NON STANDARD

Jean PETITOT

(Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales, EHESS, Paris)

1989

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Le "paradoxe" des infinitésimales **4**

2.1 L'antinomie archimédienne 4

2.2 L'infinitésimale dx comme ε-terme zéro 5

2.3 La dialectique conceptuelle 7

3 Linéaments de théorie des modèles **10**

4 Les modèles non-standard robinsonniens et la méthode des ultraproduits **18**

4.1 Extensions élémentaires 18

4.2 Ultraproduits et ultrapuissances 21

5 Les univers non réguliers et la dialectique interne / externe **27**

5.1 Élargissements ("enlargements") 29

6 Analyse classique et Analyse non-standard **31**

6.1 Structure de ${}^*\mathbb{R}$ et de ${}^*\mathbb{N}$ 31

6.2 Formulations NS 33

7 L' approche syntaxique d'Edward Nelson **38**

8 La relativité fini / infini et la controverse formalisme / intuitionnisme **41**

8.1 La théorie de Fourier 41

8.2 L'analyse spectrale 44

8.3 Idéalités et objets 49

On peut considérer que l'analyse non standard (ANS) se développe selon trois directions principales.

(i) Mathématique : reformulation des problèmes de l'analyse (classique ou moderne) admettant l'usage des infiniment petits "dans le style de Leibniz" (cf. les travaux des écoles d'Abraham Robinson, Wilhelmus Luxemburg et Georges Reeb) ;

(ii) Physique : applications à des problèmes délicats comme ceux des perturbations singulières, de la moyennisation, des intégrales oscillantes, etc. (cf. les travaux de Jacques Harthong et du groupe de Strasbourg) ;

(iii) Logique et philosophique : actualisation du débat (essentiellement entre formalisme et intuitionnisme) sur la nature de l'infini et sur la maîtrise "discursive" du continu "intuitif" (cf. les réflexions de Georges Reeb, Pierre Cartier, Jacques Harthong et Jean-Michel Salanskis).

Cet article se propose de rappeler dans ses grandes lignes, à des fins pédagoglques, la conception robinsonienne de l'ANS en esquissant quelques points relevant de (i) et (iii). Il esquisse aussi quelques aspects de la version syntaxique de l'ANS proposée par Edward Nelson avec son "Internal set theory".

1 Introduction

Le calcul différentiel est à la base de la plupart des formalismes mathématiques utilisés dans les sciences de la nature. Ses réussites sont immenses. Pourtant, dès que l'on remonte à son concept primitif, celui d'*infinitésimale*, on se heurte à de nombreuses difficultés conceptuelles, voire même à des contradictions et à des antinomies. En effet, étant donné la structure archimédienne du modèle du continu qu'est le corps des nombres réels, une quantité infi-

nitésimale est nécessairement nulle. Il y a là une sorte de scandale de la raison qui a été profondément débattu pendant des siècles.

Dès l'origine le calcul différentiel moderne a une double formulation, d'un côté le calcul des "fluxions" de Newton à base de dérivées conçues comme des *limites* et, d'un autre côté, le calcul *symbolique* de Leibniz fondé sur des symboles d'infinitésimales dx, dy, df, etc. L'histoire particulièrement mouvementée de sa compréhension peut être très grossièrement divisée en trois périodes. La première, qui va de Leibniz à Cauchy en passanr par Euler, est celui de l'élaboration et du développement du calcul différentiel symbolique dans le style leibnizien. Le second, qui conduit directement à l'analyse contemporaine, commence avec Cauchy puis Weierstrass, avec une crise de la "rigueur", l'éviction des infinitésimales et leur remplacement par un calcul de limites reprenant les "fluxions" de Newton et précisant les idées de d'Alembert. Syntaxiquement et sémantiquement consistante, cette façon de concevoir et d'appliquer le calcul différentiel s'est imposée et les calculs symboliques "à la Leibniz" ont été réinterprétés dans son contexte. Ce n'est que dans les années 1960 que l'Analyse non standard (ANS) a repris, avec des nouveaux outils *logiques* de théorie des modèles (remontant à des travaux des années 1920 comme ceux de Skolem), la question du statut paradoxal des infinitésimales symboliques leibniziennes. Il s'agit là d'un remarquable "retour amont" de la logique vers les fondements de l'analyse.

2 Le "paradoxe" des infinitésimales

2.1 L'antinomie archimédienne

Depuis Archimède, le concept d'infinitésimale semble relever d'une intuition indissociable de celle du continu. La question est de savoir dans quelle

mesure ce concept est formellement maîtrisable à. travers un calcul symbolique.

Le calcul infinitésimal symbolique leibnizien était syntaxiquement cohérent et il a conduit à d'innombrables et grandioses succès physiques. Et pourtant, interprété comme il l'était à l'époque, c'est-à-dire comme si les dx pouvaient avoir des référents *numériques*, il était sémantiquement inconsistant. C'était bien le "scandale originaire" de l'analyse. Le problème vient, on le sait, du fait que le corps topologique totalement ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels, construit à la Dedekind comme complétion de $\mathbb{Q}$, est *archimédien*. Il satisfait l'axiome :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \; \forall x \in (\mathbb{R}^+ - \{0\}) \; \exists n \in \mathbb{N} \; (nx > y) \; . \tag{A}$$

En passant des grands nombres à leurs inverses, cet axiome affirme qu'il n'existe pas d'infinitésimales dans $\mathbb{R}$:

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ \; (y \neq 0 \Longrightarrow \exists r \in (\mathbb{R}^+ - \{0\}) \; (r < y))$$

ou, en termes de quantification sur $\mathbb{R}$,

$$\forall y (y \neq 0 \Longrightarrow \exists r ((r > 0) \wedge (r < |y|))) \; . \tag{I}$$

2.2 L'infinitésimale dx comme ε-terme zéro

Une façon simple d'exprimer le "paradoxe" des infinitésimales est d'utiliser la reformulation du calcul des prédicats proposée par David Hilbert (avec Wilhelm Ackermann et Paul Bernays) sous le nom de ε-*calculus* dans le cadre de son approche finitiste de l'infini. Suivant Hilbert, on associe canoniquement – et de façon purement syntaxique – à chaque prédicat $F(x)$ un symbole d'*individu* $\varepsilon_x F(x) = \varepsilon_F$ qui représente l'*idée in individuo* d'un

individu satisfaisant F. Ces symboles, dits ε-termes, ne sont ni des symboles de variables, ni des symboles de constantes. Ce sont des symboles de quantités "non désignées" (pour reprendre l'expression de Lazare Carnot) dénotant des valeurs *méta*-mathématiques *intermédiaires*, comme le disait Albert Lautman à la suite de Jacques Herbrand, entre les signes des formules et les modèles (infinis) où ceux-ci prennent leurs valeurs. Ils permettent de définir la quantification par les équivalences :

$$\exists x F(x) \equiv F(\varepsilon_F) \tag{E}$$

$$\forall x F(x) \equiv F(\varepsilon_{\overline{F}}) \text{ (où } \overline{F} = \text{non } F) \tag{U}$$

La seconde formule est évidente : $\forall x F(x) \equiv \neg\exists x\overline{F}(x)$ (où $\neg\varphi = $ non φ) ; $\exists x\overline{F}(x) \equiv \overline{F}(\varepsilon_{\overline{F}})$; $\neg\exists x\overline{F}(x) \equiv \neg\overline{F}(\varepsilon_{\overline{F}})$; $\neg\overline{F} \equiv F$; $\forall x F(x) \equiv F(\varepsilon_{\overline{F}})$. Dans le cas d'une universelle $F(\varepsilon_{\overline{F}})$, l'$\varepsilon$-terme $\varepsilon_{\overline{F}}$ est bien formé syntaxiquement mais *sans* référent consistant. On dit que c'est un *terme-zéro*.

Hilbert a montré qu'avec les ε-termes on peut construire un calcul des prédicats sans quantificateurs qui est équivalent au calcul des prédicats classique CP.

Le concept leibnizien d'infinitésimale est un exemple typique de terme-zéro. L'axiome (I) est en effet de la forme $\forall y G(y)$ avec

$$G(y) = (y \neq 0 \Longrightarrow \exists r((r > 0) \wedge (r < |y|))).$$

D'après (U), il est donc équivalent à $G(\varepsilon_{\overline{G}})$. Or, comme pour $G = \varphi \Longrightarrow \psi$ on a $\overline{G} = \varphi \wedge \neg\psi$, on a

$$\varepsilon_{\overline{G}} = \varepsilon_y[y \neq 0 \wedge \forall r((r > 0) \Longrightarrow (|y| \leq r))],$$

ce qui est exactement la définition du dx leibnizien : $dx = \varepsilon_{\overline{G}}$. Dire que $\varepsilon_{\overline{G}}$ est un terme-zéro, c'est exactement dire que le concept du dx est sémantiquement inconsistant bien que syntaxiquement cohérent.

2.3 La dialectique conceptuelle

Leibniz était évidemment parfaitement conscient du caractère fictionnel des symboles différentiels dx, df, etc. Son point de vue, très subtil, sur la vérité était plutôt celui "syntaxique" de la cohérence logique d'un calcul symbolique que celui "sémantique" de l'adéquation de ce calcul à la réalité numérique du continu. Il s'autorisait donc les infinitésimales comme des symboles qui, tout en ne dénotant aucun nombre réel, pouvaient néanmoins être traités "comme" des nombres et servir d'intermédiaires dans les calculs. Elles étaient pour lui des fictions, mais des fictions "bien fondées", "fondées en réalité", "plus conformes à l'art d'inventer", utiles "pour abréger et pour parler universellement" et permettant d'appliquer à l'infini les règles opératoires qui gouvernent le fini. Leibniz est sans doute le premier à avoir clairement compris la *relativité* de l'opposition fini / infini. C'était pour lui une conséquence du principe de raison que

> "il se trouve que les règles du fini réussissent dans l'infini comme s'il y avait des atomes"

et que, réciproquement,

> "les règles de l'infini réussissent dans le fini comme s'il y avait des infiniment petits métaphysiques" [1].

Au contralre, pour ses détracteurs – en particulier Berkeley et d'Alembert – orientés vers une conception sémantique réaliste du calcul, les in-

1. Leibniz [1701],

finitésimales n'étaient que des parasites imaginaires qu'il fallait éliminer. [2] D'où la thèse de d'Alembert : il n'existe pas d'infinitésimales, le calcul différentiel ne traite que de limites et de quantités finies, et, donc, "la théorie des limites est à la base de la vraie métaphysique du calcul". Il est intéressant de voir qu'avant d'être éliminées, les infinitésimales verront toutefois leur statut logique et numérique profondément investigué. Bernard Nieuwentijt a même découvert leur caractère *nilpotent* comme générateur de l'algèbre $\mathbb{R}[t]/(t^2)$. [3]

La réinterprétation des infinitésimales en termes de limites a conduit, nous l'avons vu, à l'Analyse moderne, de Cauchy et Weierstrass jusqu'aux opérateurs différentiels linéaires (dérivations, formes différentielles, champs de vecteurs, dérivées de Lie, etc.) et à la théorie des jets (pour les infiniment petits d'ordre supérieur). Mais, sur le plan de la réflexion épistémologique, elle n'a pas définitivement rêsolu le problème du statut symbolique formel du continu intuitif. Il suffit de penser aux réflexions d'un Lazare Carnot, d'un Henri Poincaré, d'un Hermann Weyl ou d'un René Thom. En particulier, un certain nombre de tentatives ont été faltes pour construire des corps non archimédiens comportant des infinitésimales. Parmi celles-ci, outre celle de Detlef Laugwitz reposant sur l'utilisation de séries à. exposants réels (non entiers) et celle de Paul du Bois-Reymond reposant sur les types de croissance des fonctions, il faut, avec Madame Peiffer, accorder une attention particulière à celle de Giuseppe Veronese, Il semble que Veronese ait été le premier à avoir approfondi la relativité leibnizienne fini / infini par l'introduction du concept d'*échelle*. Pour lui, le continu restait une "intuition pure" (au sens de Kant), intuition qu'il s'agissait de déterminer et de reconstruire mathématiquement i.e. "discursivement". La construction de Dedekind ne

2. Cf. Berkeley [1734] et d'Alembert [1754] et [1765].
3. Cf, GiorelIo [1985].

s'effectue qu'à une certaine échelle et il n'y a aucune raison de postuler que, ce faisant, elle épuise le continu comme donnée intuitive. Si l'on pose qu'elle peut s'effectuer à plusieurs échelles incommensurables (conformément à la relativité leibnizienne fini / infini) ct si l'on impose à la structure hiérarchisée ainsi visée les propriétés que l'on attend de $\mathbb{R}$, on peut construire des modèles non archimédiens qui anticipent étonnamment sur ceux de l'ANS. [4]

Ce point de vue veronesien sur l'infini était en conflit avec celui de Cantor. Pour Cantor, seul l'infini actuel était un infini "proprement dit". L'infini potentiel, en particulier sous la forme du concept de limite, était donc un infini "improprement dit". Pour lui, la théorie des ordinaux transfinis était la théorie de l'infini proprement dit, et il lui apparaissait impossible de transformer par un "coup de force" les infinitésimales en infiniment petits proprement dits [5]. Son disciple Abraham Fraenkel écrivait encore en 1928 : "mis à l'épreuve, l'infiniment petit a complètement échoué". Mais il ajoutait toutefois :

> "Certes, il est *concevable* qu'un jour un second Cantor donne un fondement arithmétique incontestable à de nouveaux nombres infiniment petits qui se révèlent utilisables en mathématiques et qui puissent ouvrir une voie plus simple au calcul infinitésimal. Mais tant que quelque chose de cet ordre n'aura pas été accompli il faut maintenÎr l'idée que l'on ne peut aucunement parler de l'existence mathématique – donc logique – des infiniment petits, en un sens identique ou analogue à celui des infiniment grands". [6]

Le "second Cantor" fut Abraham Robinson, élève de Fraenkel... Son coup de génie aura été, comme il en va souvent en Science, de *changer* de point de

4. Cf. Peiffer [1986].
5. Cf. Cantor [1883].
6. Fraenkel {1928], p.1l6-117.

vue et de reprendre la question à partir de résultats généraux de la théorie logique des modèles concernant le rapport entre les théories mathématiques et leurs objets. Parmi ceux-ci, deux sont particulièrement importants :

(i) le théorème de Löwenheim-Skolem affirmant l'impossibilité de *caractériser* une structure infinie par les moyens de la logique formelle du premier ordre (théorème d'existence des modèles non standard) ;

(ii) la technique de *construction* de modèles NS fournie par les concepts d'ultraproduit et d'ultrapuissance.

Nous allons maintenant faire quelques rappels à ce sujet.

3 Linéaments de théorie des modèles

Soit $\mathcal{A}$ une structure mathématique "concrète" d'un certain type (par exemple le semi-anneau totalement ordonné $\mathbb{N}$ des entiers naturels ou l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ou le corps topologique ordonné $\mathbb{R}$ des nombres réels) d'ensemble sous-jacent A. Pour "parler" de $\mathcal{A}$ on utilise le langage formel L du calcul des prédicats CP correspondant à ce type de structure et une interprétation de L dans $\mathcal{A}$. On introduit donc une opposition entre syntaxe et sémantique. Côté syntaxe la notion fondamentale est celle de déduction ou de dérivation d'une formule φ de L à partir d'un ensemble Σ de formules de L (notation $\Sigma \vdash \varphi$) [7]. Côté sémantique la notion fondamentale est celle de vérité ou de validité des énoncés [8]. Si l'énoncé φ est valide dans $\mathcal{A}$ (notation $\mathcal{A} \models \varphi$) on dit que $\mathcal{A}$ est un *modèle* de φ. On généralise trivialement à un en-

7. Si Σ est vide, on note $\vdash \varphi$. φ est alors un thêorèrne de CP déductible des seuls axiomes de CP.

8. Rappelons que les énoncés sont les formules fermées (c'est-à-dire sans variables libres, toutes les variables y étant liées par des quantificateurs). Seuls les énoncés possèdent une valeur de vérité.

semble d'énoncés Σ. Soit Σ un ensemble d'énoncés. Si Σ est *consistant* (i.e. s'il est impossible d'en dériver une contradiction), on appelle *théorie* de Σ (notation $TH(\Sigma)$) l'ensemble des énoncés dérivables de Σ (autrement dit la clôture déductive de Σ). On note d'autre part $M(\Sigma)$ la classe des modèles de Σ. Côté sémantique, soit $\mathcal{A}$ une structure. On appelle *théorie* de $\mathcal{A}$ (notation $TH(\mathcal{A})$) l'ensemble des énoncés valides dans $\mathcal{A}$. Par définition, $\mathcal{A}$ est un modèle de $TH(\mathcal{A})$. Plus généralement, si $\mathcal{K}$ est une classe de structures de même type (par exemple celle des corps totalement ordonnés de caractéristique 0), on appelle *théorie* de $\mathcal{K}$ l'ensemble des énoncés valides dans toutes les structures $\mathcal{A}$ de $\mathcal{K}$.

La théorie des modèles s'est proposée d'analyser le rapport entre syntaxe et sémantique. Elle a montré que celui-ci était plus complexe qu'il ne pouvait paraître et qu'il existait un écart *irréductible* entre déductibilité syntaxique et validité sémantique. C'est à la mesure de cet écart qu'elle s'est consacrée dans la glorieuse période des années 30. Elle s'est posée des questions du type suivant :

• Étant donné un ensemble d'énoncés Σ, quel rapport existe-t-il entre $TH(\Sigma)$ et $TH(M(\Sigma))$, c'est-à-dire entre l'ensemble des énoncés dérivables de Σ (syntaxe) et l'ensemble des énoncés valides dans tout modèle de Σ (sémantique) ?

• Étant donnée une structure $\mathcal{A}$, existe-t-il un ensemble fini d'énoncés Σ tel que $TH(\mathcal{A}) = TH(\Sigma)$, autrement dit $TH(\mathcal{A})$ est-elle *finiment axiomatisable* ?

• Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux structures de même type telles que $TH(\mathcal{A}) = TH(\mathcal{B})$, s'ensuit-il nécessairement que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont isomorphes, autrement dit, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont "indiscernables"relativement à L, le sont-elles "objectivement" ? Si tel est le cas, on dit alors que la théorie de $\mathcal{A}$ est *catégorique*.

Si toutes les théories étaient finiment axiomatisables et catégoriques il y aurait équivalence entre syntaxe et sémantique. Mais cela est loin d'être le cas. Nous allons évoquer certains exemples de théories non catégoriques. Quant aux théories non finiment axiomatisables, elles sont légion car beaucoup de propriétés apparemment simples ne sont pas finiment axiomatisables. Par exemple, pour un corps, d'être algébriquement dos ou d'être de caractéristique 0.

Pour investiguer l'écart entre syntaxe et sémantique, on introduit d'abord une restriction fondamentale. Lorsque nous "parlons" de la structure $\mathcal{A}$ à travers le langage formel L nous traitons les éléments de l'ensemble A sous-jacent comme des éléments *primitifs* ("Urelemente" en allemand) et cela même si ces éléments sont eux-mêmes des ensembles (ce qui est par exemple le cas des nombres réels dans la construction de Dedekind). Autrement dit, nous *tronquons* au niveau de A le processus de construction des entités de notre univers de la théorie des ensembles. La restriction consiste alors à postuler que la quantification ne peut porter que sur les éléments de A. On s'interdit par exemple de quantifier sur les sous-ensembles de A. Cette restriction définit ce qu'on appelle la logique des prédicats du *premier ordre*. La théorie d'une structure $\mathcal{A}$ au premier ordre s'appelle aussi sa théorie *élémentaire*. Elle est celle qui est formulable dans un langage aux ressources limitées. Si deux structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont mêmes théories élémentaires ($TH(\mathcal{A}) = TH(\mathcal{B})$) on dit qu'elles sont *élémentairement équivalentes* (notation $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$). Cette relation d'équivalence sémantique d'origine syntaxique est beaucoup plus faible en général que la relation d'isomorphisme. Comme la catégoricité des théories signifie qu'elle s'y identifie, on voit que les théories sont en général *non* catégoriques.

Au premier ordre, il existe cependant une certaine adéquation entre syn-

taxe et sémantique exprimée par le *théorème de complétude* de Gödel (1930). [9] On appelle énoncé *universellement valide* un énoncé φ de L qui est vrai pour *toutes* ses interprétations possibles. Il est facile de voir que, les axiomes de CP étant universellement valides et les règles de déduction préservant la validité universelle, tous les énoncés qui sont des théorèmes de CP sont universellement valides. Le théorème de complétude de Gödel démontre la *réciproque* : si un énoncé φ de L est universellement valide il est un théorème de CP. On peut formuler autrement ce résultat fondamental : un ensemble Σ d'énoncés de L est consistant (non contradictoire) si et seulement si il admet un modèle. Cet énoncé est remarquable dans la mesure où il affirme que, dans la logique du premier ordre, l'existence retrouve son vieux sens scholastique et métaphysique : existe ce qui est non contradictoire. Comme l'ensemble des théorèmes de CP est la théorie $TH(\varnothing)$ de l'ensemble vide ($\Sigma = \varnothing$) et que celui des énoncés universellement valides est la théorie $TH(M(\varnothing))$, on a pour $\Sigma = \varnothing$ l'égalité $TH(\Sigma) = TH(M(\Sigma))$, i.e. l'équivalence entre syntaxe et sémantique. On peut généraliser ce résultat.

Soit Σ un ensemble consistant d'énoncés et $\mathcal{K}$ une classe de structures de même type. On a :

(i) $TH(M(\Sigma)) = TH(\Sigma)$

(ii) $M(TH(M(\Sigma))) = M(\Sigma)$

(iii) $TH(M(TH(\mathcal{K}))) = TH(\mathcal{K})$

(i) est le théorème de complétude ; (ii) et (iii) expriment que, si l'on considère les "applications" M et TH reliant l'ensemble des ensembles d'énoncés Σ à la classe des classes de structures $\mathcal{K}$, M et TH sont "inverses" l'une de l'autre à condition qu'on les restreigne aux Σ qui sont des théories de structures

9. Le théorème d'incomplétude de Gödel de 1931 concerne les logiques d'ordre supérieur.

$TH(\mathcal{K})$ et aux $\mathcal{K}$ qui sont des classes de modèles $M(\Sigma)$.

Une autre conséquence (immédiate) du théorème de complétude est le théorème dit de *compacité* qui est un théorème fondamental (très maniable) d'existence de modèles. Soit Σ un ensemble infini d'énoncés. Si tout sous-ensemble fini Σ_f de Σ admet un modèle, alors Σ admet un modèle. En effet si Σ était sans modèle, il serait inconsistant. Donc un Σ_f serait inconsistant et donc serait sans modèle. Nous verrons plus bas une démonstration sémantique de ce résultat.

Lorsqu'elle est appliquée à des structures infinies, la logique du premier ordre fait apparaître un écart irréductible entre syntaxe et sémantique, écart exprimé entre autres par le célèbre théorème de Löwenheim-Skolem (1915-1920) cité plus haut. Celui-ci comporte deux parties. La première (downward theorem) affirme que si $\mathcal{A}$ est une structure infinie, sa théorie élémentaire $TH(\mathcal{A})$ admet un modèle *dénombrable*. En particulier il existe un modèle dénombrable de la théorie au premicer ordre des nombres réels alors que le continu est non dénombrable (paradoxe de Skolem). La seconde partie du théorème de Löwenheim-Skolem (upward theorem) affirme que si $\mathcal{A}$ est une structure jnfinie de cardinal α, sa théorie élémentaire $TH(\mathcal{A})$ admet un modèle de cardinal β pour tout $\beta \geq \alpha$.[10]

On peut préciser un peu ce résultat. Dans le langage formel L associé à un certain type de structure, les constantes dénotent des éléments structuralement définis (par exemple les éléments neutres 0 et 1 dans le cas des corps). Mais on peut vouloir donner un nom à d'autres éléments d'une structure concrète $\mathcal{A}$ ($\sqrt{2}$, π, e, etc. pour $\mathbb{R}$), voire même à *tous* les éléments de $\mathcal{A}$. On est conduit pour cela à considérer le langage formel $L_{\mathcal{A}}$ obtenu à partir de L en étendant à $\mathcal{A}$ tout entier l'ensemble des constantes. La théorie élémentaire

10. Le théorème complet est plus technique.

$\widetilde{TH}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ relativement à $L_{\mathcal{A}}$ est évidemment beaucoup plus riche que la théorie élémentaire $TH(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ relativement à L. Le théorème "upward" s'énonce alors ainsi. Soit τ le cardinal de la théorie élémentaire $\widetilde{TH}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ relativement à $L_{\mathcal{A}}$. Si $\mathcal{A}$ est une structure infinie de cardinal α, alors $\widetilde{TH}(\mathcal{A})$ admet des modèles de cardinal β pour tout $\beta \geq \alpha, \tau$. Le théorème est une conséquence immédiate du théorème de compacité.

Soit alors $\mathcal{B}$ un modèle de $\widetilde{TH}(\mathcal{A})$ de cardinal $\beta > \alpha, \tau$. Comme $L_{\mathcal{A}}$ contient des noms pour tous les éléments de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est identifiable à une *sous–structure* de $\mathcal{B}$. Autrement dit, $\mathcal{B}$ est une *extension* de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{B}$ est un modèle de $\widetilde{TH}(\mathcal{A})$, $\mathcal{B}$ est indiscernable de $\mathcal{A}$ au premier ordre. Autrement dit, tout énoncé du premier ordre valide dans $\mathcal{A}$ est valide dans $\mathcal{B}$ et, surtout, aucun élément de $\mathcal{A}$ ne se trouve "déchu" d'une propriété du premier ordre par un élément de $\mathcal{B}$. À la suite d'Alfred Tarski et de Robert Vaught, on dit que $\mathcal{B}$ est une *extension élémentaire* de $\mathcal{A}$ (notation $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$) [11] ou encore un modèle *non-standard* de $TH(\mathcal{A})$. Le théorème de Löwenheim-Skolem est donc le théorème fondamental d'existence de modèles non-standard. Il montre que les théories admettant des modèles infinis sont non catégoriques (car deux structures de cardinal différent ne peuvent évidemment pas être isomorphes). On peut par exemple démontrer que $(\mathbb{Q}, <) \prec (\mathbb{R}, <)$. Il est donc impossible au premier ordre de distinguer entre l'ordre *dense* de $\mathbb{Q}$ et l'ordre *continu* de $\mathbb{R}$. Le continu est un concept du deuxième ordre.

On est ainsi conduit à relativiser la notion de catégoricité. Si α est un cardinal, on dira qu'une théorie Σ est α-catégorique si tous les modèles de Σ de *même* cardinal α sont isomorphes. Il existe de très nombreux travaux sur cette notion [12] D'après un théorème fondamental dû à Michael Morley

11. Si $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ il est évident que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$: "être une extension élémentaire de" est beaucoup plus fort que "être élémentairernent équivalent à".

12. Pour quelques précisions, cf. Petitot [1979].

(1964) il n'existe que quatre possibilités pour une théorie admettant des modèles infinis :

(i) soit elle est α-catégorique pour tout cardinal α infini ;

(ii) soit elle n'est α-catégorique que pour $\alpha = \aleph_0$ (infini dénombrable) ;

(iii) soit elle est α-catégorique pour tout cardlnal $\alpha > \aleph_0$ sans l'être pour $\alpha = \aleph_0$;

(iv) soit, évidemment, elle n'est α-catégorique pour aucun cardinal infini.

Par exemple, d'après un théorème de Cantor (1895), la théorie Σ_D des ensembles densément ordonnés sans premier ni dernier élément est $\aleph_0$-catégorique (son modèle de puissance $\aleph_0$ étant évidemment $(\mathbb{Q}, <)$). On peut montrer qu'elle n'est pourtant pas α-catégorique pour $\alpha > \aleph_0$. Dans l'autre sens, soit Σ_{CC_p} la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p. D'après un théorème de Steinitz (1910), elle est α-catégorique pour $\alpha > \aleph_0$ On peut montrer qu'elle n'est pourtant pas $\aleph_0$-catégorique.

Les notions d'équivalence élémentaire et d'extension élémentaire (qui sont des notions sémantiques d'origine syntaxique) permettent de généraliser encore la notion de catégoricité. Il est en effet naturel de se demander quelles théories caractérisent leurs modèles non pas à isomorphisme près (catégoricité) mais à "indiscernabilité relativement au langage" près. D'où les deux définitions suivantes .

(i) Une théorie Σ est *complète* si tous ses modèles sont élémentairement équivalents, i.e. si pour tous Σ-modèles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ on a $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

(ii) Une théorie Σ est *M-complète* si pour toute inclusion de Σ-modèles $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ on a $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$.

Il est évident que si $\mathcal{A}$ est une structure, sa théorie $TH(\mathcal{A})$ est complète. Toute théorie consistante Σ admet donc (théorème de Lindenbaum) une extension complète (par exemple $TH(\mathcal{A})$ si $\mathcal{A}$ est un modèle de Σ). En fait,

bien que de nature sémantique, la propriété de complétude peut, d'après le théorème de complétude, être caractérisée de façon purement *syntaxique*. On a en effet le théorème : une théorie Σ est complète si et seuIement si, pour tout énoncé φ, on à soit $\Sigma \vdash \varphi$ soit $\Sigma \vdash \neg\varphi$, i.e. si et seulement si $TH(\Sigma)$ est une théorie maxima1e. Par exemple, la théorie Σ des corps commutatifs ne peut pas être complète : tout corps commutatif k admet une caractéristique, mais l'énoncé affirmant que k est d'une caractéristique particulière p n'est pas déductible de Σ. En revanche on à le résultat suivant dû à Jerzy Łoś et RobertVaught (1954). Si Σ est une théorie sans modèle fini et α-catégorique pour un cardinal α infini alors Σ est complète. On sait par exemple, d'après le théorème de Steinitz, que la théorie Σ_{CC_0} des corps commutatifs algébriquement clos de caractéristique 0 (CC_0) est α-catégorique pour tout cardinal $\alpha > \aleph_0$ (en particulier tout CC_0 k possédant la puissance du continu est isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes : $k \simeq \mathbb{C}$). D'après le théorème de Łoś-Vaught, Σ_{CC_0} est complète. Donc tout CC_0 k (par exemple la clôture algébrique d'un corps de fonctions rationnelles) est élémentairement équivalent à $\mathbb{C}$ et, du coup, tout énoncé du premier ordre démontré pour $\mathbb{C}$ peut être automatiquement *transféré* à k (principe de Lefschetz). La. théorie Σ_{CC_p} des corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$ est également complète. De même, d'après le théorème de Cantor, la théorie Σ_D des ensembles densément ordonnés sans plus petit ni plus grand élément est complète.

En ce qui concerne la M-complétude, l'exemple prototypique en est fourni par la théorie (non complète) Σ_{CC} des corps algébriquement clos. C'est d'ailleurs pour pouvoir traduire en des termes purement *méta-mathématiques* – i.e. logiques – la propriété algébrique de clôture algébrique que Robinson a été conduit à la définition logique de la M-complétude.

4 Les modèles non-standard robinsonniens et la méthode des ultraproduits

4.1 Extensions élémentaires

Pour pouvoir légitimer l'usage de la notation leibnizienne il faut pouvoir satisfaire les contraintes suivantes.

(a) Il faut que les infinitésimales soient des entités que l'on puisse traiter comme des nombres c'est-à-dire auxquelles on puisse appliquer les opérations fondamentales. Cela est nécessaire pour que des expressions comme $x + dx$, dy/dx, etc. aient un sens.

(b) Étant donnée une fonction f d'argument $x \in \mathbb{R}$, il faut que l'on puisse étendre automatiquement et canoniquement f aux infinitésimales. Cela est par exemple nécessaire pour définir l'accroissement infinitésimal df de f en x par $df = f(x + dx) - f(x)$.

(c) Le symbole dx n'étant pas référentiable dans $\mathbb{R}$ (terme-zéro), il faut qu'il le devienne dans une extension ${}^*\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ qui soit, dans un sens à. préciser, indiscernable de $\mathbb{R}$.

En appliquant à l'analyse les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des modèles, l'ANS a montré qu'il est possible de satisfaire à ces trois contraintes et que cette "légitimation" des fictions leibniziennes simplifiait parfois de façon considérable la théorie de l'analyse. Esquissons-en les étapes principales.

Soit $\mathbb{R} \prec {}^*\mathbb{R}$ une extension élémentaire (stricte) de $\mathbb{R}$. ${}^*\mathbb{R}$ est appelé modèle non-standard (NS) de $\mathbb{R}$. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $n \in \mathbb{N}$. Comme l'énoncé affirmant qu'il n'existe aucun entier strictement compris entre n et $n + 1$ est un énoncé du premier ordre, il est valide dans ${}^*\mathbb{R}$. Si ${}^*\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers de ${}^*\mathbb{R}$ (dont l'existence est assurée par un résultat

que nous signalons plus bas), $\mathbb{N}$ est donc un segment *initial* de son extension élémentaire ${}^*\mathbb{N}$. Ainsi ${}^*\mathbb{N}$ est composé de $\mathbb{N}$ et de nombres entiers "infinis".${}^*\mathbb{R}$ comprend par conséquent des nombres "infinis" (c'est-à-dire plus grands que tout nombre de $\mathbb{R}$). Et comme ${}^*\mathbb{R}$ est un corps, les inverses de ces nombres infinis existent. Ce sont des infinitésimales. Comportant des infinitésimales, ${}^*\mathbb{R}$ n'est pas archimédien. Pourtant l'axiome d'Archimède étant du premier ordre, il est valide dans ${}^*\mathbb{R}$. Il n'y a là nulle contradiction. ${}^*\mathbb{R}$ n'est pas archimédien au sens strict c'est-à-dire lorsque l'on restreint dans l'axiome (A) le quantificateur $\exists n$ au sous-ensemble $\mathbb{N}$ de ${}^*\mathbb{R}$. Mais lorsque l'on affirme que (A) est valide dans ${}^*\mathbb{R}$ on suppose implicitement que cette quantification porte sur le sous-ensemble de ${}^*\mathbb{R}$ correspondant à $\mathbb{N}$ relativement à $\mathbb{R}$, c'est-à-dire sur ${}^*\mathbb{N}$ et non sur $\mathbb{N}$. Or ${}^*\mathbb{N}$ comprend des entiers infinis. ${}^*\mathbb{R}$ peut donc *à la fois* être non-archimédien au sens strict (relativement à $\mathbb{N}$) et archimédien au sens général (relativement à ${}^*\mathbb{N}$). Cela montre simplement que l'opposition fini / infini n'est pas absolue mais bien relative, comme l'avait affirmé Leibniz.

Il est clair que si l'on peut satisfaire dans ${}^*\mathbb{R}$ à l'ensemble des contraintes (a), (b) et (c), on résout du même coup le "paradoxe" des infinitésimales. En effet l'ε-terme $dx = \varepsilon_{\overline{G}}$ qui est un terme-zéro relativement à $\mathbb{R}$, admettra néanmoins des référents *consistants* dans ${}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$. Cela n'empêchera pas l'énoncé du premier ordre (I) d'être valide dans ${}^*\mathbb{R}$: il n'y a pas dans ${}^*\mathbb{R}$ d'infinitésimales relatives à${}^*\mathbb{R}$ puisque, relativement à ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{R}$ est archimédien. Si, relativement à ${}^*\mathbb{R}$, on quantifie sur $\mathbb{R}$ (et non sur ${}^*\mathbb{R}$) pour définir dx alors dx est référentiable dans ${}^*\mathbb{R}$. Mais si l'on quantifie sur ${}^*\mathbb{R}$, alors dx redevient, relativement à ${}^*\mathbb{R}$, un tenne-zéro. Il n'aura de référent consistant que dans une nouvelle extension élémentaire stricte ${}^*\mathbb{R} \prec {}^{**}\mathbb{R}$. On voit donc qu'il existe dans ce cas un lien étroit entre les "paradoxes de la référence" inhérents aux ε-termes et les "paradoxes de l'indiscernabilité" inhérents aux modèles

non-standard.

On peut ainsi anticiper la structure d'une extension élémentaire $\mathbb{R} \prec {}^*\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions (a), (b) et (c). L'extension ${}^*\mathbb{R}$ devra être obtenue par adjonction d'infinitésimales et saturation par les opérations de $\mathbb{R}$. Elle comprendra un ensemble μ d'infinitésimales possédant 0 comme seul élément standard. L'ensemble ${}^*\mathbb{R}_\infty$ des inverses des infinitésimales constitue la partie infinie (illimitée) de ${}^*\mathbb{R}$. Étant donnée l'invariance de $\mathbb{R}$ par translation (homogénéïté), la partie finie (limitée) ${}^*\mathbb{R}_f = {}^*\mathbb{R} - {}^*\mathbb{R}_\infty$ de ${}^*\mathbb{R}$ sera obtenue en associant à chaque $x \in \mathbb{R}$ l'ensemble μ. Autrement dit , ${}^*\mathbb{R}_f$ est "fibré" sur $\mathbb{R}$ par une projection $\pi : {}^*\mathbb{R}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. La "fibre" $\pi^{-1}(x)$ de π au-dessus de $x \in \mathbb{R}$ est l'ensemble $x + \mu$ qui possède comme ε-terme associé le symbole leibnizien $x + dx$. Si $\xi \in {}^*\mathbb{R}_f$ et si $x = \pi(\xi)$, alors ξ peut s'écrire $\xi = x + \alpha$ avec $\alpha \in \mu$. Le réel x s'appellera la *partie standard* de ξ et se notera $st(\xi)$. Les controverses autour de Leibniz venaient du fait que l'on ne disposait pas de ce concept et que l'on posait $\xi = x$, ce qui impliquait $\alpha = 0$. Comme l'a affirmé Jens Erik Fenstadt :

> "Leibniz pensait que les infinitésimales et leur calcul pouvaient être justifiés par l'introduction d'un type d'*éléments idéaux*. qui pouvaient être soit infiniment petits soit infiniment grands relativement aux nombres réels. Mais Leibniz et ses .successeurs, en particulier L'Hopital, n'étaient pas à même de développer de façon consistante une analyse basée sur ces idées. L'introduction de ${}^*\mathbb{R}$ le permet, ${}^*\mathbb{R}$ est une extension élémentaire de $\mathbb{R}$ qui possède les mêmes propriétés arithmétiques, La théorie évite les difficultés liées aux essais de Leibniz en distinguant avec précision ce qui est "égal" de ce qui est "infiniment voisin". Pour une infinitésimale dx et un dy correspondant, on a $f'(x) \approx dy/dx$, et donc

$f'(x) = st(dy/dx)$, alors que Leibniz voulait avoir $f'(x) = dy/dx$, ce qui est trop demander." [13]

4.2 Ultraproduits et ultrapuissances

Ceci dit, le théorème de Löwenheim-Skolem est un théorème général d'existence qui ne fournit aucun renseignement sur la structure des extensions élémentaires. Il est donc souhaitable de disposer d'une méthode générale et uniforme de *construction* de modèles NS. Une de celles-ci, très efficace, a été introduite par Jerzy Łoś en 1955. Elle est dite méthode des *ultraproduits* et des *ultrapuissances*. Elle est trop technique pour être exposée ici dans le détail. Nous nous borncrons donc à en esquisser les idées directrices. [14]

La méthode des ultraproduits est une méthode sémantique permettant de construire de nouveaux modèles à partir de modèles donnés. Soit $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, une famille de structures de même type. Leur produit direct $\mathcal{A}_I = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ n'est pas en général une structure de même type (un produit de corps, par exemple, n'est pas un corps). L'idée fondamentale de Łoś est alors d'*affaiblir* la notion de validité des énoncés en la *relativisant* à un ensemble D de parties de I. On dira qu'un énoncé φ est D-valide dans $\mathcal{A}_I$ (ou valide "presque partout", notation $\mathcal{A}_I \models_D \varphi$) si l'ensemble U des $i \in I$ tels que φ soit valide dans $\mathcal{A}_i$ appartient à $D : U = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in D$. On veut démontrer que, dans ce contexte, si D possède une structure précise – on va voir qu'il s'agit de la structure de "filtre" sur I – alors :

(i) la relation sur $\mathcal{A}_I$: $a = (a_i)_{i\in I} \sim b = (b_i)_{i\in I}$ si $U = \{i \in I, a_i = b_i\} \in D$, est une relation d'équivalence, et, dans ce cas, on notera $\widetilde{a}$ la classe

13. Fenstadt [1968], pp. 39-40.

14. Pour des précisions, cf. la bibliographie de Petitot [1979] et, par exemple, Bell-Slomson [1969].

d'équivalence de a ;

(ii) le quotient $\mathcal{A}_D = \mathcal{A}_I/\sim$ est une structure de *même type* que les $\mathcal{A}_i$.

Pour (i) il faut

(a) que $\sim$ soit réflexive : $a = (a_i)_{i\in I} \sim a = (a_i)_{i\in I}$. Cela exige que $I \in D$.

(b) que $\sim$ soit symétrique : cela est le cas quel que soit D.

(c) que $\sim$ soit transitive : $a = (a_i)_{i\in I} \sim b = (b_i)_{i\in I}$ et $b = (b_i)_{i\in I} \sim c = (c_i)_{i\in I}$ doit impliquer $a = (a_i)_{i\in I} \sim c = (c_i)_{i\in I}$. Soit $U = \{i \in I, a_i = b_i\}$, $V = \{i \in I, b_i = c_i\}$ et $W = \{i \in I, a_i = c_i\}$. Par hypothèse, $U, V \in D$. Par ailleurs il est évident que $U \cap V \subseteq W$. Comme on veut que $W \in D$ il faut que $U, V \in D$ implique d'une part $U \cap V \in D$ et, d'autre part, $W \in D$ si $Z \in D$ et si $Z \subseteq W$. Bref, D doit être fermé par intersections finies et extensions.

(d) Par ailleurs comme on ne veut pas que tous les a soient équivalents, on impose $\varnothing \notin D$.

Cette structure de D est ce que l'on appelle une structure de *filtre* sur I.

Pour (ii) on montre que si les structure $\mathcal{A}_i$ sont définies par des relations R d'un certain type τ et si R_I est la relation associée (pas forcément de même type τ) sur $\mathcal{A}_I$ alors la relation R_{Ipp} satisfaite si R_I est satisfaite presque partout est compatible avec la relation d'équivalence $\sim$. Elle passe donc au quotient et définit une relation de type τ sur $\mathcal{A}_D = \mathcal{A}_I/\sim$. $\mathcal{A}_D$ est donc bien une structure de même type que les $\mathcal{A}_i$.

Supposons alors que toutes les structures $\mathcal{A}_i$ soient des modèles d'une même théorie Σ. Le problème que s'est posé Łoś était de savoir à quelles conditions la D-validité dans $\mathcal{A}_I$ (i.e. $\mathcal{A}_I \models_D \varphi$) équivalait à la validÎté dans $\mathcal{A}_D$ (i.e. $\mathcal{A}_D \models \varphi$). Son résultat est le suivant. Le filtre D est un *ultrafiltre* (ou filtre maximal) sur D si en plus des relations de filtre on a : pour tout $U \subseteq I$, $U \in D$ si et seulement si $I - U \notin D$.

Dans ce cas, on a le

THÉORÈME (Łoś 1955). Si D est un ultrafiltre sur I alors $\mathcal{A}_D \models \varphi$ si et seulement si $\mathcal{A}_I \models_D \varphi$.

La preuve se fait par induction sur la complexité des énoncés.

• Le résultat est évident pour les énoncés atomiques $a = b$. $\mathcal{A}_I \models_D (a = b)$ si et seulement si $a_i = b_i$ D-presque partout, i.e. si et seulement si $\mathcal{A}_D \models (\widetilde{a} = \widetilde{b})$.

• Il en va de même pour les relations $R(a, b, \ldots)$.

• Pour une conjonction $\varphi = \psi \wedge \chi$ on doit considérer $U = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \psi\}$, $V = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \chi\}$ et $W = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \varphi\} = U \cap V$. $\mathcal{A}_D \models \varphi$ si et seulement si $\mathcal{A}_D \models \psi$ et $\mathcal{A}_D \models \chi$, donc, par induction, si et seulement si $\mathcal{A}_I \models_D \psi$ et $\mathcal{A}_I \models_D \chi$, donc si et seulement si $U, V \in D$. Mais alors $W = U \cap V \in D$ puisque D est un filtre et donc $\mathcal{A}_I \models_D \varphi$.

• Pour un quantificateur existentiel $\varphi = \exists x \psi(x)$, $\mathcal{A}_D \models \varphi$ signifie qu'il existe un $\widetilde{a} \in \mathcal{A}_D$ tel que $\mathcal{A}_D \models \psi(\widetilde{a})$. Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ un représentant de $\widetilde{a}$ dans $\mathcal{A}_I$. Par induction, $\mathcal{A}_D \models \psi(\widetilde{a})$ si et seulement si $\mathcal{A}_I \models_D \psi(a)$, i.e. si et seulement si $U = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \psi(a_i)\} \in D$. Par ailleurs, $\mathcal{A}_I \models_D \varphi$ si et seulement si $V = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in D$. Mais $U \subseteq V$ et, comme D est un filtre et que $U \in D$, $V \in D$ et donc $\mathcal{A}_I \models_D \varphi$. Réciproquement, si $\mathcal{A}_I \models_D \varphi$ on a $V = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \varphi\} \in D$. Soit alors $i \in V$. Il existe un élément α_i de $\mathcal{A}_i$ tel que $\mathcal{A}_i \models \psi(\alpha_i)$. Soit $a = (a_i)_{i \in I}$ un élément de $\mathcal{A}_I$ tel que $a_i = \alpha_i$ pour $i \in V$ et a_i quelconque pour $i \notin V$ (un tel a existe d'après l'axiome du choix). Par construction, $V \subseteq W = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \psi(a_i)\}$. Comme $V \in D$ et que D est un filtre, $W \in D$ et $\mathcal{A}_I \models_D \psi(a)$. Mais par induction $\mathcal{A}_I \models_D \psi(a)$ si et seulement si $\mathcal{A}_D \models \psi(\widetilde{a})$ et donc $\mathcal{A}_D \models \varphi$.

• Pour la négation, la structure d'ultrafiltre devient nécessaire. Soit un énoncé $\varphi = \neg\psi$. On a $\mathcal{A}_D \models \varphi$ si et seulement si on n'a pas $\mathcal{A}_D \models \psi$, i.e., par induction, si et seulement si on n'a pas $\mathcal{A}_I \models_D \psi$, autrement dit si et

seulement si $U = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \psi\} \notin D$. Réciproquement, $\mathcal{A}_I \models_D \varphi$ si et seulement si $V = \{i \in I, \mathcal{A}_i \models \neg\psi\} \in D$. Mais comme soit $\mathcal{A}_i \models \psi$, soit $\mathcal{A}_i \models \neg\psi$, $U = I - V$. Pour avoir l'équivalence entre $\mathcal{A}_D \models \varphi$ et $\mathcal{A}_I \models_D \varphi$ il faut donc que D ait la propriété d'ultrafiltre : $V \in D$ si et seulement si $U = I - V \notin D$.

• Avec la négation on peut démontrer les cas des disjonctions $\varphi = \psi \vee \chi$ et des quantifications universelles $\varphi = \forall x \psi(x)$.

Si D est un ultrafiltre sur I, on appelle $\mathcal{A}_D$ l'*ultraproduit* des $\mathcal{A}_i$ relativement à D. Si tous les $\mathcal{A}_i$ sont égaux, $\mathcal{A}_D$ s'appelle une *ultrapuissance*. Si les $\mathcal{A}_i$ sont des modèles de Σ les énoncés φ de Σ sont valides dans *tous* les $\mathcal{A}_i$. Comme $I \in D$ quel que soit D, tout ultraproduit $\mathcal{A}_D$ est lui aussi un modèle de Σ. Supposons alors tous les $\mathcal{A}_i$ égaux à une structure donnée $\mathcal{A}$ et soit $\Sigma = TH(\mathcal{A})$ dans $L_{\mathcal{A}}$. Il est trivial de plonger $\mathcal{A}$ dans l'ultrapuissance $\mathcal{A}_D$ et il découle immédiatement du théorème de Łoś que l'extension $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_D$ est *élémentaire* : $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}_D$.

Cette procédure de construction d'extensions élémentaires n'est évidemment intéressante que si elle permet de construire des extensions *strictes*,. Parmi les ultrafiltres il existe les ultrafiltres "triviaux" qui sont les ultrafiltres dits *principaux* du type $D_i = \{U \subseteq I,\ i \in U\}$. Si D est principal alors l'extension $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}_D$ est un *isomorphisme* et la méthode de Łoś n'a guère d'intérêt. Si I est fini, tous ses ultrafiltres sont principaux. Mais si I est infini, alors il existe sur I des ultrafiltres non principaux qui raffinent le filtre (dit filtre de Fréchet) $F_\infty = \{U \subset I,\ I - U \text{ est fini}\}$ des complémentaires des parties finies de I. On les appelle des ultrafiltres *libres*. À partir d'eux on peut construire pour les structures infinies des extensions élémentaires $\mathcal{A} \prec \mathcal{A}_D$ strictes, et donc des modèles NS de $TH(\mathcal{A})$. Il faut noter qu'il existe beaucoup d'ultrafiltres libres sur un I infini. Si I est de cardinal $\kappa \geq \aleph_0$, l'ensemble $\mathcal{P}(I)$ des

parties de I est de cardinal $2^{\aleph_0}$ et l'ensemble des ensembles de parties de I est de cardinal $2^{2^{\aleph_0}}$. Or d'après un théorème de Tarski il existe $2^{2^{\aleph_0}}$ ultrafiltres libres sur I, autrement dit le nombre *maximal* possible.

Comme exemple très simple d'extension élémentaire stricte,considérons $I = \mathbb{N}$ et D un ultrafiltre libre (i.e. non principal) sur I. Soit ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/D$. Un élément de ${}^*\mathbb{N}$ est une classe d'équivalence d'applications $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, les éléments de $\mathbb{N}$ correspondant aux f constantes. Par une construction "diagonale", il est facile de construire un élément ω *infini* de ${}^*\mathbb{N}$. Il suffit de prendre pour ω la classe de la fonction $f(n) = n$. D'ailleurs, comme nous l'avons rappelé plus haut, du Bois-Reymond avait déjà montré au siècle dernier que les classes de croissance des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ permettaient de construire des corps non archimédiens. Soit $p \in \mathbb{N}$. $V_p = \{n \in \mathbb{N},\ f(n) = n > p\}$ est de complémentaire fini, i.e. $V_p \in F_\infty \subset D$. Donc $V_p \in D$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ $\widetilde{f} = \omega > p$ est valide dans ${}^*\mathbb{N}$. ${}^*\mathbb{N}$ est un modèle NS de l'arithmétique.

La méthode des ultraproduits permet de donner des preuves *sémantiques* très simples de certains théorèmes fondamentaux de la théorie des modèles.

Considérons par exemple le théorème de *compacité* de Tarski, Scott et Morel : un ensemble (infini) d'énoncés Σ admet un modèle si et seulement si tout sous-ensemble fini (non vide) Δ de Σ admet un modèle. Si Σ admet un modèle $\mathcal{A}$, tous les Δ admettent évidemment $\mathcal{A}$ comme modèle. Réciproquement, soit $I = \mathcal{F}(\Sigma)$ l'ensemble des parties finies (non vides) de Σ. Pour $\Delta \in I$, Δ admet par hypothèse un modèle $\mathcal{A}_\Delta$. Soit.$\Delta^* = \{\Delta' \in I,\ \Delta \subseteq \Delta'\}$. Les Δ^* sont non vides et leurs intersections finies sont non vides car $\Delta_1^* \cap \ldots \cap \Delta_n^*$ contient $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$, puisque $\Delta_i \subseteq \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$. Les Δ^* engendrent ainsi un filtre et donc un ultrafiltre D. Soit $\mathcal{A}_D$ l'ultraproduit $\left(\prod_{\Delta \in I} \mathcal{A}_\Delta\right)/D$. Soit alors φ un énoncé de Σ. $\{\varphi\} = \Delta_0 \in I$ et donc $\mathcal{A}_{\Delta_0} \models \varphi$. Par conséquent

$\mathcal{A}_\Delta \models \varphi$ si $\Delta_0 \subseteq \Delta$. Donc

$$\Delta_0^* = \{\Delta \in I,\ \Delta_0 \subseteq \Delta\} \subseteq \{\Delta \in I,\ \mathcal{A}_\Delta \models \varphi\}$$

Comme $\Delta_0^* \in D$, $\{\Delta \in I,\ \mathcal{A}_\Delta \models \varphi\} \in D$ et l'on a $\mathcal{A}_D \models \varphi$. Cela montre que $\mathcal{A}_D$ est un modèle de Σ.

On peut également montrer facilement que certaines propriétés ne sont pas du premier ordre. Supposons par exemple que, pour un corps, la propriété σ_0 d'être de caractéristique 0 soit du premier ordre, comme l'est la propriété σ_p d'être de caractéristique p. Soit D un ultrafiltre libre sur l'ensemble (infini) P des nombres premiers et soit K un ultraproduit $\left(\prod_{p\in P} K_p\right)/D$ de corps K_p de caractéristique p. D'après le théorème de Łoś K est un corps. Il ne peut pas être de caractéristique p. En effet

$$U_p = \{q \in P,\ K_q \models \sigma_p\} = \{p\}.$$

Comme D est libre, $U_p \notin D$. Comme σ_p est du premier ordre, on ne peut pas avoir $K \models \sigma_p$. Donc K est de caractéristique 0. Si σ_0 était du premier ordre, $K \models \sigma_0$ impliquerait d'après Łoś $\prod_{p\in P} K_p \models_D \sigma_0$. Contradiction. Donc σ_0 n'est pas du premier ordre.

Dans le même esprit, on peut montrer que la théorie des corps algébriquement clos n'est pas finiment axiomatisable.

Mentionnons enfin un résultat de Jerome Keisler (1962) et Simon Kochen qui montre que les ultraproduits sont bien adaptés à l'étude de l'écart syntaxe / sémantique dans les théories du premier ordre : deux structures de même type sont élémentairement équivalentes si et seulement si elles possèdent des ultrapuissances isomorphes.

5 Les univers non réguliers et la dialectique interne / externe

La considération de modèles NS de $\mathbb{R}$ permet de satisfaire aux contraintes (a) et (c) de la section 4. Reste à satisfaire à la contrainte (b). Si ${}^*\mathbb{R}$ est un modèle NS de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, rien n'assure a pnori que l'on puisse prolonger f en une ${}^*f$ sur ${}^*\mathbb{R}$. Or cela est nécessaire pour pouvoir calculer "dans le style de Leibniz".

Pour que les entités ensemblistes construites ou dérivables à partir de $\mathbb{R}$ (sous-ensembles, ensembles de sous-ensembles, fonctions, familles de fonctions, etc.) soient *automatiquement* et *canoniquement* prolongeables à ${}^*\mathbb{R}$, on considère l'univers $\mathcal{U}$ de base $\mathbb{R}$ c'est-à-dire la classe, hiérarchisée en types, de *toutes* les entités ensemblistes dérivables de $\mathbb{R}$. Pour parler de $\mathcal{U}$ on utilise une logique des prédicats qui respecte la hiérarchie des types où les quantifications sont limitées i.e. ne concernent que des variables d'un type donné (par exemple $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que ...). On obtient ainsi la théorie d'*ordre supérieur* de $\mathbb{R}$. Mais nous rencontrons ici une difficulté. Aux ordres supérieurs, le théorème de complétude de Gödel n'est plus valide (théorème d'incomplétude de Gödel, 1931). Il en va de même du théorème de Löwenheim-Skolem. Toutefois l'on peut, en remarquant que la logique d'ordre supérieur pour $\mathbb{R}$ est une logique hiérarchisée du *premier ordre* pour $\mathcal{U}$, montrer que le théorème de Löwenheim-Skolem est généralisable à $\mathcal{U}$ et considérer des extensions élémentaires ${}^*\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$. Il s 'agit de concilier ces deux points de vue apparemment contradictoires. La réponse est la suivante. Elle fournit la clef de l'ANS.

Soit ${}^*\mathcal{U}$ un modèle NS de l'univers $\mathcal{U}$ de base $\mathbb{R}$. ${}^*\mathcal{U}$ est un univers de base ${}^*\mathbb{R}$. Mais alors que $\mathcal{U}$ est l'univers ensembliste *complet* de base $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire

constitué par la classe de *toutes* les entités dérivables de $\mathbb{R}$) il n'en va pas de même pour ${}^*\mathcal{U}$: ${}^*\mathcal{U}$ *n'est pas* l'univers complet de base ${}^*\mathbb{R}$.

Plus précisément, considérons la relation d'appartenance $\in$ de $\mathcal{U}$. Elle se prolonge en une relation $\in^*$ de ${}^*\mathcal{U}$.[15] ${}^*\mathcal{U}$ étant un sous-univers de l'univers de la théorie des ensembles envisagée, on peut y considérer aussi la relation d'appartenance $\in$. Mais les relations $\in$ et $\in^*$ *ne coïncident pas* : ${}^*\mathcal{U}$ ne comprend pas *tous* les sous-ensembles des ensembles qui le constituent. On peut appeller $*$-ensemble un élément X de ${}^*\mathcal{U}$ et noter $\widehat{X} = \{x \in^* X\}$ l'ensemble de ses $*$-éléments. Parmi les sous-ensembles il y a les $*$-sous-ensembles, c'est-à-dire les $\widehat{Y}$ pour $Y \subseteq {}^*X$. X est dit *interne* s'il est un $\widehat{Y}$ pour un $*$-sous-ensemble Y de X.

On dit que ${}^*\mathcal{U}$ est un modèle *non régulier* au sens de Leon Henkin.[16] Henkin a introduit cette notion vers la fin des années 40 pour éclairer le théorème d'incomplétude de Gödel. Ce théorème dit que, pour les théories d'ordre supérieur des structures infinies, la notion sémantique de validité est strictement plus large que celle, syntaxique, de dérivabilité : il existe des énoncés valides non démontrables. Pour retrouver la complétude il faut donc rendre plus contraignante la notion de validité et pour cela élargir la notion de modèle. Or Henkin remarqua que tous les modèles considérés étaient implicitement supposés "réguliers", c'est-à-dire "complets" pour la relation hiérarchique d'appartenance. Et en s'autorisant la considération de modèles non réguliers "incomplets" il montra que l'on retrouvait pour les ordres supérieurs l'adéquation syntaxe-sémantique du théorème de complétude du premier ordre.

Le fait que ${}^*\mathcal{U}$ soit non régulier conduit à distinguer dans ${}^*\mathcal{U}$ les entités

15. Pour des raisons de lisibilité typographique nous notons $\in^*$le prolongement de $\in$.
16. Cf. Henkin [1949], [1950].

internes (qui sont celles obtenues par extension de $\mathcal{U}$ à ${}^*\mathcal{U}$) [17] et les entités *externes* (qui sont tous les sous-ensembles non iuternes des ensembles de ${}^*\mathcal{U}$). Cette distinction permet de formuler simplement le "principe" de quantification dans les univers NS : tout énoncé de $\mathcal{U}$ est valide dans ${}^*\mathcal{U}$ à condition d'y restreindre les quantifications aux seules entités internes.

Le respect de ce principe permet d'êviter de nombreux paradoxes apparents. Soit par exemple ${}^*\mathbb{N}$ le modèle NS de $\mathbb{N}$ dans ${}^*\mathcal{U}$. Dans $\mathcal{U}$ l'énoncé (E) : "tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément" est valide. Par transfert à ${}^*\mathcal{U}$, cet énoncê devient valide dans ${}^*\mathcal{U}$. Pourtant il est clair que l'ensemble ${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ des entiers "infinis" de ${}^*\mathbb{N}$ ne saurait posséder de plus petit élément. Il n'y a là aucun paradoxe. Interprété dans ${}^*\mathcal{U}$, (E) signifie : "tout sous-ensemble *interne* de ${}^*\mathbb{N}$ admet un plus petit élément". Si l'ensemble ${}^*\mathbb{N}_\infty$ ne satisfait pas (E) c'est parce qu'il est un sous-ensemble *externe* de ${}^*\mathbb{N}$.

Il existe plusieurs critères d'internalité :

• Si X est standard, alors X est interne.

• Si X est standard et si tous ses $*$-éléments sont standard (en particulier si X est fini) tous ses $*$-sous-ensembles sont internes.

• Si X est un $*$-ensemble de ${}^*\mathcal{U}$ et si $Y \subseteq \widehat{X}$ est un de ses sous-ensembles, Y est interne si et seulement si il existe une formule $\varphi(y_1, \ldots, y_n, x)$ et des $a_1, \ldots, a_n \in {}^*\mathcal{U}$ tels que $Y = \{x \in X,\ \varphi(a_1, \ldots, a_n, x)\}$.

5.1 Élargissements ("enlargements")

Les univers NS les plus intéressants sont ceux appelés "enlargements"par Robinson. Considérons sur $\mathbb{R}$ la relation binaire qu'est la relation d'ordre

17. Si l'on appelle standard les entités de $\mathcal{U}$ considérées comme entités de ${}^*\mathcal{U}$, il est clair que les entites standard sont nécessairement des entités internes.

$x < y$. Elle possède la propriété suivante : si elle admet une "solution" pour un nombre fini d'éléments de son domalne, i.e. si étant donnés $x_1, \ldots, x_n$, il existe $y_1, \ldots, y_n$ tels que $x_1 < y_1, \ldots, x_n < y_n$, alors elle admet une "solution" *commune*, i.e. il existe y tel que $x_1 < y, \ldots, x_n < y$. Il suffit de prendre un y supérieur aux y_i. Dire qu'il existe dans ${}^*\mathbb{R}$ des nombres "infinis" signifie que la relation $<$ admet dans ${}^*\mathbb{R}$ une "solution" commune à *tous* les éléments de son domaine standard : $\exists y \in {}^*\mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x < y)$. Autrement dit, la relation d'ordre qui est sans majorant dans $\mathbb{R}$ admet un majorant dans ${}^*\mathbb{R}$.

Pour généraliser cette situation on dira qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ de $\mathcal{U}$ de domaine $D_{\mathcal{R}}$ et de codomaine $D'_{\mathcal{R}}$ est *concurrente* si pour tout ensemble fini $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments du domaine $D_{\mathcal{R}}$ il existe un élément y du codomaine $D'_{\mathcal{R}}$ satisfaisant $\mathcal{R}(x_1, y), \ldots, \mathcal{R}(x_n, y)$. Et l'on dira qu'une extension élémentaire ${}^*\mathcal{U}$ d'un univers $\mathcal{U}$ est un "élargissement" si pour *toute* relation concurrente $\mathcal{R}$ de $\mathcal{U}$, il existe un élément y^* de ${}^*D'_{\mathcal{R}}$ tel que $\mathcal{R}(x, y^*)$ soit valide pour *tout* élément x de $D_{\mathcal{R}}$. On peut montrer (en utilisant par exemple la méthode des ultraproduits et les théorèmes de complétude et de compacité) que tout univers admet des élargissements.

L'intérêt des élargissements est d'être "assez gros" pour que l'opposition interne / externe y soit à la fois opératoire et uniforme. Ils possèdent beaucoup d'entités NS : pour X infini les ${}^*X$ possèdent toujours des $*$-éléments NS et $\widehat{X}$ admet toujours un sous-ensemble externe. Si X est infini, la relation $x \in y$ avec y un sous-ensemble fini de X est concurrente. Il existe donc dans ${}^*\mathcal{U}$ un ensemble $*$-*fini* qui contient X. Autrement dit, toute entité infinie de $\mathcal{U}$ peut être plongée dans une entité $*$-finie de ${}^*\mathcal{U}$. Ce fait est évidemment crucial pour comprendre la "relativité" de l'opposition fini / infini.

6 Analyse classique et Analyse non-standard

À partir de ces résultats généraux de théorie des modèles, Robinson, Luxemburg et leurs écoles ont montré comment l'analyse classique pouvait être reformulée dans le "style de Leibniz". [18] En principe, cette reformulation ne saurait apporter de résultats vraiment nouveaux. Un métathéorème de Georg Kreisel (1969) affirme en effet que l'analyse NS est une extension inessentielle ("conservative") de l'analyse classique : tout théorème de l'analyse démontré par des méthodes NS est démontrable directement. Mais en fait la reformulation NS de l'analyse possède une grande vertu simplificatrice et une grande valeur heuristique.

6.1 Structure de ${}^*\mathbb{R}$ et de ${}^*\mathbb{N}$

Soit ${}^*\mathbb{R}$ le modèle NS de $\mathbb{R}$ dans l'élargissement ${}^*\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$. Les infinitésimales de ${}^*\mathbb{R}$ forment un idéal externe μ appelé par Robinson, en hommage à Leibniz, la *monade* de $\mathbb{R}$ en 0. On dit également que μ est le *halo* de 0. Le symbole dx n'est que l'ε-terme associé à μ : $dx = \varepsilon_x(x \in (\mu - \{0\}))$. Dans $\mathbb{R}$, $\mu - \{0\}$ est vide et dx est donc un terme-zéro.

La distance d de $\mathbb{R}$ se prolonge à ${}^*\mathbb{R}$ où elle devient une distance à valeurs dans ${}^*\mathbb{R}$. La relation $x \approx y$ (x et y sont infiniment voisins) définie par $x \approx y$ si $d(x, y) \in \mu$ est une relation d'équivalence sur ${}^*\mathbb{R}$ associée à la monade μ. Soit ${}^*\mathbb{R}_f$ (resp. ${}^*\mathbb{R}_\infty$) l'ensemble des nombres finis (resp. infinis) de ${}^*\mathbb{R}$. ${}^*\mathbb{R}$ se compose de ${}^*\mathbb{R}_\infty$ et de l'anneau ${}^*\mathbb{R}_f$ dont le quotient par l'idéal μ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

La structure de ${}^*\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels de ${}^*\mathbb{R}$, est bien celle

18. Cf. par exemple Robinson [1963] et [1966], Machover et Hirshfeld [1969], Luxemburg [1973] .

découverte par Veronese. Sur ${}^*\mathbb{R}$ la relation $a \sim b$ si (et seulement si) $|a-b| \in \mathbb{N}$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont les entiers *comparables* entre eux (commensurables, i.e. de même échelle). La classe d'équivalence de 0 est $\mathbb{N}$. Soit G_a la classe de $a \in {}^*\mathbb{N}$. G_a s'appelle parfois la *galaxie* de a. C'est un *intervalle*. En effet si $b \in G_a$, i.e. si $a \sim b$, et si $a < c < b$ alors $a \sim c \sim b$, i.e. $c \in G_a$. Si $a \in \mathbb{N}$, $G_a = \mathbb{N}$ a le type d'ordre ω de $\mathbb{N}$. Si $a \in ({}^*\mathbb{N} - \mathbb{N})$, alors G_a a le type d 'ordre $\omega^* + \omega$ de $\mathbb{Z}$ et donc le type d'ordre (l'ordinal) de ${}^*\mathbb{N}$ est $\alpha = \omega + (\omega^* + \omega)\theta$ où θ est un ordinal dépendant de ${}^*\mathbb{N}$. [19] D'après un théorème de Henkin et Kemeny, θ est dense sans premier ni dernier élément (i.e. ${}^*\mathbb{N}$ comprend une infinité dense d'échelles). Ce que disait déjà Veronese.

Remarquons également que $\mathbb{R}$ peut s'obtenir à partir d'un élargissement NS ${}^*\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}$. En effet les coupures de $\mathbb{Q}$ [20] sont "remplies" dans ${}^*\mathbb{Q}$ au sens où, si $D_1 < D_2$ est une coupure, il existe $y^* \in {}^*\mathbb{Q}$ intermédiaire $D_1 < y^* < D_2$. Cela est dû au fait que la relation "$x \in D_1 \cup D_2$ et $\exists y\ (x < y)$ si $x \in D_1$ ou $\exists y\ (y < x)$ si $x \in D_2$" est une relation *concurrente*. Comme ${}^*\mathbb{Q}$ est un élargissement, elle admet une solution globale y^* dans ${}^*\mathbb{Q}$. L'ensemble ${}^*\mathbb{Q}_f$ des éléments finis de ${}^*\mathbb{Q}$ [21] est un sous-anneau du corps ${}^*\mathbb{Q}$. Il n'est pas un corps car il contient l'ensemble μ des infinitésimales de ${}^*\mathbb{Q}$ dont les inverses ne sont pas finis. μ est un *idéal*[22] de ${}^*\mathbb{Q}_f$ et l'on a ${}^*\mathbb{Q}_f/\mu \simeq \mathbb{R}$. La raison en est que ${}^*\mathbb{Q}_f/\mu$ complète $\mathbb{Q}$ ("remplit" ses coupure) et que $\mathbb{Q}$ y est dense. Or $\mathbb{R}$ est le seul corps ordonné complet dans lequel $\mathbb{Q}$ soit dense.

De même, nous l'avons déjà noté, ${}^*\mathbb{R}_f$ est un sous-anneau du corps ${}^*\mathbb{R}$,

19. ω^* est le type d'ordre inverse de ω.

20. C'est-à-dire les partitions (D_1, D_2) de $\mathbb{Q}$ telles que $D_1 < D_2$.

21. C'est-à-dire l'ensemble des x de ${}^*\mathbb{Q}$ tel que $\exists y \in \mathbb{Q}\ \ |x| < |y|$.

22. La somme de deux infinitésimales est une infinitésimale et le produit d'une infinitésimale par un élément fini est infinitésimale.

μ en est un idéal et ${}^*\mathbb{R}_f/\mu \simeq \mathbb{R}$. Si $x \in {}^*\mathbb{R}_f$ et si $\widetilde{x} = x + \mu$ est sa classe d'équivalence pour $\approx$, $\widetilde{x}$ ne contient qu'un seul élément standard $st(x) \in \mathbb{R}$. En effet si $st(x)$ existe il est unique car deux nombres de $\mathbb{R}$ différents ne peuvent pas être $\approx$. Et par ailleurs un $st(x)$ existe. En effet prenons un $a \in \widetilde{x}$. Si $a \in \mathbb{R}$, a est un $st(x)$. Sinon, a définit deux classes $D_1 < D_2$ de $\mathbb{R}$ (les $y < a$ et les $y > a$) et un réel standard $r \in \mathbb{R}$. On a $a - r \in \mu$ et donc $r \in \widetilde{x}$.

Les sous-ensembles $\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{R}_f$, ${}^*\mathbb{R}_\infty = {}^*\mathbb{R} - {}^*\mathbb{R}_f$, $\mu(x)$ de ${}^*\mathbb{R}$ sont *externes*. Un théorème d'Elias Zakon permet de préciser leur type d'ordre. Soient δ, ${}^*\delta$, δ_f, δ_μ, les types d'ordre respectifs de $\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{R}$, ${}^*\mathbb{R}_f$, μ. Soit $\alpha = \omega + (\omega^* + \omega)\theta$ le type d'ordre de ${}^*\mathbb{N}$. On a :

• $\delta_f = \delta_\mu \delta$, car mettre un $\mu(x)$ autour de chaque $x \in \mathbb{R}$ revient, au niveau ordinal, à concaténer δ fois δ_μ ;

• ${}^*\mathbb{R}/{}^*\mathbb{R}_f$ a pour type d'ordre les rangs d'infinis positifs (θ) et négatifs (θ^*) et donc ${}^*\delta = \delta_f(\theta^* + 1 + \theta) = \delta_\mu \delta(\theta^* + 1 + \theta)$, le 1 central correspondant à ${}^*\mathbb{R}_f$;

• et enfin on a aussi $\delta_\mu = \delta_f \theta + 1 + \delta_f \theta^*$, formule ordinale qui correspond à la décomposition des infinitésimales en > 0, 0 et < 0 et au fait que, les infinitésimales étant des inverses de réels non-standard infinis > 0 et < 0 de différents rangs (type d'ordre θ^* et θ), elles sont aussi de différents rangs (type d'ordre θ et θ^*).

6.2 Formulations NS

Les définitions de base de l'analyse classique se simplifient considérablement si l'on fait usage de ${}^*\mathbb{R}$.

Considérons par exemple des suites de réels $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Les propriétés de limites définies à la Cauchy-Wierstrass sont facilement réinterprétables

en termes NS, c'est-à-dire en termes de l'extension NS ${}^*S : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ de la fonction $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit ω un entier infini dans ${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. S a pour limite s si et seulement si $s_\omega \approx s$ pout tout $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$. De même, les points limites de S sont les parties standard $st(s_\omega)$ des s_ω finis. Le théorème de Bolzano-Weierstrass disant que si S est bornée elle admet un point limite devient trivial. En effet si S est bornée les s_ω sont finis et si $s = st(s_\omega)$, s est alors un point limite.

La notion de *continuité* devient aussi formellement très simple. Soit par exemple f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par construction de ${}^*\mathcal{U}$, elle se prolonge automatiquement et canoniquement en une fonction ${}^*f$ de ${}^*\mathbb{R}$ dans ${}^*\mathbb{R}$. Dire que f est continue sur $\mathbb{R}$ signifie alors simplement que ${}^*f$ respecte la relation d'équivalence $x \approx x_0$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$: si $x \approx x_0$ alors ${}^*f(x) \approx f(x_0)$, autrement dit $\forall x \in \mathbb{R}\ ({}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x)))$. De même, dire que f est *uniformément* continue signifie qu'elle respecte la relation d'équivalence $\approx$ partout sur ${}^*\mathbb{R}$: si $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ et si $x \approx y$ alors ${}^*f(x) \approx {}^*f(y)$, autrement dit $\forall x \in {}^*\mathbb{R}\ ({}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu({}^*f(x)))$. De même, on montre que f (continue) est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si tous les quotients $\frac{{}^*f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ avec $x \in \mu(x_0)$ ont *même* partie standard, i.e. $f'(x_0) = st\left(\frac{df}{dx}\right)$. Ici dx est l'ε-terme associé à $\mu(x_0)$. Un des aspects de l'inconsistance de la notion leibnizienne d'infinitésimale devient ici très clair. C'est $st\left(\frac{df}{dx}\right)$ qui est un nombre réel bien défini et non pas $\frac{df}{dx}$ qui n'est qu'un symbole sans valeur numérique définie.

Toutes ces reformulations NS se prolongent à la topologie générale et à l'analyse fonctionnelle et y fournissent de précieux outils. Considérons par exemple un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. $\mathcal{T}$ est un ensemble de parties de X, l'ensemble des *ouverts*. Soit ${}^*\mathcal{T}$ son extension NS. Soit alors $x \in X$ et $\mathcal{F}_x$ le filtre des voisinages ouverts de x. Si la topologie $\mathcal{T}$ est "intéressante", $\mathcal{F}_x$ ne possède pas de plus petit élément (ce qui est une autre façon de dire que

le concept de limite est fondamental). Pourtant, on voudrait pouvoir parler en termes de points "infiniment voisins" de x. Cela est possible dans ${}^*\mathcal{T}$. Appelons en effet *monade* $\mu(x)$ de $x \in X$ l'intersection des ${}^*U$ pour $U \in \mathcal{F}_x$: $\mu(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_x} {}^*U$. Si ${}^*X$ est un élargissement, on peut montrer (lemme fondamental) qu'il existe un ouvert $V \in {}^*\mathcal{T}$ tel que $V \subseteq \mu(x)$. En effet, la relation binaire $R(U, V)$ "$x \in V \subseteq U$" sur les ouverts est concurrente car l'intersection d'un nombre *fini* d'ouverts contenant x est un ouvert contenant x. Comme ${}^*X$ est un élargissement par hypothèse, elle admet une solution "globale" $V \in {}^*\mathcal{T}$ telle que $x \in V \subseteq {}^*U$ pour tout U de $\mathcal{T}$ contenant x. Comme $\mu(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_x} {}^*U$, on a bien $x \in V \subseteq \mu(x)$. V est un "voisinage ouvert infinitésimal" de x et donc $\mu(x)$ est un voisinage infinitésimal de x. Son usage simplifie considérablement les définitions standard de la topologie générale. Par exemple :

• $U \subseteq X$ est *ouvert* si et seulement si ${}^*U$ contient les monades de chacun de ses points : pour tout $x \in U$, $\mu(x) \subset {}^*U$.

• $F \subseteq X$ est donc *fermé* si et seulement si pour tout $x \notin F$, $\mu(x) \cap {}^*F = \varnothing$.

• Si $A \subset X$, x est *adhérent* à A si et seulement si $\mu(x) \cap {}^*A \neq \varnothing$.

• $\mathcal{T}$ est *séparée* (i.e. on peut toujours séparer deux points par des voisinages ouverts disjoints) si et seulement si pour tous points différents $x \neq y$. les monades $\mu(x)$ et $\mu(x)$ sont disjointes.

• $x \in X$ est *isolé* pour $\mathcal{T}$ si et seulement si $\mu(x)$ est un ensemble *interne*.

• Appelons *quasi-standard* (q.s.) tout point $y \in {}^*X$ qui appartient à la monade $\mu(x)$ d'un point standard $x \in X$. L'ensemble ${}^*X_{q.s.}$ des points q.s. de ${}^*X$ est donc la réunion $\bigcup_{x \in X} \mu(x)$ des monades de X.[23] $(X, \mathcal{T})$ est *compact* si et seulement si ${}^*X = {}^*X_{q.s.}$. La démonstration est intéressante. Supposons que X soit compact et qu'il existe cependant un point $x \in {}^*X$ qui ne soit

23. Plus haut, l'ensemble ${}^*\mathbb{R}_f$ des nombres finis de ${}^*\mathbb{R}$ est ${}^*\mathbb{R}_{q.s.}$.

pas q.s. Pour chaque $y \in X$ il existera un ouvert $U \ni y$ tel que $x \notin {}^*U$. Soit $\mathcal{U} = \{U_\nu\}$ l'ensemble des ouverts U de $\mathcal{T}$ tels que $x \notin {}^*U$. $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X puisque tout y de X est dans l'un des U_ν. Comme X est compact par hypothèse, on peut extraire de $\mathcal{U}$ un sous-recouvrement ouvert *fini* de X, $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Comme $U_1 \cup \ldots \cup U_n = X$ est un énoncé du premier ordre, on a ${}^*U_1 \cup \ldots \cup {}^*U_n = {}^*X$. Mais par construction $x \notin {}^*U_1 \cup \ldots \cup {}^*U_n$. Contradiction. Donc tous les points de X sont q.s. Réciproquement, supposons X non compact. Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X tel que pour tout sous-recouvrement ouvert fini $\mathcal{U}_f$ l'union $\cup\mathcal{U}_f \neq X$. Considérons alors la relation $R(U, y)$ "$U \in \mathcal{U}, y \in X, y \notin U$". Elle est concurrente. Comme ${}^*X$ est un élargissement, elle admet une solution "globale" $x \in {}^*X$ et, pour *tout* $U \in \mathcal{U}$, $x \notin {}^*U$. Donc x n'est pas q.s. car si $y \in X$ il existe un $U \in \mathcal{U}$ tel que $y \in U$ (puisque $\mathcal{U}$ est un recouvrement) et comme $x \notin {}^*U$, $x \notin \mu(y)$.

• Si la topologie de X est séparée, les compacts $K \subseteq X$ sont fermés. En effet K est fermé si pour tout x dans le complémentaire de K (qui est un ouvert) la monade $\mu(x)$ n'intersecte pas ${}^*K$. Supposons alors K compact avec un $x \notin K$ et néanmoins un $y \in \mu(x) \cap {}^*K$. Nous venons de voir que la compacité implique que y est q.s., i.e. qu'il existe $z \in K$ avec $y \in \mu(z)$. Donc $y \in \mu(x) \cap \mu(z)$. On a par conséquent $\mu(x) \cap \mu(z) \neq \varnothing$ avec $x \notin K$ et $z \in K$, i.e. $x \neq z$. Mais comme la topologie de X est séparée on devrait alors avoir $\mu(x) \cap \mu(z) = \varnothing$. Contradiction.

• Comme plus haut pour $\mathbb{R}$, une application $f : X \longrightarrow Y$ entre espaces topologiques est continue si et seulement si $\forall x \in X \ \ ({}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x)))$.

• Le fait que l'image continue $f(K)$ d'un compact K est compacte devient trivial. Il faut en effet montrer que si z est un point de ${}^*f(K)$ il existe un y standard de $f(K)$ tel que $z \in \mu(y)$. Mais comme z est dans ${}^*f(K)$, il existe un $x \in {}^*K$ tel que $z = {}^*f(x)$. Comme K est compact par hypothèse, il existe

un $u \in K$ tel que $x \in \mu(u)$. Comme f est continue, ${}^*f(\mu(u)) \subseteq \mu(f(u))$ et donc ${}^*f(x) = z \in \mu(f(u))$. On peut alors choisir $y = f(u)$.

• Une fonction continue $f : X \longrightarrow Y$ est *uniformément* continue si et seulement si pour tous $x, y \in {}^*X$ (et pas seulement $x, y \in X$) on a $x \approx y$ implique ${}^*f(x) \approx {}^*f(x)$, i.e. $\forall x \in {}^*X \ \ ({}^*f(\mu(x)) \subseteq \mu({}^*f(x)))$.

• Il devient alors évident que si X est compact et f continue alors f est uniformément continue. En effet soient $x, y \in {}^*X$ tels que $x \approx y$. Comme X est compact, il existe un $z \in X$ standard tel que $x \approx y \approx z$. Comme f est continue ${}^*f(x) \approx {}^*f(y) \approx {}^*f(z)$. Donc f est uniformément continue.

• La fameuse erreur de Cauchy affirmant qu'une suite convergente $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues converge vers une fonction continue devient elle aussi évidente. Il faut la convergence uniforme. En effet F converge vers f si et seulement si pour tout $x \in X$ standard et tout $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ (voir plus haut) on a l'équivalence $f_\omega(x) \approx f(x)$. La convergence est uniforme si l'équivalence est vérifiée pour tout $y \in {}^*X$. On veut montrer que, pour $x \in X$ et $y \in {}^*X$, $y \approx x$ implique ${}^*f(y) \approx f(x)$. Comme f_ω est continue on a ${}^*f_\omega(y) \approx f_\omega(x)$. Comme F converge vers f, on a $f_\omega(x) \approx f(x)$. Mais si la convergence est uniforme, on a de plus ${}^*f(y) \approx {}^*f_\omega(y)$. Donc ${}^*f(y) \approx {}^*f_\omega(y) \approx f_\omega(x) \approx f(x)$ qui est l'équivalence désirée. On voit que sans la convergence uniforme on ne peut pas conclure.

• Si f est une application $f : X \longrightarrow Y$, sa localisation en $x \in X$ – son "*germe*" en x – peut être définie comme la restriction ${}^*f \restriction_{\mu(x)}$.

• Etc. On voit à quel point l'ANS permet de ramener à des propriérés très simples des propriétés topologiques sophistiquées.

Une problématique originale issue de l'approche NS des topologies consiste à *inverser* le point de vue, à se donner une structure "monadique" de $\mu(x)$ sur X et de voir dans quelle mesure elle peut correspondre à une topologie.

C'est ce qu'a cherché à faire par exemple Christian Puritz.[24] On se donne des $\mu(x)$ qui sont des monades de filtres. Cela signifie qu'on se donne des filtres $\mathcal{F}_x$ (de voisinages) sur X,qu'on considère un élargissement de l'univers de base X et que l'on définit les $\mu(x)$ par $\mu(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_x} {}^*U$. Disons qu'un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x si $\mu(\mathcal{F}) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} {}^*U \subseteq \mu(x)$. Soit $\mathcal{D}_x$ l'ensemble des *ultrafiltres* convergeant vers $x \in X$. $\mathcal{D}_x$ est une entité standard qui se prolonge à ${}^*X$. Soit alors $\mathcal{G}$ un $*$-filtre. Sa partie standard $st(\mathcal{G})$, c'est-à-dire l'ensemble des $U \subseteq X$ tels que ${}^*U \in \mathcal{G}$, est un filtre sur X. Si $y \in {}^*X$ on pose ${}^*\mu(y) = \bigcup_{\mathcal{G} \in {}^*\mathcal{D}_y} \mu(st(\mathcal{G}))$. Comme la construction des monades est stable par réunion, ${}^*\mu(y)$ est encore la monade d'un filtre. Mais pour $x \in X$ standard on peut avoir ${}^*\mu(x) \neq \mu(x)$.

La donnée des $\mu(x)$ définit une pré-topologie $\mathcal{T}$ sur X. Si de plus, pour tout $y \in {}^*X$, $y \in \mu(x)$ implique ${}^*\mu(y) \subseteq \mu(y)$ alors la pré-topologie $\mathcal{T}$ est une topologie. Si de plus, pour tout $y \in {}^*X$, $y \notin \mu(x)$ implique ${}^*\mu(y) \cap \mu(x) = \varnothing$ alors la topologie $\mathcal{T}$ est *régulière*, ce qui signifie que pour tout $x \in X$ les voisinages fermés de x engendrent le filtre $\mathcal{F}_x$. Si de plus, pour tous $y, z \in {}^*X$, ${}^*\mu(y) \cap {}^*\mu(z) = \varnothing$ implique qu'il existe un $u \in {}^*X$ tel que $y, z \in {}^*\mu(u)$, alors la topologie $\mathcal{T}$ est *normale*, ce qui signifie que la propriété de séparation de points différents par des voisinages ouverts disjoints s'étend aux fermés disjoints.

7 L' approche syntaxique d'Edward Nelson

Dans l'approche de Robinson, on travaille sur une extenslon élémentaire et donc sur *deux* modèles. La syntaxe utilisée est celle habituelle, mais elle opère sur deux structures indiscernables. La méthode est sémantique. L'idée

24. Cf. Puritz [1972] et [1976] .

d'Edward Nelson a été de ne garder que le modèle standard $\mathbb{R}$ mais d'y opérer avec une syntaxe *enrichie* comprenant le prédicat *st* (standard) et des axiomes en régissant l'emploi. La méthode est donc syntaxique. Les axiomes y codifient les techniques de démonstration de l'ANS à la Robinson.

Dans son *Internal Set Theory* (IST) Nelson adjoint à ZFC les trois schémas :

(T) Principe de *transfert* : $\forall^{st}x\ A(x) \Longrightarrow \forall x\ A(x)$ ou, de façon équivalente,. $\exists x\ \neg A(x) \Longrightarrow \exists^{st}x\ \neg A(x)$, où A est une formule interne ne contenant pas de paramètre standard et où $\forall^{st}x$ signifie $\forall x\ (x \text{ standard} \Longrightarrow)$.

(I) Principe d'*idéalisation* : soit $B(x,y)$ une relation interne : $\forall^{st\ fini}z\ \exists x\ (\forall y \in z)\ B(x,y) \Longleftrightarrow \exists x\ \forall^{st}y\ B(x,y)$, autrement dit si B peut être simultanément satisfaite par tous les y de chaque z standard fini grâce à un x dépendant de z, alors elle peut l'être par tous les y standard grâce à un x global.

(S) Principe de *standardisation* : soit $C(z)$ une formule quelconque (éventuellement externe) ; on a $\forall^{st}x\ \exists^{st}y\ \forall^{st}z\ (z \in y \Longleftrightarrow z \in x \wedge C(z))$, autrement dit si l'on se donne un x *standard*, on peut construire un sous-ensemble *standard* y de x dont les éléments *standard* z sont exactement les éléments standard de x satisfaisant C (y *n'est pas* le sous-ensemble des z standard de x satisfaisant C).

Soit alors $\mathbb{R}$ le modèle standard construit dans ZFC. On peut facilement y définir des infinitésimales en posant que $x \neq 0$ est infinitésimal si $\forall^{st}\varepsilon > 0\ (|x| \leq \varepsilon)$. La restriction de la quantification aux éléments standard rend la définition consistante. De même, on dira que x est limité, c'est-à-dire fini relativement à l'échelle des réels standard, si $\exists^{st}r > 0\ (|x| \leq r)$.

Pour Nelson, les ensembles externes sont "illégaux". Ce sont des collections qui ne sont pas des ensembles. Cela vient du fait que IST ne travaille que dans *un seul* modèle. Mais avec un tel point de vue syntaxique, on peut néanmoins retrouver sémantiquement l'ANS de Robinson. Il suf-

fit de considérer un *modèle* $\mathcal{M}$ (dans un univers $\mathcal{U}$ de ZFC) de la théorie axiomatique IST. $\mathcal{M}$ consistera en un ensemble $\mathcal{J}$ (au sens de $\mathcal{U}$) d'entités *internes*, d'un ensemble $\mathcal{I}$ d'entités *st* (standard) et d'une relation $\in$ dans $\mathcal{J}$ interprétant la relation $\in$ de IST. Il ne faut pas confondre $\in$ et la relation d'appartenance dans $\mathcal{U}$ que l'on notera $\underline{\in}$. On interprète alors x *st* par $x \underline{\in} \mathcal{I}$. Soit $x \underline{\in} \mathcal{J}$ une entité *interne*. On note ${}^*x = \{y \underline{\in} \mathcal{J},\ y \in x\}$, i.e. $y \underline{\in} {}^*x \iff y \in x$. Les ${}^*x$ sont les ensembles internes du modèle, et les ensembles qui ne sont pas du type ${}^*x$ sont donc les ensembles *externes* (qui cette fois existent).

Soit alors ${}^*\mathbb{R}$ le modèle de $\mathbb{R}$ daus $\mathcal{M}$. On définit $\mathbb{R} = \{x \underline{\in} {}^*\mathbb{R},\ x\ st\}$ et l'on obtient *dans* $\mathcal{M}$ une extension élémentaire $\mathbb{R} \prec {}^*\mathbb{R}$ à la Robinson. Cela montre bien qu'IST est un moyen d'exprimer *syntaxiquement* l'ANS.

Une telle résorption dans $\mathbb{R}$ de la relativité fini / infini peut conduire dans un premier temps à. des résultats apparemment contre-intuitifs. Par exemple, il existe un ensemble F *fini* (non *st*) qui contient *tous* les ensembles *standard*. En effet, soit $B(F, x)$ la relation $(x \in F) \wedge (F \text{ fini})$. Elle est interne. Appliquons le principe d'idéalisation (I) :

$$\forall^{st\ fini} z\ \exists F\ (\forall x \in z)\ ((x \in F) \wedge (F \text{ fini})) \iff \exists F\ \forall^{st} x\ ((x \in F) \wedge (F \text{ fini}))\ .$$

La formule de gauche est évidente. On n'a qu'à y prendre $F = z$. S'il n'y a pas de paradoxe c'est parce que la fonnule interne $x \in F$ contient le paramètre *non st* F. Sinon, d'après (T), on aurait $\forall^{st} x\ (x \in F) \Longrightarrow \forall x\ (x \in F)$ ce qui serait absurde. On démontre également, et c'est essentiel, que si X est *infini* alors il comprend un élément x non-standard. Comme le dit Jean-Michel Salanskis : ces éléments non-standard

> "sont les 'témoins' de l'infinité des ensembles infinis de ZFC à l'intérieur de ceux-ci",

ou encore la trace de l'écart irréductible entre théorie et objet. [25]

8 La relativité fini / infini et la controverse formalisme / intuitionnisme

L'intérêt philosophique et épistémologique principal de l'ANS est peut-être de permettre de comprendre pourquoi "les règles du fini réussissent dans l'infini" et d'éclairer d'un jour nouveau les généralisations au cas "infini" de théories qui sont élémentaires dans le cas "fini". Citons deux exemples.

8.1 La théorie de Fourier

Considérons la théorie de Fourier classique c'est-à-dire l'étude de la décomposition en série trigonométrique d'une fonction périodique définie sur le cercle unité $T = \mathbb{S}^1$ des nombres réels modulo 2π. Dans le cas fini, c'est- à-dire lorsqu'on remplace T par un polygône régulier i.e. par l'ensemble fini $T_p = \{0, \frac{2\pi}{p}, \ldots, \frac{2\pi(p-1)}{p}\}$ $(p \in \mathbb{N})$, cette théorie devient triviale. Parmi les fonctions sur T_p à valeurs complexes $f : T_p \longrightarrow \mathbb{C}$, il en est de particulières : les fonctions trigonométiques $h_k(l) = e^{\frac{2i\pi kl}{p}}$ avec $\frac{2\pi l}{p} \in T_p$ et $k \in \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. h_0 est la fonction constante 1, h_1 envoie T_p sur les affixes complexes de ses sommets (c'est en quelque sorte l'identité), $h_k(l) = h_1(l)^k$. Autrement dit au lieu d'avoir tourné le rayon initial de T de $\frac{2\pi l}{p}$, on l'a tourné de k fois $\frac{2\pi l}{p}$ et si on l'a tourné de p fois on a fait un tour complet et l'on retrouve h_0 : $h_{2\pi} = h_0$.

On définit la transformée de Fourier de f comme la fonction $\widehat{f} : \mathbb{Z}_p =$

25. Salanskis [1986].

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui associe à $k \in \mathbb{Z}_p$ la valeur

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{l=p-1} f\left(\frac{2\pi l}{p}\right) e^{-\frac{2i\pi kl}{p}}.$$

Il est trivial de vérifier qu'on retrouve f par la formule inverse

$$f\left(\frac{2\pi l}{p}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_p} \widehat{f}(k) e^{\frac{2i\pi kl}{p}} \ .$$

On peut définir des produits scalaires naturels dans les espaces fonctionnels des f et des $\widehat{f}$ au moyen des formules (où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de z)

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{l=p-1} f\left(\frac{2\pi l}{p}\right) \overline{g}\left(\frac{2\pi l}{p}\right)$$
$$\left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}_p} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}}(k) \ .$$

Pour $\langle f, g\rangle$ les h_k sont de norme 1 ($\|h_k\| = 1$) et orthonormaux ($\langle h_k, h_{k'}\rangle = 0$ si $k \neq k'$). On obtient donc un espace de Hilbert de dimension finie p pour ces fonctions f. Il est facile de vérifier que $\langle f, g\rangle = \left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle$.

La théorie des transformées de Fourier des $f : T \longrightarrow \mathbb{C}$, revient à démontrer des formules analogues en décomposant les f en superpositions d'"harmoniques" $h_n(x) = e^{inx}$ ($x \in T$, $n \in \mathbb{Z}$). On définit la *transformée* de Fourier de f, $\widehat{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$, par les intégrales sur T

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

et l'on définit la *série* de Fourier $\widetilde{f}$ de f par

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx}$$

On voudrait qu'il s'agisse d'une formule inverse et que $\widetilde{f}$ soit tout simplement f. Mais l'on rencontre de nombreuses difficultés dans l'étude de ces séries trigonométriques.

Pour l'espace des f on a le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx$$

pour lequel les $h_n(x) = e^{inx}$ forment un système orthonormé complet. et la série de Fourier $\widetilde{f}$ de f est simplement la décomposition de f par rapport à cette base avec les "coordonnées" $\widehat{f}(n) = \langle f, h_n\rangle$.

On a aussi pour l'espace des $t : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ (auquel appartiennent les $\widehat{f}$) le produit scalaire

$$\langle t, r\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} t(n)\overline{r}(n)$$

et l'on démontre la formule de Parseval $\langle f, g\rangle = \left\langle \widehat{f}, \widehat{g}\right\rangle$ qui montre que la transformée de Fourier est une *isométrie* entre les deux espaces de Hilbert des f et des t. Mais répétons que l'on rencontre de nombreuses difficultés d'analyse si l'on veut rendre tout cela vraiment rigoureux.

Il est certes intuitif que le cas T difficile est une "limite" du cas simple T_p qui en est une approximation finie. Pour suivre cette idée, on part des correspondances suivantes. Les pas de T_p sont de $\frac{2\pi}{p}$ et les positions x sur $T = \mathbb{S}^1$ correspondent aux $\frac{2\pi l}{p}$ avec $dx = \frac{2\pi}{p}$. Donc une intégrale de Riemann $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ correspond à une somme $\sum_l f\left(\frac{2\pi l}{p}\right)\frac{2\pi}{p}$ et une intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$ à une somme $\frac{1}{p}\sum_l f\left(\frac{2\pi l}{p}\right)$. Quant aux fonctions trigonométriques $e^{\frac{2i\pi kl}{p}}$, elles correspondent à e^{inx} avec $k \in \mathbb{Z}_p$ correspondant à $n \in \mathbb{Z}$. Ces correspondances se font bien correspondre les formules des cas T_p et T.

Le problème est que T_p est une approximation déplorable de T en ce qui concerne les transformations et séries de Fourier. Pour passer à la limite il est donc utile de passer par un univers NS. Soit ${}^*\mathcal{U}$ un élargissement de $\mathcal{U}$. Soit ${}^*T$ l'extension de T dams ${}^*\mathcal{U}$ et soit ω un entier NS "infini" assez grand, c'est-à-dire divisible par *tous* les entiers $n \in \mathbb{N}$ (il en existe). Par transfert, la théorie finie (triviale) est valide pour ${}^*T_\omega$. Mais ω étant un infini assez

grand, ${}^*T_\omega$ est une excellente approximation de T. Plus précisément, T n'est rien d'autre que la partie standard de ${}^*T_\omega$. Pour trouver la décomposition de f en série de Fourier, on considérera donc son extension ${}^*f$ à ${}^*T$, puis la restriction ${}^*f_\omega$ de ${}^*f$ à ${}^*T_\omega$ et l'on prendra les parties standard.

Il s'agit là d'une stratégie générale : pour passer du fini à l'infini (continu) on passe par transfert du fini à un infini bien choisi et l'on prend les parties standard.

8.2 L'analyse spectrale

Un autre exemple intéressant est celui de l'*analyse spectrale* des opérateurs linéaires. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, par exemple sur $\mathbb{C}$, et soit T un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow E$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et si les $T(e_i)$ sont de composantes t_i^j relativement à cette base, T est décrit par la matruce $n \times n$ $A_T = \left(t_i^j\right)$. L'analyse spectrale de T consiste à trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de A_T, c'est-à-dire les $x \in E$ et les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T(x) = \lambda x$. Si λ est une valeur propre de T, l'opérateur $T - \lambda I$ (I l'identité de E) a un noyau non nul et n'est donc pas inversible. Pour cela il est nécessaire et suffisant que le determinant $D(\lambda)$ de la matrice $A_T - \lambda I$ soit nul.

$D(\lambda) = 0$ est un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ appelé l'*équation caractéristique* de T (elle est invariante par changement de base). Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, elle possède n racines $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Celles-ci constituent le *spectre* de T. Génériquement, les λ_i sont distinctes et il existe alors pour chaque λ_i un sous-espace propre E_i de dimension 1 sur lequel T se réduit à l'homotéthie $T_i(x) = \lambda_i x$. T est la "somme" des homotéthies T_i. Si h_i engendre E_i et si l'on prend pour base la base dépendant de T $(h_1, \ldots, h_n)$ alors, dans cette base, la matrice A_T de T devient *diagonale* :

$$A_T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Lorsqu'il existe des racines multiples la situation est plus complexe et A_T se décompose en blocs (théorème de Jordan).

C'est cette théorie finie assez simple qui a été généralisée en une analyse spectrale des opérateurs linéaires sur des espaces de Hilbert de dimension infinie (dénombrable) généralisant les $\mathbb{C}^n$, avec leurs produits scalaires $\langle x, y\rangle$, leurs normes $\|x\| = \langle x, x\rangle$ et leurs métrique $d(x, y) = \|x - y\|$.[26] Ces espaces H sont métriquement complets et possèdent des bases orthonormales de vecteurs unitaires orthogonaux. Mais une telle généralisation s'est heurtée à de nombreuses difficultés. Par exemple :

• Les sous-espaces linéaires de H ne sont pas nécessairement topologiquement fermés et un opérateur linéaire T n'est pas forcément continu.

• On doit distinguer les valeurs propres λ de T (il existe un x tel que $T(x) = \lambda x$) et les valeurs spectrales ($T - \lambda I$ n'est pas inversible). En effet que $T - \lambda I$ soit non inversble n'implique pas nécessairement qu'il existe un x tel que $T(x) = \lambda x$.

• Le spectre de T peut posséder des parties continues.

Dans [1966] (chapitre VII) Robinson a montré que l'ANS permet de ramener au cas $*$-fini l'analyse des opérateurs linéaires pas trop "pathologiques", c'est-à-dire *compacts* et *auto-adjoints*.

On considère un élargissement ${}^*H$ de H et les nombres N (éventuellement infinis au sens standard) tels que $\|T(x)\| \leq N \|x\|$ pour tout x de H. La borne inférieure des N (éventuellement infinie) est la norme $\|T\|$ de T. T est dit

26. Souvent les x, y sont des fonctions f, g.

borné si $\|T\|$ est finie. Si T est borné il est nécessairement continu. On montre alors que T est borné si et seulement si ${}^*T$ transforme tout point fini de ${}^*H$ en un autre point fini, autrement dit si l'ensemble ${}^*H_f$ des points finis de ${}^*H$ est *stable* par ${}^*T$. En effet si T est borné, $\|{}^*T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\|$ pour tout x de ${}^*H$. $\|T\|$ est finie par hypothèse et donc si $\|x\|$ est finie, $\|{}^*T(x)\|$ est également finie. Réciproquement si ${}^*H_f$ est stable par ${}^*T$ et si T n'est cependant pas borné, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points finis (par exemple de norme 1) de H telle que la suite des $\|{}^*T(x_n)\|$ ne soit pas bornée. Il existe alors un $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ infini NS tel que $\|{}^*T(x_\omega)\|$ soit infini, i.e. ${}^*T(x_\omega) \notin {}^*H_f$. Mais comme $\|x_\omega\| = 1$, $x_\omega \in {}^*H_f$ et donc il faudrait ${}^*T(x_\omega) \in {}^*H_f$. Contradiction. T est donc borné. On peut de même montrer que T est borné si et seulement si la monade $\mu(0)$ de ${}^*H$ est ${}^*T$-stable.

Rappelons que T est dit *compact* si pour toute partie bornée B de H, l'adhérence (la fermeture) $\overline{T(B)}$ de son image $T(B)$ est compacte. On montre que T est compact si et seulement si il transforme les points finis de ${}^*H$ en points quasi-standard (voir plus haut) et pas seulement en points finis, autrement dit s'il envoie ${}^*H_f$ dans ${}^*H_{q.s.}$. Par ailleurs, on dit que T est auto-adjoint si pour tous $x, y \in H$, $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$, ce qui implique que $\langle T(x), x\rangle = \langle x, T(x)\rangle = \overline{\langle T(x), x\rangle}$ est un nombre réel. [27]

Le cas des opérateurs auto-adjoints compacts généralise directement le cas de la dimension finie parce que, si T est compact, le fait que $T - \lambda I$ soit inversible équivaut au fait que $T-\lambda I$ soit injective. Les valeurs spectrales sont des valeurs propres et l'on a simplement une infinité dénombrable de valeurs propres λ_n. Un théorème – le théorème de Hilbert-Schmidt – dit alors que cet ensemble est borné par la plus grande valeur propre et s'accumule vers 0

27. Le produit scalaire est "hermitien" et donc $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. Pour les espaces de Hilbert de fonctions de carré intégrable, $\langle f, g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx$ et cette propriété est évidente.

et seulement vers 0. À ces valeurs propres se trouve associée une base propre orthonormée v_n dans laquelle T s'écrit $Tf = \sum_n \lambda_n v_n$.

Considérons alors un T compact et auto-adjoint. Une approximation $*$-finie permet de retrouver son analyse spectrale. Soit $(e_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ une base orthonormée de ${}^*H$. Soit $\omega \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ un entier infini NS fixé et soit H_ω le sous-espace de ${}^*H$ de base $(e_1, \ldots, e_\omega)$. H_ω est un sous-espace interne de dimension $*$-finie de ${}^*H$ qui contient H et on peut lui transférer la théorie finie classique. Soit P_ω le projecteur orthogonal de ${}^*H$ sur son sous-espace H_ω. Il associe au point $x = \sum_{n\in{}^*\mathbb{N}} x_n e_n$ de ${}^*H$ le point $\sum_{n=1}^{n=\omega} x_n e_n$ de H_ω. P_ω est une entité interne de norme 1. Soit $T_\omega = P_\omega {}^*T P_\omega$ le transformé de ${}^*T$ par P_ω. Sa norme $\|T_\omega\|$ est $\leq \|T\|$ car $\|P_\omega\| = 1$. Il est auto-adjoint car T et P_ω le sont et il est un opérateur interne sur ${}^*H$. On montre qu'il est compact, c'est-à-dire qu'il envoie ${}^*H_f$ dans ${}^*H_{q.s.}$.

Comme T_ω envoie par construction H_ω dans H_ω on peut prendre sa restriction T'_ω à H_ω. T'_ωest une approximation $*$-finie de T définie sur un espace $*$-fini et on peut donc lui transférer la théorie classique des opérateurs auto-adjoints en dimension finie. Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_\omega$ (réelles, distinctes ou multiples, ordonnées) et des vecteurs propres $v_1, \ldots, v_\omega$ (qu'on peut supposer de norme 1) constituant une base orthonormée de H_ω diagonalisant T'_ω. Robinson démontre alors les deux résultats suivants : soit μ la monade de $0 \in \mathbb{R}$. Si $\lambda_i \notin \mu$ les vecteurs propres v_i associés sont *q.s.* et la dimension de l'espace propre H'_i des v_i est finie (1 si λ_i est simple). Le spectre de T'_ω comprend donc deux parties, une partie infinitésimale et une partie non infinitésimale correspondant à la situation classique. Si l'on ordonne les valeurs propres en une suite (décroissante) de valeurs distinctes $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_\delta$ ($\delta \leq \omega$) d'espaces propres $H'_1, \ldots, H'_\delta$ et si les $P'_i : H_\omega \longrightarrow H'_i$ sont les projecteurs, le théorème classique de décomposition spectrale se transfère

en $H_\omega = \bigoplus_{i=1}^{i=\delta} H'_i$, $I = \sum_{i=1}^{i=\delta} P'_i$, $T'_\omega = \sum_{i=1}^{i=\delta} \widetilde{\lambda}_i P'_i$.

Il faut maintenant revenir de T'_ω (dont la décomposition spectrale généralise par transfert le cas classique de dimension finie) à T. Soit $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ un point de H. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se prolonge en une suite $(x_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ définissant un point ${}^*x = \sum_{n\in{}^*\mathbb{N}} x_n e_n$ de ${}^*H$. La projection $P_\omega({}^*x) = \sum_{n=1}^{n=\omega} x_n e_n$ de ${}^*x$ appartient à H_ω et à la monade $\mu(x)$ de x. Comme T_ω est compact, $T'_\omega\left(P_\omega({}^*x)\right)$ est *q.s.* Soit alors $st\left(T'_\omega\right)$ sa partie standard. Elle est un opérateur sur H.

Théorème. $st\left(T'_\omega\right) = T$.

Il faut démontrer que $st\left(T'_\omega\left(P_\omega({}^*x)\right)\right) = T(x)$. Mais $T'_\omega\left(P_\omega({}^*x)\right) = P_\omega{}^*T P_\omega({}^*x)$ et $P_\omega({}^*x) \approx x$. Donc ${}^*T P_\omega({}^*x) \approx {}^*T(x)$ et $P_\omega{}^*T P_\omega({}^*x) \approx {}^*T(x) = T(x)$.

On passe ainsi de T'_ω à T en prenant les parties standard. Pour la décomposition spectrale on obtient les résultats suivants. Si $\lambda_i \notin \mu$, $st\left(\lambda_i\right)$ (qui existe puisque λ_i est finie) est valeur propre de T et $st\left(v_i\right)$ (qui existe puisque v_i est q.s.) est un vecteur propre associé. Si $\lambda_i \in \mu$, $st\left(\lambda_i\right) = 0$. Si $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_\delta$ sont les valeurs propres sans répétition, si W est l'ensemble des indices $\{1, \ldots, \delta\}$ des $\widetilde{\lambda}_i$ non infinitésimales, si $st\left(H'_i\right)$ est la partie standard de H'_i, si H_0 est l'orthogonal dans H de la somme $\bigoplus_{i\in W} st\left(H'_i\right)$ et si P_0 et P_i sont les projecteurs de H sur H_0 et $st\left(H'_i\right)$, alors la décompisition spectrale de T est : $H = H_0 \oplus \left(\bigoplus_{i\in W} st\left(H'_i\right)\right)$, $I = P_0 + \sum_{i\in W} P_i$, $T = \sum_{i\in W} st\left(\widetilde{\lambda}_i\right) P_i$. H_0 correspond aux $\lambda_i \in \mu$ et est le noyau de T.

Remarque. Dans le cas où T est non compact, les difficultés peuvent se comprendre très intuitivement sur l'exemple de l'espace de Hilbert $H = L^2\left(\mathbb{R}, dx\right)$ des fonctions réelles de carré intégrable et de l'opérateur Q de "position" $Qf\left(x\right) = xf\left(x\right)$. Q est auto-adjoint car $\langle Qf, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{g(x)}dx$ est bien égal à $\langle f, Qg\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{xg(x)}dx$ puisque, x étant réel, $x = \overline{x}$. Il est trivial que si $Qf\left(x\right) = \lambda f\left(x\right)$ avec $f \neq 0$, alors $f\left(x\right)$ doit être partout nulle sauf en λ puisque si $f\left(x\right) \neq 0$ alors $xf\left(x\right) = \lambda f\left(x\right)$ implique $x = \lambda$. Mais

en même temps, comme il faut que f soit un élément non nul de $L^2(\mathbb{R})$, il faut que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$ soit $\neq 0$. Mais cela est impossible. En fait il faudrait que f soit la distribution de Dirac $\delta_\lambda(x)$ attribuant un poids (ou une "masse") non nulle au point λ et le poids 0 partout ailleurs. Effectivement, si l'on applique la définition de Q aux distributions de Dirac $\delta_\lambda(x)$, on obtient trivialement $Q\delta_\lambda(x) = \lambda\delta_\lambda(x)$. Le problème est que $\delta_\lambda \notin H = L^2(\mathbb{R})$ car comme "fonction généralisée" elle est infinie en λ de façon à ce que sa norme soit non nulle. Elle ne peut donc pas être un vecteur propre de Q opérant sur H. Autrement dit Q *n'a pas* de valeur propre au sens strict bien que tout $\lambda \in \mathbb{R}$ soit une valeur propre "généralisée".

En revanche, tout $\lambda \in \mathbb{R}$ appartient au spectre de Q. En effet, dire que $Q - \lambda I$ est inversible signifie que *pour tout* $f \in H$ il existe $h \in H$ tel que $(Q - \lambda I)^{-1} f = h$, i.e. $f = (Q - \lambda I) h$, i.e. $f(x) = (x - \lambda) h(x)$. Cela impose la contrainte $f(\lambda) = 0$ et donc $(Q - \lambda I)^{-1}$ n'est pas défini pour tout f. Donc $Q - \lambda I$ n'est jamais inversible et $\mathrm{Spec}(Q) = \mathbb{R}$. C'est pour cela que Q peut être considéré comme un opérateur à spectre *continu* mesurant la position. Ce fait a été fondateur pour la Mécanique quantique.

8.3 Idéalités et objets

Dans IST, cette stratégie se trouve internalisée dans un modèle unique. L'internalisation dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ de la relativité fini / infini, qui, chez Robinson, s'exprime à travers l'usage d'extensions élémentaires, conduit en fait à opposer un fini "concrètement accessible" (par exemple informatiquement) à un fini "inaccessible". L'opposition entre un fini "naïf" concret et un fini "idéal" se substitue donc à celle, robinsonienne, entre fini et infini (ou hyperfini). Comme le soulignent Georges Reeb et Jacques Harthong, la différence *st* / non *st* est

> "un schéma théorique simplifié des rapports arithmétiques entre les entiers naïfs et les entiers idéaux". [28]

Du coup, le fini mathématique (qui, lorsqu'il est idéal, joue le rôle d'un hyperfini par rapport au fini naïf) suffit à fonder l'analyse qui devient quasi-arithmétique. Ainsi que l'affirme Harthong :

> "toute la théorie du continu (calcul différentiel et intégral, géométrie, équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, distributions, analyse complexe, etc.) est contenue dans l'analyse combinatoire classique." [29]

Un tel point de vue permet de reprendre sur de nouvelles bases le programme formaliste de Hilbert en contournant les limitations imposées par le théorème d'incomplétude de Gödel. Cela est essentiel sur le plan de la philosophie des mathématiques. Comme Pierre Cartier y a insisté, on peut considérer que l'ANS approche tous les problèmes de l'analyse à partir de modèles (hyper)finis en fournissant d'excellentes *approximations*. L'idée est donc en définitive de *modéliser* théoriquement et adéquatement – dans une optique strictement *constructiviste* au sens intuitionniste du terme – la "réalité" de l'analyse. Il y a là, semble-t-il, une remarquable revanche posthume d'un certain brouwerisme sur le formalisme hilbertien. Avec Reeb et Harthong, on supposera qu'il existe une "réalité" mathématique "extérieure" – une réalité "observable" étrangère aux théories et de nature constructive – qui doit être modélisée, au même titre que la "réalité" physique. La mathématique formelle doit dans ce cas être considérée comme une *interprétation théorique* ten-

28. Harthong-Reeb [1986].

29. Harthong [1983]. Évidemment, toutes les difficultés propres à l'analyse classique se retrouvent lorsqu'il s'agit de trouver les parties standard des entités combinatoirernent construites.

tant de l'approximer au mieux de façon déductive. Et le formalisme apparaît alors comme une "idéologie" – il vaudrait mieux dire comme un dogmatisme métaphysique – identifiant théorie et réalité et déniant donc tout contenu sémantique objectif aux mathématiques. Par contraste, la méthode constructiviste de l'intuitionnisme apparaît comme la "méthode expérimentale" qui serait propre aux mathématiques conçues comme des sciences d'*objets*.[30]

Il semble légitime de dénoncer ainsi dans la doctrine formaliste (et encore plus dans les approches logicistes) qui ont dominé la philosophie des mathématiques de ce siècle le retour à une conception dogmatique (voire scholastique) de la vérité (la non contradiction, la consistance ou "la compossibilité des essences" comme critères d'existence conformément au théorème de complétude). Cette volonté d'auto-fondation a certes tendance à sous-estimer la transcendance objective des contenus sémantiques mathématiques (de leurs "contenus formels" au sens de Gilles Gaston Granger) au profit de la législation et de la légalisation syntaxiques des théories. Mais il ne va pas pour autant de soi que cette transcendance objective se réduise à celle, constructive, expérimentale et observable, des algorithmes effectifs informatiqucment implémentables. Selon nous, elle est celle des *idéalités* mathématiques, au sens développé par Jean-Toussaint Desanti à la suite de Jean Cavaillès. Le débat sur le platonisme – et, en particulier, sur l'alternative "dogmatisme formaliste" / "constructvisme intuitionniste" – ne peut que rester obscur tant qu'on ne tire pas toutes les conséquences du fait que les idéalités mathématiques sont des objets *intentionnels* corrélatifs (au sens de l'*a priori* husserlien de la corrélation noèse / noème) des actes syntaxiques qui en règlent les théories. À ce titre elles sont bien dotées d'une transcendance ob-

30. Harthong-Recb [1986].

jective, mais leur transcendance est fondée dans l'*immanence* des actes.[31] Elle n'est ni celle d'idées platoniciennes, ni celle de structures concrètes finitairement accessibles. Le problème que met bien en lumière le débat réactivé par l'ANS est l'écart qui existe entre de tels sens "noématiques" et les intuitions pures susceptibles de les "remplir". Mais il s'agit là d'une vaste question qui déborde le cadre de ces rappels pédagogiques.

Références

[1] d'Alembert, J .B. 1754-1765. Articles "Différentiel" et "Limite", *Encyclopédie*, vol. IV, 985-989 et vol. IX, 542.

[2] ANS 1986. *L'Analyse non standard : recherches historiques et philosophiques*, publication de l'E.R. n°265 du CNRS, Strasbourg (1986, I.R.M.A.).

[3] Bell, J.L., Slomson, A.B., 1969. *Models and Ultraproducts*, North-Holland, Amsterdam.

[4] Berkeley, G., 1734. *The Analyst*, Tonson, Londres.

[5] Cantor, G., 1883. Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, *Mathematische Annalen*, XXI, 545-591.

[6] Cauchy, A.-L., 1821. Cours d'Analyse, *Œuvres complètes*, série II, tome III, Gauthiers-Villars, Paris, 1897.

[7] Cartier, P., 1986. Was sind und was sollen die Zahlen ?, *ANS 1986*, 19-46.

[8] Fenstadt, J.E., 1968. Non standard Models for Arithmetic and Analysis, *Proceedings of the 15th Scandinavian Congress (Oslo)*, Springer, Berlin, 1970, 30-47.

31. Sur ce point, cf. Petitot [1987].

[9] Fraenkel, A.A, 1928. *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin.

[10] Giorello, G , 1985. *Lo Spettro e il Libertino*, Mondadori, Milano.

[11] Harthong, J., 1983. Éléments pour une théorie du Continu, *Astérisque*, 109-110, 235-244. (Repris dans *ANS 1986.*)

[12] Harthong, J., Reeb, G., 1986. Intuitionnisme 84, *ANS 1986*, 85-123.

[13] Henkin, L., 1949. The completness of the first order functional calculus, *Journal of Symbolic Logic*, XIV, 159-166.

[14] Henkin, L., 1950. Completeness in the theory of types, *Journal of Symbolic Logic*, XV, 81-91.

[15] Keisler, H.J., 1965. A survey of ultraproducts, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, (Y. Bar-Hillel ed.), North-Holland, Amsterdam, 112-126.

[16] Kreisel, G., 1969. Axiomatizations of Non-standard Analysis that are Conservative Extensions of Formal Systems for Classical Standard Analysis, *Luxemburg (ed.) 1969*, 93-106.

[17] Leibniz, G.W., 1701. Mémoire de M. Leibniz touchant son sentiment sur le calcul différentiel, *Mathematische Schriften*, V. Olms, Berlin, 1962.

[18] L'Hôpital, G.-F.-A., 1696. *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie Royale, Paris.

[19] Łoś, J., 1955. Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres, *Mathematical lnterpretation of Formal Systems*, (T. Skolem ed.), North-Holland, Amsterdam, 98-113.

[20] Löwenheim, L., 1915. Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Mathematische Annalen*, LXXVI, 447-470.

[21] Luxemburg, V.A.J, (ed) 1969. *Applications of Model Thcory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, NewYork.

[22] Luxemburg, V.A.J., 1972. A non standard analysis approach to Fourier analysis, *Luxemburg-Robinson (eds.) 1972*, 15-39.

[23] Luxemburg, V.A.J., 1973. What is non-standard analysis ?, *The American Monthly*, LXXX, 38-67.

[24] Luxemburg, V.A.J., Robinson, A. (eds.), 1972. *Contributions to Non-standard Analysis*, North-Rolland, Amsterdam.

[25] Machover, U., Hirschfeld, J., 1969. *Lectures on Non-standard Analysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.

[26] Nelson, E., 1977. Internal Set Theory a new approach to Nonstandard Analysis, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83, 6, 1165-1198.

[27] Peiffer, R., 1986. Natorp, Veronese et l'infini relatif, *ANS 1986*, 127-163.

[28] Petitot, J., 1979. Article "Infinitesimale", *Enciclopedia Einaudi*, VII, 443-521 , Einaudi, Turin.

[29] Petitot, J., 1987. Refaire le "Tîmée". Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman, *Revue d'histoire des sciences*, XL/1, 79-115.

[30] Puritz, C., 1972. Skies, constellations and monads, *Luxemburg-Robinson (eds.) 1972*, 215-243.

[31] Puritz, C., 1976. Quasi monadic spaces ; a non-standard approach to convergence, *Proceedings of the London Mathrmatical Society*, III, XXXIII, 230-250.

[32] Robinson, A., 1963. *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, North-Holland, Amsterdam.

[33] Robinson, A., 1966. *Non standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam.

[34] Salanskis, J .M., 1986 : *Le Continu et le Discret*, Thèse, Université de Strasbourg.

[35] Zacon, E., 1969. Remarks on the Nonstandard Real Axis, *Luxemburg (ed.) 1969*, 195–227.