**LA MATHÉMATIQUE NON STANDARD**
**(Fondements des Sciences)**
***Éditions du CNRS, Paris, 1989***

# RAPPELS SUR L'ANALYSE NON STANDARD

*par*
*Jean PETITOT*
*(E.H.E.S.S.)*

On peut sans doute considérer que l'analyse non standard (ANS) se développe selon trois directions principales.

(i) Mathématique : reformulation des problèmes de l'analyse (classique ou moderne) admettant l'usage des infiniment petits "dans le style de Leibniz" (cf. les travaux des écoles de Robinson, Luxemburg et Reeb) ;

(ii) Physique : applications à des problèmes délicats comme ceux des perturbations singulières, de la moyennisation, des intégrales oscillantes, etc. (cf. les travaux de J. Harthong et du groupe de Strasbourg) ;

(iii) Logique et philosophique : actualisation du débat (essentiellement entre formalisme et intuitionnisme) sur la nature de l'infini et sur la maîtrise "discursive" du continu "intuitif" (cf. les réflexions de Reeb, Cartier, Harthong et Salanskis).

Cet article se propose de rappeler dans ses grandes lignes, à des fins pédagogiques, la conception robinsonienne de l'ANS en esquissant quelques points relevant de (i) et (iii).

## 1. Le "paradoxe" des infinitésimales

Depuis Archimède, le concept d'infinitésimale semble relever d'une intuition indissociable de celle du continu. La question est de savoir dans quelle mesure ce concept est formellement maîtrisable à travers un calcul symbolique.

Le calcul infinitésimal leibnizien était cohérent et aura conduit à d'innombrables et grandioses succès physiques. Et pourtant, interprété comme il l'était, il était inconsistant. Il y avait là comme un "scandale originaire" de l'analyse. Le problème vient, on le sait, du fait que le corps topologique totalement ordonné $R$ des nombres réels construit à la

Dedekind comme complétion de $Q$ est *archimédien*. Il satisfait l'axiome:

$$(A) \qquad \forall y \in R^+ \, \forall x \in (R^+ - \{0\}) \, \exists n \in N \, (nx > y)$$

En passant des grands nombres à leurs inverses, cet axiome affirme qu'il n'existe pas d'infinitésimales dans $R$.

$$\forall y \in R^+ \, [y \neq 0 \Rightarrow \exists r \in (R^+ - \{0\}) \, (r < y)]$$

ou, en termes de quantification sur $R$,

$$(I) \qquad \forall y \, [y \neq 0 \Rightarrow \exists r \, ((r > 0) \wedge (r < \mid y \mid))]$$

Une façon simple d'exprimer le "paradoxe" des infinitésimales est d'utiliser la reformulation du calcul des prédicats proposée par Hilbert sous le nom de $\epsilon - calculus$ dans le cadre de son approche finitiste de l'infini. Suivant Hilbert, on associe canoniquement à chaque prédicat $F(x)$ un symbole d'individu $\epsilon_x F(x) = \epsilon F$ qui représente l'idée in individuo d'un individu satisfaisant $F$. Ces symboles, dits $\epsilon - termes$, ne sont ni des symboles de variables, ni des symboles de constantes. Ce sont des symboles de quantités "non désignées" (pour reprendre l'expression de Carnot) dénotant des valeurs *méta*mathématiques *intermédiaires*, comme le disait Lautman à la suite de Herbrand, entre les signes des formules et les modèles (infinis) où ceux-ci prennent leurs valeurs. Ils permettent de définir la quantification par les équivalences:

$$(E) \qquad \exists x \, F(x) \equiv F(\epsilon_F)$$

$$(U) \qquad \forall x \, F(x) \equiv F(\epsilon_{\tilde{F}}) \qquad (\text{où } \tilde{F} = non \, F)$$

Dans le cas d'une universelle $F(\epsilon_{\tilde{F}})$, l'$\epsilon$-terme $\epsilon_{\tilde{F}}$ est bien formé syntaxiquement mais sans référent consistant. On dit que c'est un terme- zéro. Le concept leibnizien d'infinitésimale en est un exemple typique. L'axiome $(I)$ est de la forme $\forall y \, G(y)$. D'après $(U)$, il est donc équivalent à $G(\epsilon_{\tilde{G}})$. Or $\epsilon_{\tilde{G}} = \epsilon_y[y \neq 0 \wedge \forall r((r > 0) \Rightarrow (\mid y \mid \leq r))]$, ce qui est exactement la définition du $dx$ leibnizien: $dx = \epsilon_{\tilde{G}}$. Dire que $\epsilon_{\tilde{G}}$ est un terme-zéro, c'est exactement dire que le concept du $dx$ est inconsistant.

Leibniz était évidemment parfaitement conscient du caractère *fictionnel* des symboles différentiels $dx$, $df$, etc. Son point de vue sur la vérité était plutôt celui "syntaxique" de la cohérence logique d'un calcul symbolique que celui "sémantique" de l'adéquation de ce calcul à la réalité numérique du continu. Ils s'autorisait donc les infinitésimales comme des symboles qui, tout en ne dénotant aucun nombre réel, pouvaient néanmoins être traités "comme" des nombres et servir d'intermédiaires dans les calculs.

Elles étaient pour lui des fictions, mais des fictions "bien fondées", "fondées en réalité", "plus conformes à l'art d'inventer", utiles "pour abréger et pour parler universellement" et permettant d'appliquer à l'infini les règles opératoires qui gouvernent le fini. Leibniz est sans doute le premier à avoir clairement compris la *relativité* de l'opposition fini/infini. C'était pour lui une conséquence du principe de raison qu'"il se trouve que les règles du fini réussissent dans l'infini comme s'il y avait des atomes" et que réciproquement, "les règles de l'infini réussissent dans le fini comme s'il y avait des infiniment petits métaphysiques"(1). Au contraire, pour ses détracteurs — en particulier Berkeley et d'Alembert— orientés vers une conception sémantique (réaliste) du calcul, les infinitésimales n'étaient que des parasites imaginaires qu'il fallait éliminer(2). D'où la thèse de d'Alembert : il n'existe pas d'infinitésimales, le calcul différentiel ne traite que de limites et de quantités finies, et, donc, "la théorie des limites est à la base de la vraie métaphysique du calcul". Il est intéressant de voir qu'avant d'être éliminées, les infinitésimales verront toutefois leur statut logique et numérique profondément investigué. Nieuwentijt a même découvert leur caractère nilpotent comme générateur de l'algèbre $R[t]/(t^2)$(3).

La réinterprétation des infinitésimales en termes de limites a conduit à l'Analyse moderne, de Cauchy à Weierstrass jusqu'aux opérateurs différentiels linéaires (dérivations, formes différentielles, champs de vecteurs, dérivées de Lie, etc.) et à la théorie des jets (pour les infiniment petits d'ordre supérieur). Mais, sur le plan de la réflexion épistémologique, elle n'a pas définitivement résolu le problème du statut symbolique formel du continu intuitif. Il suffit de penser aux réflexions d'un Carnot, d'un Poincaré, d'un Weyl ou d'un Thom. En particulier, un certain nombre de tentatives ont été faites pour construire des corps *non* archimédiens, donc comportant des infinitésimales. Parmi celles-ci, outre celle de Laugwitz reposant sur l'utilisation de séries à exposants réels (non entiers) et celle de du Bois Reymond reposant sur les types de croissance des fonctions, il faut, avec Madame Peiffer, accorder une attention particulière à celle de Veronese. Il semble que Veronese ait été le premier à avoir approfondi la relativité leibnizienne fini/infini par l'introduction du concept d'échelle. Pour lui, le continu restait une "intuition pure" (au sens de Kant), intuition qu'il s'agissait de déterminer et de reconstruire mathématiquement i.e. "discursivement". La construction de Dedekind ne s'effectue qu'à une certaine échelle et il n'y a aucune raison de postuler que, ce faisant, elle épuise le continu comme donnée intuitive. Si l'on pose qu'elle peut s'effectuer à

---

(1) Leibniz[1701].

(2) cf. Berkeley [1734] et d'Alembert [1754] et [1765].

(3) cf. Giorello [1985]

plusieurs échelles incommensurables (conformément à la relativité leibnizienne fini/infini) et si l'on impose à la structure hiérarchisée visée les propriétés que l'on attend de $R$, l'on peut construire des modèles non archimédiens qui anticipent étonnamment sur ceux de l'ANS[(4)].

Ce point de vue veronesien sur l'infini était en conflit avec celui de Cantor et retrouvait la lignée "intuitionniste" aristotélicienne. Pour Cantor, seul l'infini actuel était un infini "proprement dit". L'infini potentiel, en particulier sous la forme du concept dalembertien de limite, était donc un infini "improprement dit". Pour lui, la théorie des ordinaux transfinis était la théorie de l'infini proprement dit, et il lui apparaissait impossible de transformer par un "coup de force" les infinitésimales en infiniment petits proprement dits[(5)]. Son disciple Fraenkel écrivait encore en 1928: "mis à l'épreuve, l'infiniment petit a complètement échoué". Mais il ajoutait : "Certes, il est *concevable* qu'un jour un second Cantor donne un fondement arithmétique incontestable à de nouveaux nombres infiniment petits qui se révèlent utilisables en mathématiques et qui puissent ouvrir une voie plus simple au calcul infinitésimal. Mais tant que quelque chose de cet ordre n'aura pas été accompli il faut maintenir l'idée que l'on ne peut aucunement parler de l'existence mathématique — donc logique — des infiniment petits, en un sens identique ou analogue à celui des infiniment grands"[(6)]. Le "second Cantor" fut Abraham Robinson, élève de Fraenkel... Son coup de génie aura été, comme il en va souvent en Science, de *changer* de point de vue et de reprendre la question à partir de résultats généraux de la théorie logique des modèles concernant le rapport entre les théories mathématiques et leurs objets. Parmi ceux-ci, deux sont particulièrement importants :

(i) le théorème de Löwenheim-Skolem affirmant l'impossibilité de *caractériser* une structure infinie par les moyens de la logique formelle du premier ordre (théorème d'*existence* des modèles non standard);

(ii) la technique de *construction* de modèles NS fournie par les concepts d'ultraproduit et d'ultrapuissance.

Nous allons maintenant faire quelques rappels à ce sujet.

## 2. Linéaments de théorie des modèles

Soit $\mathcal{A}$ une structure mathématique "concrète" d'un certain type (par exemple l'ensemble $N$ des entiers naturels ou l'anneau $Z$ des entiers relatifs ou le corps topologique ordonné $R$ des nombres réels) d'ensemble sous-jacent $A$. Pour "parler" de $\mathcal{A}$ nous utilisons le langage formel $L$ du calcul des prédicats $CP$ correspondant à ce type de structure et une

---

(4) cf. Peiffer [1986]

(5) cf. Cantor [1883]

(6) Fraenkel [1928], p.116-117

interprétation de $L$ dans $\mathcal{A}$. Nous introduisons donc une opposition entre syntaxe et sémantique. Côté syntaxe la notion fondamentale est celle de déduction ou de dérivation d'une formule $\Phi$ de $L$ à partir d'un ensemble $\Sigma$ de formules de $L$ (notation $\Sigma \vdash \Phi$)[(7)]. Côté sémantique la notion fondamentale est celle de vérité ou de validité des énoncés[(8)]. Si l'énoncé $\Phi$ est valide dans $\mathcal{A}$ (notation $\mathcal{A} \models \Phi$) on dit que $\mathcal{A}$ est un *modèle* de $\Phi$. On généralise trivialement à un ensemble d'énoncés $\Sigma$. Soit $\Sigma$ un ensemble d'énoncés. Si $\Sigma$ est *consistant* (i.e. s'il est impossible d'en dériver une contradiction), on appelle *théorie* de $\Sigma$ (notation $\mathcal{TH}(\Sigma)$) l'ensemble des énoncés dérivables de $\Sigma$ (autrement dit la clôture déductive de $\Sigma$). On note d'autre part $\mathcal{M}(\Sigma)$ la classe des modèles de $\Sigma$. Côté sémantique, soit $\mathcal{A}$ une structure. On appelle *théorie* de $\mathcal{A}$ (notation $\mathcal{TH}(\mathcal{A})$) l'ensemble des énoncés valides dans $\mathcal{A}$. Par définition, $\mathcal{A}$ est un modèle de $\mathcal{TH}(\mathcal{A})$. Plus généralement, si $K$ est une classe de structures de même type (par exemple celle des corps totalement ordonnés de caractéristique 0), on appelle *théorie* de $K$ l'ensemble des énoncés valides dans toutes les structures $\mathcal{A}$ de $K$.

La théorie des modèles s'est proposée d'analyser le rapport entre syntaxe et sémantique. Elle a montré que celui-ci était plus complexe qu'il ne pouvait paraître et qu'il existait un écart irréductible entre déductibilité et validité. C'est à la mesure de cet écart qu'elle s'est consacrée dans la glorieuse période des années 30. Elle s'est posée des questions du type suivant : étant donné un ensemble d'énoncés $\Sigma$, quel rapport existe-t-il entre $\mathcal{TH}(\Sigma)$ et $\mathcal{TH}(\mathcal{M}(\Sigma))$, c'est-à-dire entre l'ensemble des énoncés dérivables de $\Sigma$ (syntaxe) et l'ensemble des énoncés valides dans tout modèle de $\Sigma$ (sémantique)? Etant donnée une structure $\mathcal{A}$, existe-t-il un ensemble fini d'énoncés $\Sigma$ tel que $\mathcal{TH}(\mathcal{A}) = \mathcal{TH}(\Sigma)$, autrement dit $\mathcal{TH}(\mathcal{A})$ est-elle *finiment axiomatisable*? Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux structures de même type telles que $\mathcal{TH}(\mathcal{A}) = \mathcal{TH}(\mathcal{B})$ s'ensuit-il nécessairement que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont isomorphes, autrement dit, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont "indiscernables" relativement à $L$, le sont-elles "objectivement" ? Si tel est le cas on dit alors que la théorie de $\mathcal{A}$ est *catégorique*. Si toutes les théories étaient finiment axiomatisables et catégoriques il y aurait équivalence entre syntaxe et sémantique. Mais cela est loin d'être le cas. Nous allons évoquer certains exemples de théories non catégoriques. Quant aux théories non finiment axiomatisables, elles sont légion car beaucoup de propriétés apparemment simples ne sont pas finiment axiomatisables. Par exemple, pour un corps,

---

(7) Si $\Sigma$ est vide, on note $\vdash \Phi$. $\Phi$ est alors un théorème de $CP$ déductible des seuls axiomes de $CP$.

(8) Rappelons que les énoncés sont les formules fermées c'est-à-dire sans variables libres, toutes les variables y étant liées par des quantificateurs. Seuls les énoncés possèdent une valeur de vérité.

d'être algébriquement clos ou d'être de caractéristique 0.

Pour investiguer l'écart entre syntaxe et sémantique, on introduit d'abord une restriction fondamentale. Lorsque nous "parlons" de la structure $\mathcal{A}$ à travers le langage formel $L$ nous traitons les éléments de l'ensemble $A$ sous-jacent comme des éléments primitifs (urelemente) et cela même si ces éléments sont eux-mêmes des ensembles (ce qui est par exemple le cas des nombres réels dans la construction de Dedekind). Autrement dit, nous *tronquons* au niveau de $A$ le processus de construction des entités de notre univers de la théorie des ensembles. La restriction consiste alors à postuler que la quantification ne peut porter que sur les éléments de $A$. On s'interdit par exemple de quantifier sur les sous-ensembles de $A$. Cette restriction définit ce qu'on appelle la logique des prédicats du *premier ordre*. La théorie d'une structure $\mathcal{A}$ au premier ordre s'appelle aussi sa théorie *élémentaire*. Elle est celle qui est formulable dans un langage aux ressources limitées. Si deux structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont mêmes théories élémentaires ($\mathcal{TH}(\mathcal{A}) = \mathcal{TH}(\mathcal{B})$) on dit qu'elles sont *élémentairement équivalentes* (notation $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$). Cette relation d'équivalence sémantique d'origine syntaxique est beaucoup plus faible en général que la relation d'isomorphisme. Comme la catégoricité des théories signifie qu'elle s'y identifie, l'on voit que les théories sont en général *non* catégoriques.

*Au premier ordre* il existe une adéquation entre syntaxe et sémantique exprimée par le *théorème de complétude* de Gödel (1930). On appelle énoncé *universellement valide* un énoncé $\Phi$ de $L$ qui est vrai pour *toutes* ses interprétations possibles. Il est facile de voir que, les axiomes de $CP$ étant universellement valides et les règles de déduction préservant la validité universelle, tous les énoncés qui sont des théorèmes de $CP$ sont universellement valides. Le théorème de complétude de Gödel démontre la réciproque : *si un énoncé de L est universellement valide il est un théorème de CP.* On peut formuler autrement ce résultat fondamental : *un ensemble d'énoncés $\Sigma$ de L est consistant (non contradictoire) si et seulement si il admet un modèle.* Cet énoncé est remarquable dans la mesure où il affirme que, dans la logique du premier ordre, l'existence retrouve son vieux sens scholastique et métaphysique : existe ce qui est non contradictoire. Comme l'ensemble des théorèmes de $CP$ est la théorie $\mathcal{TH}(\emptyset)$ de l'ensemble vide ($\Sigma = \emptyset$) et que celui des énoncés universellement valides est la théorie $\mathcal{TH}(\mathcal{M}(\emptyset))$, on a pour $\Sigma = \emptyset$ l'égalité $\mathcal{TH}(\Sigma) = \mathcal{TH}(\mathcal{M}(\Sigma))$, i.e. l'équivalence entre syntaxe et sémantique. On peut généraliser ce résultat. Soit $\Sigma$ un ensemble consistant d'énoncés et $K$ une classe de structures de même type. On a :

(i) $\mathcal{TH}(\mathcal{M}(\Sigma)) = \mathcal{TH}(\Sigma)$

(ii) $\mathcal{M}(\mathcal{TH}(\mathcal{M}(\Sigma))) = \mathcal{M}(\Sigma)$

(iii) $\mathcal{TH}(\mathcal{M}(\mathcal{TH}(K))) = \mathcal{TH}(K)$

(i) est le théorème de complétude; (ii) et (iii) expriment que si l'on considère les "applications" $\mathcal{M}$ et $\mathcal{TH}$ reliant l'ensemble des ensembles d'énoncés $\Sigma$ à la classe des classes de structures $K$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{TH}$ sont "inverses" l'une de l'autre si on les restreint aux $\Sigma$ qui sont des théories de structures $\mathcal{TH}(K)$ et aux $K$ qui sont des classes de modèles $\mathcal{M}(\Sigma)$.

Une autre conséquence (immédiate) du théorème de complétude est le théorème dit *de compacité* qui est un théorème fondamental (maniable) d'existence de modèles: Soit $\Sigma$ un ensemble (infini) d'énoncés. Si tout sous-ensemble *fini* $\Sigma_f$ de $\Sigma$ admet un modèle, alors $\Sigma$ admet un modèle (cf. plus bas pour une démonstration sémantique).

Lorsqu'elle est appliquée à des strutures *infinies*, la logique du premier ordre fait apparaître un écart irréductible entre syntaxe et sémantique, écart exprimé entre autres par le célèbre théorème de Löwenheim-Skolem (1915-1920)[9]. Celui-ci comporte deux parties. La première (downward theorem) affirme que si $\mathcal{A}$ est une structure infinie, sa théorie élémentaire $\mathcal{TH}(\mathcal{A})$ admet un modèle *dénombrable*. En particulier il existe un modèle *dénombrable* de la théorie au premier ordre des nombres réels (paradoxe de Skolem). La seconde partie du théorème de Löwenheim- Skolem (upward theorem) affirme que si $\mathcal{A}$ est une structure infinie de cardinal $\alpha$, sa théorie élémentaire $\mathcal{TH}(\mathcal{A})$ admet un modèle de cardinal $\beta$ pour tout $\beta \geq \alpha$. On peut préciser un peu ce résultat. Dans le langage formel $L$ associé à un certain type de structure, les constantes dénotent des éléments structuralement définis (par exemple les éléments neutres 0 et 1 dans le cas des corps). Mais on peut vouloir donner un nom à d'autres éléments d'une structure concrète $\mathcal{A}$ ($\sqrt{2}$, $\pi$, $e$, etc. pour $R$), voire même à *tous* les éléments de $A$. On est conduit pour cela à considérer le langage formel $L_A$ obtenu à partir de $L$ en étendant à $A$ tout entier l'ensemble des constantes. La théorie élémentaire $\widetilde{\mathcal{TH}}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ relativement à $L_A$ est évidemment beaucoup plus riche que la théorie élémentaire $\mathcal{TH}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ relativement à $L$. Le théorème "upward" s'énonce alors ainsi. Soit $\tau$ le cardinal de la théorie élémentaire $\widetilde{\mathcal{TH}}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ *relativement à* $L_A$. Si $\mathcal{A}$ est une structure infinie de cardinal $\alpha$, alors $\widetilde{\mathcal{TH}}(\mathcal{A})$ admet des modèles de cardinal $\beta$ pour tout $\beta \geq \alpha, \tau$. Le théorème est une conséquence immédiate du théorème de compacité.

Soit alors $\mathcal{B}$ un modèle de $\widetilde{\mathcal{TH}}(\mathcal{A})$ de cardinal $\beta \geq \alpha, \tau$. Comme $L_A$ contient des noms pour tous les éléments de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est identifiable à *une sous-structure* de $\mathcal{B}$. Autrement dit, $\mathcal{B}$ est une *extension* de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{B}$ est un modèle de $\widetilde{\mathcal{TH}}(\mathcal{A})$, $\mathcal{B}$ *est indiscernable de* $\mathcal{A}$ *au premier ordre*. Autrement dit, tout énoncé du premier ordre valide dans $\mathcal{A}$ est valide dans $\mathcal{B}$ et, surtout, *aucun élément de* $\mathcal{A}$ *ne se trouve "déchu" d'une*

(9) Le théorème d'incomplétude de Gödel de 1931 concerne les logiques d'ordre supérieur.

*propriété du premier ordre par un élément de $\mathcal{B}$*. A la suite de Tarski et de Vaught, on dit que $\mathcal{B}$ est une *extension élémentaire* de $\mathcal{A}$ (notation $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$)[10] ou encore un *modèle non standard* de $T\mathcal{H}(\mathcal{A})$. Le théorème de Löwenheim-Skolem est donc le théorème fondamental d'existence de modèles non- standard. Il montre que les théories admettant des modèles infinis sont *non catégoriques* (car deux structures de cardinal différent ne peuvent évidemment pas être isomorphes). On peut par exemple démontrer $\langle Q, < \rangle \preceq \langle R, < \rangle$. Il est donc impossible *au premier ordre* de distinguer entre l'ordre *dense* de $Q$ et l'ordre *continu* de $R$.

On est donc conduit à relativiser la notion de catégoricité. Si $\alpha$ est un cardinal, on dira qu'une théorie $\Sigma$ est *$\alpha$-catégorique* si tous les modèles de $\Sigma$ de *même* cardinal $\alpha$ sont isomorphes. Il existe de très nombreux travaux sur cette notion[11]. D'après un théorème fondamental dû à Morley (1964) il n'existe que quatre possibilités pour une théorie admettant des modèles infinis:

(i) soit elle est *$\alpha$ - catégorique* pour tout cardinal $\alpha$ infini;

(ii) soit elle n'est *$\alpha$-catégorique* que pour $\alpha = \aleph_0$ (infini dénombrable);

(iii) soit elle est *$\alpha$ - catégorique* pour tout cardinal $\alpha > \aleph_0$ sans l'être pour $\alpha = \aleph_0$.

(iv) soit, évidemment, elle n'est *$\alpha$ - catégorique* pour aucun cardinal infini

Par exemple d'après un théorème de Cantor, la théorie $\Sigma_D$ des ensembles densément ordonnés sans premier ni dernier élément est *$\aleph_0$ - catégorique* (son modèle de puissance $\aleph_0$ étant évidemment $\langle Q, < \rangle$). On peut montrer qu'elle n'est pourtant pas *$\alpha$ - catégorique* pour $\alpha > \aleph_0$. Inversement, soit $\Sigma_{CC_p}$ la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique $p$. D'après un théorème de Steinitz (1910), elle est *$\alpha$ - catégorique* pour $\alpha > \aleph_0$. On peut montrer qu'elle n'est pourtant pas *$\aleph_0$ - catégorique*.

Les notions d'équivalence élémentaire et d'extension élémentaire (qui sont des notions sémantiques d'origine syntaxique) permettent de généraliser encore la notion de catégoricité. Il est en effet naturel de se demander quelles théories *caractérisent* leurs modèles non pas à isomorphisme près (catégoricité) mais à "indiscernabilité relativement au langage" près. D'où les deux définitions suivantes.

(i) Une théorie $\Sigma$ est *complète* si tous ses modèles sont élémentairement équivalents, i.e. si pour tous *$\Sigma$ - modèles* $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ on a $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

(ii) Une théorie $\Sigma$ est *$\mathcal{M}$ - complète* si pour toute inclusion de *$\Sigma$ - modèles* $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ on a $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.

---

(10) Si $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ il est évident que $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$: "être une extension élémentaire de" est beaucoup plus fort qu'"être élémentairement équivalent à"

(11) Pour quelques précisions, cf. Petitot [1979]

Il est trivial que si $\mathcal{A}$ est une structure, sa théorie $\mathcal{TH}(\mathcal{A})$ est complète. Toute théorie consistante $\Sigma$ admet donc une extension complète (par exemple $\mathcal{TH}(\mathcal{A})$ si $\mathcal{A}$ est un modèle de $\Sigma$). En fait, bien que de nature sémantique, la propriété de complétude peut, d'après le théorème de complétude, être caractérisée de façon purement *syntaxique*. On a en effet le théorème: *Une théorie $\Sigma$ est complète si et seulement si, pour tout énoncé $\Phi$, on a soit $\Sigma \vdash \Phi$ soit $\Sigma \vdash \neg\Phi$ i.e. si et seulement si $\mathcal{TH}(\Sigma)$ est une théorie maximale.* Par exemple, la théorie $\Sigma$ des corps commutatifs *ne peut pas* être complète: tout corps commutatif $k$ admet une caractéristique, mais l'énoncé affirmant que $k$ est d'une caractéristique particulière $p$ n'est pas déductible de $\Sigma$ (ni sa négation). En revanche on a le résultat suivant dû à Loś et Vaught (1954). *Si $\Sigma$ est une théorie sans modèle fini et $\alpha$ – catégorique pour un cardinal $\alpha$ infini alors $\Sigma$ est complète.* On sait par exemple, d'après le théorème de Steinitz, que la théorie $\Sigma_{CC_0}$ des corps commutatifs algébriquement clos de caractéristique 0 ($CC_0$) est $\alpha$*–catégorique* pour tout cardinal $\alpha > \aleph_0$ (en particulier tout $CC_0$ $k$ possédant la puissance du continu est isomorphe au corps $C$ des nombres complexes: $k \simeq C$). D'après le théorème de Loś-Vaught, $\Sigma_{CC_0}$ est complète. Donc tout $CC_0$ $k$ (par exemple la clôture algébrique d'un corps de fonctions rationnelles) est élémentairement équivalent à $C$ et, par conséquent, tout énoncé du premier ordre démontré pour $C$ peut être automatiquement *transféré* à $k$ (principe de Lefschetz). La théorie $\Sigma_{CC_P}$ des corps algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$ est également complète. De même, d'après le théorème de Cantor, la théorie $\Sigma_D$ des ensembles densément ordonnés sans plus petit ni plus grand élément est complète.

En ce qui concerne la $\mathcal{M}$ *– complétude*, l'exemple prototypique en est fourni par la théorie (non complète) $\Sigma_{CC}$ des corps algébriquement clos. C'est d'ailleurs pour pouvoir traduire en des termes purement *métamathématiques* — i.e. logiques — la propriété algébrique de clôture algébrique que Robinson a été conduit à la définition logique de la $\mathcal{M}$ *– complétude*.

## 3. Les modèles non-standard robinsonniens et la méthode des ultraproduits.

Pour pouvoir légitimer l'usage de la notation leibnizienne il faut pouvoir satisfaire les contraintes suivantes.

(a) Il faut que les infinitésimales soient des entités que l'on puisse traiter comme des nombres c'est-à-dire auxquelles on puisse appliquer les opérations fondamentales. Cela est nécessaire pour que des expressions comme $x + dx$, $dy/dx$, etc. aient un sens.

(b) Etant donnée une fonction $f$ d'argument $x \in R$, il faut que l'on puisse étendre automatiquement et canoniquement $f$ aux infinitésimales. Cela est par exemple nécessaire pour définir l'accroissement infinitésimal $df$ de $f$ en $x$ par $df = f(x+dx) - f(x)$.

(c) Le symbole $dx$ n'étant pas référentiable dans $R$ (terme-zéro) il faut qu'il le devienne dans une *extension* $^*R$ de $R$ qui soit, dans un sens à préciser, *indiscernable* de $R$.

En appliquant à l'analyse les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des modèles, l'ANS a montré qu'il est possible de satisfaire à ces trois contraintes et que cette "légitimation" des fictions leibniziennes simplifiait parfois de façon considérable la théorie de l'analyse. Esquissons-en les étapes principales.

Soit $R \prec {}^*R$ une extension élémentaire (stricte) de $R$. $^*R$ est appelé *modèle non-standard* (NS) de $R$. Soit $N$ l'ensemble des entiers naturels et $n \in N$. Comme l'énoncé affirmant qu'il n'existe aucun entier strictement compris entre $n$ et $n+1$ est un énoncé du premier ordre, il est valide dans $^*R$. Si $^*N$ est l'ensemble des entiers de $^*R$ (dont l'existence est assurée par un résultat que nous signalons plus bas), $N$ est donc un segment initial de son extension élémentaire $^*N$. Ainsi $^*N$ est composé de $N$ et de nombres entiers "infinis". $^*R$ comprend par conséquent des nombres "infinis" (c'est à dire plus grands que tout nombre de $R$). Et comme $^*R$ est un corps, les inverses de ces nombres infinis existent. Ce sont des *infinitésimales*. Comportant des infinitésimales, $^*R$ n'est pas archimédien. Pourtant l'axiome d'Archimède étant du premier ordre, il est valide dans $^*R$. Il n'y a là nulle contradiction. $^*R$ n'est pas archimédien au sens strict c'est-à-dire lorsque l'on restreint dans l'axiome $(A)$ le quantificateur $\exists n$ au sous-ensemble $N$ de $^*R$. Mais lorsque l'on affirme que $(A)$ est valide dans $^*R$ on suppose implicitement que cette quantification porte sur le sous-ensemble de $^*R$ correspondant à $N$ relativement à $R$, c'est-à-dire sur $^*N$ et non sur $N$. Or $^*N$ comprend des entiers infinis. $^*R$ peut donc à la fois être non- archimédien au sens strict (relativement à $N$) et archimédien au sens général (relativement à $^*N$). Cela montre simplement que l'opposition fini/infini n'est pas absolue mais bien *relative*, comme l'avait compris Leibniz.

Il est clair que si l'on peut satisfaire dans $^*R$ à l'ensemble des contraintes (a), (b) et (c), on résout du même coup le "paradoxe" des infinitésimales. En effet l'$\epsilon$ $-$ *terme* $dx = \epsilon_{\hat{G}}$ qui est un terme zéro relativement à $R$, admettra néanmoins des référents *consistants* dans $^*R - R$. Cela n'empêchera pas l'énoncé du premier ordre (I) d'être valide dans $^*R$: il n'y a pas dans $^*R$ d'infinitésimales relatives à $^*R$ puisque, relativement à $^*N$, $^*R$ est archimédien. Si, relativement à $^*R$, on quantifie *sur* $R$ (et non sur $^*R$) pour définir $dx$ alors $dx$ est référentiable dans $^*R$. Mais si on quantifie *sur* $^*R$, alors $dx$ redevient, relativement à $^*R$, un terme zéro. Il n'aura de référent consistant que dans une nouvelle extension élémentaire stricte ${}^*R \prec {}^{**}R$. On voit donc qu'il existe dans ce cas un lien étroit entre les "paradoxes de la référence" inhérents aux $\epsilon - termes$ et les "paradoxes de l'indiscernabilité" inhérents aux modèles non standard.

On peut ainsi anticiper la structure d'une extension élémentaire $R \prec {}^*R$ satisfaisant aux conditions (a), (b) et (c). L'extension ${}^*R$ devra être obtenue par adjonction d'infinitésimales et saturation par les opérations de $R$. Elle comprendra un ensemble $\mu$ d'infinitésimales possédant 0 comme seul élément standard. L'ensemble ${}^*R_\infty$ des inverses des infinitésimales constitue la partie infinie (illimitée) de ${}^*R$. Etant donnée l'invariance de $R$ par translation (homogénéité), la partie finie (limitée) ${}^*R_f = {}^*R - {}^*R_\infty$ de ${}^*R$ sera obtenue en associant à chaque $x \in R$ l'ensemble $\mu$. Autrement dit, ${}^*R_f$ est "fibré" sur $R$ par une projection $\pi : {}^*R_f \to R$. La "fibre" $\pi^{-1}(x)$ de $\pi$ au-dessus de $x \in R$ est l'ensemble $x + \mu$ qui possède comme $\epsilon - terme$ associé le symbole leibnizien $x + dx$. Si $\xi \in {}^*R_f$ et si $x = \pi(\xi)$, alors $\xi$ peut s'écrire $\xi = x + \alpha$ avec $\alpha \in \mu$. $x$ s'appellera la *partie standard* de $\xi$ et se notera $st(\xi)$. Les controverses autour de Leibniz venaient du fait que l'on ne disposait pas de ce concept et que l'on posait $\xi = x$, ce qui impliquait $\alpha = 0$. Comme l'a affirmé Fenstadt : "Leibniz pensait que les infinitésimales et leur calcul pouvaient être justifiés par l'introduction d'un type *d'éléments idéaux* qui pouvaient être soit infiniment petits soit infiniment grands relativement aux nombres réels. Mais Leibniz et ses successeurs, en particulier L'Hopital, n'étaient pas à même de développer de façon consistante une analyse basée sur ces idées. L'introduction de ${}^*R$ le permet. ${}^*R$ est une extension élémentaire de $R$ qui possède les mêmes propriétés arithmétiques. La théorie évite les difficultés liées aux essais de Leibniz en distinguant avec précision ce qui est "égal" de ce qui est "infiniment voisin". Pour une infinitésimale $dx$ et un $dy$ correspondant, on a $f'(x) \simeq dy/dx$, et donc $f'(x) = st(dy/dx)$, alors que Leibniz voulait avoir $f'(x) = dy/dx$, ce qui est trop demander"(12).

Le théorème de Löwenheim-Skolem est un théorème général d'existence qui ne fournit aucun renseignement sur la structure des extensions élémentaires. Il est donc souhaitable de disposer d'une méthode générale et uniforme de *construction* de modèles N.S.. Une de celles-ci, très efficace, a été introduite par Loś en 1955. Elle est dite méthode des *ultraproduits* et des *ultrapuissances*. Elle est trop technique pour être exposée ici. Nous nous bornerons donc à en esquisser les idées directrices(13).

La méthode des ultraproduits est une méthode *sémantique* permettant de construire de nouveaux modèles à partir de modèles donnés. Soit

---

(12) Fenstadt [1968], pp.39-40

(13) Pour des précisions, cf. la bibliographie de Petitot [1979] et, par exemple, Bell-Slomson [1969].

$\mathcal{A}_i$ , $i \in I$, une famille de structures de même type. Leur produit direct $\mathcal{A}_I = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ *n'est pas* en général une structure de même type (un produit de corps, par exemple, n'est pas un corps). L'idée fondamentale de Loś est alors *d'affaiblir* la notion de validité des énoncés en la *relativisant* à un ensemble $D$ de parties de $I$. On dira qu'un énoncé $\Phi$ est $D$ *– valide* dans $\mathcal{A}_I$ (ou valide "presque partout", notation $\mathcal{A}_I \models_D \Phi$) si l'ensemble $\mathcal{U}$ des $i \in I$ tels que $\Phi$ soit valide dans $\mathcal{A}_i$ appartient à $D$: $\mathcal{U} = \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \Phi\} \in D$. On démontre alors que si $D$ possède une structure précise — dite structure de *filtre* sur $I$ — alors:

(i) la relation sur $\mathcal{A}_I$: $a = (a_i)_{i \in I} \sim b = (b_i)_{i \in I}$ si $\{i \in I \mid a_i = b_i\} \in D$, est une relation *d'équivalence*;

(ii) le quotient $\mathcal{A}_D = \mathcal{A}_I / \sim$ est une structure *de même type que les* $\mathcal{A}_i$.

Supposons alors que toutes les structures $\mathcal{A}_i$ soient des modèles d'une même théorie $\Sigma$. Le problème que s'est posé Loś était de savoir à quelles conditions la $D$ *– validité* dans $\mathcal{A}_I$ équivalait à la validité dans $\mathcal{A}_D$. Son résultat est le suivant. $D$ est un *filtre* sur I si:

(i) $\emptyset \notin D$

(ii) si $U, V \in D$ alors $U \bigcap V \in D$

(iii) si $U \subseteq V$ et si $U \in D$ alors $V \in D$

D est un *ultrafiltre* (ou filtre maximal) si de plus:

(iv) pour tout $U \subseteq I$, $U \in D$ ssi $I - U \notin D$.

THÉORÈME (Loś 1955). Si $D$ est un ultrafiltre sur $I$ alors $\mathcal{A}_D \models \Phi$ si et seulement si $\mathcal{A}_I \models_D \Phi$.

On appelle alors $\mathcal{A}_D$ l'*ultraproduit* des $\mathcal{A}_i$ relativement à $D$. Si tous les $\mathcal{A}_i$ sont égaux, $\mathcal{A}_D$ s'appelle une *ultrapuissance*. Or les énoncés $\Phi$ de $\Sigma$ sont valides dans *tous* des $\mathcal{A}_i$. Comme $I \in D$ quel que soit $D$, tout ultraproduit $\mathcal{A}_D$ est un modèle de $\Sigma$. Supposons alors tous les $\mathcal{A}_i$ égaux à une structure donnée $\mathcal{A}$ et soit $\Sigma = \mathcal{TH}(\mathcal{A})$ dans $L_{\mathcal{A}}$. Il est trivial de plonger $\mathcal{A}$ dans l'ultrapuissance $\mathcal{A}_D$ et il découle immédiatement du théorème de Loś que l'extension $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_D$ est *élémentaire*: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{A}_D$.

Cette procédure de construction d'extensions élémentaires n'est évidemment intéressante que si elle permet de construire des extensions *strictes*. Parmi les ultrafiltres il existe les ultrafiltres "triviaux" qui sont les ultrafiltres dits *principaux*, du type $D_i = \{U \subset I \mid i \in U\}$. Si $D$ est principal alors l'extension $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_D$ est un *isomorphisme* et la méthode de Loś est inefficace. Si $I$ est *fini*, tous ses ultrafiltres sont principaux. Mais si $I$ est *infini*, alors il existe des ultrafiltres sur $I$ *non* principaux qui raffinent le filtre $F_\infty = \{U \subset I \mid I - U\, fini\}$ des complémentaires des parties finies de $I$. A partir d'eux on peut construire pour les structures *infinies* des extensions élémentaires $\mathcal{A} \prec \mathcal{A}_D$ *strictes*, et donc des modèles NS de $\mathcal{TH}(\mathcal{A})$. Par exemple, soit $I = N$ et $D$ un ultrafiltre libre (i.e. non principal) sur $I$. Soit ${}^*N = N^N/D$. Un élément de ${}^*N$ est une classe d'équivalence d'applications $f : N \to N$, les éléments de $N$ correspondant aux $f$ constantes. Par une construction "diagonale", il est facile de construire un élément $\omega$ *infini* de ${}^*N$. Il suffit de prendre pour $\omega$ la classe de la fonction $f(n) = n$. D'ailleurs, comme nous l'avons rappelé au §1, Du Bois Reymond avait déjà montré au siècle dernier que les *classes de croissance* des fonctions $f : R \to R$ permettaient de construire des corps non archimédiens.

La méthode des ultraproduits permet de donner des preuves *sémantiques* très simples des théorèmes fondamentaux de la théorie des modèles. Considérons par exemple le théorème de compacité de Tarski, Scott et Morel : un ensemble (infini) d'énoncés $\Sigma$ admet un modèle ssi tout sous-ensemble fini $\Delta$ de $\Sigma$ admet un modèle. Soit $I$ l'ensemble des parties finies de $\Sigma$. Pour $\Delta \in I$, $\Delta$ admet un modèle $\mathcal{A}_\Delta$ par hypothèse. Soit $\Delta^* = \{\Delta' \in I \mid \Delta \subseteq \Delta'\}$. Les $\Delta^*$ engendrent un ultrafiltre $D$. Soit $\mathcal{A}_D$ l'ultraproduit $(\prod_{\Delta \in I} \mathcal{A}_\Delta)/\mathrm{D}$. Soit alors $\Phi$ un énoncé de $\Sigma$. $\{\Phi\} = \Delta_0 \in I$ et donc $\mathcal{A}_{\Delta_0} \models \Phi$. Par conséquent $\mathcal{A}_\Delta \models \Phi$ si $\Delta_0 \subseteq \Delta$. Donc $\Delta_0^* = \{\Delta \in I \mid \Delta_0 \subseteq \Delta\} \subseteq \{\Delta \in I \mid \mathcal{A}_\Delta \models \Phi\}$. Comme $\Delta_0^* \in D$, $\{\Delta \in I \mid \mathcal{A}_\Delta \models \Phi\} \in D$ et l'on a $\mathcal{A}_D \models \Phi$. Cela montre que $\mathcal{A}_D$ est un modèle de $\Sigma$.

On peut également montrer facilement que certaines propriétés ne sont pas du premier ordre. Supposons par exemple que pour un corps la propriété $\sigma_0$ d'être de caractéristique 0 soit du premier ordre, comme la propriété $\sigma_p$ d'être de caractéristique $p$. Soit $D$ un ultrafiltre libre sur l'ensemble $P$ des nombres premiers et soit $K$ l'ultraproduit $K = (\prod_{p \in P} K_p)/D$. $K$ est un corps. Il ne peut pas être de caractéristique $p$. En effet $U_p = \{q \in P \mid K_q \models \sigma_p\} = \{p\}$. Comme $D$ est libre, $U_p \notin D$. Comme $\sigma_p$ est du premier ordre, on ne peut pas avoir $K \models \sigma_p$. Donc $K$ est de caractéristique 0. Si $\sigma_0$ était du premier ordre on aurait $K \models \sigma_0$ et donc $\prod_{p \in P} K_p \models_D \sigma_0$. Contradiction.

Mentionnons enfin un résultat de Keisler qui montre que les ultraproduits sont bien adaptés à l'étude de l'écart syntaxe/sémantique dans les théories du premier ordre : deux structures de même type sont élémentairement équivalentes ssi elles possèdent des ultrapuissances isomorphes.

### 4. Les univers non réguliers et la dialectique interne/externe

La considération de modèles NS de $R$ permet de satisfaire aux contraintes (a) et (c). Reste à satisfaire à la contrainte (b). Si ${}^*R$ est un modèle NS de $R$ et si $f$ est une fonction définie sur $R$ rien n'assure a priori que l'on puisse prolonger $f$ à ${}^*R$. Or cela est nécessaire pour pouvoir calculer "dans le style de Leibniz".

Pour que les entités ensemblistes construites ou dérivables à partir de $R$ (sous-ensembles, ensembles de sous-ensembles, fonctions, familles de fonctions, etc.) soient *automatiquement et canoniquement* prolongeables à $^*R$, on considère *l'univers* $\mathcal{U}$ de base $R$ c'est-à-dire la classe, hiérarchisée en types, de *toutes* les entités ensemblistes dérivables de $R$. Pour parler de $\mathcal{U}$ on utilise une logique des prédicats qui respecte la hiérarchie des types. On obtient ainsi la théorie *d'ordre supérieur* de $R$. Mais nous rencontrons ici une difficulté. Aux ordres supérieurs, le théorème de complétude de Gödel n'est plus valide (théorème d'incomplétude de Gödel, 1931). Il en va de même du théorème de Löwenheim-Skolem. Toutefois l'on peut, en remarquant que la logique d'ordre supérieur pour $R$ est une logique hiérarchisée du premier ordre pour $\mathcal{U}$, montrer que le théorème de Löwenheim-Skolem est généralisable à $\mathcal{U}$ et considérer des extensions élémentaires $^*\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$. Il s'agit de concilier ces deux points de vue apparemment contradictoires. La réponse est la suivante. Elle fournit la clef de l'ANS.

Soit $^*\mathcal{U}$ un modèle NS de l'univers $\mathcal{U}$ de base $R$. $^*\mathcal{U}$ est un univers de base $^*R$. Mais alors que $\mathcal{U}$ est l'univers *complet* de base $R$ (c'est-à-dire constitué par la classe de *toutes* les entités dérivables de $R$) *il n'en va pas de même pour* $^*\mathcal{U}$ : $^*\mathcal{U}$ *n'est pas* l'univers complet de base $^*R$.

Plus précisément, considérons la relation d'appartenance $\in$ de $\mathcal{U}$. Elle se prolonge en une relation $^*\in$ de $^*\mathcal{U}$. $^*\mathcal{U}$ étant un sous-univers de l'univers de la théorie des ensembles envisagée, on peut y considérer aussi la relation d'appartenance $\in$. Mais les relations $\in$ et $^*\in$ *ne coïncident pas* : $^*\mathcal{U}$ ne comprend pas *tous* les sous-ensembles des ensembles qui le constituent. On dit que c'est un modèle *non régulier* au sens de Henkin.

Henkin a introduit cette notion vers la fin des années 40 pour éclairer le théorème d'incomplétude de Gödel. Ce théorème dit que pour les théories d'ordre supérieur des structures infinies la notion sémantique de validité est strictement plus large que celle, syntaxique, de dérivabilité : il existe des énoncés valides non démontrables. Pour retrouver la complétude il faut donc rendre plus contraignante la notion de validité et pour cela élargir la notion de modèle. Or Henkin remarqua que tous les modèles considérés étaient implicitement supposés "réguliers" c'est-à-dire "complets" pour la relation hiérarchique d'appartenance. Et en s'autorisant la considération de modèles non réguliers "incomplets" il montra que l'on retrouvait l'adéquation syntaxe-sémantique du théorème de complétude.

Le fait que $^*\mathcal{U}$ soit *non* régulier conduit à distinguer dans $^*\mathcal{U}$ les entités *internes* (qui sont celles obtenues par extension de $\mathcal{U}$ à $^*\mathcal{U}$)[14] et les entités *externes* (qui sont tous les sous-ensembles non internes des ensembles de

---

(14) Si l'on appelle *standard* les entités de $\mathcal{U}$ (considérées comme entités de $^*\mathcal{U}$) alors il est clair que les entités standard sont nécessairement des entités internes.

$^*\mathcal{U}$). Cette distinction permet de formuler simplement le "principe" de quantification dans les univers NS : tout énoncé de $\mathcal{U}$ est valide dans $^*\mathcal{U}$ *à condition d'y restreindre les quantifications aux seules entités internes.*

Le respect de ce principe permet d'éviter de nombreux paradoxes apparents. Soit par exemple $^*N$ le modèle NS de $N$ dans $^*\mathcal{U}$. Dans $\mathcal{U}$ l'énoncé (E) : "tout sous-ensemble de $N$ admet un plus petit élément" est valide. Par transfert à $^*\mathcal{U}$, cet énoncé devient valide dans $^*\mathcal{U}$. Pourtant il est clair que l'ensemble $^*N_\infty = {}^*N - N$ des entiers "infinis" de $^*N$ ne saurait posséder de plus petit élément. Il n'y a là aucun paradoxe. Interprété dans $^*\mathcal{U}$, (E) signifie : "tout sous-ensemble *interne* de $^*N$ admet un plus petit élément". Si $^*N_\infty$ ne satisfait pas (E) c'est donc que c'est un sous-ensemble *externe.*

Les univers NS les plus intéressants sont ceux appelés "enlargements" par A. Robinson. Considérons sur $R$ la relation binaire qu'est la relation d'ordre $x < y$. Elle possède la propriété suivante : si elle admet une "solution" pour un nombre fini d'éléments de son domaine i.e. si étant donnés $x_1, ..., x_n$ il existe $y_1, ..., y_n$ tels que $x_1 < y_1, ..., x_n < y_n$, alors elle admet une "solution" *commune* i.e. il existe $y$ tel que $x_1 < y, ..., x_n < y$. Dire qu'il existe dans $^*R$ des nombres "infinis" signifie que la relation $<$ admet dans $^*R$ une "solution" commune à *tous* les éléments de son domaine standard : $\exists y \in {}^*R\ \forall x \in R\ (x < y)$. Autrement dit, la relation d'ordre qui est sans maximum dans $R$ admet un maximum dans $^*R$.

Pour généraliser cette situation on dira qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ de $\mathcal{U}$ de domaine $D_\mathcal{R}$ et de codomaine $D'_\mathcal{R}$ est *concurrente* si pour tout ensemble fini $x_1, ..., x_n$ d'éléments du domaine $D_\mathcal{R}$ il existe un élément du codomaine $D'_\mathcal{R}$ satisfaisant $\mathcal{R}(x_1, y), ..., R(x_n, y)$. Et on dira qu'une extension élémentaire $^*\mathcal{U}$ d'un univers $\mathcal{U}$ est un "élargissement" si pour *toute* relation concurrente $\mathcal{R}$ de $\mathcal{U}$, il existe un élément $y$ de $^*D'_\mathcal{R}$ tel que $\mathcal{R}(x, y)$ soit valide pour *tout* élément de $D_\mathcal{R}$. On peut montrer (en utilisant par exemple la méthode des ultraproduits) que tout univers admet des élargissements.

### 5. Analyse classique et Analyse non standard

A partir de ces résultats généraux de théorie des modèles, Robinson, Luxemburg et leurs écoles ont montré comment l'analyse classique pouvait être reformulée dans le "style de Leibniz". En principe, cette reformulation ne saurait apporter de résultats vraiment nouveaux. Un métathéorème de Kreisel affirme en effet que l'analyse N.S. est une extension inessentielle de l'analyse classique : tout théorème de l'analyse démontré par des méthodes N.S. est démontrable directement. Mais en fait la reformulation N.S. de l'analyse possède une grande vertu simplificatrice et une grande valeur heuristique.

Soit $^*R$ le modèle N.S. de $R$ dans l'élargissement $^*\mathcal{U}$ de $\mathcal{U}$. Les infinitésimales de $^*R$ forment un idéal externe $\mu$ appelé par Robinson, en hommage à Leibniz, la *monade* de $R$ en 0. On dit également que $\mu$ est le *halo* de 0. Le symbole $dx$ n'est que le $\epsilon$-terme associé à $\mu$: $dx = \epsilon_x(x \in (\mu - \{0\})$. Dans $R$, $\mu - \{0\}$ est vide et $dx$ est donc un terme-zéro.

La distance $d$ de $R$ se prolonge à $^*R$ où elle devient une distance à valeurs dans $^*R$. La relation $x \simeq y$ ($x$ et $y$ sont infiniment voisins) définie par $x \simeq y$ si $d(x, y) \in \mu$ est une relation d'équivalence sur $^*R$ associée à la monade $\mu$. Soit $^*R_f$ (resp. $^*R_\infty$) l'ensemble des nombres finis (resp. infinis) de $^*R$. $^*R$ se compose de $^*R_\infty$ et de l'anneau $^*R_f$ dont le quotient par l'idéal $\mu$ est isomorphe à $R$.

La structure de $^*N$, ensemble des entiers naturels de $^*R$, est bien celle découverte par Veronese. Sur $^*R$ la relation $a \sim b$ ssi $\mid a - b \mid \in N$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont les entiers *comparables entre eux* (commensurables, i.e. de même échelle). Soit $G_a = classe(a)$. $G_a$ s'appelle la *galaxie* de $a$. Si $a \in {}^*N - N$, alors $G_a$ a le type d'ordre $\omega^* + \omega$ de $Z$ (si $a \in N$, $G_a = N$ a le type d'ordre $\omega$) et donc le type d'ordre de $^*R$ est $\alpha = \omega + (\omega^* + \omega)\theta$. D'après un théorème de Henkin et Kemeny, $\theta$ est dense sans premier ni dernier élément (i.e. $^*N$ comprend une infinité dense *d'échelles*). Ce que savait déjà Veronese.

Remarquons également que $R$ peut s'obtenir *à partir de* $^*Q$. En effet les coupures de $Q$ sont remplies dans $^*Q$. $^*Q_f$ est un anneau possédant $\mu$ comme idéal et l'on a $^*Q_f/\mu \simeq R$. La raison en est que $Q$ y est dense. Or $R$ est le seul corps ordonné complet dans lequel $Q$ soit dense.

Les définitions de base de l'analyse classique se simplifient considérablement si l'on fait usage de $^*R$. Soit par exemple $f$ une fonction de $R$ dans $R$. Par construction de $^*\mathcal{U}$, elle se prolonge automatiquement et canoniquement en une fonction (toujours notée $f$) de $^*R$ dans $^*R$. Dire que $f$ est continue sur $R$ signifie alors que $f$ respecte la relation d' équivalence $x \simeq x_0$ pour $x_0 \in R$: si $x \simeq x_0$ alors $f(x) \simeq f(x_0)$, autrement dit $\forall x \in R\, f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x))$. De même, dire que $f$ est uniformément continue signifie qu'elle respecte la relation d'équivalence $\simeq$ partout: si $x$, $y \in {}^*R$ et si $x \simeq y$ alors $f(x) \simeq f(y)$, autrement dit $\forall x \in {}^*R\ f(\mu(x)) \subseteq \mu(f(x))$. De même, on montre que $f$ (continue) est *dérivable* en $x_0 \in R$ si tous les quotients $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ avec $x \in \mu(x_0)$ ont *même* partie standard, i.e. $f'(x_0) = st(\frac{df}{dx})$. Ici $dx$ est l'$\epsilon$-terme associé à $\mu(x_0)$.

Toutes ces reformulations N.S. se prolongent à la topologie générale et à l'analyse fonctionnelle et y fournissent de précieux outils. Considérons par exemple un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. $\mathcal{T}$ est un ensemble de parties de $X$, l'ensemble des *ouverts*. Soit $^*\mathcal{T}$ son extension N.S.. Soit alors $x \in X$ et $\mathcal{F}_x$

le filtre des voisinages ouverts de $x$. Si la topologie $\mathcal{T}$ est "intéressante", $\mathcal{F}_x$ ne possède pas de plus petit élément (ce qui est une autre façon de dire que le concept de limite est fondamental). Pourtant, on voudrait pouvoir parler en termes de points "infiniment voisins" de $x$. Cela est possible dans ${}^*\mathcal{T}$. Appelons en effet *monade* $\mu(x)$ de $x \in X$ l'intersection des ${}^*U$ pour $U \in \mathcal{F}_x$: $\mu(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}_x} {}^*U$. Si ${}^*X$ est un élargissement, on peut montrer (lemme fondamental) qu'il existe un ouvert $V \in {}^*\mathcal{T}$ tel que $x \in V \subset \mu(x)$. V est un "voisinage ouvert infinitésimal" de $x$ et donc $\mu(x)$ est un voisinage infinitésimal de $x$. Son usage simplifie considérablement les définitions standard de la topologie générale. Par exemple:

— $U \subset X$ est ouvert ssi ${}^*U$ contient les monades de chacun de ses points: pour tout $x \in U$, $\mu(x) \subset {}^*U$.

— $F \subset X$ est donc fermé si pour tout $x \notin F$, $\mu(x) \cap {}^*F = \emptyset$.

— Si $A \subset X$, $x$ est adhérent à $A$ ssi $\mu(x) \cap {}^*A \neq \emptyset$.

— $\mathcal{T}$ est séparée ssi pour tous points différents $x \neq y$, les monades $\mu(x)$ et $\mu(y)$ sont disjointes.

— $x \in X$ est isolé pour $\mathcal{T}$ ssi $\mu(x)$ est un ensemble interne.

— Appelons quasi-standard (q.s.) tout point $y \in {}^*X$ qui appartient à la monade $\mu(x)$ d'un point standard $x \in X$. L'ensemble ${}^*X_{q.s.}$ des points q.s. de ${}^*X$ est donc la réunion $\bigcup_{x \in X} \mu(x)$ des monades de $X$. $(X, \mathcal{T})$ est *compact* ssi ${}^*X = {}^*X_{q.s.}$.

— Si $f$ est une application $f : X \to Y$, sa localisation en $x \in X$ — son "germe" en $x$ — peut être définie comme la restriction ${}^*f\,|_{\mu(x)}$.

— Etc.

## 6. L'approche syntaxique d'Edward Nelson

Dans l'approche de Robinson, on travaille sur une extension élémentaire et donc sur *deux modèles*. La syntaxe utilisée est celle habituelle, mais elle opère sur deux structures indiscernables. La méthode est sémantique. L'idée de Nelson a été de ne garder que le modèle standard $R$ mais d'y opérer avec une syntaxe *enrichie* comprenant le prédicat *st* et des axiomes en régissant l'emploi. La méthode est donc syntaxique. Les axiomes y codifient les techniques de démonstration de l'ANS à la Robinson.

Dans son *Internal Set Theory* (IST), Nelson adjoint à ZFC les trois schémas:

(T) Principe de *transfert*: $\forall^{st} x\, A(x) \;\Rightarrow\; \forall x\, A(x)$ i.e. $\exists x\, \tilde{A}(x) \;\Rightarrow\; \exists^{st} x\, \tilde{A}(x)$ (où $A$ est une formule interne ne contenant pas de paramètre standard et où $\forall^{st}$ signifie $\forall x$ (x standard $\Rightarrow$ .)).

(I) Principe d'*idéalisation*: soit $B(x, y)$ une relation *interne*.

$\forall^{st fini} z\, \exists x\, \forall (y \in z)\, B(x, y) \Leftrightarrow \exists x\, \forall^{st} y\, B(x, y)$

i.e. si $B$ peut être simultanément satisfaite par les $y$ de chaque $z$ standard fini alors elle peut l'être par tous les $y$ standard.

(S) Principe de *standardisation*. Soit $C(z)$ une formule quelconque (éventuellement externe).

$\forall^{st}x\,\exists^{st}y\,\forall^{st}z\,(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge C(z))$

i.e. si l'on se donne $x$ standard, on peut construire un sous-ensemble *standard* $y$ de $x$ dont les éléments *standard* $z$ sont exactement les éléments standard de $x$ satisfaisant $C$ ($y$ *n'est pas* le sous-ensemble des $z$ standard de $x$ satisfaisant $C$).

Soit alors $R$ le modèle *standard* construit dans ZFC. On peut facilement y définir des infinitésimales en posant que $x \neq 0$ est infinitésimal si $\forall^{st}\epsilon > 0 \mid x \mid \leq \epsilon$. La restriction de la quantification aux éléments standard rend la définition consistante. De même, on dira que $x$ est limité, c'est-à-dire fini relativement à l'échelle des réels standard, si $\exists^{st}r > 0\,(\mid x \mid \leq r)$.

Pour Nelson, les ensembles externes sont "illégaux". Ce sont des collections qui *ne sont pas* des ensembles. Cela tient au fait que IST ne travaille que dans *un seul* modèle. Mais avec un tel point de vue syntaxique, on peut néanmoins retrouver sémantiquement l'ANS. Il suffit de considérer un *modèle* $\mathcal{M}$ (dans un univers $\mathcal{U}$ de ZFC) de la théorie axiomatique IST. $\mathcal{M}$ consistera en un ensemble $\mathcal{J}$ (au sens de $\mathcal{U}$) d'entités *internes*, un ensemble $\mathcal{I}$ d'entités st et d'une relation $\in$ entre $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}$ interprétant la relation $\in$ de IST. Il ne faut pas confondre $\in$ et la relation d'appartenance dans $\mathcal{U}$ que l'on notera $\underline{\in}$. On interprète alors $x\ st$ par $x\underline{\in}\mathcal{I}$. Soit $x\underline{\in}\mathcal{J}$ une entité *interne*. On note ${}^*x = \{y\underline{\in}\mathcal{J} \mid y \in x\}$ i.e. $y\underline{\in}{}^*x \Leftrightarrow y \in x$. Les ${}^*x$ sont les ensembles internes du modèle, et les ensembles qui ne sont pas du type ${}^*x$ sont donc les ensembles *externes* (qui cette fois existent).

Soit alors ${}^*R$ le modèle de $R$ dans $\mathcal{M}$. On définit $R = \{x\underline{\in}{}^*R \mid x\ st\}$ et l'on obtient *dans* $\mathcal{M}$ une extension élémentaire $R \prec {}^*R$ à la Robinson. Cela montre bien qu'IST est un moyen d'exprimer *syntaxiquement* l'ANS.

Une telle résorption dans $R$ de la relativité fini/infini peut conduire dans un premier temps à des résultats apparemment contre-intuitifs. Par exemple, il existe un ensemble $F$ *fini* (non st) qui contient tous les ensembles *standard*. En effet, soit $B(F,x)$ le relation $x \in F \wedge F\ fini$. Elle est interne. Appliquons (I):

$\forall^{st\,fini}z\,\exists F\,\forall(x \in z)\,(x \in F \wedge F\,\text{fini}) \Leftrightarrow \exists F\,\forall^{st}x\,(x \in F \wedge F\,\text{fini})$

La formule de gauche est évidente. On n'a qu'à y prendre $F = z$. S'il n'y a pas de paradoxe c'est parce que la formule interne $x \in F$ contient le paramètre non st $F$. Sinon, d'après (T), on aurait $\forall^{st}x(x \in F) \Rightarrow \forall x(x \in F)$ ce qui serait absurde. On démontre également, et c'est essentiel, que si $X$ est *infini* alors il comprend un élément $x$ *non standard*. Comme le dit Salanskis: ces éléments non standard "sont les "témoins" de l'infinité des ensembles infinis de ZFC à l'intérieur de ceux-ci", ou encore la trace de *l'écart* irréductible entre théorie et objet[15].

---

[15] Salanskis [1986]

**7. La relativité fini/infini et la controverse formalisme/intuitionnisme**

L'intérêt philosophique et épistémologique principal de l'A.N.S. est peut-être de permettre de comprendre pourquoi "les règles du fini réussissent dans l'infini" et d'éclairer d'un jour nouveau les généralisations au cas "infini" de théories élémentaires dans le cas "fini". Citons un simple exemple[16]. Considérons la théorie de Fourier classique c'est-à-dire l'étude de la décomposition en série trigonométrique d'une fonction périodique définie sur le cercle $T$ des nombres réels modulo $2\pi$. Dans le cas fini c'est-à-dire lorsqu'on remplace $T$ par un polygône régulier i..e. par l'ensemble fini $T_p = \{0, \frac{2\pi}{p}, ..., \frac{2\pi(p-1)}{p}\}(p \in N)$, cette théorie devient triviale. Mais $T_p$ est une approximation déplorable de $T$. Il n'en va pas de même par passage à un univers NS. Soit $^*\mathcal{U}$ un élargissement de $\mathcal{U}$. Soit $^*T$ l'extension de $T$ dans $^*\mathcal{U}$ et soit $\omega$ un entier N.S. "infini" assez grand c'est-à-dire divisible par *tous* les entiers $n \in N$ (il en existe). Par transfert, la théorie finie (triviale) est valide pour $^*T_\omega$. Mais $\omega$ étant assez grand, $^*T_\omega$ est une parfaite approximation de $T$. Plus précisément, $T$ n'est rien d'autre que la *partie standard* de $^*T_\omega$. Pour trouver la décomposition de $f$ en série de Fourier, on considèrera donc son extension $^*f$ à $^*T$, puis la restriction $^*f_\omega$ de $^*f$ à $^*T_\omega$ et on prendra les parties standard.

Il s'agit là d'une stratégie générale: pour passer du fini à l'infini (continu) on passe par transfert du fini à un $^*$-fini bien choisi et on prend les parties standard.

Dans IST, cette stratégie se trouve internalisée dans un modèle unique. L'internalisation dans $N$, $Z$ ou $R$ de la relativité fini/infini, qui, chez Robinson, s'exprime à travers l'usage d'extensions élémentaires, conduit en fait à opposer un fini "concrètement accessible" (par exemple informatiquement) à un fini "inaccessible". L'opposition entre un fini "naïf" concret et un fini "idéal" se substitue donc à celle, robinsonienne, entre fini et $^*$-fini (ou hyperfini). Comme le soulignent G. Reeb et J. Harthong, la différence st/ non st est "un schéma théorique simplifié des rapports arithmétiques entre les entiers naïfs et les entiers idéaux"[17]. Du coup, le fini mathématique (qui, lorsqu'il est idéal, joue le rôle d'un hyperfini par rapport au fini naïf) suffit à fonder l'analyse qui devient quasi-arithmétique. Ainsi que l'affirme Harthong: "toute la théorie du continu (calcul différentiel et intégral, géométrie, équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, distributions, analyse complexe, etc.) est contenue dans l'analyse combinatoire classique"[18]

---

(16) Nous renvoyons pour plus de détails à notre article *Infinitesimale* dans l'Encyclopédie Einaudi et, surtout, à sa bibliographie.

(17) Harthong-Reeb [1986]

(18) Harthong [1983]. Evidemment, toutes les difficultés propres à l'analyse classique se

Un tel point de vue permet de reprendre sur de nouvelles bases le programme formaliste de Hilbert en contournant les limitations imposées par le théorème d'incomplétude de Gödel. Cela est essentiel sur le plan de la philosophie des mathématiques. Comme Pierre Cartier y a insisté, l'on peut considérer que l'ANS approche tous les problèmes de l'analyse à partir de modèles (hyper)finis en fournissant d'excellentes *approximations*. L'idée est donc en définitive de *modéliser* théoriquement et adéquatement — dans une optique strictement *constructiviste*, au sens *intuitionniste* du terme — la "réalité" de l'analyse. Il y a là, semble-t-il, une remarquable revanche posthume d'un certain brouwerisme sur le formalisme hilbertien. Avec G. Reeb et J. Harthong, on supposera qu'il existe une "réalité" mathématique "extérieure" — une réalité "observable", étrangère aux théories et de nature constructive — qui doit être modélisée, au même titre que la "réalité" physique. La mathématique formelle doit dans ce cas être considérée comme une *interprétation théorique* tentant de l'approximer au mieux de façon déductive. Et le formalisme apparaît alors comme une "idéologie" — il vaudrait mieux dire, comme un dogmatisme métaphysique — identifiant théorie et réalité et déniant donc tout contenu sémantique objectif aux mathématiques. Par contraste, la méthode constructiviste de l'intuitionnisme apparaît comme la "méthode expérimentale" qui serait propre aux mathématiques conçues comme des sciences d'objets[19].

Il semble légitime de dénoncer ainsi dans la doctrine formaliste (ou du moins dans sa version logiciste) qui a dominé les mathématiques de ce siècle le retour à une conception dogmatique (voire scholastique) de la vérité (la non contradiction i.e. la consistance ou "la compossibilité des essences" comme critère d'existence conformément au théorème de complétude). Cette volonté d'autofondation a certes tendance à sous-estimer la transcendance objective des contenus sémantiques mathématiques (de leurs "contenus formels" au sens de G.G. Granger) au profit de la législation et de la légalisation syntaxiques des théories. Mais il ne va pas pour autant de soi que cette transcendance objective se réduise à celle, constructive, expérimentale et observable, des algorithmes effectifs informatiquement implémentables. Selon nous, elle est celle des *idéalités* mathématiques, au sens développé par J.T. Desanti à la suite de Cavaillès. Le débat sur le platonisme — et, en particulier, sur l'alternative "dogmatisme formaliste"/"constructivisme intuitionniste" — ne peut que rester obscur tant qu'on ne tire pas toutes les conséquences du fait que les idéalités mathématiques sont *des objets intentionnels corrélatifs* (au sens

---

retrouvent lorsqu'il s'agit de trouver les parties standard des entités combinatoirement construites.

(19) Harthong-Reeb [1986]

de l'a priori husserlien de la corrélation noèse/noème) des actes syntaxiques qui en règlent les théories. A ce titre elles sont bien dotées d'une transcendance objective, mais leur transcendance est *fondée dans l'immanence des actes*[21]. Elle n'est ni celle d'idées platoniciennes, ni celle de structures concrètes finitairement accessibles. Le problème que met bien en lumière le débat réactivé par l'ANS est l'écart qui existe entre de tels sens "noématiques" et les intuitions pures susceptibles de les "remplir". Mais il s'agit là d'une vaste question qui déborde le cadre de ces rappels pédagogiques.

(21) Sur ce point, cf. Petitot [1987]

## BIBLIOGRAPHIE

**d'Alembert, J.B.** 1754-1765 : Articles "Différentiel" et "Limite", *Encyclopédie*, vol. IV, pp.985-89 et vol. IX, p.542.

**ANS 1986** : *L'Analyse non standard : recherches historiques et philosophiques*, publication de l'E.R. n° 265 du CNRS, Strasbourg (1986, I.R.M.A.).

**Bell, J.L., et Slomson, A.B.** 1969 : *Models and Ultraproducts*, North-Holland, Amsterdam.

**Berkeley, G.** 1734 : *The Analyst*, Tonson, Londres

**Cantor, G.** 1883 : Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, *Mathematische Annalen*, XXI, pp. 545-91.

**Cartier, P.** 1986 : Was sind und was sollen die Zahlen ?, ANS 1986, 19-46 (repris dans ce volume, p. 331)

**Fraenkel, A.A.** 1928 : *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin.

**Giorello, G.** 1985 : *Lo Spettro e il Libertino*, Mondadori, Milano.

**Harthong, J.** 1983 : Eléments pour une théorie du Continu, *Astérique*, 109-110, p.235-244 (repris dans ANS 1986 et dans ce volume, p. 307.)

**Harthong, J., et Reeb, G.** 1986 : Intuitionnisme 84, ANS 1986, 85-123. (repris dans ce volume, p. 211.)

**Keisler, H.J.** 1965 : A survey of Ultraproducts, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, (Y. Bar-Hillel ed.), North- Holland, Amsterdam.

**Kreisel, G.** 1969 : Axiomatizations of Non-standard Analysis that are Conservative Extensions of Formal Systems for Classical Standard Analysis, In Luxemburg [1969] pp.93-106.

**Leibniz, G.W.** 1701 : Mémoire de M. Leibniz touchant son sentiment sur le calcul différentiel, *Mathematische Schriften*, V, Olms, Berlin (1962).

**Loś, J.** 1955 : Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres, in *Mathematical Interpretation of Formal Systems*, 98-113, North-Holland, Amsterdam.

**Luxemburg, W.A.J. (ed.)** 1969 : *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, New-York.

**Luxemburg, W.A.J.** 1972 : A non standard analysis approach to Fourier analysis, in Luxemburg-Robinson [1972], pp.15-39.

**Luxemburg, W.A.J. et Robinson, A. (éds.)** 1972: *Contributions to Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam.

**Machover, U. et Hirschfeld, J.** 1969: *Lectures on Non-standard Analysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York.

**Nelson, E.** 1977: Internal Set Theory: a new approach to Non-standard Analysis, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83, 6, 1165-1198.

**Peiffer, R.** 1986: Natorp, Veronese et l'infini relatif, ANS 1986, 127-163. (repris dans ce volume, p.117.)

**Petitot, J.** 1979: Article "Infinitésimale", *Encyclopedia Einaudi*, VII, 443-521, Einaudi, Turin.

**Petitot, J.** 1987: Refaire le "Timée". Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman, *Revue d'histoire des sciences*, XL/1, 79-115.

**Robinson, A.** 1963: *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, North-Holland, Amsterdam.

**Robinson, A.** 1966: *Non standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam.

**Salanskis, J.M.** 1986: *Le Continu et le Discret*, Thèse, Université de Strasbourg.